

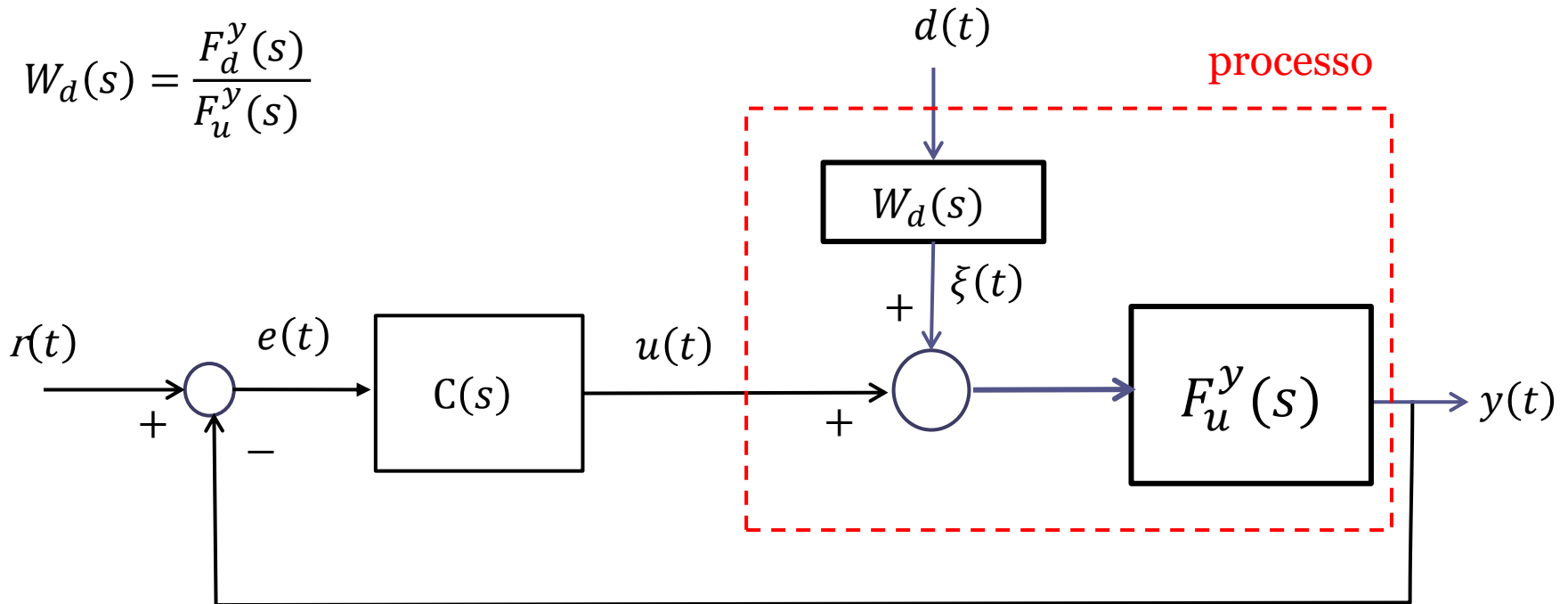
Controlli automatici

Comportamento a regime dei sistemi di controllo – parte 1

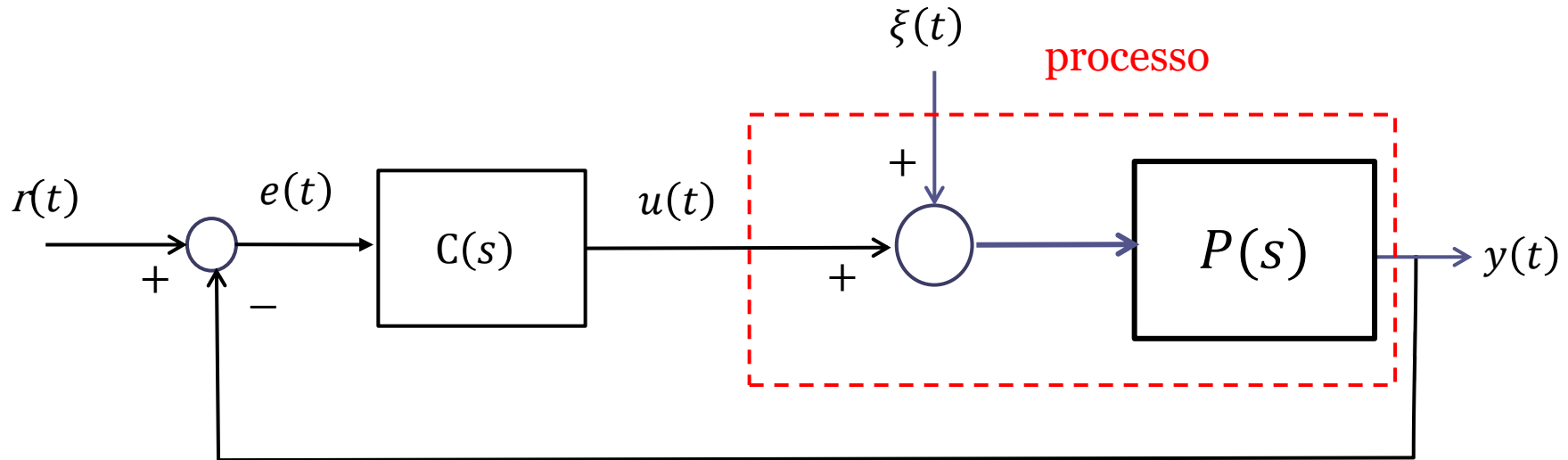
Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Il comportamento a regime dei sistemi di controllo si riferisce alla analisi degli effetti **a transitorio esaurito** di ingressi e disturbi polinomiali (segnali costanti, a rampa, a parabola, etc., detti anche “**canonici**”) oppure ingressi e disturbi avente andamento **sinusoidale**.

