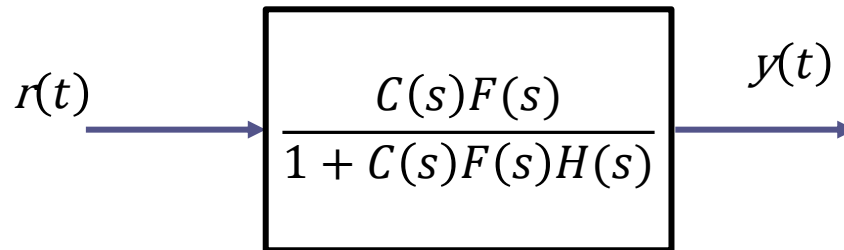


Controlli automatici

Sistemi dinamici elementari

Ing. Alessandro Pisano
`pisano@diee.unica.it`

Ripartiamo dalla FdT a ciclo chiuso fra set point e uscita in un sistema di controllo



Sicuramente il controllore $C(s)$ sarà scelto in modo da rendere asintoticamente stabile tale FdT

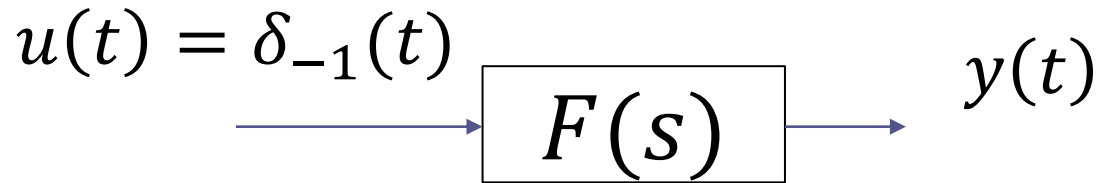
In particolare, stante il fatto che set-point costanti, o costanti a tratti, sono largamente impiegati nei sistemi di regolazione, ci interessa indagare le caratteristiche della **risposta al gradino** di FdT asintoticamente stabili al variare della posizione dei poli e degli zeri.

Risposta al gradino delle FdT elementari

La **risposta al gradino** è una delle caratteristiche maggiormente significative di un sistema dinamico. Essa infatti ne “cattura” le principali dinamiche, ed una chiara comprensione di come le sue caratteristiche siano influenzate dai parametri del sistema (guadagno, poli e zeri) è di grande rilevanza nell’ambito della analisi e della progettazione dei sistemi di controllo

In questa sede analizziamo le risposte al gradino di “semplici” FdT (FdT elementari) **asintoticamente stabili**, illustrando nel contempo alcuni concetti grazie ai quali desumere le principali caratteristiche della risposta al gradino di processi aventi una struttura più complicata.

Risposta al gradino unitario



Dalla definizione di FdT:

$$Y(s) = F(s)U(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Si ha pertanto, antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

Ricordiamo che:

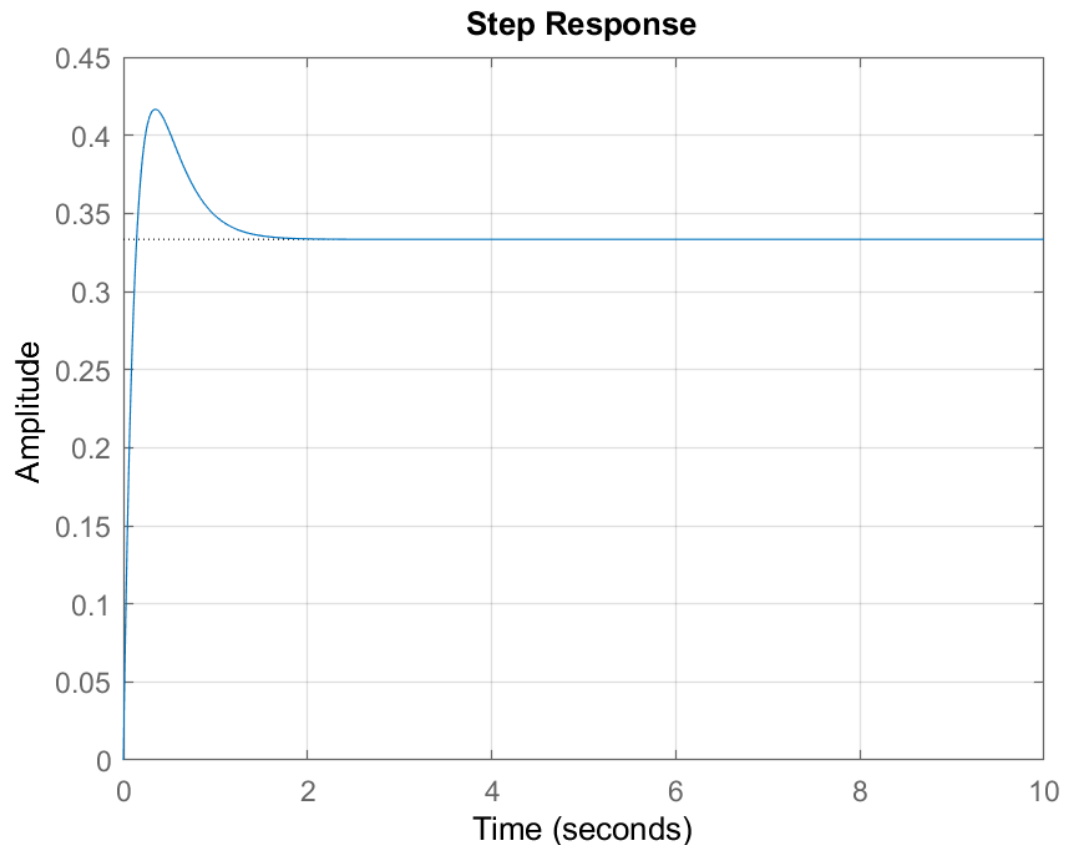
La risposta al gradino unitario di un sistema asintoticamente stabile (cioè un sistema con tutti i poli strettamente contenuti nel semipiano sinistro) tende asintoticamente al valore del guadagno statico

$$F(s) = \frac{4(s+2)}{(s+4)(s+6)}$$

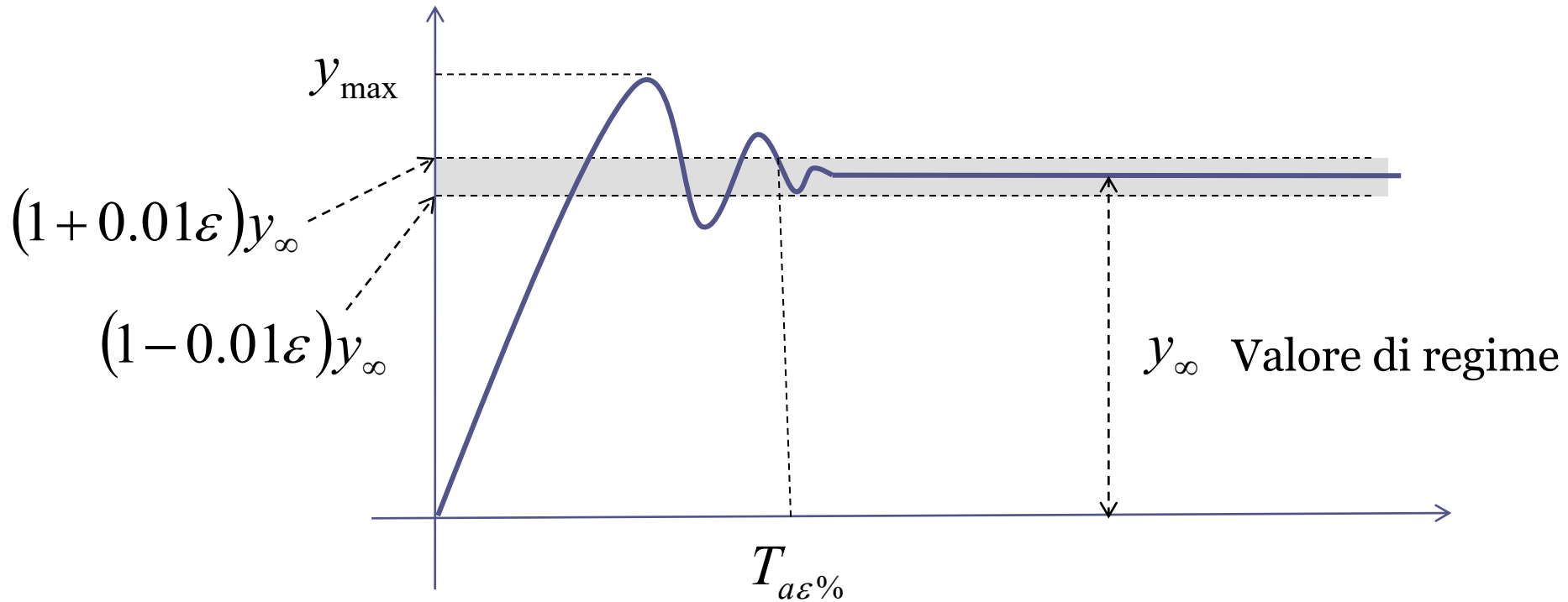
$$\mu = F(0) = \frac{8}{24} \cong 0.33$$

**Come mai la risposta transitoria presenta tale andamento ?
Lo si poteva in qualche modo prevedere ?**

```
s=tf('s');
F=4*(s+2)/((s+4)*(s+6));
step(F,0:.01:10),grid
```



Parametri significativi della risposta al gradino di sistemi LTI **asintoticamente stabili**

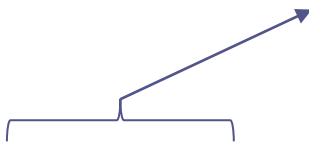


$$S_{\%} = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \quad \text{Sovraelongazione percentuale}$$

$$T_{a\epsilon\%} \quad \text{Tempo di assestamento all' } \epsilon \% \quad (\epsilon=1,2,5)$$

*Sistemi as. stabili con poli e zeri **reali***

Termini «binomi»

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$


τ_i T_i

Costanti di tempo degli zeri / dei poli

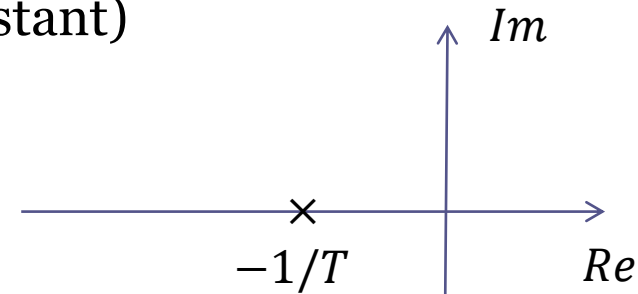
μ

Guadagno statico (DC gain)

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Sistema «STC» (single time constant)

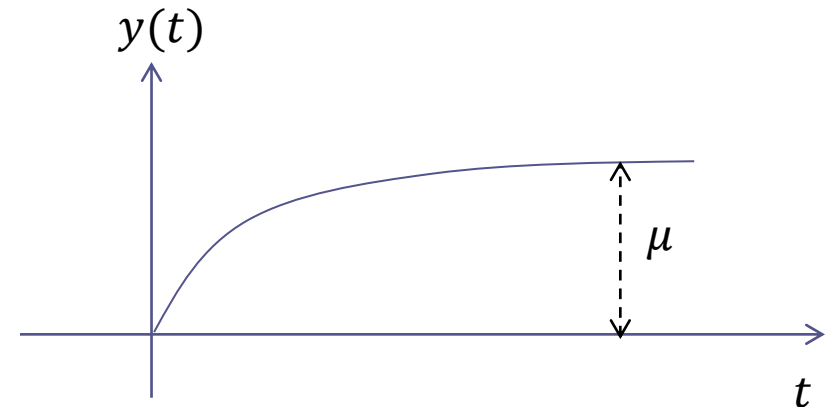
Sistema del primo ordine con un solo polo (reale negativo) e nessuno zero.



$$T\dot{y}(t) + y(t) = \mu u(t) \quad u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(0^+) = \frac{\mu}{T}$$



La risposta al gradino ha un andamento **monotono crescente**

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo T.

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Espressione analitica
(lievemente
approssimata) dei tempi
di assestamento

$$T_{a5\%}$$

$$3T$$

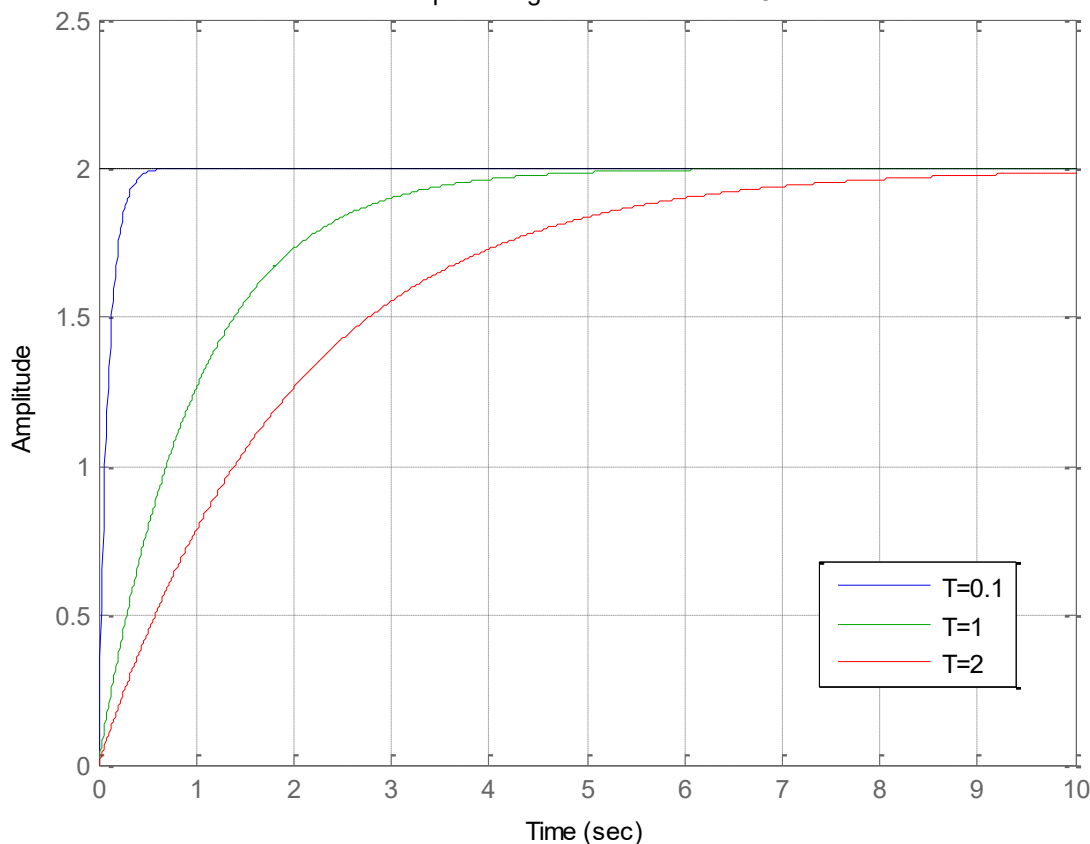
$$T_{a2\%}$$

$$3.9T$$

$$T_{a1\%}$$

$$4.6T$$

Risposta al gradino di sistemi STC



$$\mu = 2$$

$$T = 0.1s$$

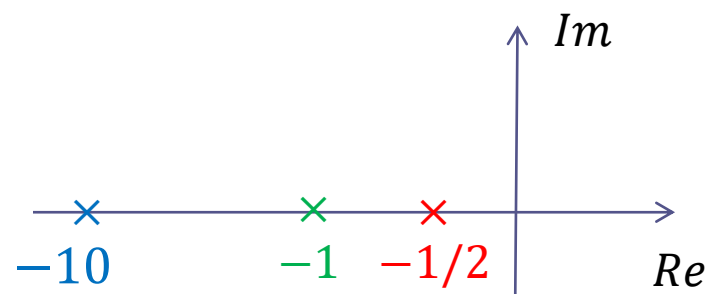
polo in -10

$$T = 1s$$

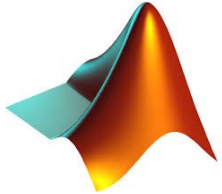
polo in -1

$$T = 2s$$

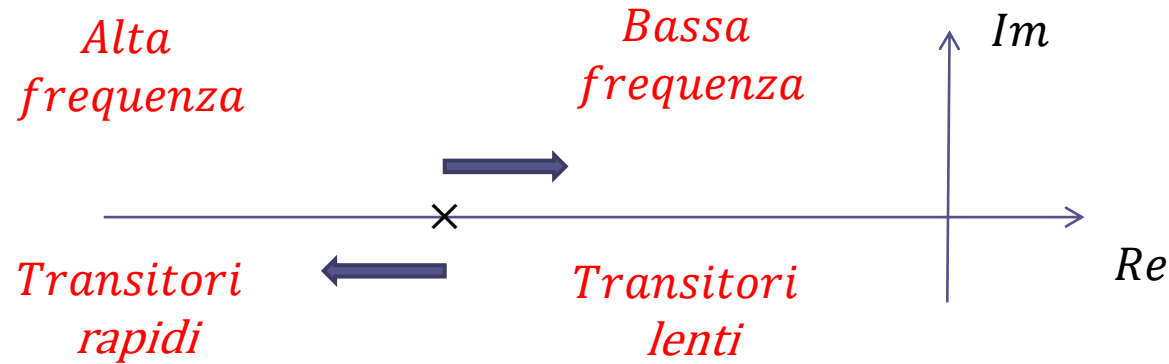
polo in $-1/2$



Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T1=0.1;  
T2=1;  
T3=2;  
  
S4=tf(mu,[T1 1]);  
S5=tf(mu,[T2 1]);  
S6=tf(mu,[T3 1]);  
  