Faremo riferimento a sistemi di controllo a retroazione unitaria

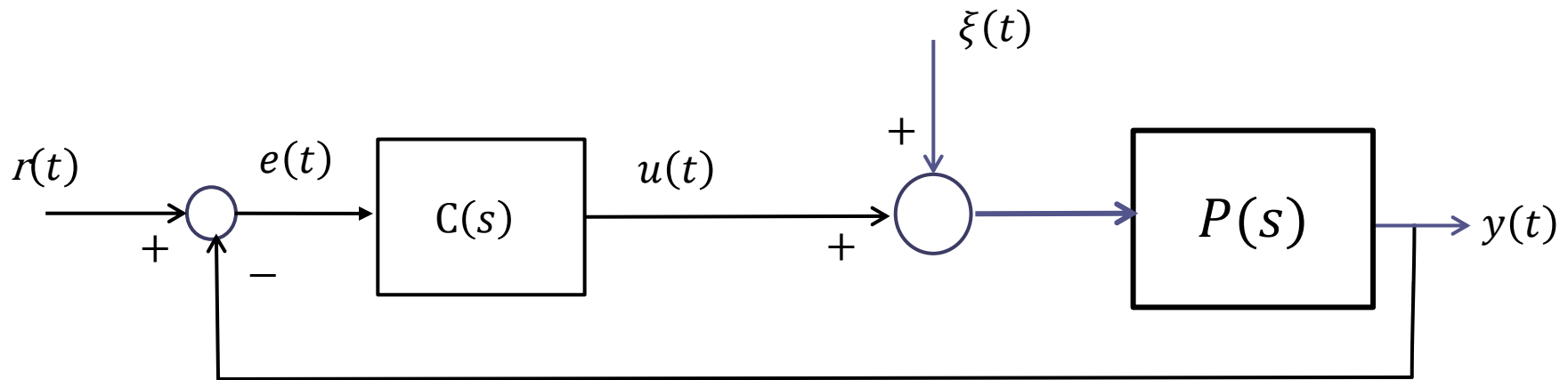


Per lo studio del comportamento a regime possiamo considerare come segnale disturbante di ingresso al sistema di controllo direttamente il segnale $\xi(t)$ che si somma all'uscita del regolatore $C(s)$



Per semplicità di notazione chiameremo inoltre $P(s)$ la FdT fra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita, denotata in precedenza come $F_u^y(s)$.