step(S4,S5,S6,[0:0.01:10]),grid,  
axis([0 10 0 2.5])  
legend('T=0.1','T=1','T=2')  
title('Risposta al gradino di sistemi STC')
```



Se il polo si **sposta verso sinistra** (o, come si dice in gergo, «più in **alta frequenza**») la risposta si **velocizza**. Attenzione al fatto che se il polo si sposta più in alta frequenza la costante di tempo rimpicciolisce.

Dualmente, se il polo si sposta verso destra, («più in bassa frequenza») la risposta viene rallentata. Se il polo si sposta più in bassa frequenza la relativa costante di tempo aumenta.

Poli in bassa frequenza



Tempi di risposta lenti

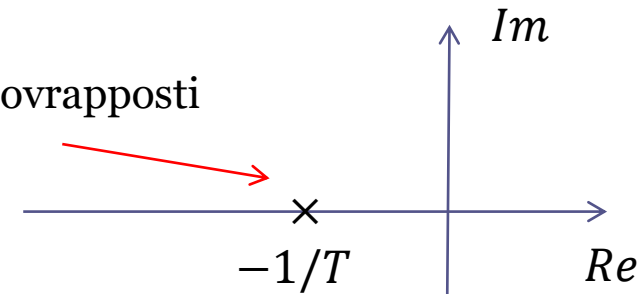
Poli in alta frequenza



Tempi di risposta rapidi

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} = \frac{\mu}{T^2 s^2 + 2Ts + 1}$$

Due poli sovrapposti

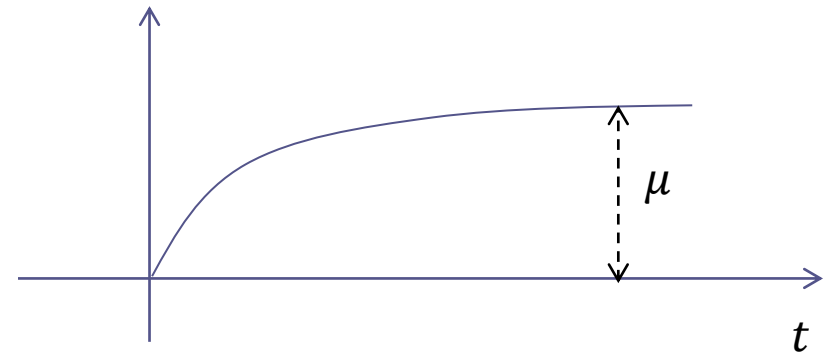


Sistema con due poli reali negativi **coincidenti**

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2T \dot{y}(t) + y(t) = \mu \delta_{-1}(t)$$

Soluzione in forma chiusa

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



La risposta al gradino ha ancora un andamento **monotono crescente**

La rapidità di convergenza verso il valore di regime dipende dal valore della costante di tempo T

I valori dei tempi di assestamento sono ancora determinabili in forma chiusa in funzione di T , e risultano essere **maggiori rispetto al caso precedente del sistema STC**

$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
------------	------------	------------

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

$$3T$$

$$3.9T$$

$$4.6T$$

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$$

$$4.7T$$

$$5.8T$$

$$6.6T$$

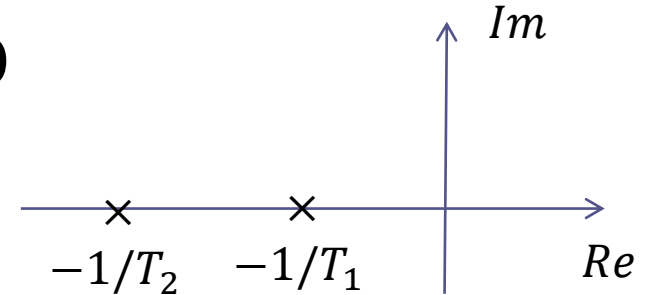
Per delle valutazioni di massima può essere utile riferirsi ai seguenti **valori approssimati**, maggiormente facili da ricordare

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$	$3T$	$4T$	$5T$
$F(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}$	$5T$	$6T$	$7T$

Se la coppia di poli coincidenti si sposta verso **destra**/**sinistra** (cioè se la relativa costante di tempo **aumenta**/**diminuisce**) la risposta diventa rispettivamente più **lenta** /**rapida**.

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$



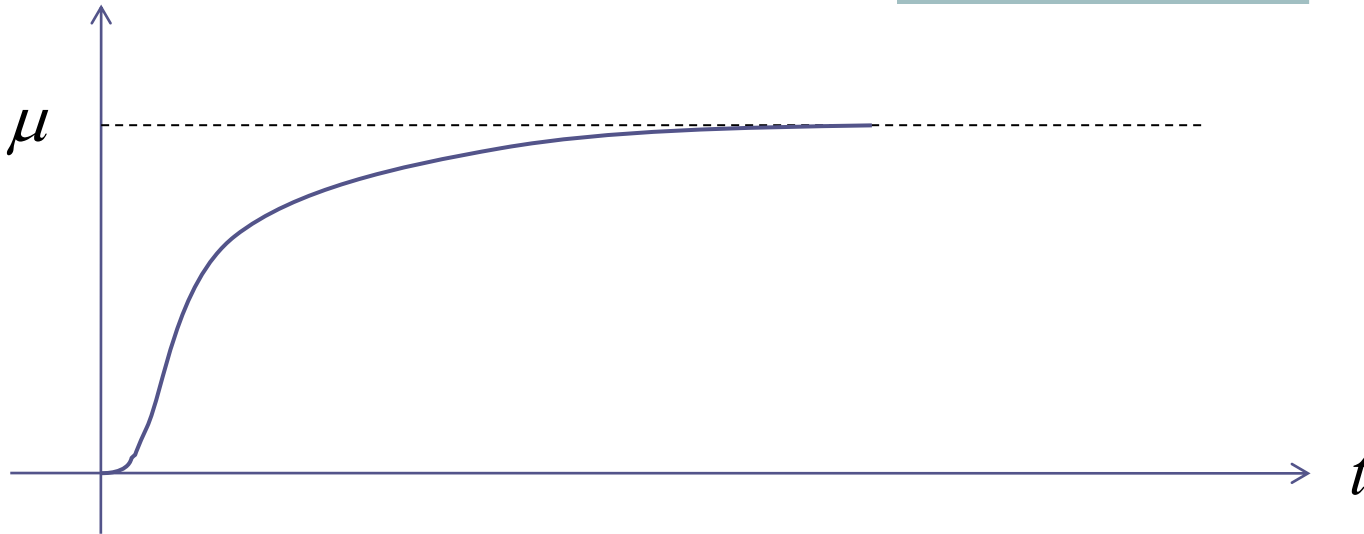
FdT del secondo ordine, senza zeri ($m = 0$), e con due poli ($n = 2$) reali negativi

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2) \dot{y}(t) + y(t) = \mu \delta_{-1}(t)$$

Soluzione in forma chiusa

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$



Risposta al gradino **monotona crescente** (**senza sovraelongazione**)

La risposta si velocizza/**rallenta** se viene ridotta/**aumentata** una fra le due costanti di tempo T_1 e T_2 (o entrambe).

Non esiste una espressione semplice e significativa per i tempi di assestamento in funzione dei valori delle costanti di tempo

Se le due costanti di tempo sono sensibilmente diverse

$$T_1 \gg T_2$$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$$

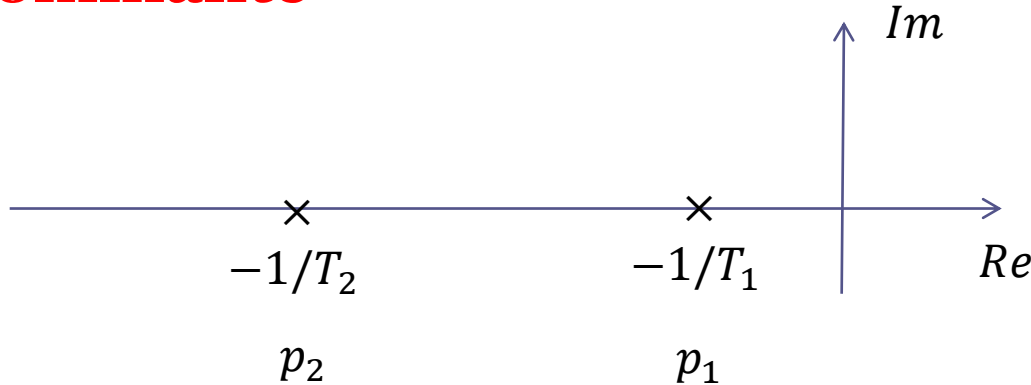
$$\frac{T_2}{T_1 - T_2} \approx 0$$

$$y(t) \approx \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

“polo (o costante di tempo) **dominante**”

L'approssimazione diventa (indicativamente) lecita quando **$T_1 > 5 T_2$**

Polo dominante



Se fra i due poli esiste un fattore di separazione almeno pari a 5 allora si può «trascurare» il polo p_2 più in alta frequenza, ed il polo p_1 viene detto «dominante»

In tale situazione, la risposta al gradino del sistema completo

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

risulta essere praticamente indistinguibile, o comunque estremamente simile, a quella del sistema approssimato di ordine ridotto

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)}$$

Esempio

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$

Le costanti di tempo sono sensibilmente differenti (fattore 10), e per il tracciamento della risposta al gradino ci si può riferire alla approssimazione di **polo dominante**

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

La risposta al gradino del «sistema di ordine ridotto» $F_{appr}(s)$, che sarà estremamente simile a quella del sistema completo, può essere tracciata facilmente sulla base di quanto visto in precedenza

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

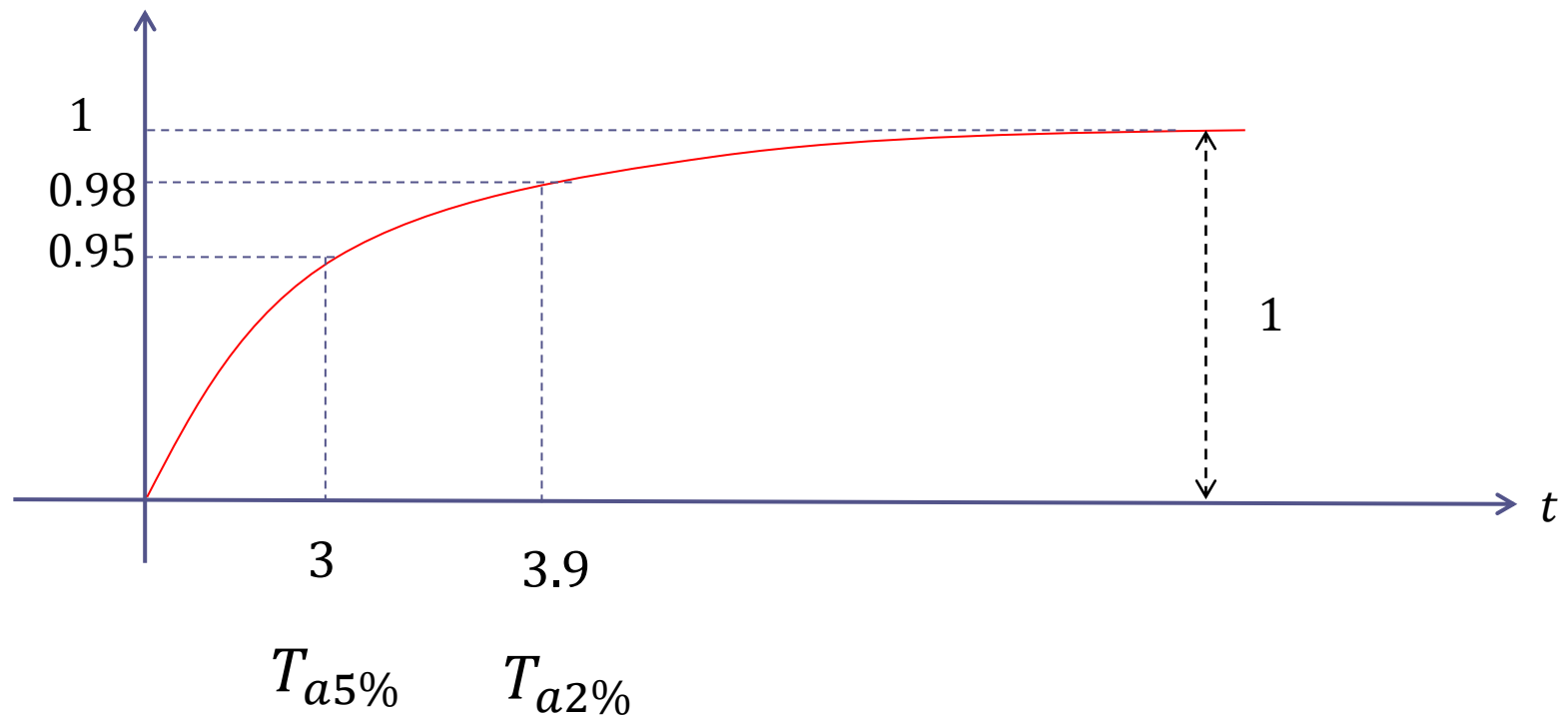
$$T = 1s$$

$$T_{a5\%}$$

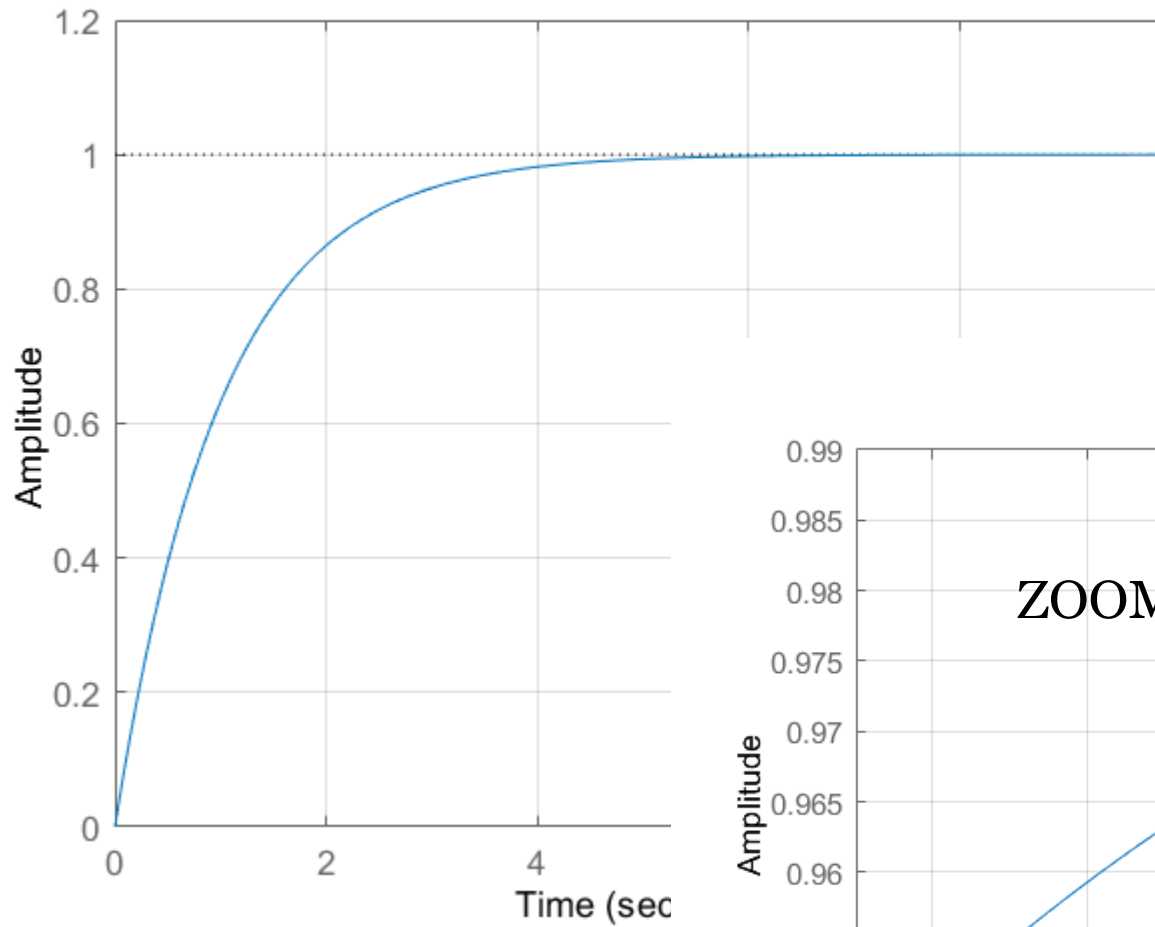
$$T_{a2\%}$$

$$3T$$

$$3.9T$$

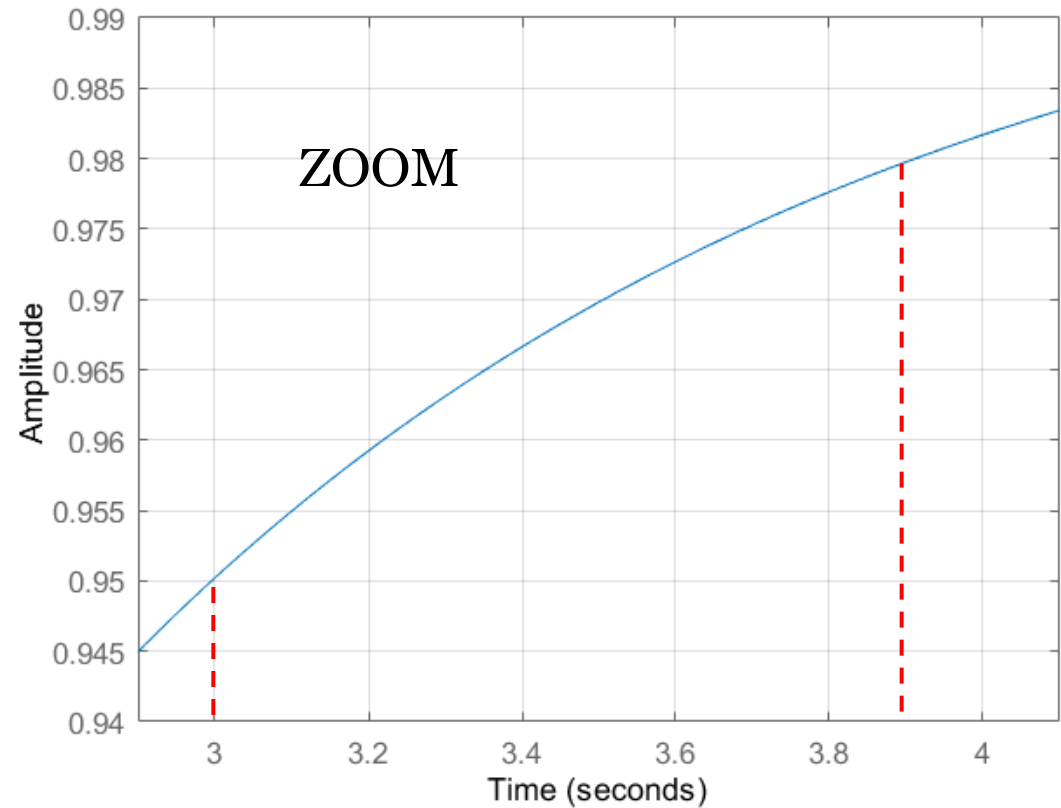


Step Response

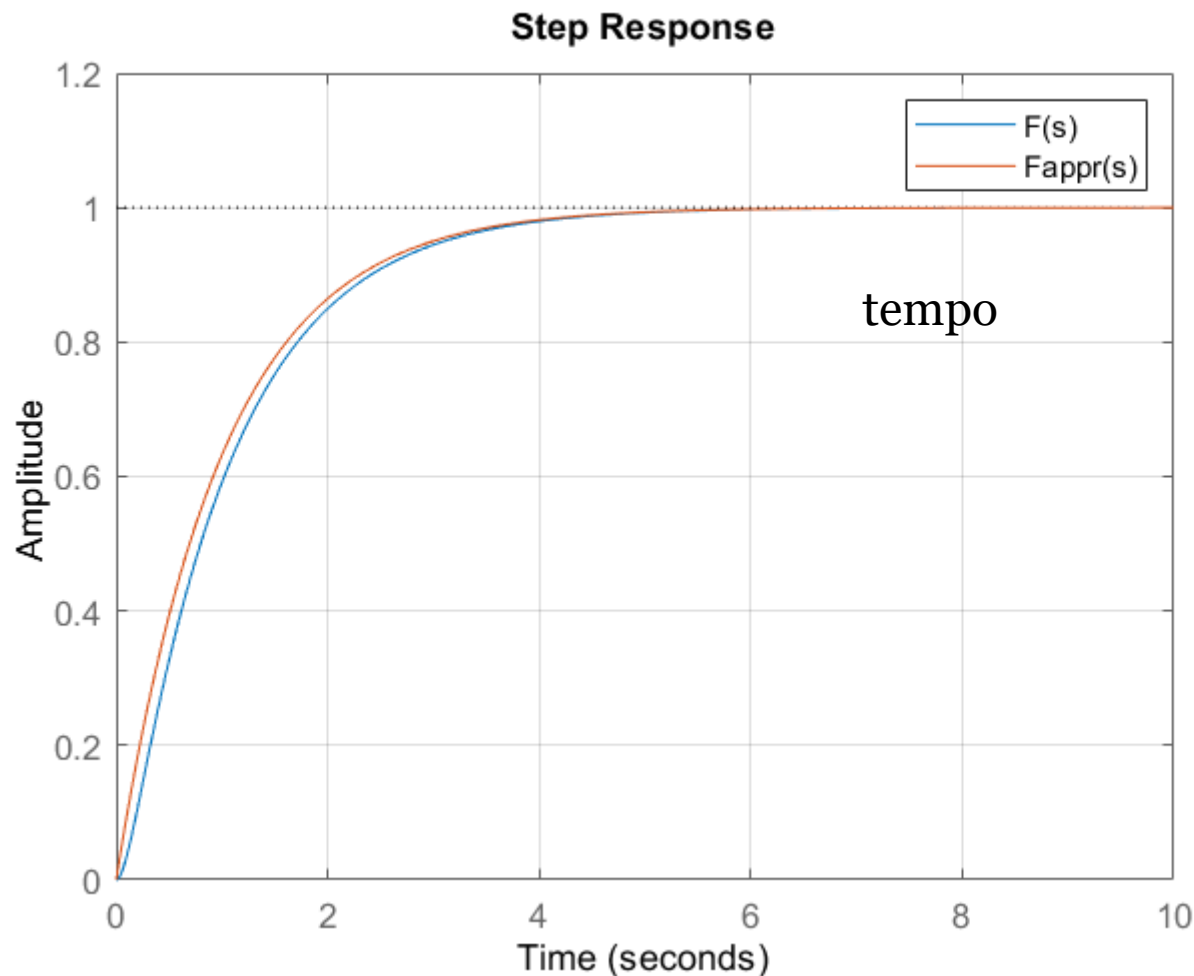


$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

Step Response



Confronto fra la risposta al gradino unitario del sistema complessivo $F(s)$ e quella del sistema di ordine ridotto $F_{appr}(s)$



$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$

$$F_{appr}(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

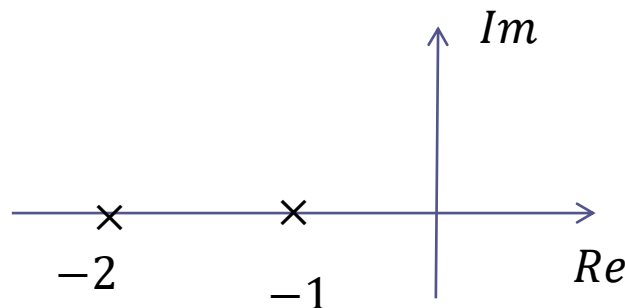
Esempio

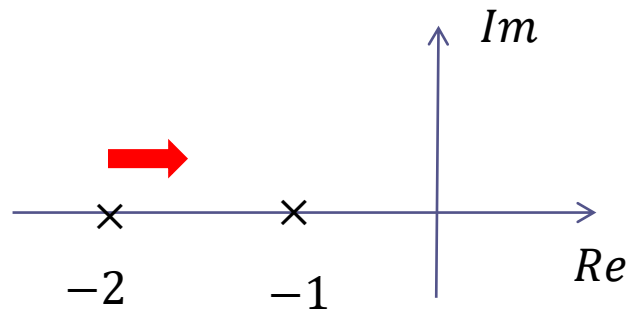
$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{(s+1)(0.5s+1)}$$

La risposta al gradino converge verso il valore di regime 5 (guadagno statico della $G(s)$) con un transitorio monotono crescente

Per la determinazione dei tempi di assestamento, le costanti di tempo sono differenti ma non abbastanza da potersi riferire alla approssimazione di polo dominante e considerare un sistema di ordine ridotto.

Cosa possiamo dire in questo caso ?

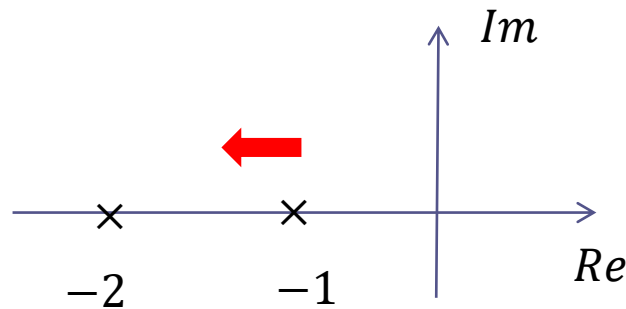




Se il polo in -2 si sposta verso destra sicuramente la risposta si rallenta. Possiamo pertanto affermare che il sistema $G(s)$ avrà una risposta più rapida di quella del sistema che ha due poli coincidenti in -1 .

Quindi il tempo di assestamento (ad esempio quello all'1%) del sistema $G(s)$ sarà sicuramente inferiore a 6.6 volte la costante di tempo associata ad un polo in -1

$$T_{a1\%} < 6.6 s$$



Se il polo in -1 si sposta verso sinistra sicuramente la risposta si velocizza. Possiamo pertanto affermare che il sistema $G(s)$ avrà una risposta più lenta di quella del sistema che ha due poli coincidenti in -2 .

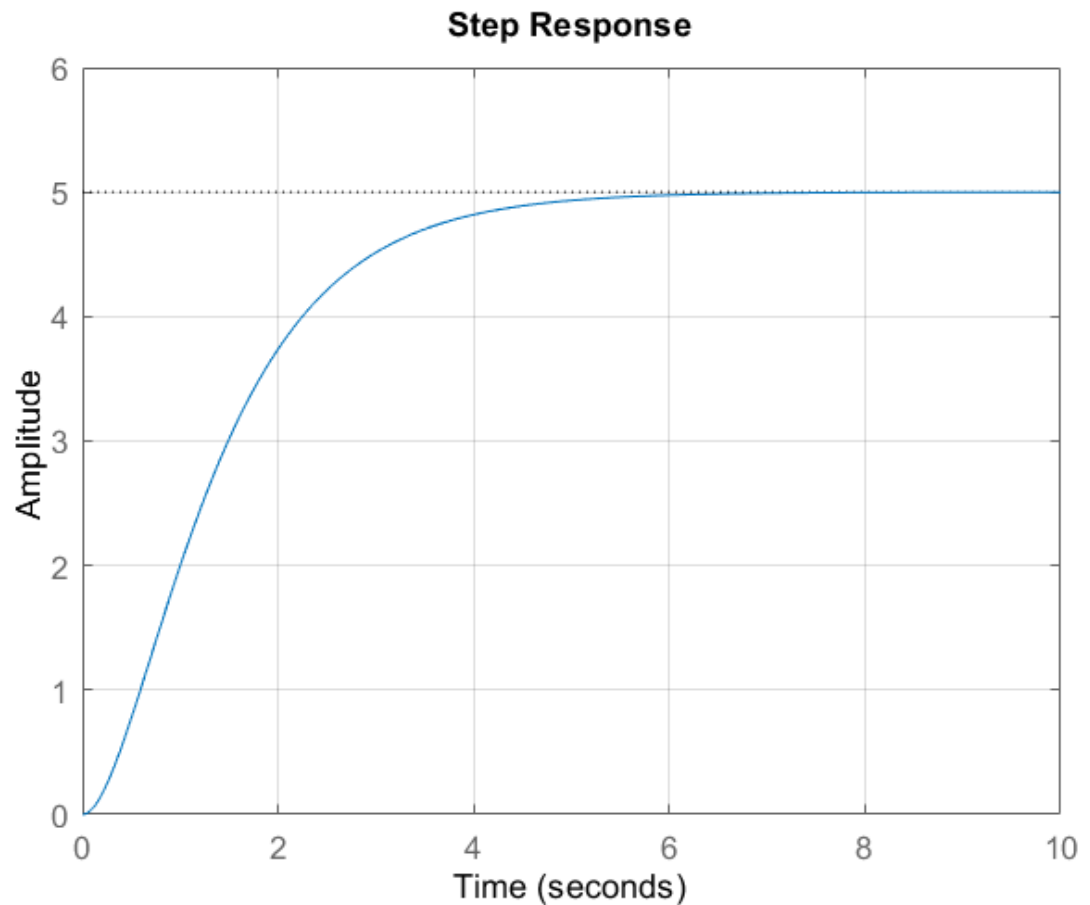
Quindi il tempo di assestamento (ad esempio quello all'1%) del sistema $G(s)$ sarà sicuramente inferiore a 6.6 volte la costante di tempo associata ad un polo in -2

$$T_{a1\%} > 3.3 s$$

$$3.3 \text{ s} < T_{a1\%} < 6.6 \text{ s}$$

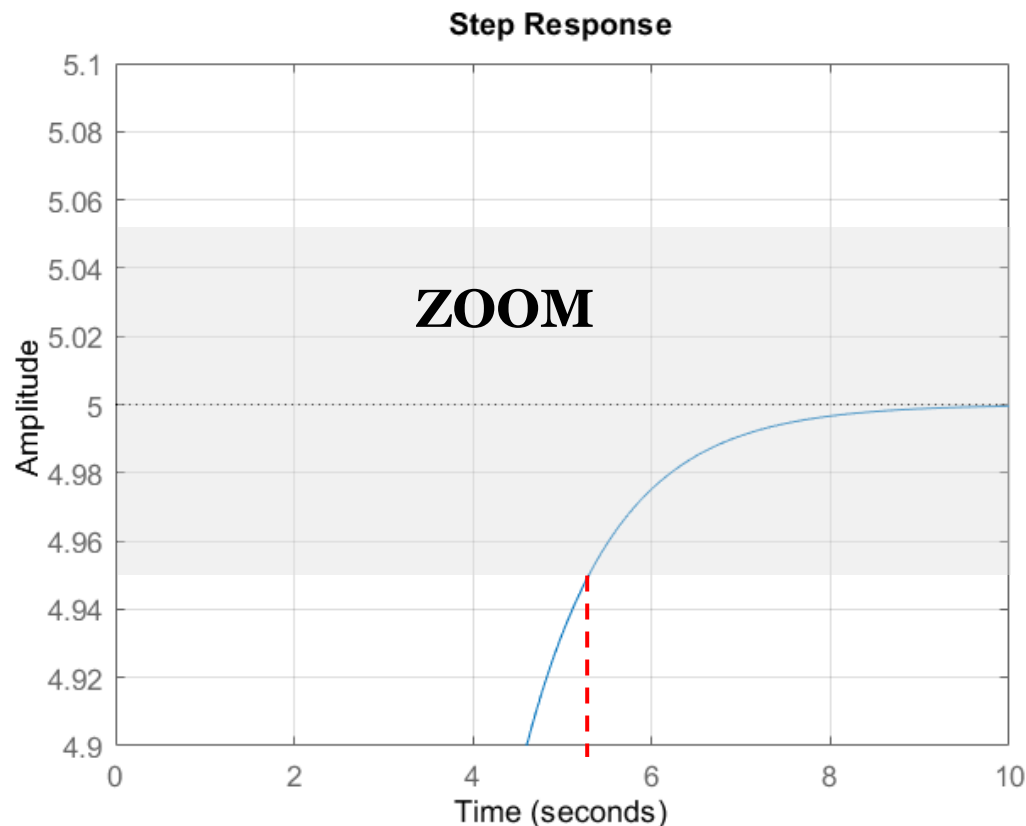
Possiamo ipotizzare che il tempo di assestamento stia a meta strada: $T_{a1\%} \approx 5$

Risposta al gradino del
sistema $G(s)$



Il tempo di assestamento all'1% è quell'istante a partire dal quale la risposta giace permanentemente in un intorno del valore regime di ampiezza pari all'1%.

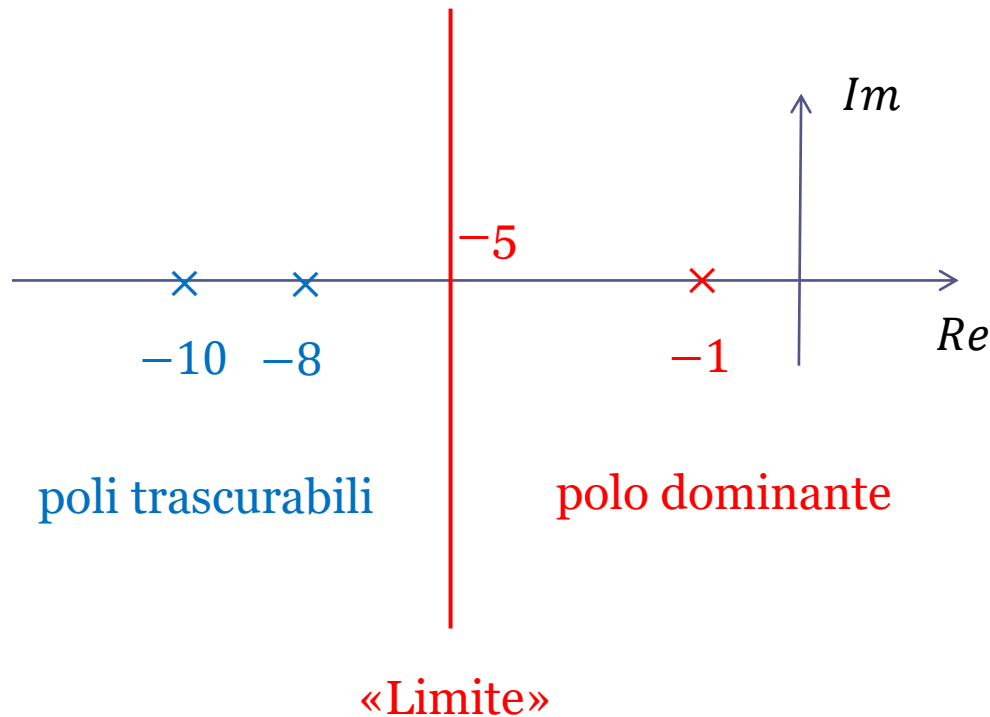
Il valore di regime vale in questo caso 5, quindi dobbiamo considerare l'intorno $[4.95, 5.05]$



Il tempo di assestamento all'1% rilevato dal grafico risulta lievemente superiore a 5 secondi. La stima da noi effettuata è pertanto sufficientemente accurata.

Grazie al concetto di «polo dominante» possono essere trattati casi di natura anche più generale.

$$G(s) = \frac{20}{(s + 1)(s + 8)(s + 10)}$$



Quando si rimuovono da una FdT uno o più poli perché «trascurabili» vi è rischio di incorrere in un errore

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)}$$

$$G_{appr}(s) = \frac{20}{(s+1)}$$



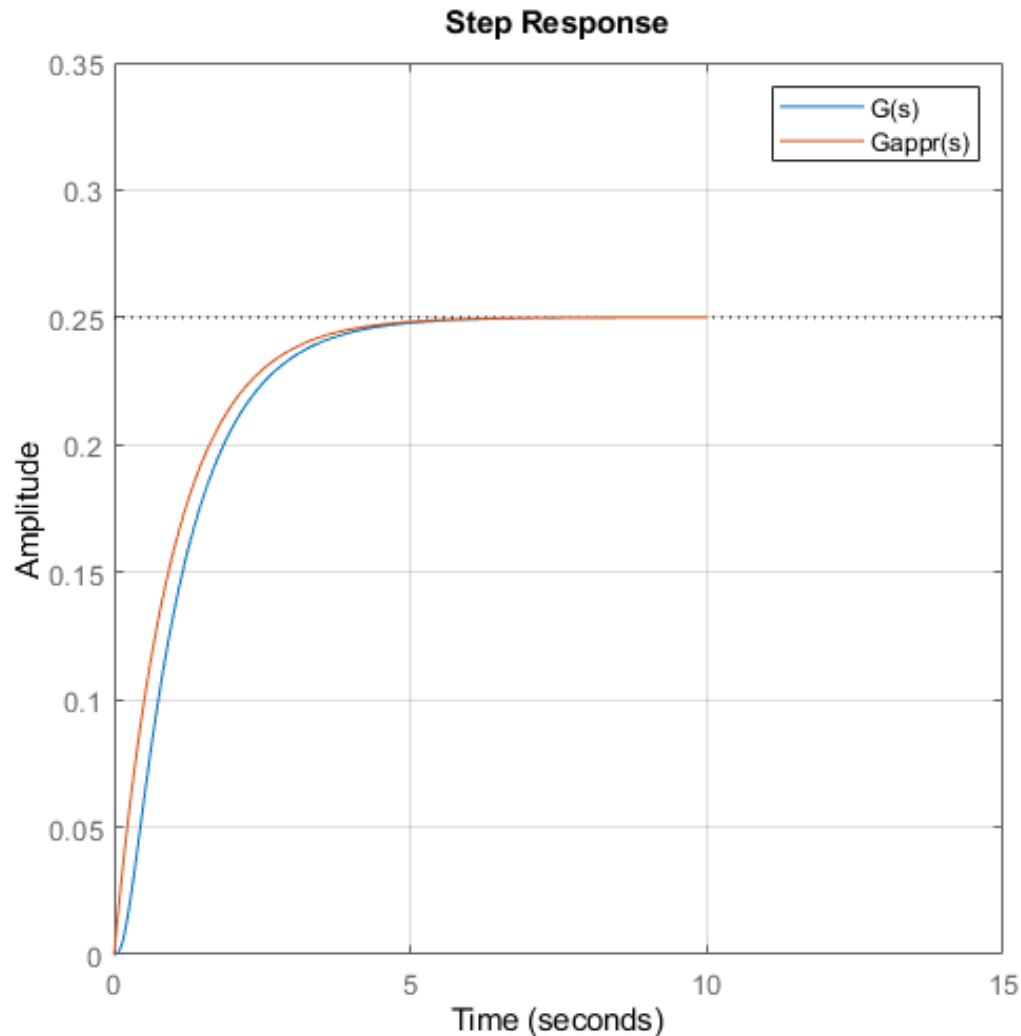
Questo è il modo errato di rimuovere dei poli, in quanto il guadagno statico della FdT approssimata $G_{appr}(s)$ di ordine ridotto risulta essere differente da quello della FdT originale $G(s)$.

$$G_{appr}(s) = \frac{20}{(s+1) \cdot 8 \cdot 10} = \frac{0.25}{(s+1)}$$



I termini binomi, la cui rimozione non altera il valore del guadagno statico, possono invece essere «cancellati» senza problemi.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+8)(s+10)} = \frac{0.25}{(s+1) \left(\frac{1}{8}s + 1 \right) \left(\frac{1}{10}s + 1 \right)}$$



Le risposte differiscono nella parte iniziale del transitorio, ma i tempi di assestamento sono pressoché analoghi