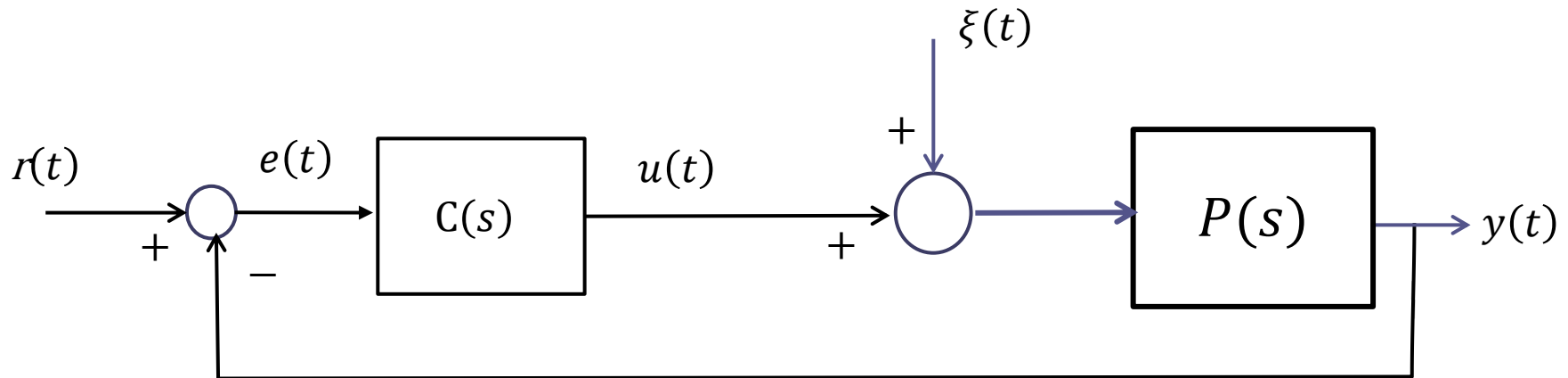
Il **segnale disturbante** $\xi(t)$ influenza il comportamento del sistema di controllo ma la sua evoluzione temporale non è influenzabile dal progettista. Compito del sistema di controllo è pertanto non solo di garantire il comportamento desiderato per l'uscita in condizioni nominali (cioè, senza disturbo) ma anche quello di fare in modo che ove intervengano disturbi appartenenti a determinate classi di segnali (ci riferiremo in prevalenza a disturbi costanti di ampiezza sconosciuta) il loro effetto a regime sulla variabile di uscita sia completamente compensato, o almeno **attenuato** in misura sufficiente.



Per quanto concerne il comportamento a regime per ingressi e disturbi canonici risulta di estremo rilievo la presenza di **poli nell'origine** nel controllore e/o nel processo

E' importante sia il numero complessivo di poli nell'origine che la loro "ripartizione" tra controllore e processo

Il concetto importante e rilevante in tale contesto è quello di "**Tipo del sistema di controllo**", che approfondiremo in seguito.

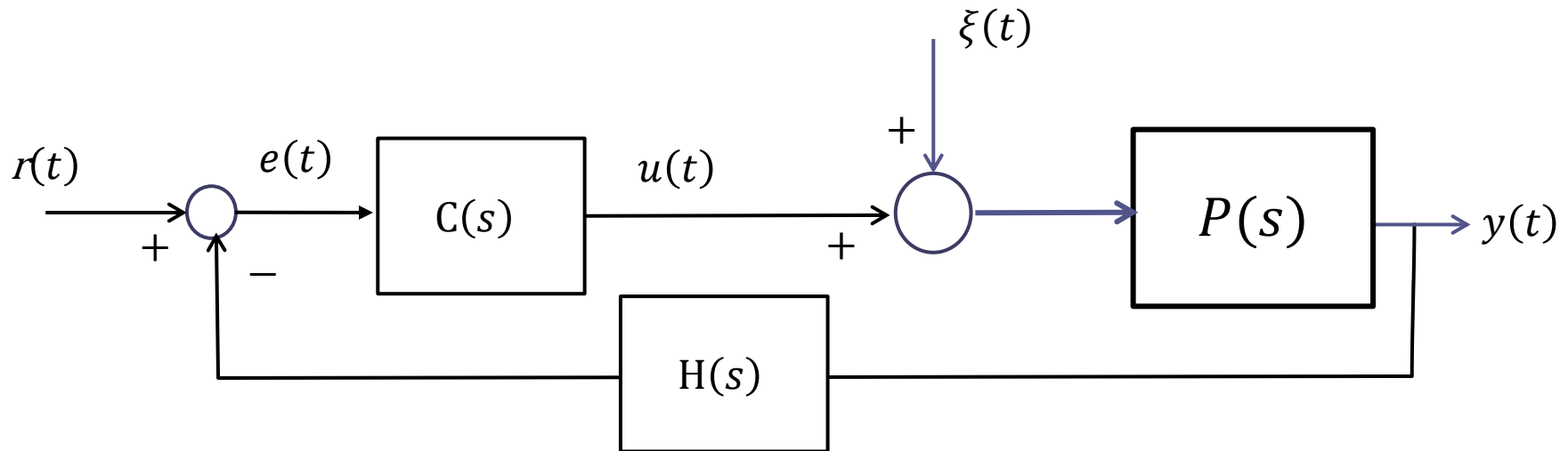


Definiamo o richiamiamo alcune utili Funzioni di Trasferimento (FdT) a ciclo chiuso e relazioni aggiuntive associate al SdC (sistema di controllo) in esame

FdT a ciclo aperto

$$A(s) = C(s)P(s)$$

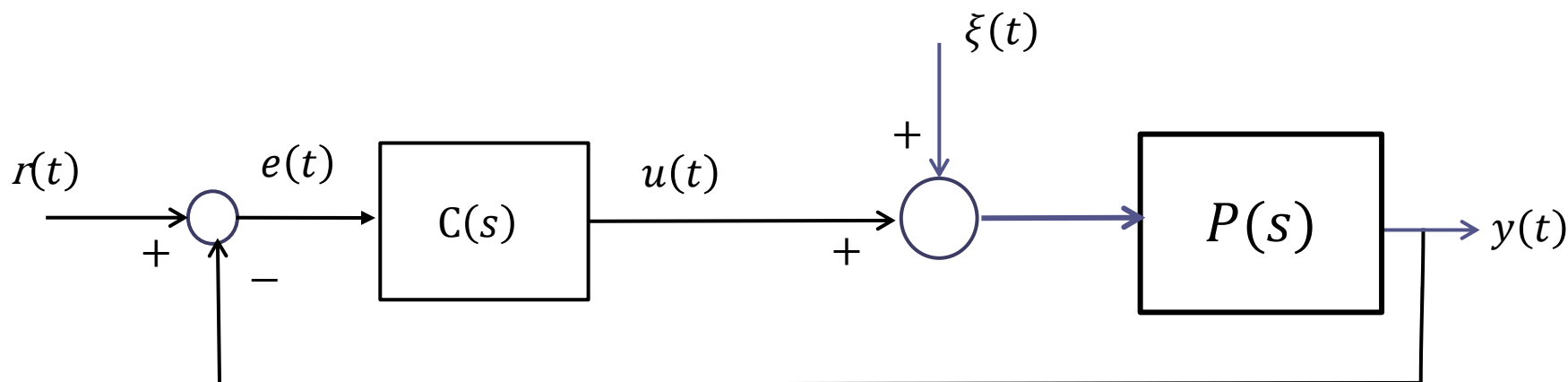
Si presti attenzione al fatto che nel contesto della costruzione del luogo delle radici si è fatto riferimento ad una particolare FdT a ciclo aperto «modificata» (che avevamo chiamato $L(s)$) dalla quale veniva scorporato il guadagno in funzione del quale si desiderava tracciare il luogo delle radici.