```
s=tf('s');
G=20/((s+1)*(s+8)*(s+10))
Gappr=0.25/((s+1))
step(G,Gappr,0:.01:10),grid
legend('G(s)', 'Gappr(s)')
```

Sistema as. stabile con tutti i poli reali e nessuno zero

$$F(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

La risposta al gradino unitario è **monotona crescente**.

I poli più vicini all'origine (quelli cioè cui sono associate le costanti di tempo più grandi) sono quelli che influenzano in maniera più incisiva i tempi di assestamento della risposta al gradino unitario.

Ora includiamo nella FdT del sistema anche degli zeri.

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$T_1 > T_2 > 0$$

FdT del secondo ordine ($n=2$), con uno zero ($m=1$), e con due poli reali negativi

Soluzione in forma chiusa

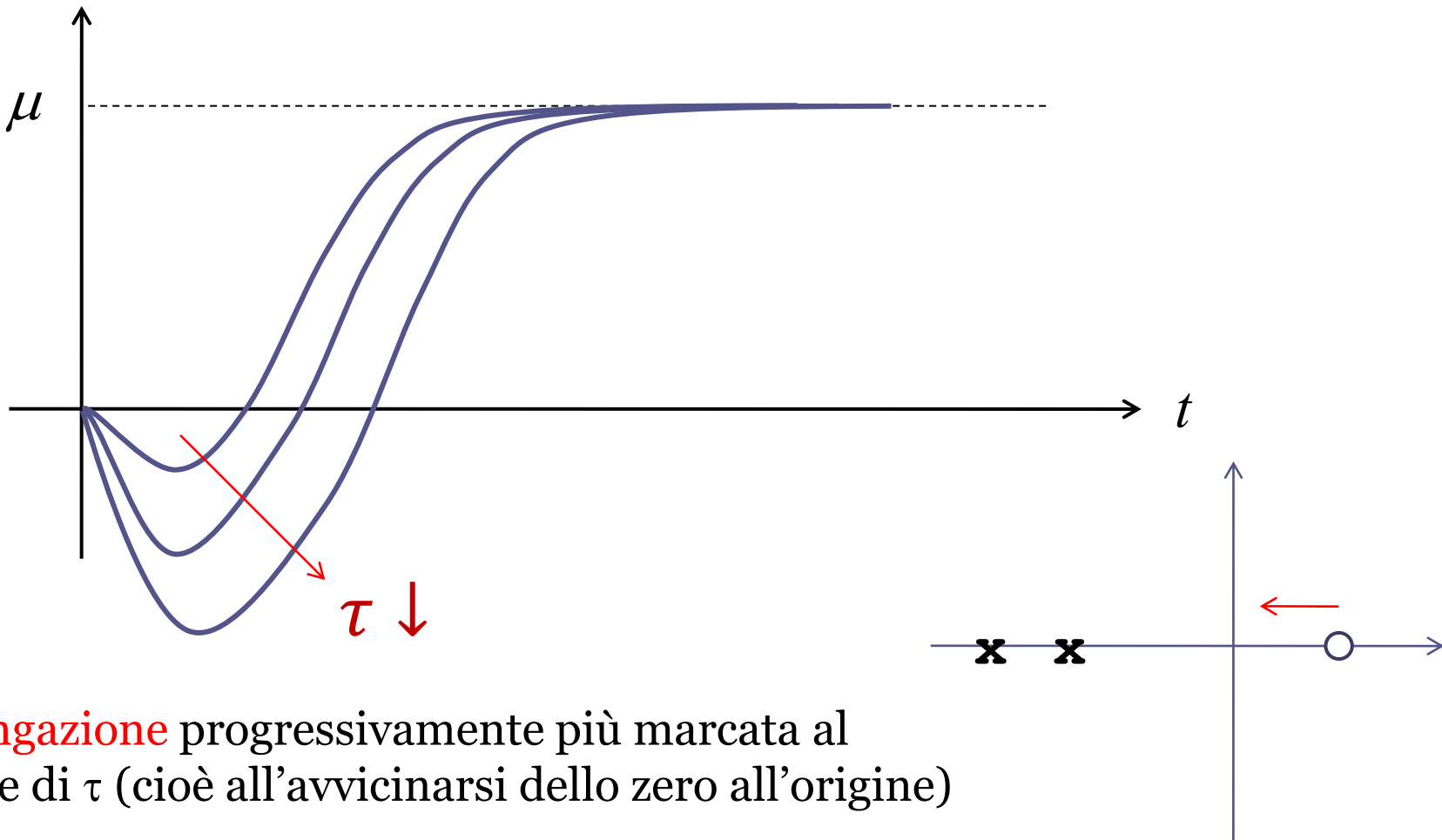
$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu \tau}{T_1 T_2}$$

Se la costante di tempo dello zero è negativa ($\tau < 0$), cioè se lo zero è posizionato nel semiasse reale positivo, si ha che

$$\dot{y}(0) < 0$$

La risposta al gradino presenta quindi il fenomeno dell' **undershooting**

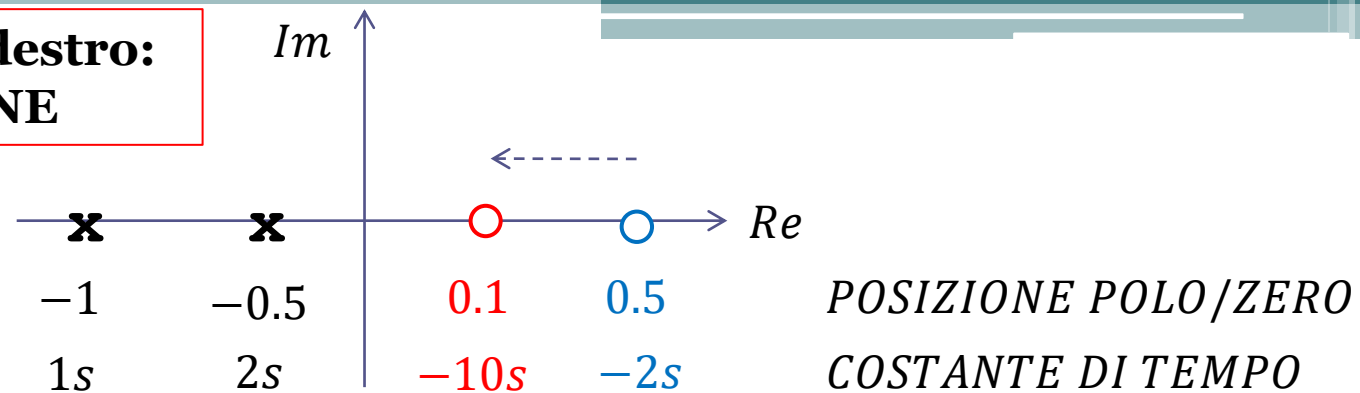
$\tau < 0$ Sistema con zero a parte reale positiva (sistema a **fase non minima**)



Sottoelongazione progressivamente più marcata al diminuire di τ (cioè all'avvicinarsi dello zero all'origine)

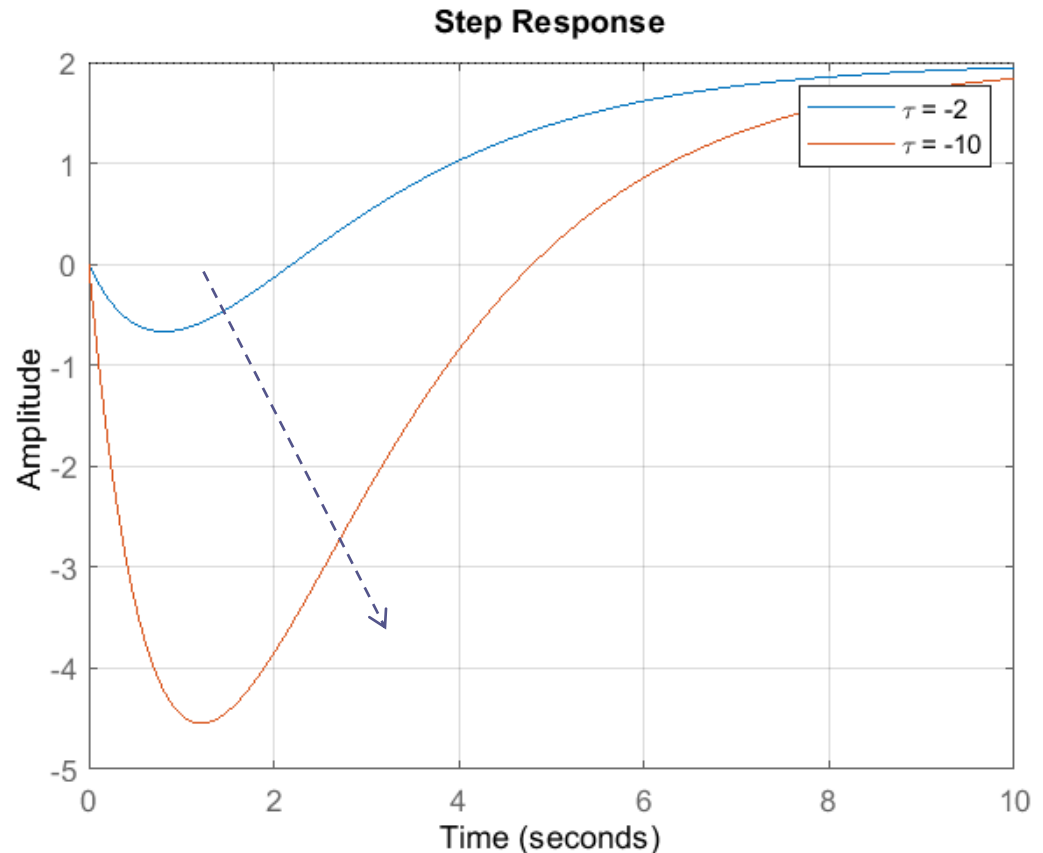
Superato il punto di minimo, la risposta evolve verso il regime con andamento **monotono**

Zero nel semipiano destro: SOTTOELONGAZIONE

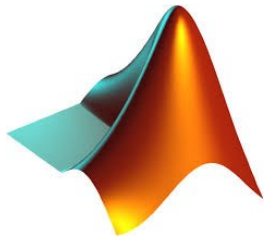


$$F(s) = \frac{2(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

$$F(s) = \frac{2(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

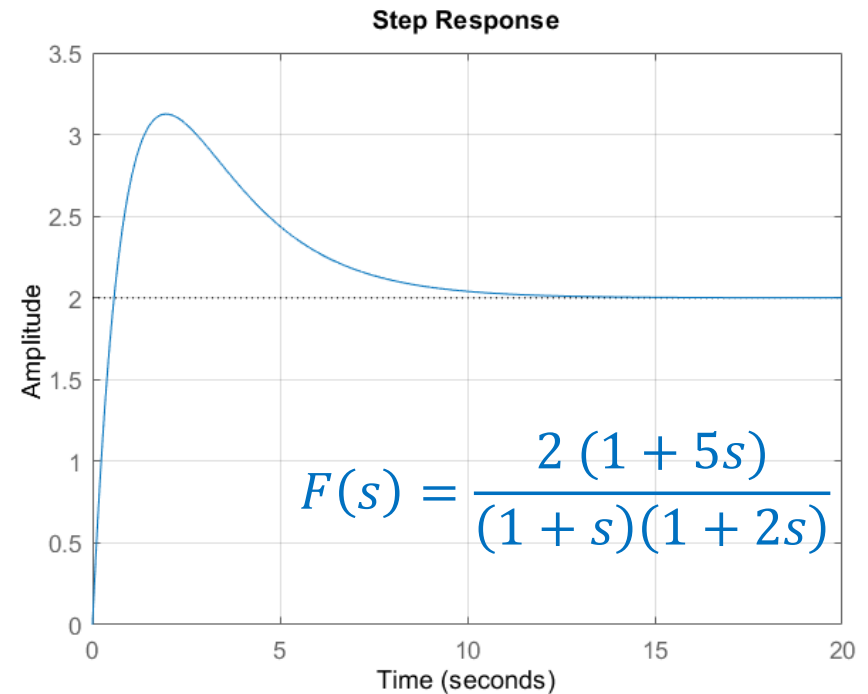
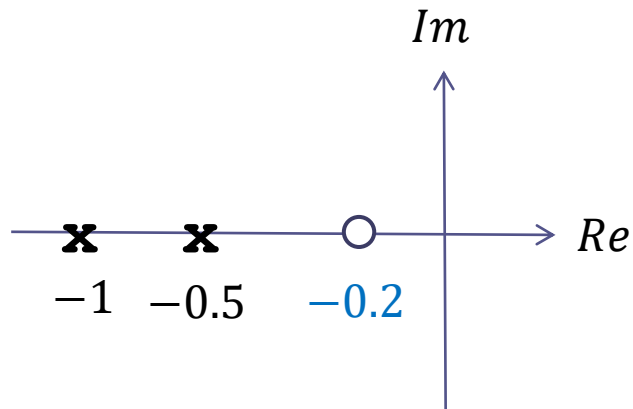


Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=-10;  
tau2=-2;  
  
S11=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S12,S11,[0:0.01:10]),grid  
legend('\tau = -2','\tau = -10')
```

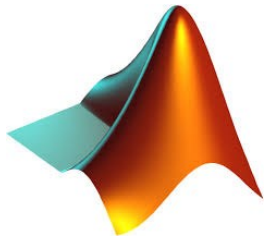
Zero nel semipiano sinistro collocato **più in bassa frequenza rispetto a entrambi i poli**: SOVRAELONGAZIONE



La presenza di uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli induce una **sovraelongazione** nella risposta al gradino.

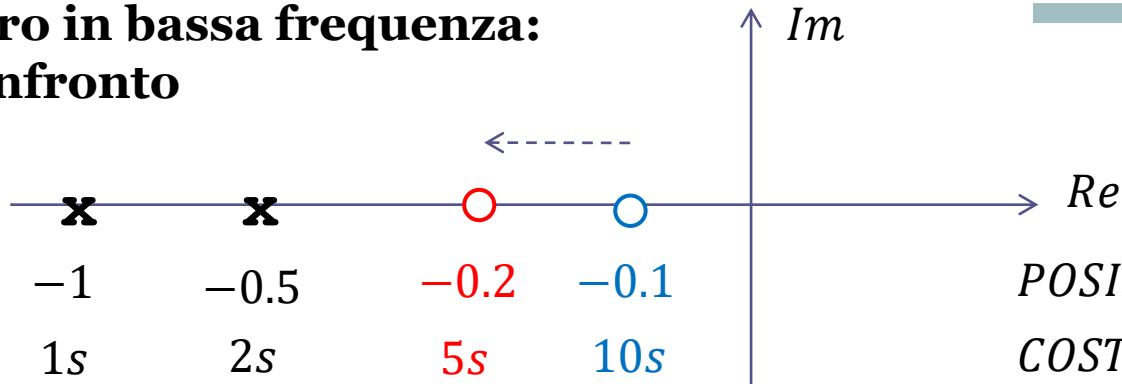
Superato il punto di massimo, la risposta evolve verso il regime con andamento **monotono**

Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=5;  
  
S11=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S11,[0:0.01:20]),grid
```

Zero in bassa frequenza: confronto

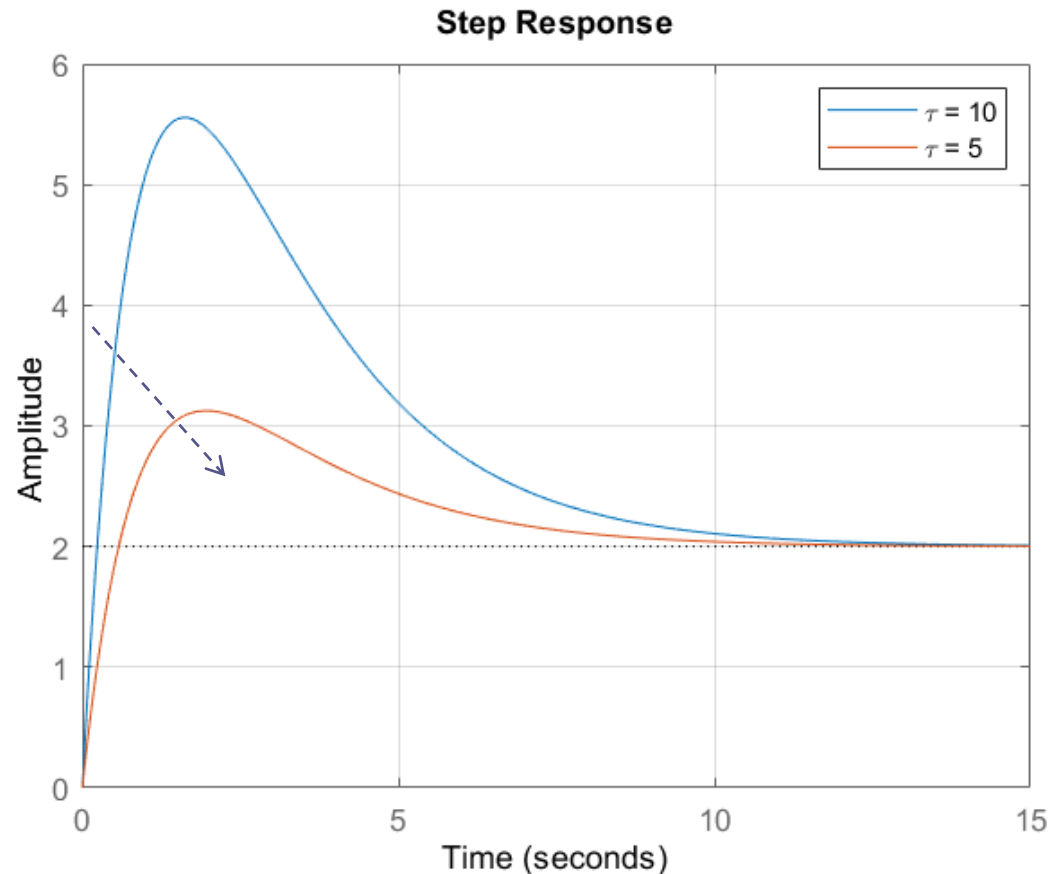


POSIZIONE POLO/ZERO
COSTANTE DI TEMPO

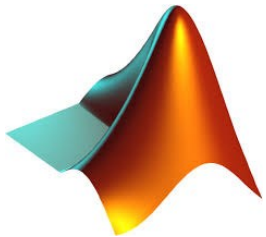
$$F(s) = \frac{2(1 + 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

$$F(s) = \frac{2(1 + 5s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

La sovraelongazione è progressivamente più marcata quanto più lo zero risulta prossimo all'origine)

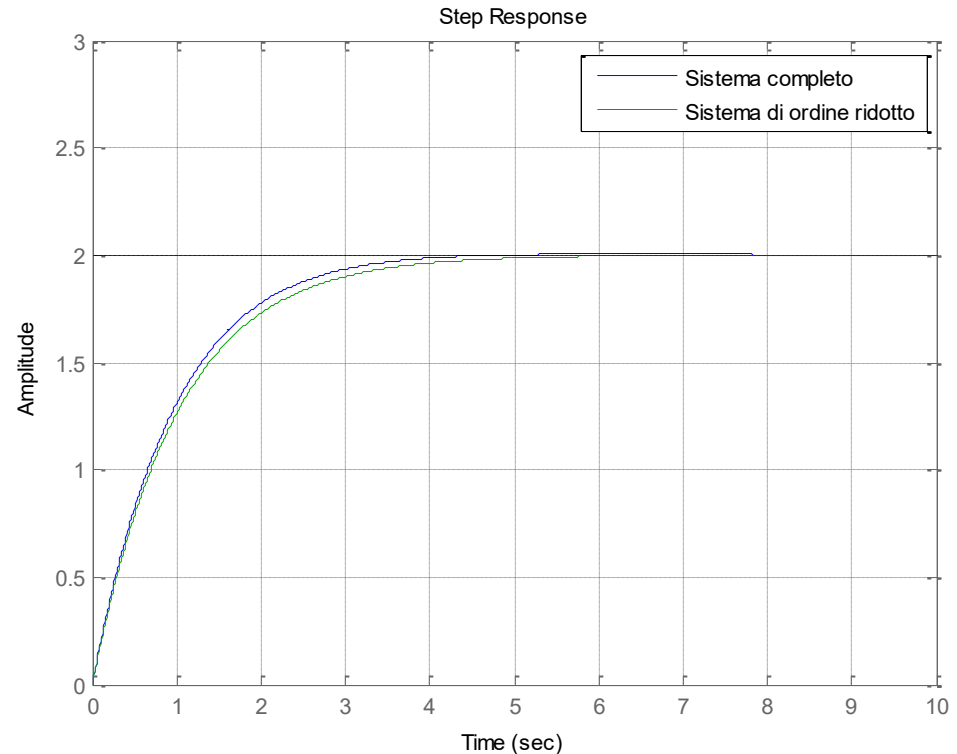
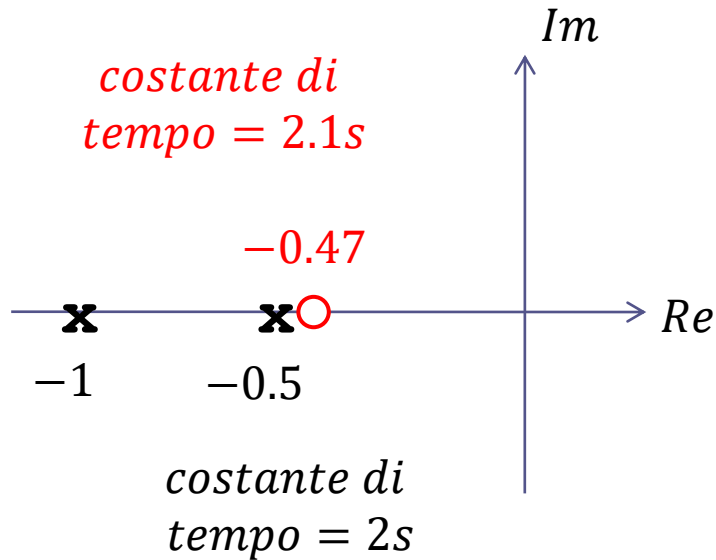


Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau1=10;  
tau2=5;  
  
S11=tf(mu*[tau1 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu*[tau2 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
figure(1)  
step(S11,S12,[0:0.01:15]),grid  
legend('\tau = 10','\tau = 5')
```


Cancellazione polo-zero



Quando uno zero ed un polo sono molto prossimi fra loro, è **talvolta** possibile rimuoverli entrambi dalla FdT (operare cioè una «cancellazione polo-zero») senza alterare la risposta in maniera significativa

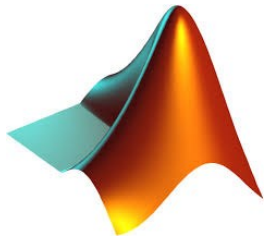
Sistema completo:

$$F(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

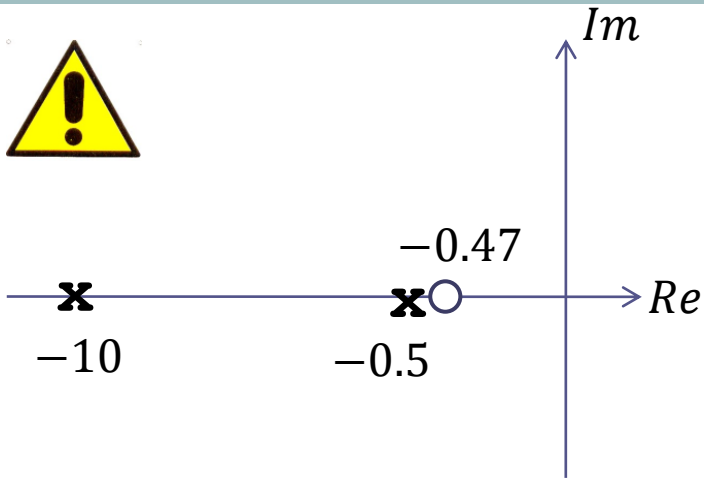
Sistema di ordine ridotto:

$$F(s) = \frac{2}{(1 + s)}$$

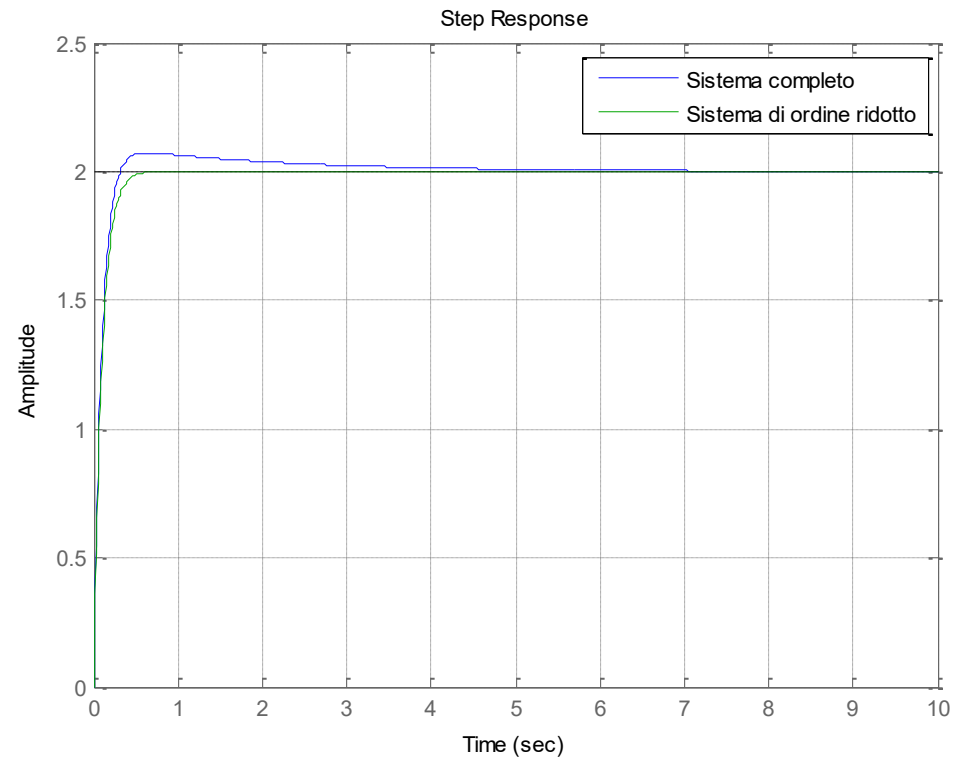
Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2;  
T2=1;  
T1=2;  
tau=2.1;  
  