Se presente una dinamica nell'anello di retroazione:

FdT a ciclo aperto

$$A(s) = C(s)P(s)H(s)$$



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita (già vista)

$$W_r^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita (già vista)

$$W_{\xi}^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{\Xi(s)} \right|_{r=0} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{P(s)}{1 + A(s)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore

$$W_r^e(s) = \left. \frac{E(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + A(s)}$$

Tutte le considerazioni che svilupperemo in merito al comportamento a regime hanno come prerequisito essenziale che il sistema di controllo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso**

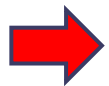
Richiediamo quindi che **l'equazione caratteristica** $1 + C(s)P(s) = 1 + A(s) = 0$ ammetta unicamente soluzioni con parte reale **strettamente negativa**

Se poniamo

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

L'equazione caratteristica può essere espressa come

$$1 + A(s) = 1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)}{D_C(s)D_P(s)} = 0$$



$$P_{car}(s) = N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)$$

Il pol. caratteristico del sistema a ciclo chiuso è la somma dei prodotti fra numeratori ed i denominatori del controllore e del processo

Se il sistema di controllo risulta essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso, sia la FdT a ciclo chiuso tra il set-point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{N_C(s)N_P(s)}{N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)}$$

che la FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita

$$W_\xi^y(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{D_C(s)N_P(s)}{N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)}$$

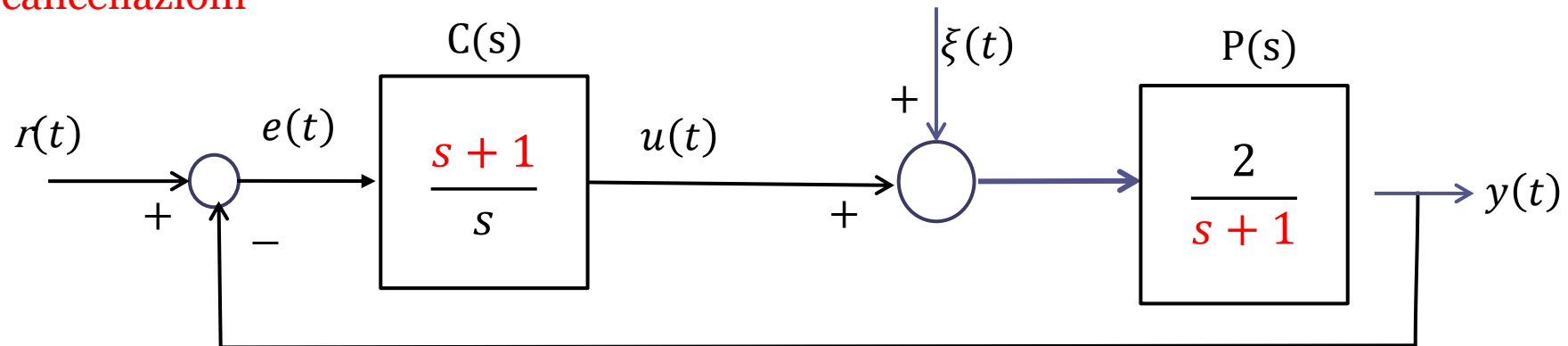
che anche la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{D_C(s)D_P(s)}{N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)}$$

avranno tutti i poli a parte reale negativa.