S11=tf(mu*[tau 1],conv([T1 1],[T2 1]));  
S12=tf(mu,[T2 1]);  
figure(1)  
step(S11,S12,[0:0.01:10]),grid  
legend('Sistema completo','Sistema di ordine ridotto')
```



La cancellazione polo-zero da luogo a differenza significativa fra le risposte del sistema complessivo e di quello di ordine ridotto quando si cancella una coppia PZ “lenta”, e le costanti di tempo residue sono molto più piccole, come in questo esempio

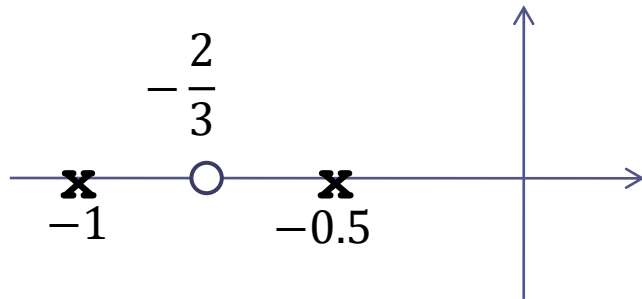


Sistema completo:
$$F(s) = \frac{2(1 + 2.1s)}{(1 + 0.1s)(1 + 2s)}$$

Sistema di ordine ridotto:

$$F(s) = \frac{2}{(1 + 0.1s)}$$

Zero posizionato fra i due poli

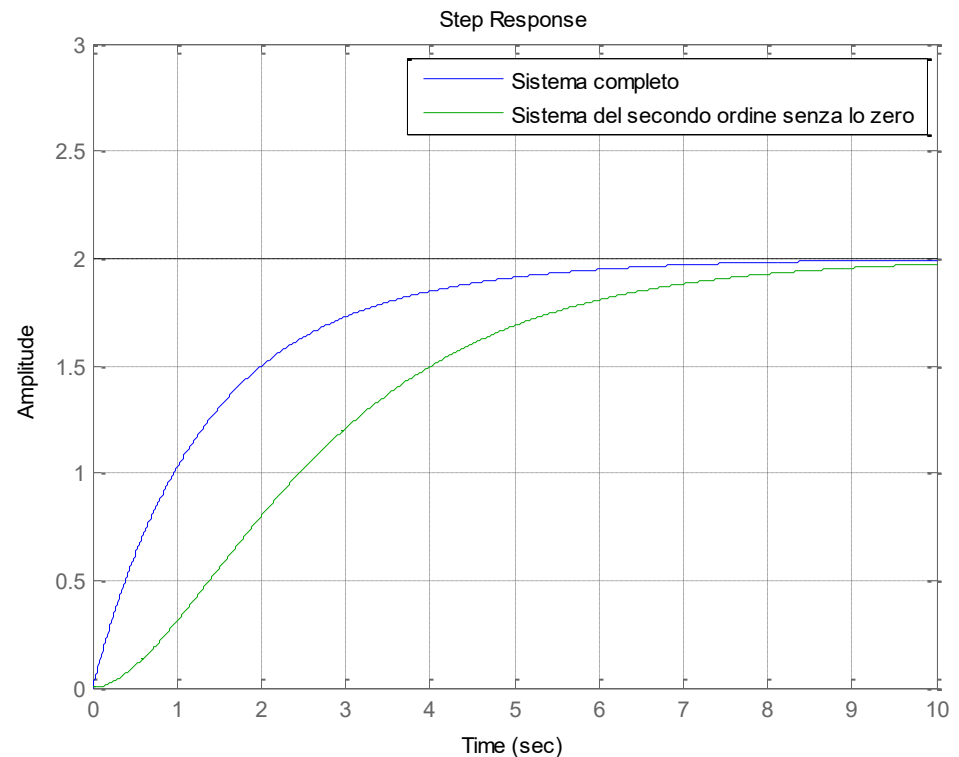


La risposta è monotona crescente, con un andamento qualitativo assimilabile a quello visto nel caso in cui lo zero non è presente

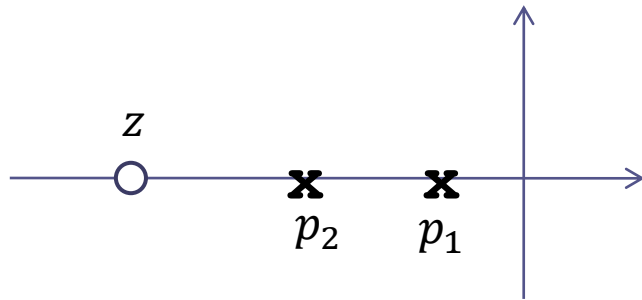
L'effetto della presenza dello zero è quello di velocizzare la risposta rispetto alla situazione in cui lo zero non c'è

$$F_1(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{3}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$F_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



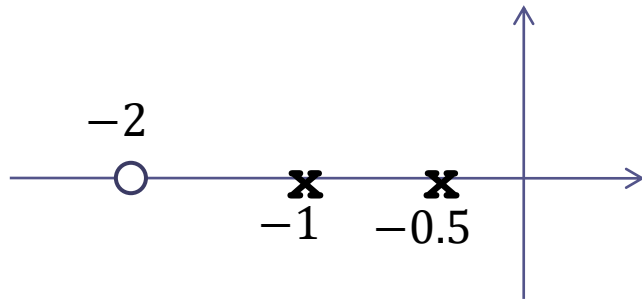
Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli



La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli, e non eccessivamente vicino al polo p_2 (nel qual caso subentra la cancellazione polo-zero) ha un effetto alquanto ridotto.

L'unico effetto è una **debole velocizzazione della risposta**

Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli

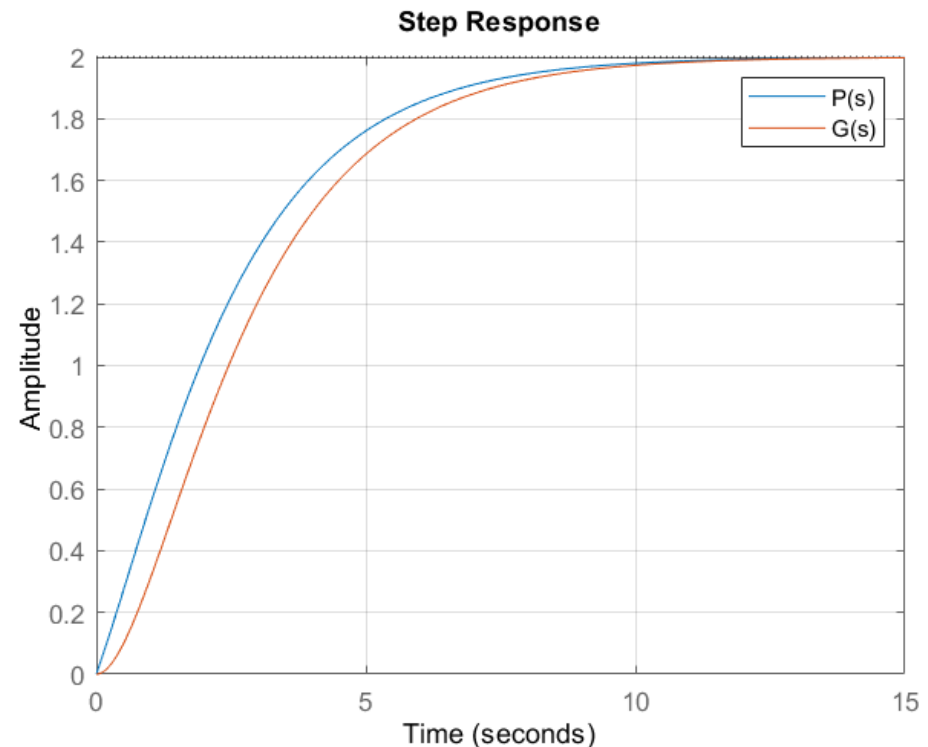


La presenza di uno zero più in alta frequenza rispetto a entrambi i poli ha un effetto alquanto ridotto.

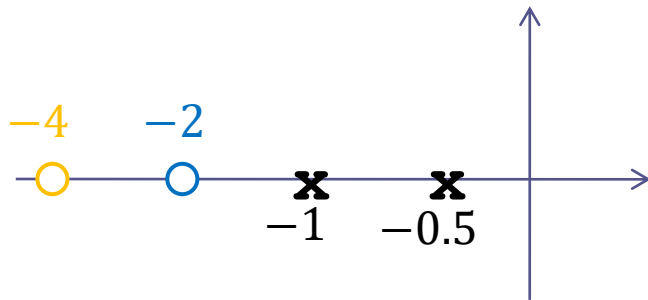
La risposta al gradino del sistema che include anche lo zero ha dei tempi di assestamento lievemente inferiori.

$$P(s) = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2}s\right)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$



Zero posizionato più in alta frequenza rispetto ad entrambi i poli

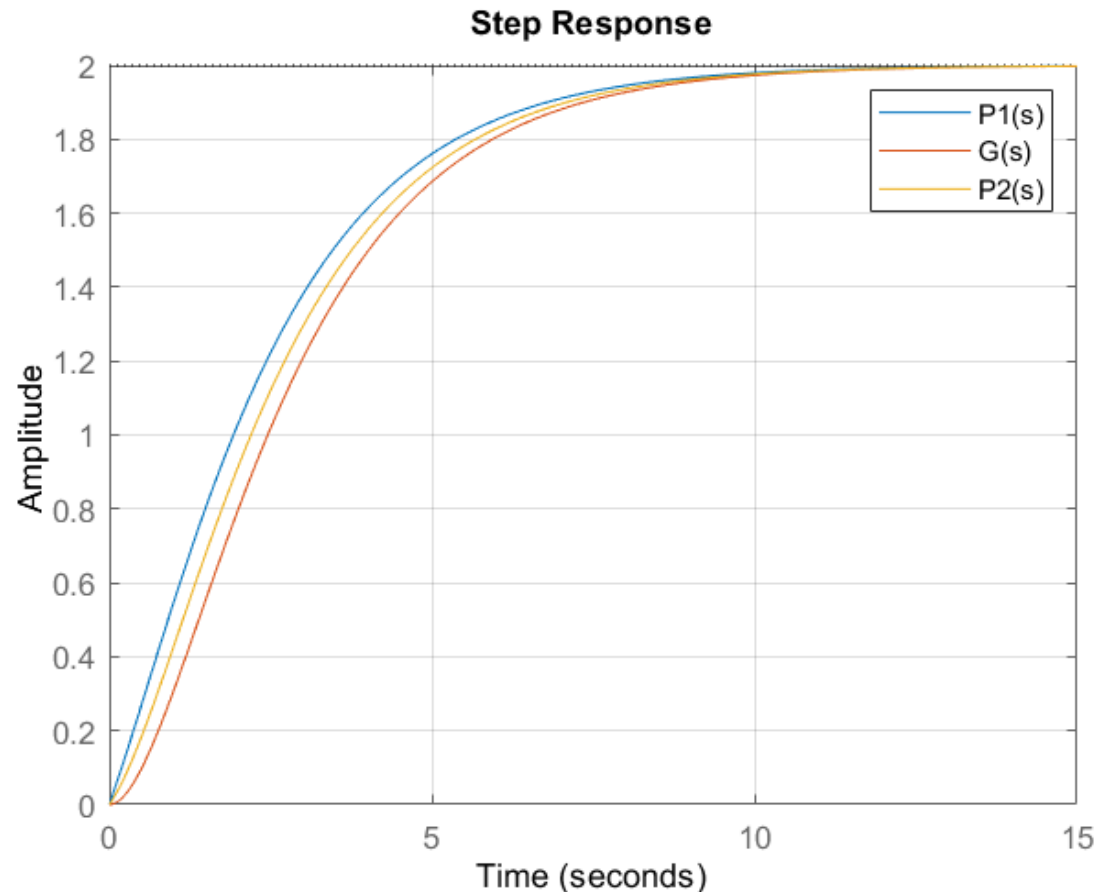


Man mano che lo zero si sposta verso le alte frequenze diventa progressivamente sempre meno rilevante

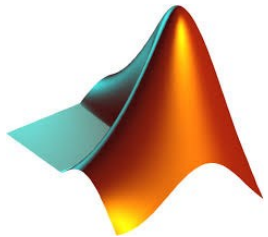
$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$

$$P_1(s) = \frac{2(1 + \frac{1}{2}s)}{(1+s)(1+2s)}$$

$$P_2(s) = \frac{2(1 + \frac{1}{4}s)}{(1+s)(1+2s)}$$



Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
mu=2
p1=-0.5
p2=-1
z=-2
z2=-4;
s=tf('s')
P1=-(mu*p1*p2/z)*(s-z)/((s-p1)*(s-p2))
P2=-(mu*p1*p2/z2)*(s-z2)/((s-p1)*(s-p2))
G=(mu*p1*p2)/((s-p1)*(s-p2))
step(P1,G,P2,[0:0.01:15]),grid
legend('P1(s)', 'G(s)', 'P2(s)')
```


Es.

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario dei sistemi descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento. Si espliciti anche il legame differenziale ingresso-uscita

$$G_1(s) = \frac{4}{s + 2}$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_3(s) = \frac{3 + 2s}{(s + 1) \left(\frac{1}{7}s + 1 \right)}$$

$$G_4(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)(2s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{4}{s+2}$$

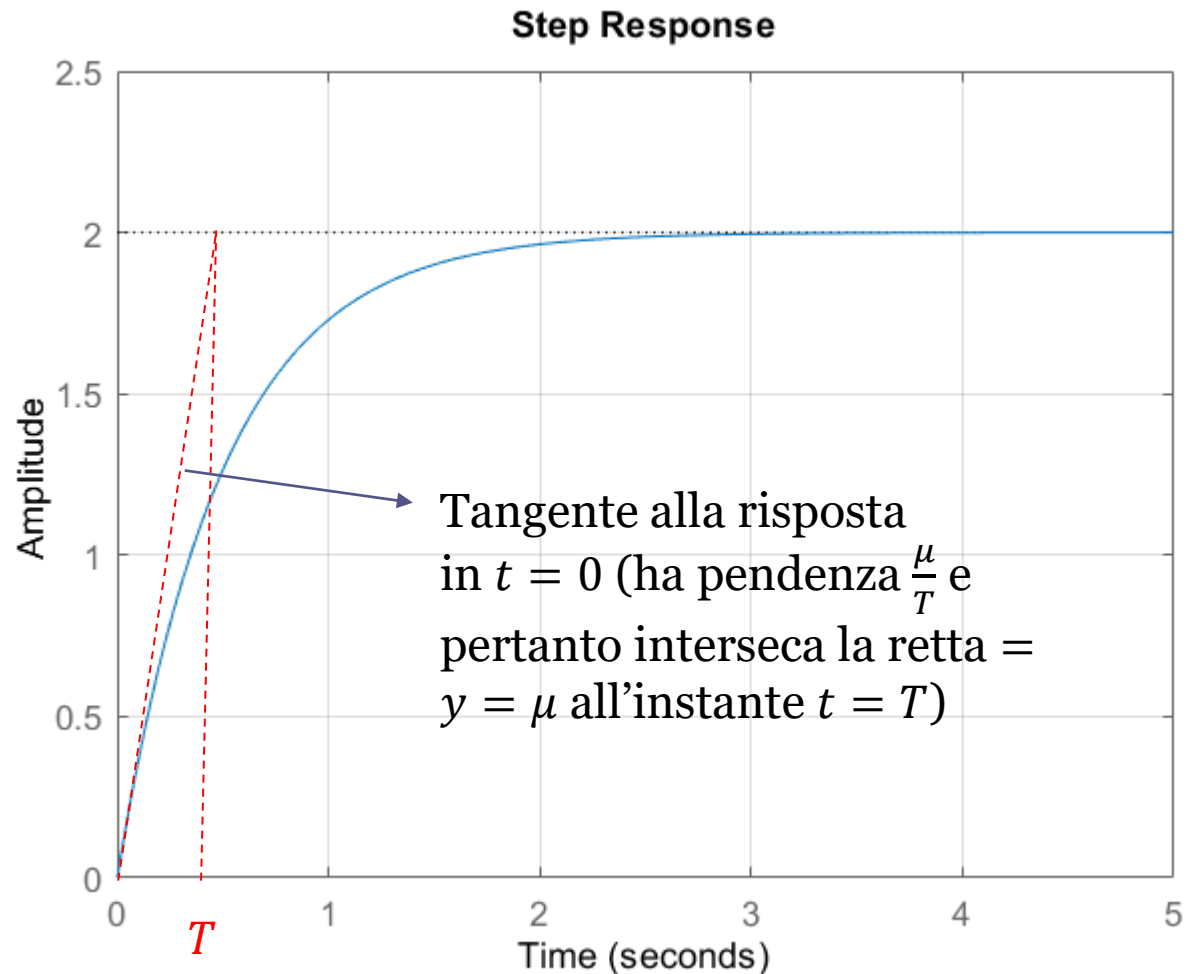
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t)$$

$G(s)$ è della forma:

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

con $\mu = 2$, $T = 0.5$.

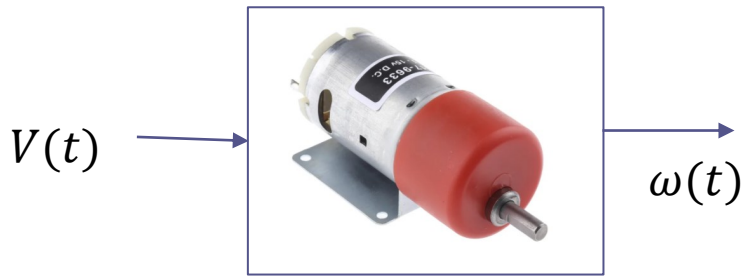
$$\dot{y}(0^+) = \frac{\mu}{T}$$



Motore in corrente continua

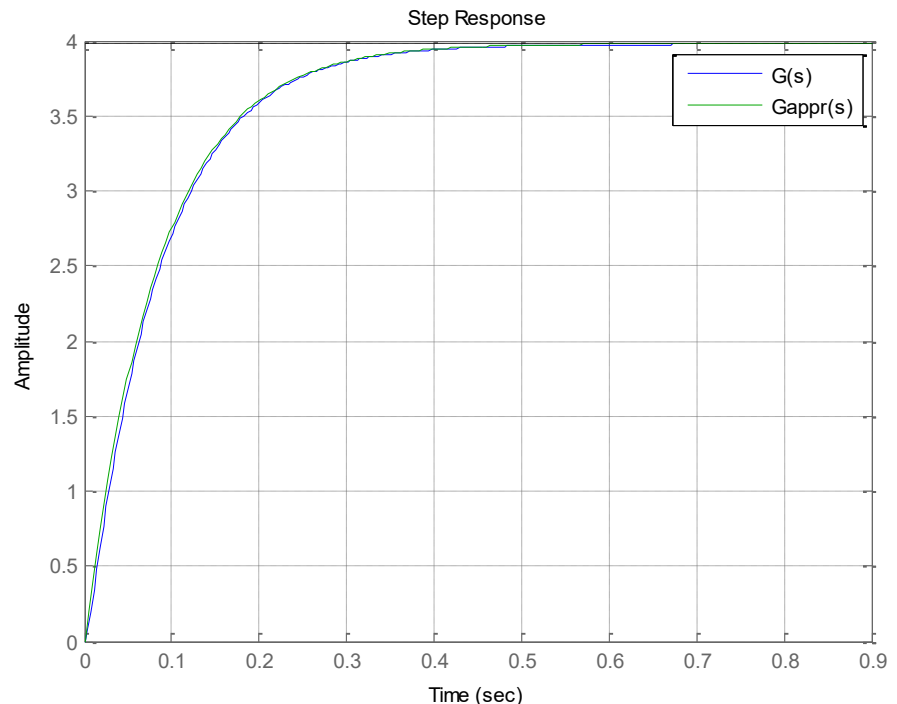
$R=0.46\ \Omega$, $L=15\ \text{mH}$, $J = 0.012\ \text{kg m}^2$, $B=0.0008\ \text{Ns/rad}$, $K=0.25\ \text{N/A}$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(R + Ls)(B + Js) + K^2} = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)(1 + 0.0034s)}$$



$$G_{appr}(s) = \frac{3.97}{(1 + 0.0844s)}$$

Le costanti di tempo differiscono per un fattore 25



Riassumiamo quanto visto

$$F(s) = \frac{\mu(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}$$

In generale la risposta al gradino di un sistema a **poli e zeri reali** si presenta monotona crescente tranne i due casi in cui:

è presente uno zero positivo



In questo caso la risposta presenta una sottoelongazione, seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

è presente uno zero negativo più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli.



In questo caso la risposta presenta una sovraelongazione, seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime

Sono sempre assenti fenomeni oscillatori.

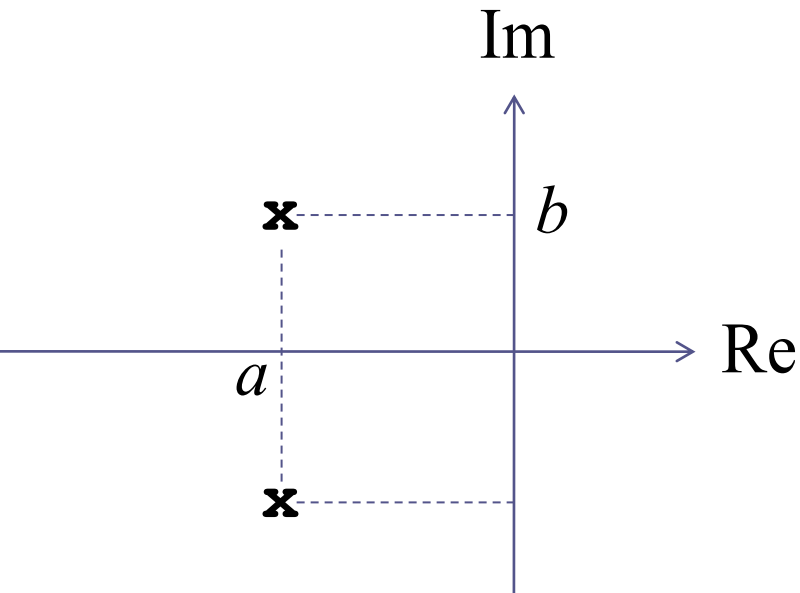
La presenza degli zeri velocizza la risposta.

Sistema con due poli complessi coniugati

$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\mu}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$\omega_n > 0$$

$$|\xi| < 1$$



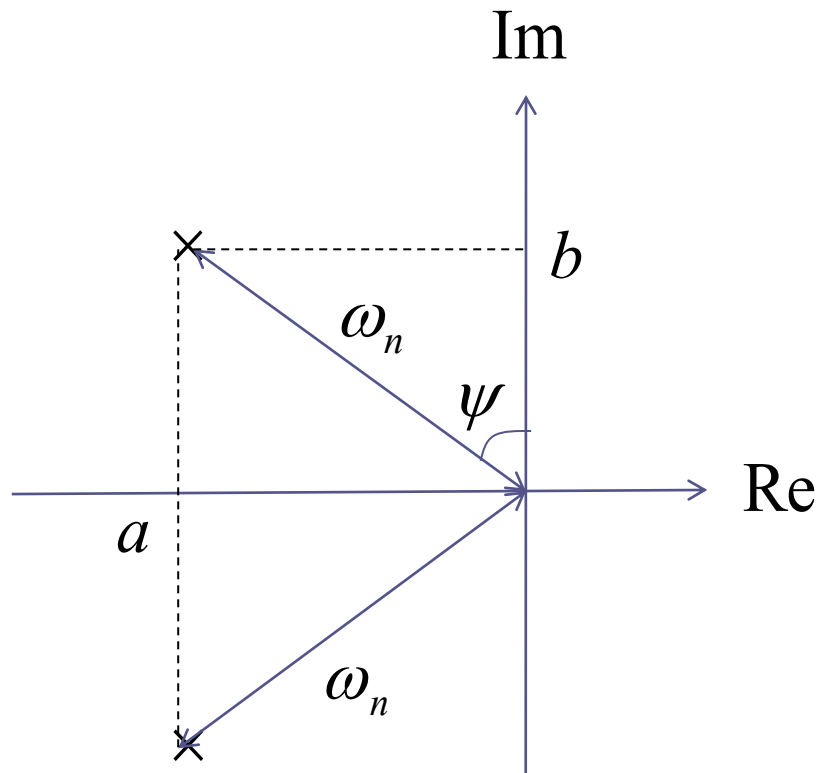
$$a = -\xi \omega_n$$

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a^2 + b^2 = \omega_n^2$$

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\xi = \sin(\psi)$$

$$a^2 + b^2 = \omega_n^2$$

$\xi = 0$ ***Poli immaginari puri***

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$\xi = 1$ ***Poli reali e coincidenti negativi***

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

$\xi = -1$ ***Poli reali e coincidenti positivi***

$$s_{1,2} = \omega_n$$

$$\xi = 0 \quad F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t))$$

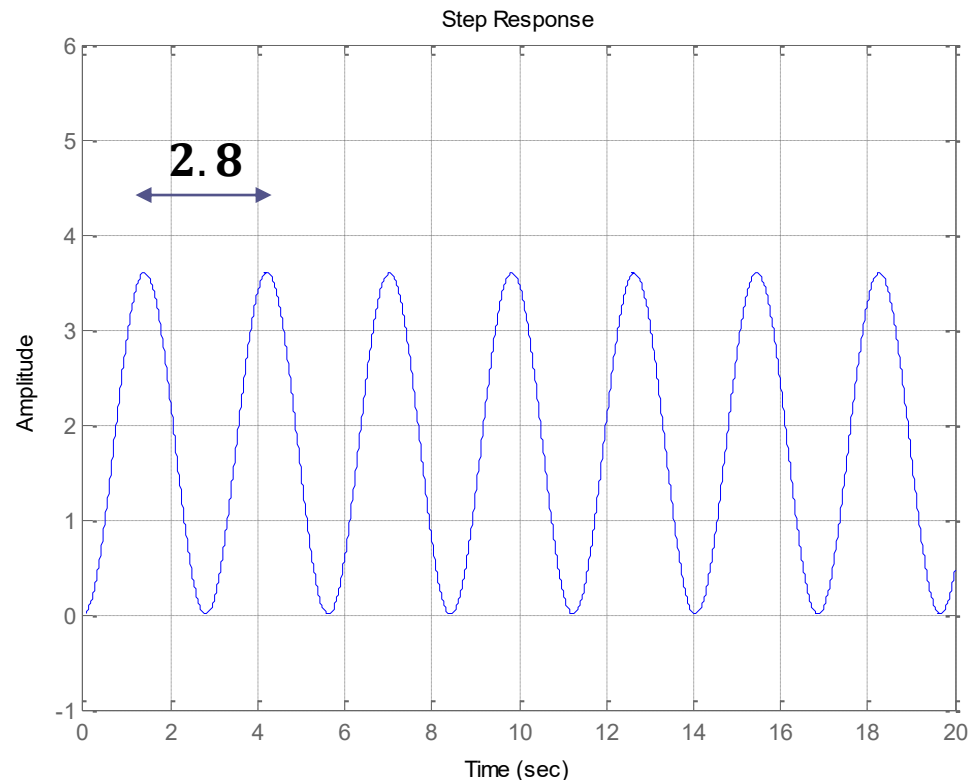
Oscillazione permanente non smorzata avente periodo $T = 2\pi/\omega_n$

$$F(s) = \frac{9}{(s^2 + 5)}$$

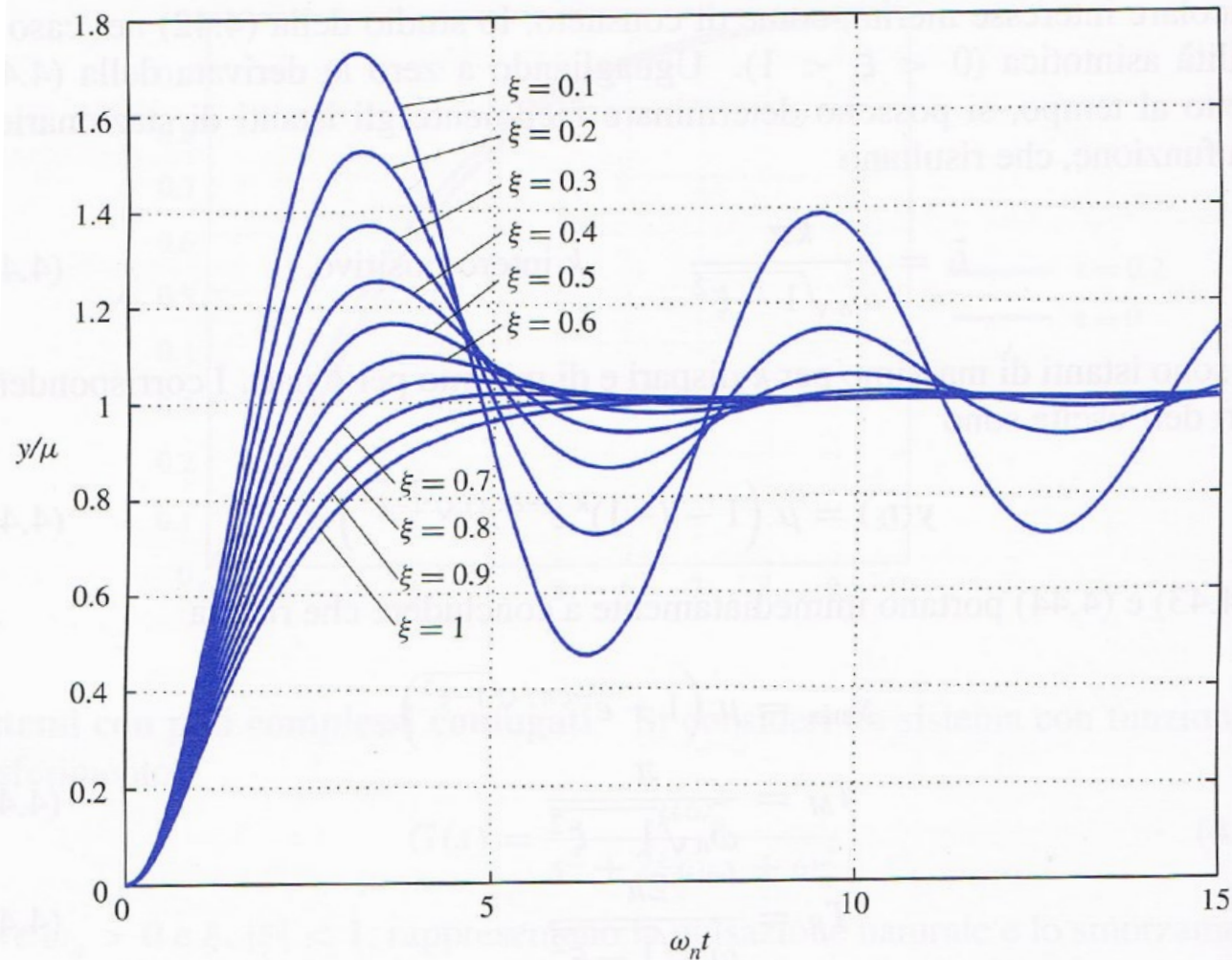
```
mu=9/5;
omegan=sqrt(5);
T=2*pi/omegan
step(9,[1 0 9],0:0.01:20)
grid
axis([0 20 -1 6])
```

T =

2.8099

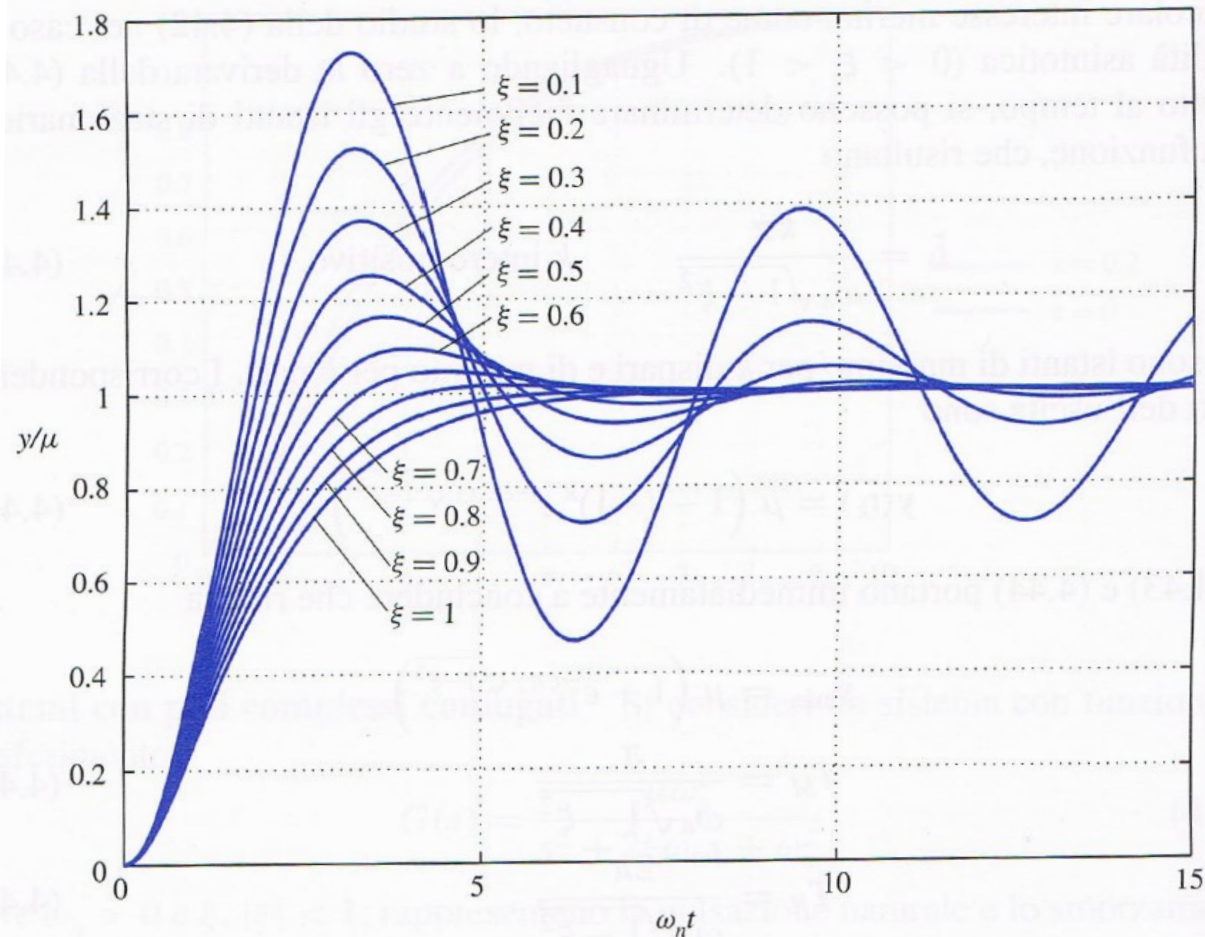


Risposta parametrizzata



Parte con tangente piatta (grado relativo 2)

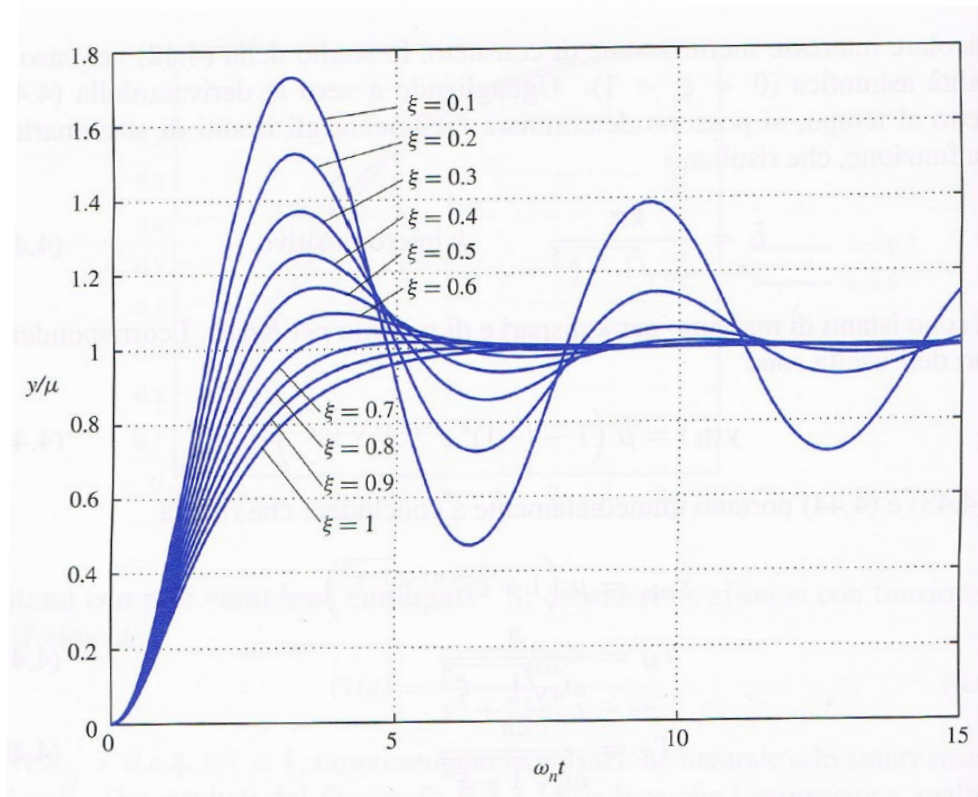
Risposta parametrizzata



ω_n ***Dilata/contracte l'asse dei tempi della curva parametrizzata***

ξ ***Sovraelongazione percentuale, e rapidità di estinzione delle oscillazioni (rapporto di decadimento)***

Periodo dell'oscillazione e sovraelongazione percentuale



Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

**Istante del primo
punto di massimo**

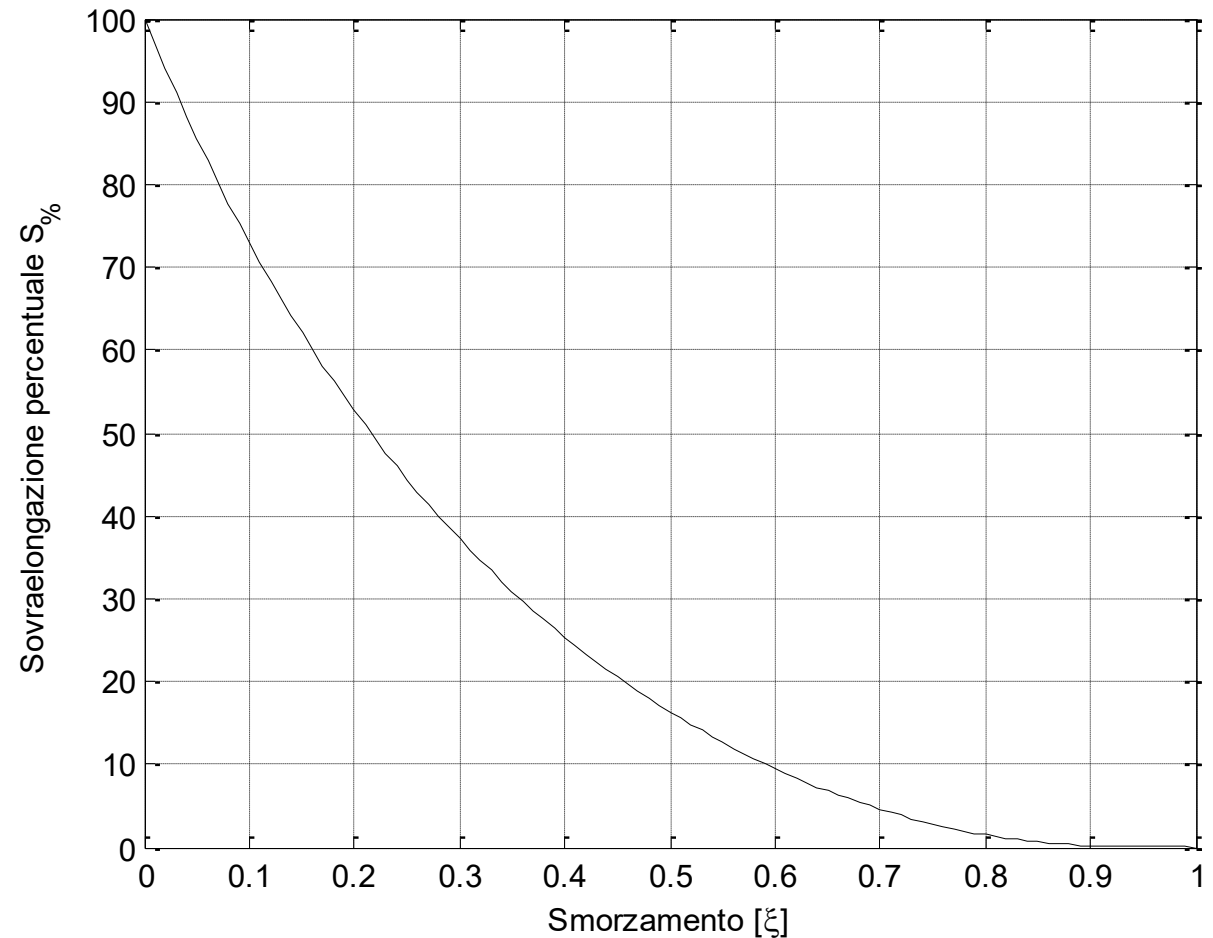
$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$S_{\%} = 100 \frac{y_{max} - \mu}{\mu} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

**Sovraelongazione percentuale
(dipende unicamente dallo
smorzamento)**

Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

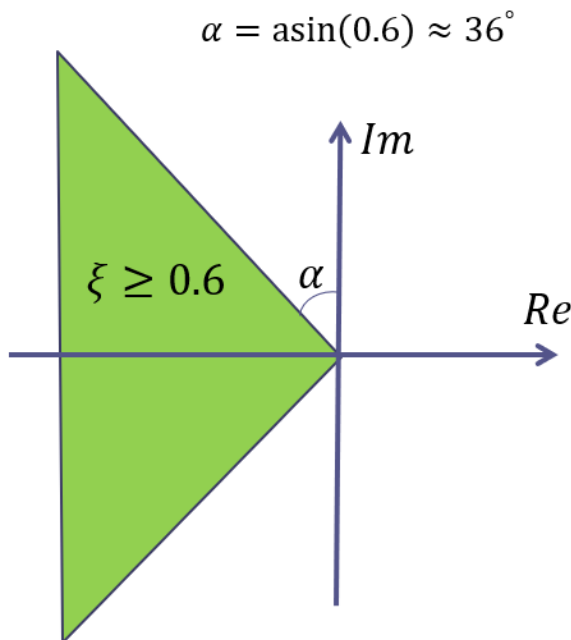


```
xi=0:0.01:1;
s=100*exp((- (xi*pi) ./ (sqrt(1-xi.^2))));
plot(xi,s,'k'),grid
xlabel('Smorzamento [\xi]')
ylabel('Sovraelongazione percentuale S_%)
```

Come possiamo garantire che in un sistema di controllo la sovraelongazione sia, ad esempio, inferiore al 10 % ?

Sulla base del grafico precedente, desumiamo come per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore del 10% è sufficiente garantire che **tutti i poli complessi coniugati della FdT a ciclo chiuso abbiano uno smorzamento maggiore o uguale di 0.6.**

In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno di una **regione ammissibile**



Ragionamenti di questo tipo saranno alla base di una parte delle metodologie di progetto che vedremo più avanti («Sintesi mediante Luogo delle Radici»)

Tempi di assestamento

$$T_{a\varepsilon\%} \cong -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(0.01\varepsilon)$$

Formula approssimata, valida con buona approssimazione per valori di smorzamento non eccessivamente prossimi ad 1 ($\xi < 0.8$)

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{3}{\xi\omega_n}$	$\frac{3.9}{\xi\omega_n}$	$\frac{4.6}{\xi\omega_n}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	3τ	3.9τ	4.6τ
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	4.7τ	5.8τ	6.6τ

Tempi di assestamento – relazioni approssimate

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n}$$

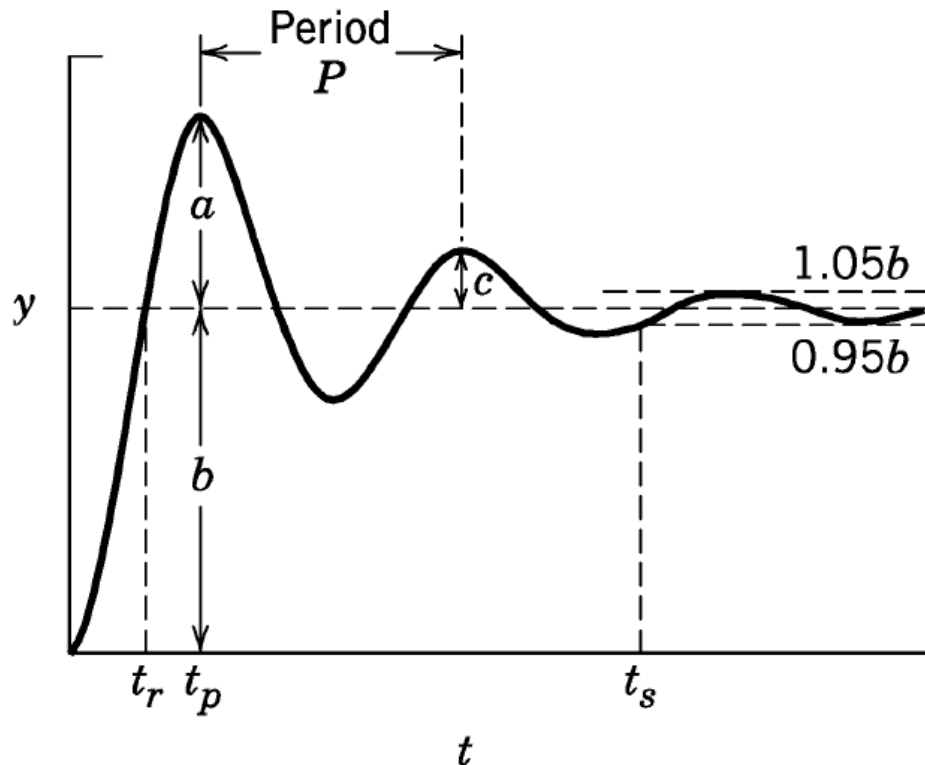
«costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	3τ	4τ	5τ
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	5τ	6τ	7τ

Rapporto di decadimento delle oscillazioni

Decay Ratio. $DR = c/a$ (where c is the height of the second peak).

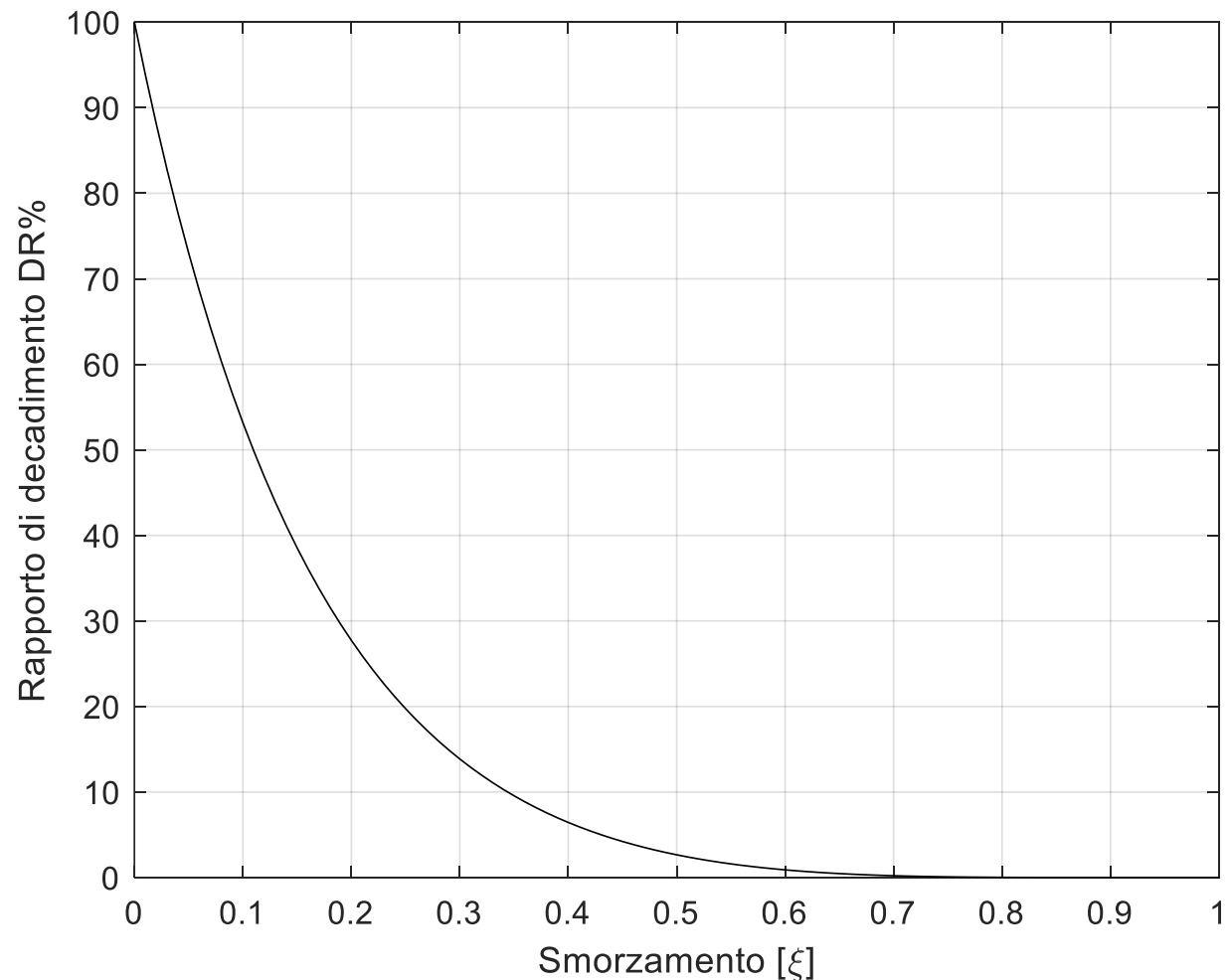
Dipende unicamente dallo smorzamento



$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Rapporto di decadimento percentuale delle oscillazioni

$$DR\% = 100e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Esempio

$$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$$

Forma generale

$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

Determinazione del guadagno statico, della pulsazione naturale e dello smorzamento

$$\begin{array}{ll} \omega_n^2 = 7 & \Rightarrow \omega_n = \sqrt{7} \approx 2.645 \text{ rad/sec} \\ \mu \omega_n^2 = 14 & \mu = 14 / \omega_n^2 = 14 / 7 = 2 \end{array}$$