Le tre funzioni di trasferimento hanno infatti (a meno di eventuali **cancellazioni**) il medesimo denominatore $P_{car}(s) = N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s)$

Esempio di cancellazioni



$$P_{car}(s) = N_C(s)N_P(s) + D_C(s)D_P(s) = (s+1)2 + s(s+1) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$A(s) = C(s)P(s) = \frac{s+1}{s} \frac{2}{s+1} = \frac{2}{s}$$

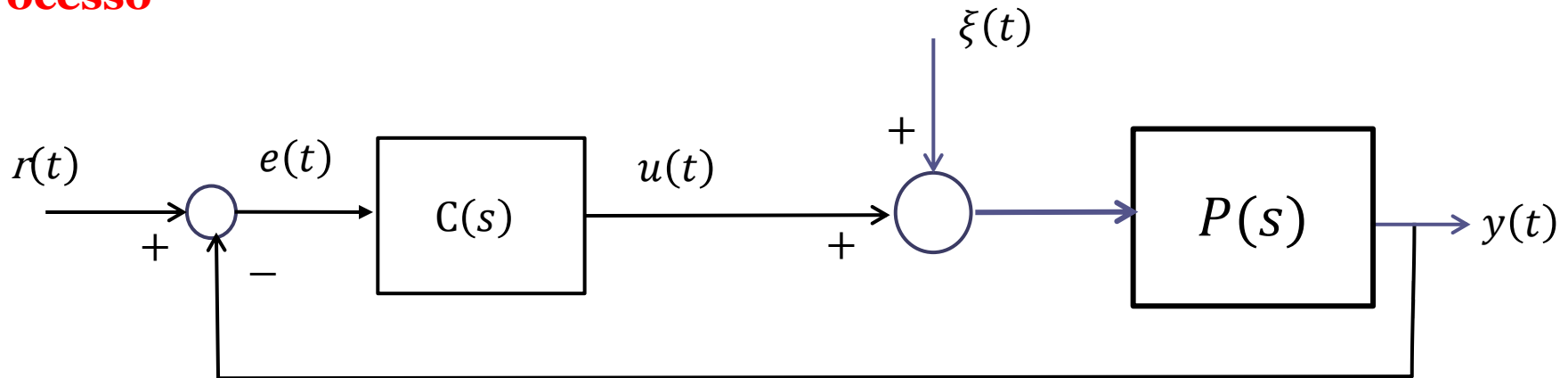
$$W_r^y(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} = \frac{\frac{2}{s}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{2}{s+2}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{P(s)}{1 + A(s)} = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{2s}{(s+1)(s+2)}$$

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + A(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{s}{s+2}$$

Definizione 1 - Tipo di un sistema di controllo

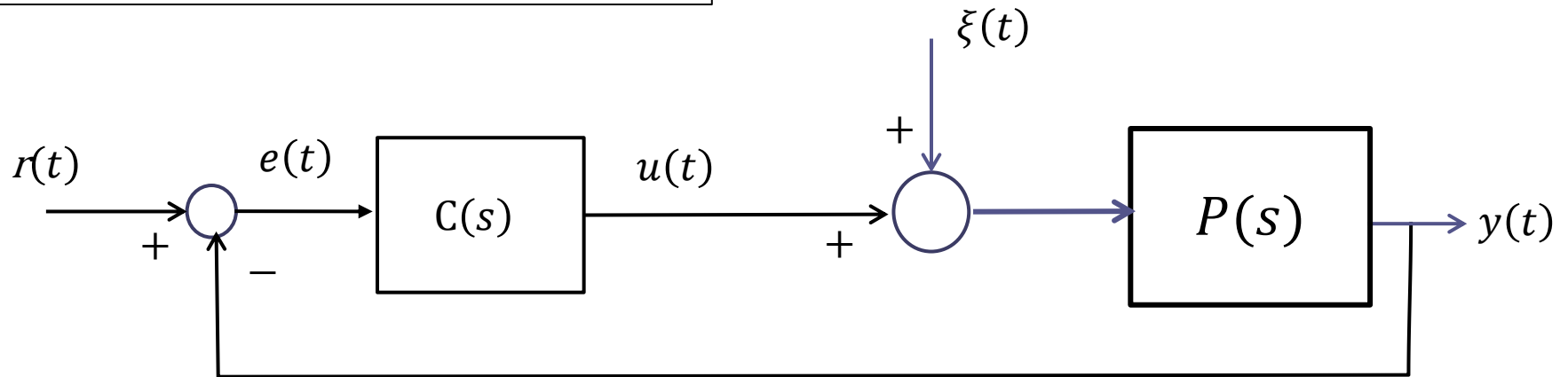
Con riferimento al sistema di controllo in Figura, si definisce **tipo del sistema** il **numero complessivo di poli nell'origine presenti nel controllore e nel processo**