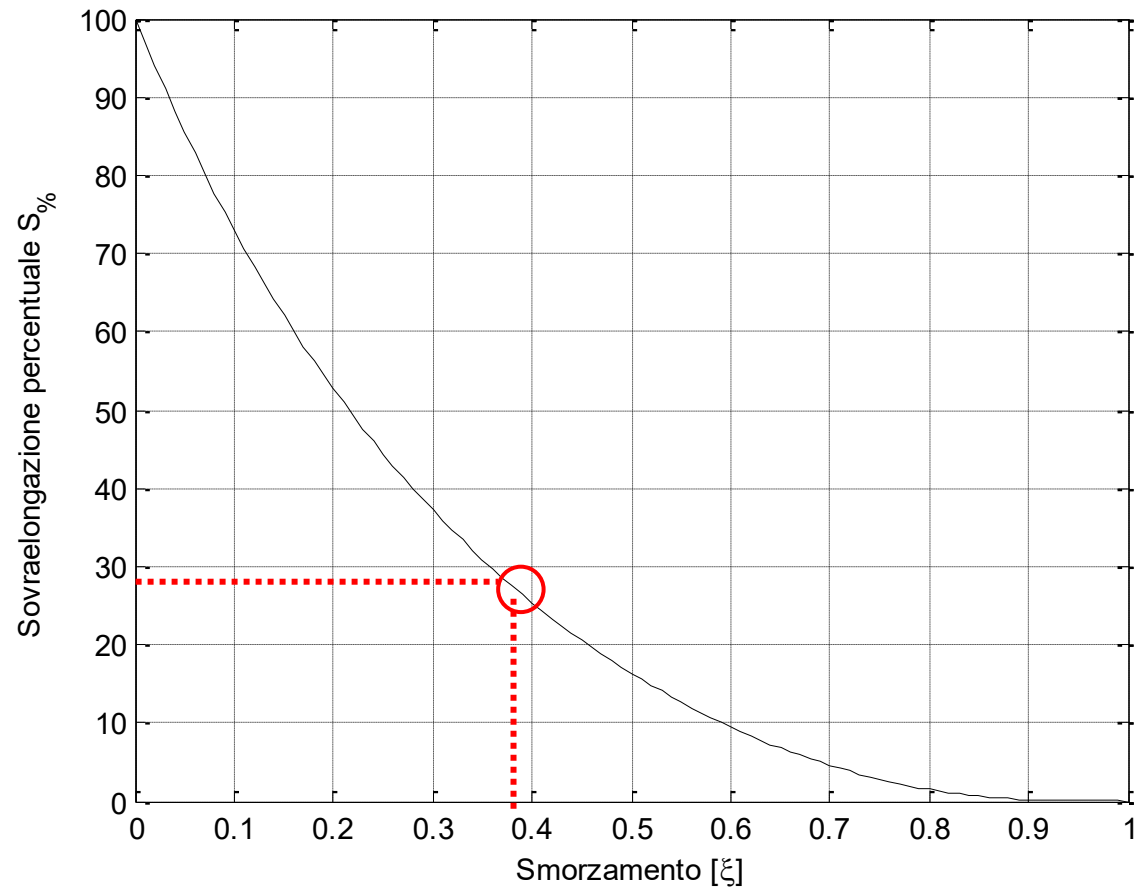
$$2\xi \omega_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi = 1 / \omega_n \approx 0.37$$

Sovraelongazione percentuale

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi \approx 0.37$$

$$S_{\%} \approx 28$$



Il valore massimo dell'uscita durante il transitorio sarà pertanto

$$y_{max} = \mu + 0.28 \mu = 1.28\mu = 2.56$$

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} \approx 1.02 \text{ s} \quad \text{Costante di tempo equivalente e tempi di assestamento}$$

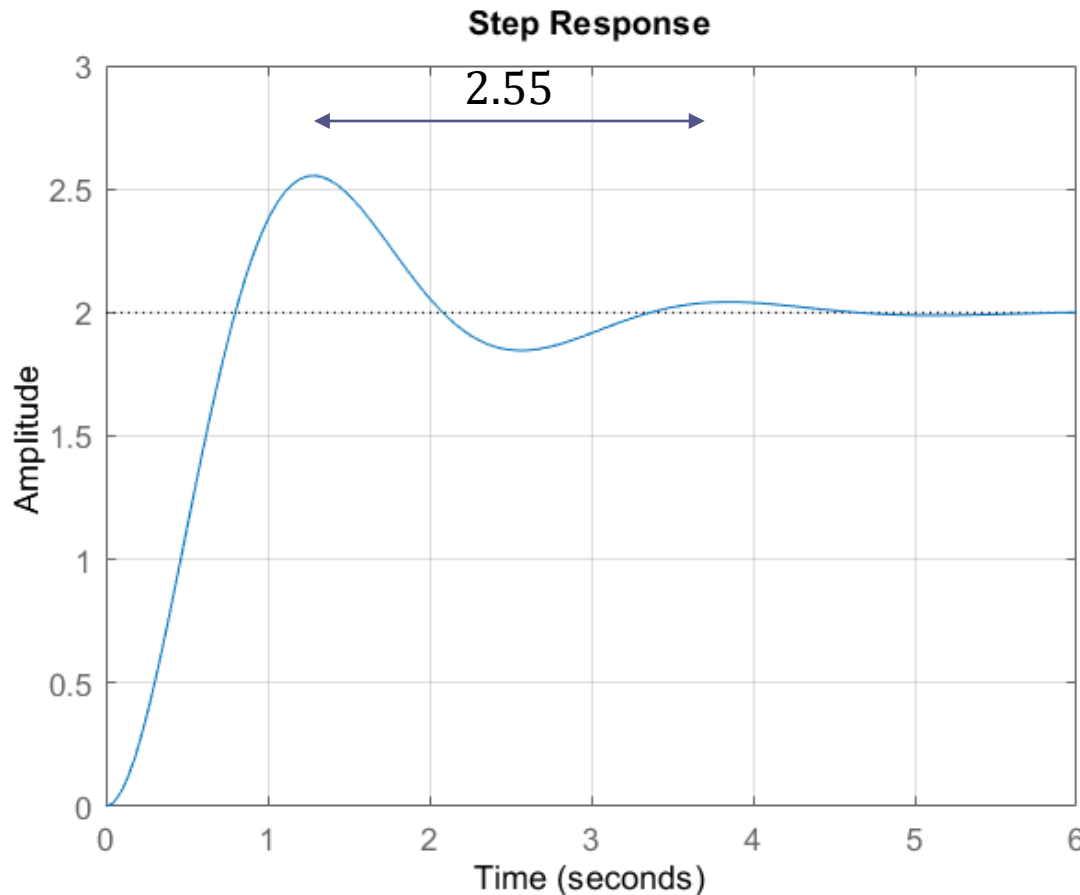
	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$	$3\tau_{eq}$	$4\tau_{eq}$	$5\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{14}{s^2 + 2s + 7}$	3.06 s	4.08 s	5.10 s

Periodo della oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 2.55 \text{ s}$$

Istante del primo punto di massimo

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.27 \text{ s}$$



$$S_{\%} \approx 28$$

$$\hookrightarrow y_{max} = 2.56$$

$$T_{a5\%} \approx 3 \text{ s}$$

Trascorsi 3 secondi la risposta evolve nella fascia [1.9, 2.1]

$$DR = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.08$$

L'ampiezza di ciascuna oscillazione è pari all' 8% di quella precedente

Confrontiamo le risposte di un sistema del primo ordine $F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$

e di un sistema del secondo ordine $F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$

imponendo che la costante di tempo T del sistema del primo ordine e la costante di tempo equivalente $\frac{1}{\xi\omega_n}$ del sistema del secondo ordine siano **coincidenti**

$$T = \frac{4}{5}$$

$$\xi = 0.7$$

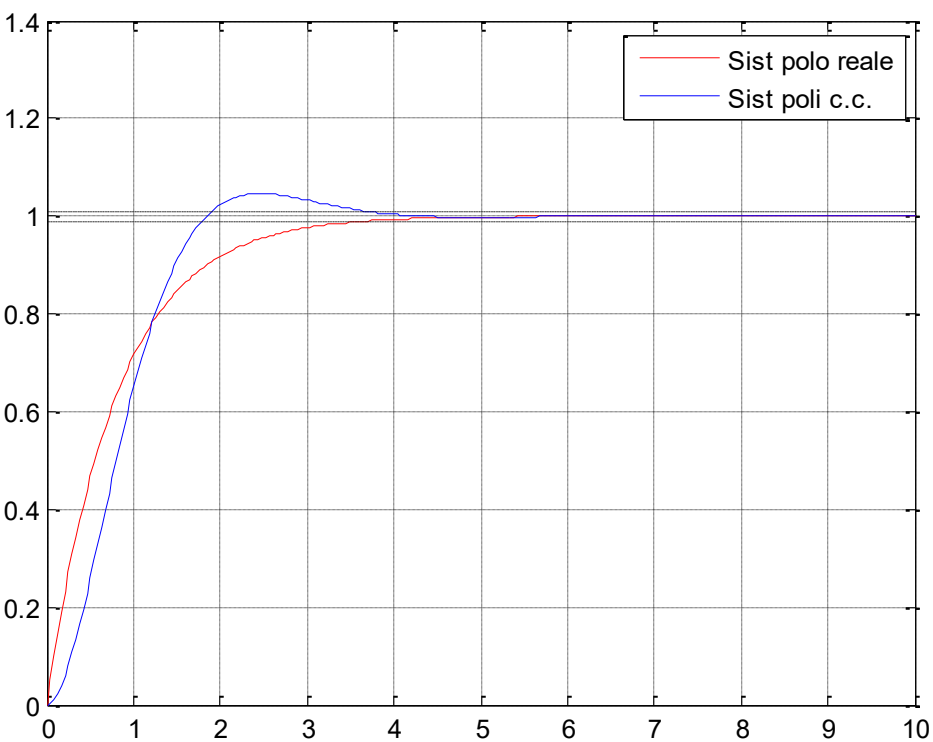
$$\omega_n = 1.785$$

$$\xi\omega_n = \frac{1}{T} = \frac{5}{4}$$

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{4}{5}$$

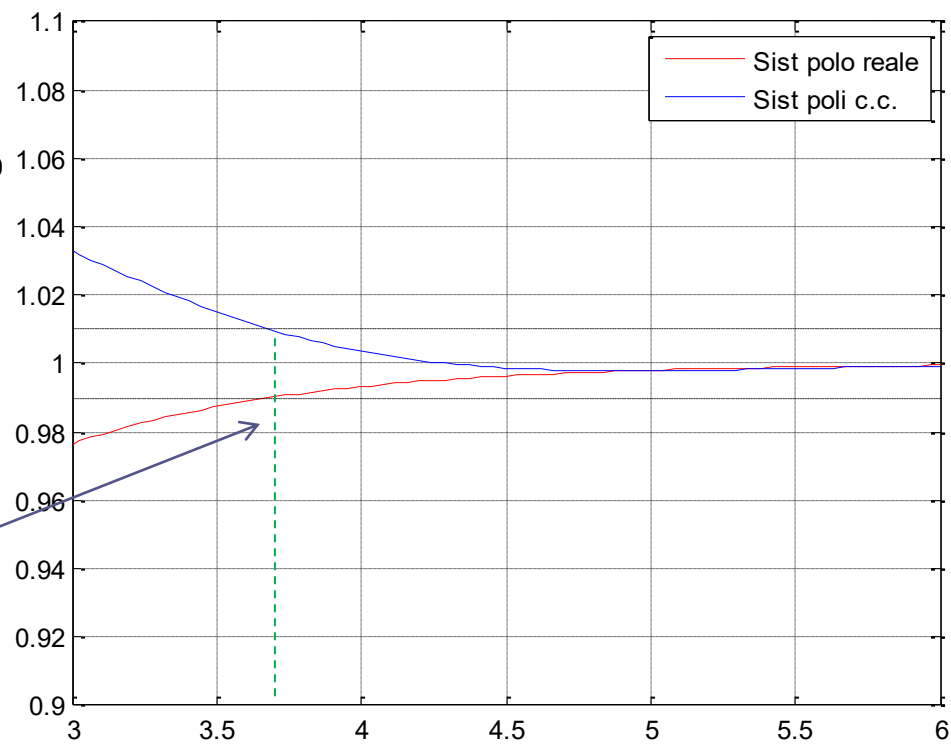
Ci attendiamo per le risposte al gradino di entrambi i sistemi un tempo di assestamento all'1% pari a 4.6 volte T (o equivalentemente 4.6 volte la costante di tempo equivalente τ_{eq})

$$T_{a1\%} = 4.6T = 4.6\tau_{eq} = 3.68s$$



$$T_{a1\%} = 3.68s$$

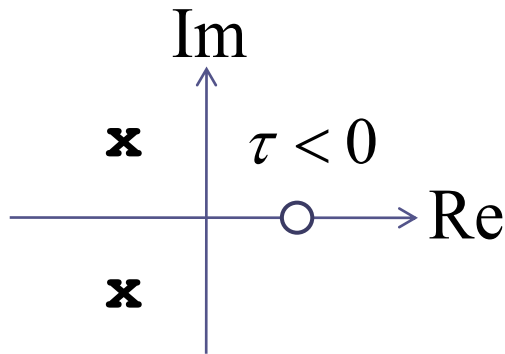
ZOOM



Sistema con due poli complessi coniugati e uno zero reale

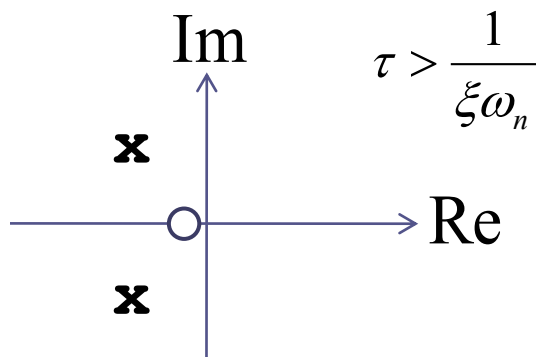
$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2 (\tau s + 1)}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\omega_n > 0 \quad |\xi| < 1$$

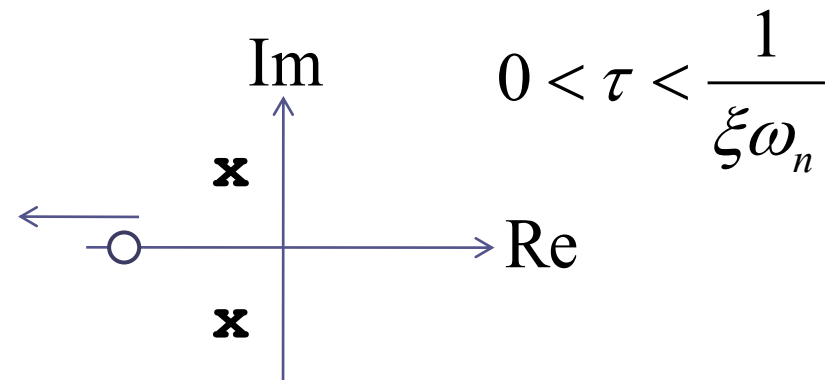


A. Zero nel semipiano destro:
undershooting e successive oscillazioni smorzate verso il regime

B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC. Incremento della sovraelongazione.



C. Zero in alta frequenza:
progressivamente ininfluyente



A. Zero nel semipiano destro

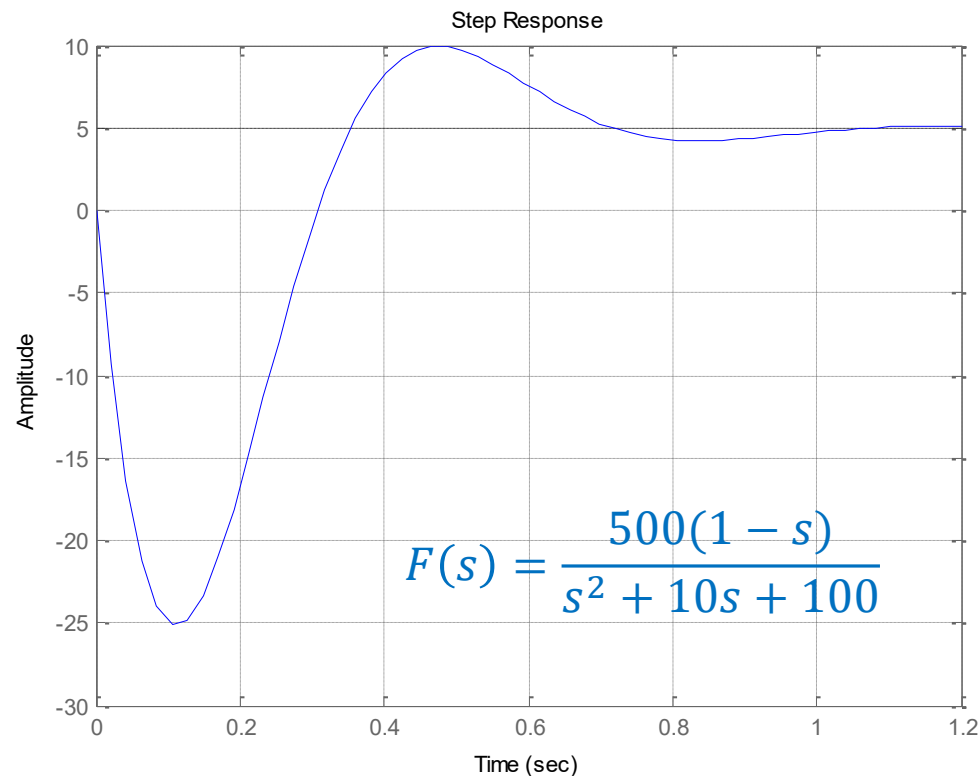
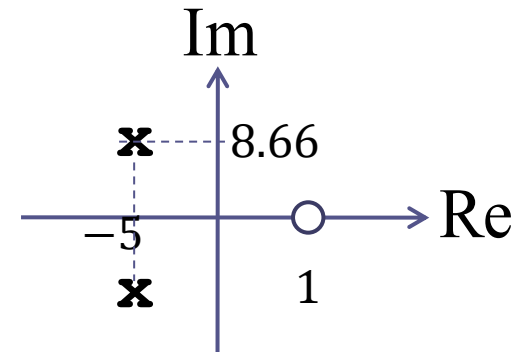
Consideriamo un sistema del secondo ordine avente guadagno statico pari a 5, uno zero in 1, ed una coppia di poli complessi coniugati con i seguenti valori per lo smorzamento e la pulsazione naturale

$$\xi = 0.5 \quad \omega_n = 10$$

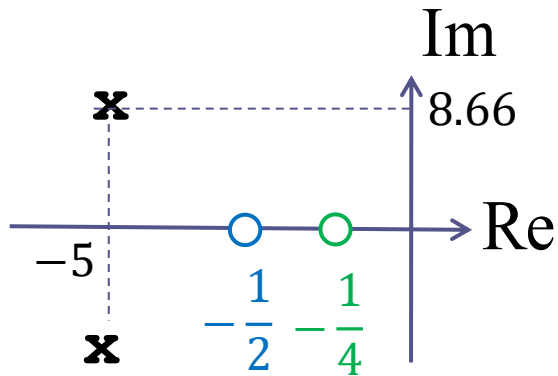
Le parti reale e immaginaria della coppia di poli CC sono

$$a = -\xi\omega_n = -5$$

$$b = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 8.66$$

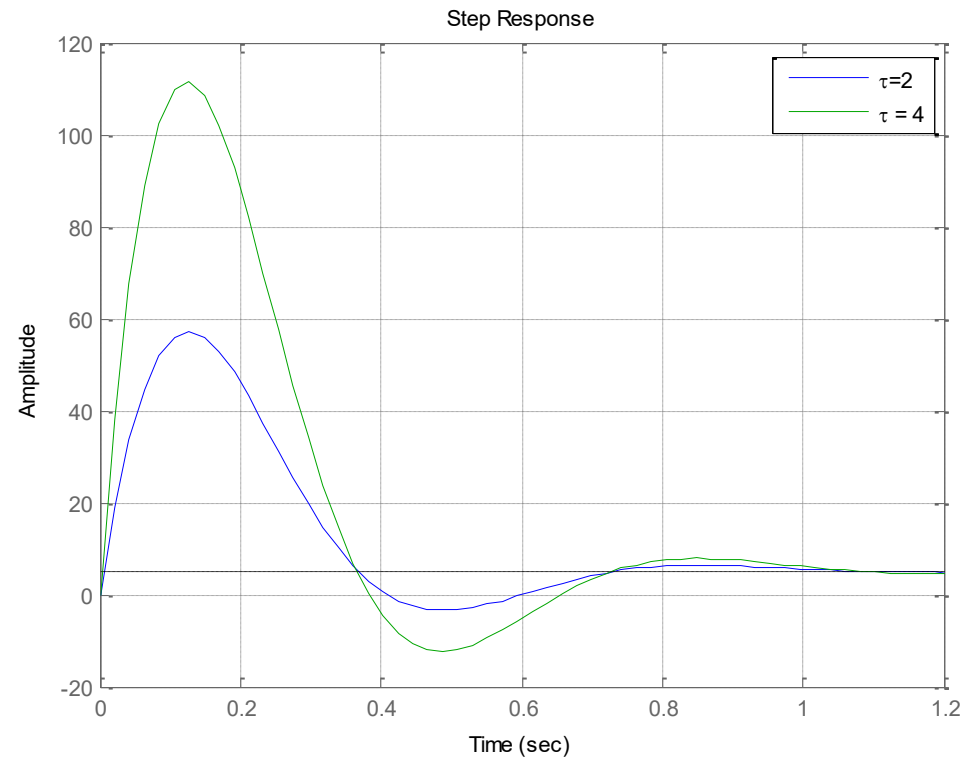


B. Zero reale negativo la cui parte reale è più in bassa frequenza rispetto alla coppia di poli CC



Stesso guadagno statico (5) e stessa coppia di poli CC del precedente esempio.