Un sistema di controllo potrà pertanto essere di **tipo zero**, di **tipo uno**, di **tipo due**, etc.

Nella pratica quasi mai si eccede il tipo due (a causa dei problemi di stabilità a ciclo chiuso conseguenti alla presenza di un elevato numero di poli nell'origine in catena diretta), e **i sistemi di controllo di tipo uno sono quelli largamente più diffusi**.

Sistemi di controllo di tipo zero



Né il controllore né il processo possiedono poli nell'origine.

Siano μ_C e μ_P i **guadagni statici** di controllore e processo

$$\mu_C = C(0)$$

$$\mu_P = P(0)$$

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante** (e disturbo nullo).

$$r(t) = R^* = \text{cost.} \qquad \xi(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione

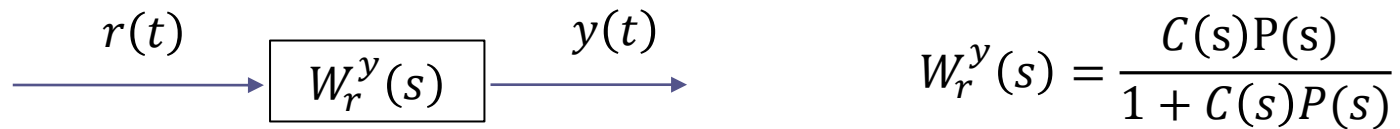
$$Y(s) = W_r^y(s)R(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \cdot \frac{R^*}{s}$$

Teorema del valore finale (la condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta in conseguenza del fatto che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} R^* \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Tale risultato può essere desunto anche ragionando in maniera differente

Il comportamento della variabile di uscita in assenza di disturbo ($\xi(t) = 0$) può essere rappresentato in maniera compatta attraverso il seguente schema:



Possiamo pertanto far riferimento al risultato, illustrato in precedenza nel corso, che stabilisce come la risposta al gradino di un sistema dinamico asintoticamente stabile (come lo è, per ipotesi, la FdT a ciclo chiuso $W_r^y(s)$) converga a regime al valore costante dato dal prodotto fra il guadagno statico della FdT (che vale $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$) e l'ampiezza del gradino in ingresso.

Nell'ipotesi quindi che $r(t) = R^* = \text{cost.}$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

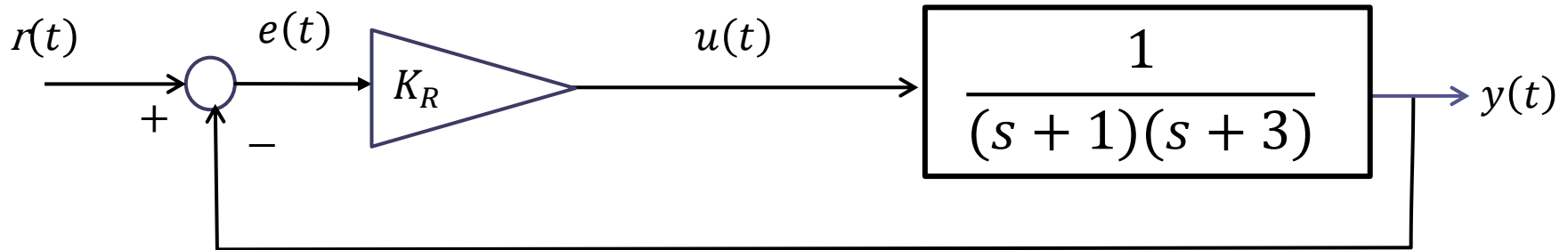
Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, l'uscita non converge al valore costante del **set-point**. E' sempre presente (**anche in assenza di disturbi**) un errore a regime che dipende dai guadagni statici di regolatore e processo (in realtà dipende in maniera aggregata dal loro prodotto).