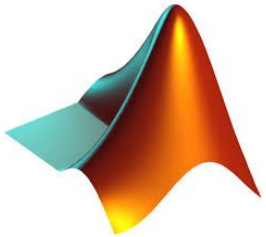
Consideriamo due distinte collocazioni per lo zero in bassa frequenza



$$F(s) = \frac{500(1 + 2s)}{s^2 + 10s + 100} \quad F(s) = \frac{500(1 + 4s)}{s^2 + 10s + 100}$$

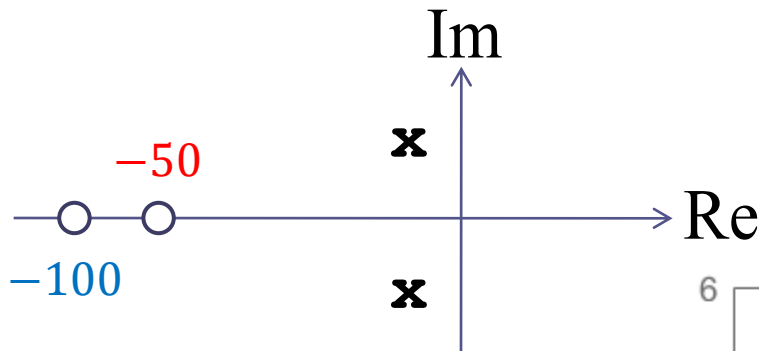
Lo zero più vicino all'origine induce una sovraelongazione maggiore, e ben più grande di quella (pari al massimo al 100%) del sistema avente solo i due poli CC

Codice Matlab per la costruzione del grafico della slide precedente



```
close all
clear all
tau=2;
xi=0.5;
omegan=10;
mu=5;
F1=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
tau=4;
F2=tf(mu*omegan^2*[tau 1],[1 2*xi*omegan omegan^2]);
step(F1,F2),grid
legend('\tau=2','\tau = 4')
```

C. Zero in alta frequenza

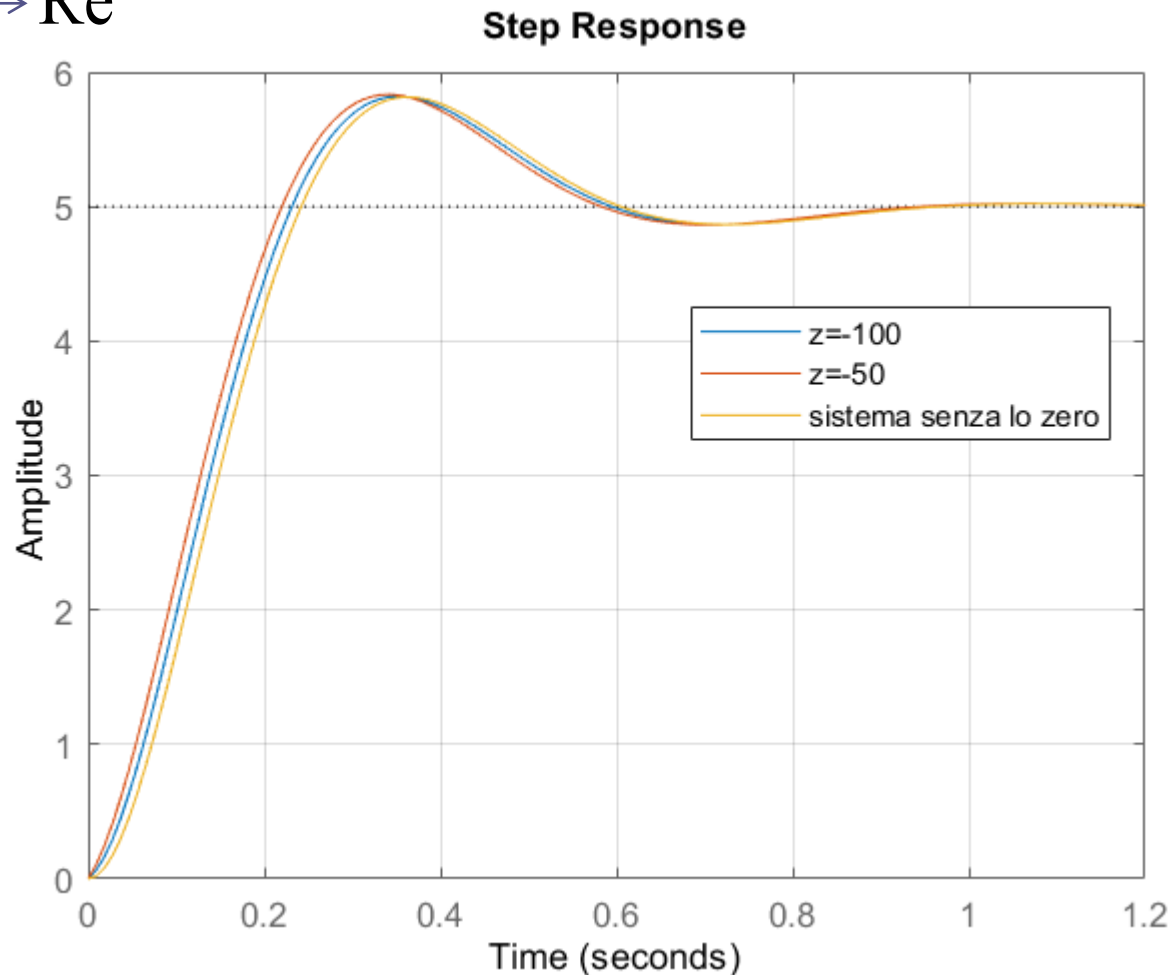


Consideriamo due distinte collocazioni per lo zero in alta frequenza.

Stesso guadagno statico e stessa coppia di poli CC del precedente esempio.

La presenza dello zero sortisce effetti debolmente apprezzabili.

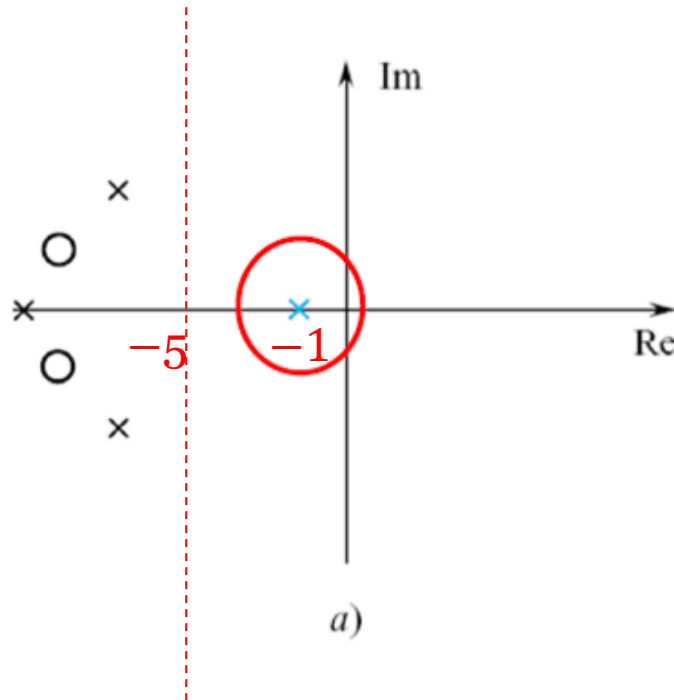
Lo zero in -50 altera la risposta in misura maggiore rispetto allo zero in -100



Poli dominanti in presenza di poli complessi coniugati

In presenza di poli complessi coniugati, per determinare se tale coppia di poli sia dominante, o possa essere trascurata, **si deve fare riferimento alla loro parte reale (o, in altri termini, alla loro costante di tempo equivalente)** e successivamente applicare analoghe considerazioni rispetto a quelle viste nel caso dei poli reali.

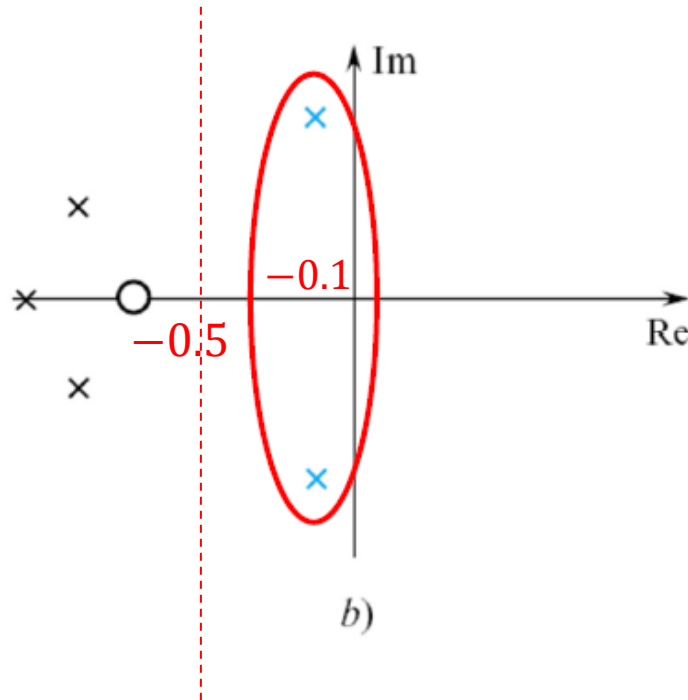
«RETTA LIMITE»



Il polo reale in -1 risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in -5 possono essere rimossi dalla FdT senza che la risposta al gradino e le principali caratteristiche dinamiche risultino apprezzabilmente modificate

RETTA LIMITE



La coppia di poli CC avente parte reale -0.1 risulta essere dominante.

Tutti i poli e gli zeri alla sinistra della «retta limite» che interseca l'asse reale in -0.5 possono essere rimossi dalla FdT senza che le sue caratteristiche dinamiche principali risultino apprezzabilmente modificate

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

Polo reale negativo in -10

Analisi del termine $0.002s^2 + 0.02s + 1$

Imponiamo l'uguaglianza membro a membro con la forma generale $\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1$ del termine trinomio

da cui si desume

$$\frac{1}{\omega_n^2} = 0.002 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{0.002}} = 22.36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2} 0.02 \omega_n = 0.22$$

Poiché $\omega_n > 0$ e $|\xi| < 1$ la coppia di radici è complessa coniugata. In particolare, poiché $0 < \xi < 1$ siamo in presenza di una coppia di poli a parte reale negativa.

Parte reale: $a = -\xi \omega_n = -5$

Parte immaginaria: $b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 21.8$

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

Polo reale negativo in -10

Analisi del termine $s^2 + 0.1s + 1$

Calcoliamo le radici con la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$\frac{-0.1 \pm \sqrt{0.01 - 4}}{2} = \frac{-0.1 \pm j\sqrt{3.99}}{2} = -0.05 \pm j0.99$$

$a = -0.05$
 $b = \pm 0.99$

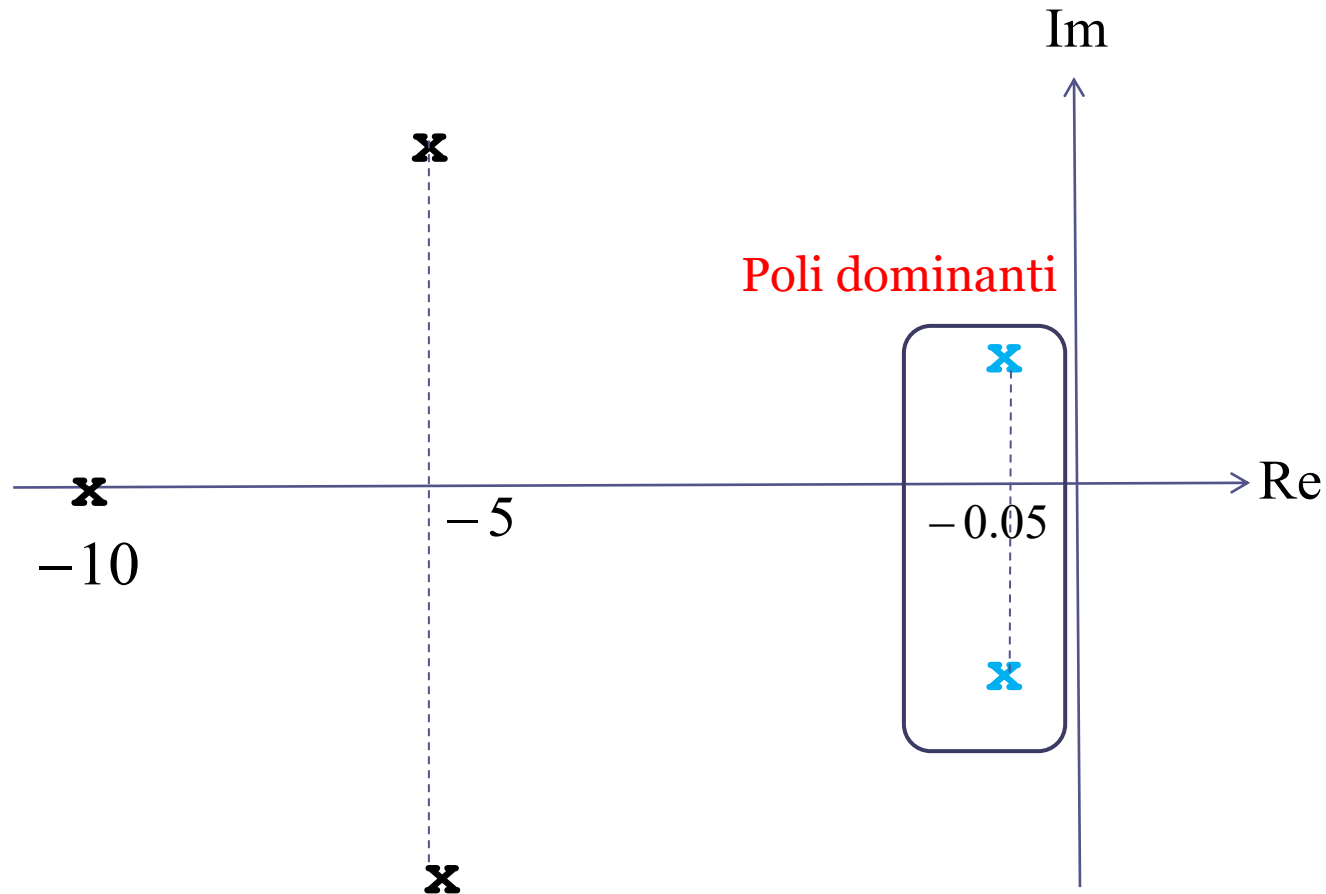
Determiniamo la pulsazione naturale e lo smorzamento

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.99$$

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.05$$

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

-10 $-5 \pm j21.8$ $-0.05 \pm j0.99$



$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

$$G^{appr}(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s + s^2)} \quad \begin{matrix} \omega_n = 0.99 \\ \xi = 0.05 \end{matrix}$$



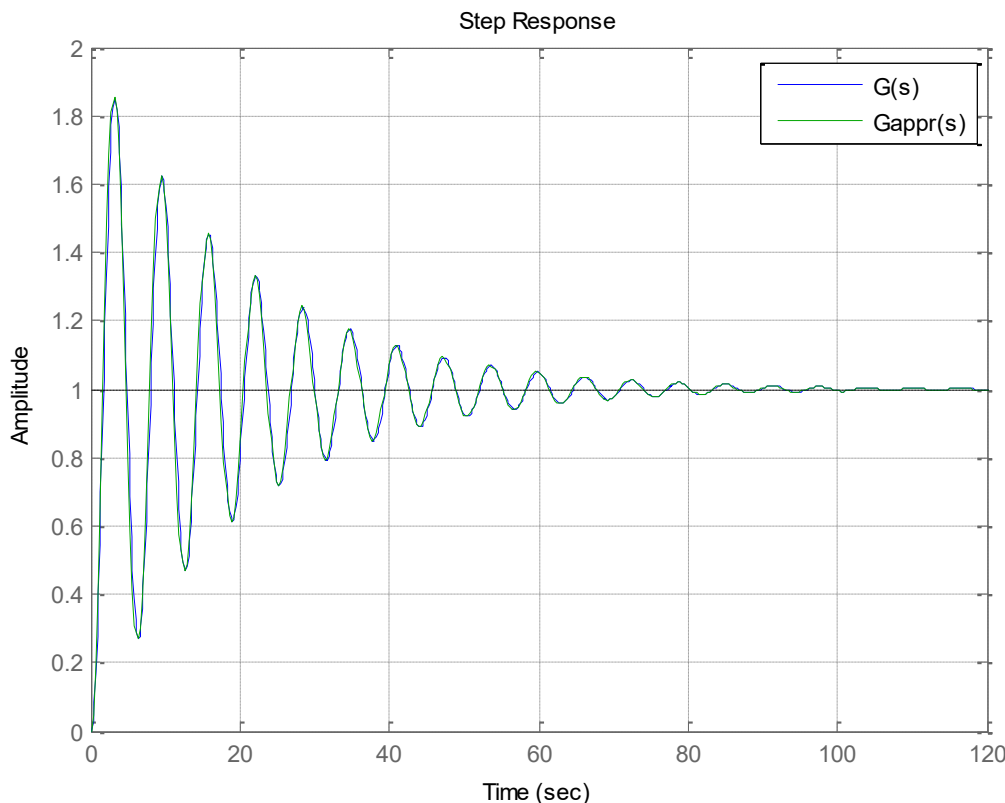
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 6.3 \text{ s}$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 3.15 \text{ s}$$

$$S_{\%} \approx 90 \quad DR_{\%} \approx 80$$

$$T_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} = 20 \text{ s}$$

$$T_{a5\%} = 3T_{eq} = 60 \text{ s}$$



```
denG=conv([0.1 1],[.002 .02 1]);
denG=conv(denG,[1 0.1 1]);
G=tf(1,denG);
Gappr=tf(1,[1 0.1 1]);
step(G,Gappr),grid
legend('G(s)','Gappr(s)')
```

ESERCIZIO

Un servomeccanismo di posizione realizzato per mezzo di un motore elettrico in corrente continua è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale

$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = 4V(t)$$

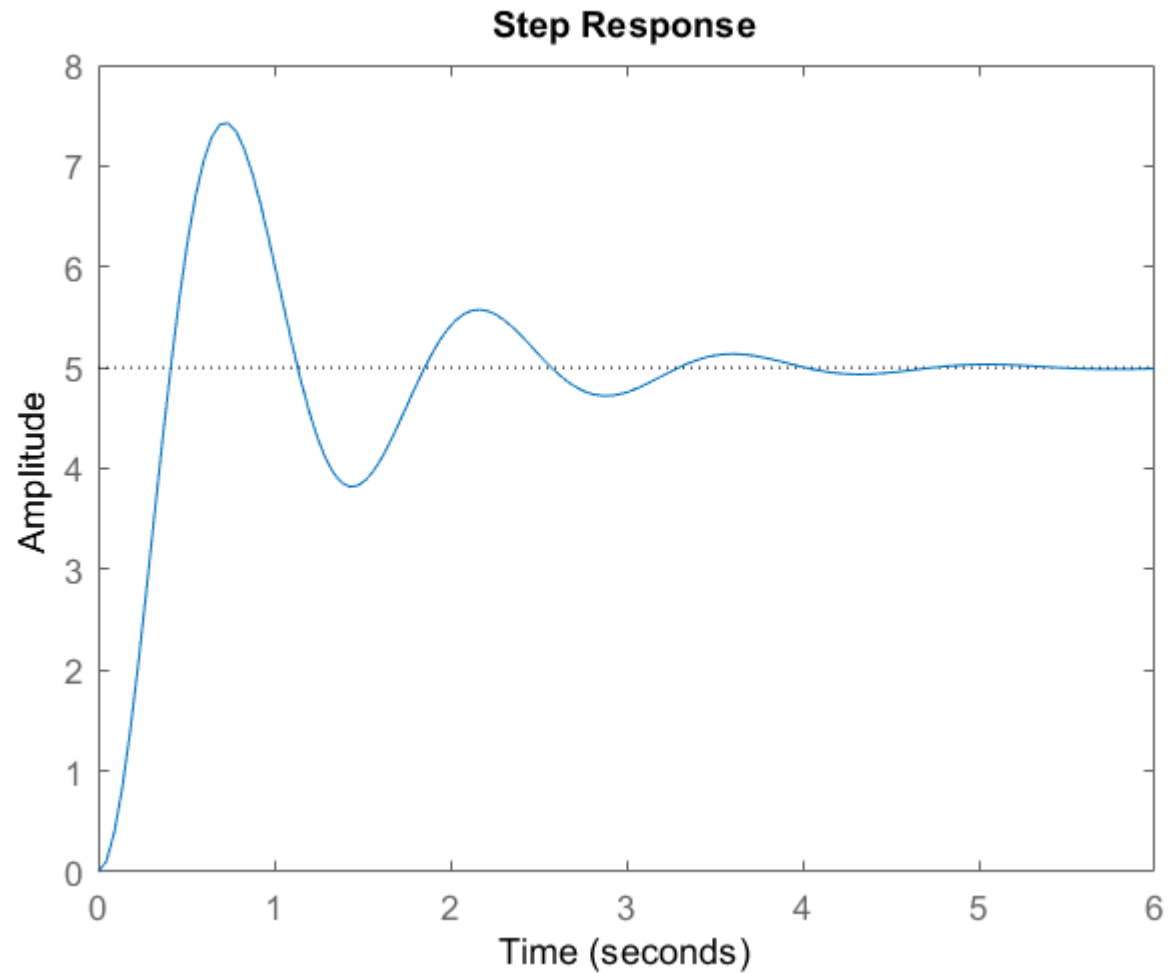


in cui $\theta(t)$ denota la posizione angolare dell'albero del motore, e $V(t)$ la tensione di alimentazione.

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta a ciclo chiuso con un set point costante $\theta^{\text{des}}(t)=5$ nel caso si impieghi un regolatore proporzionale con guadagno $K=5$.

Per il processo a ciclo chiuso, si scriva la relazione ingresso-uscita sotto forma di equazione differenziale (ingresso: $\theta^{\text{des}}(t)$, uscita: $\theta(t)$).

SOLUZIONE



Equazione differenziale che mette in relazione il set point e la posizione angolare del motore

$$\ddot{\theta}(t) + 2 \dot{\theta}(t) + 20 \theta(t) = 20\theta^{des}(t)$$