Incrementando il guadagno statico μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si riduce la differenza fra il valore di regime dell'uscita ed il valore del set-point (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende ad 1 al crescere di μ_C)

Si presti attenzione al fatto che **il guadagno del controllore non può essere aumentato a piacere**, in quanto **deve sempre essere garantita la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**. Il LdR ci permette di determinare se sussista o meno il rischio che valori eccessivamente elevati del guadagno del controllore possano destabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

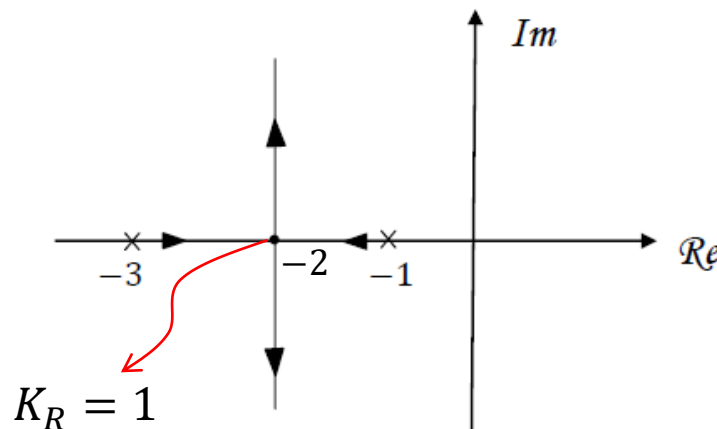
Esempio



Si valuti il comportamento a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta ad un set point costante di ampiezza 2 in corrispondenza dei valori di guadagno del controllore $K_R = 2$, $K_R = 20$, $K_R = 100$

In primis si deve verificare che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile in corrispondenza dei valori indicati per il guadagno del controllore

LdR:



Il luogo delle radici rivela come il sistema di controllo in esame è **asintoticamente stabile a ciclo chiuso per ogni valore di K_R .**

Taratura del
punto doppio
(collocato in -2)

Possiamo quindi applicare la relazione vista in precedenza.

Il guadagno statico del processo $P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ è $\mu_P = P(0) = \frac{1}{3}$

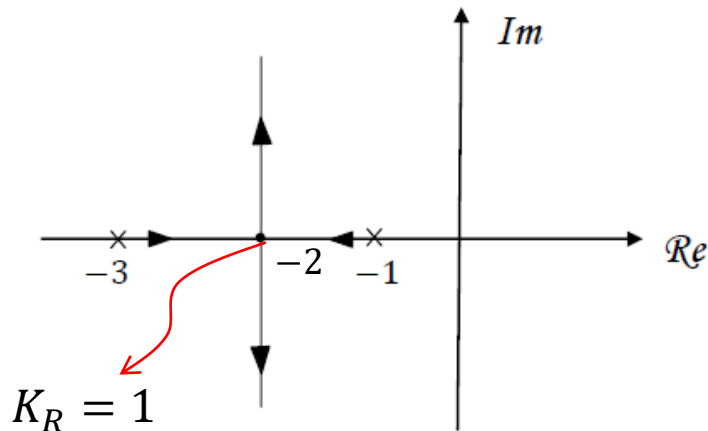
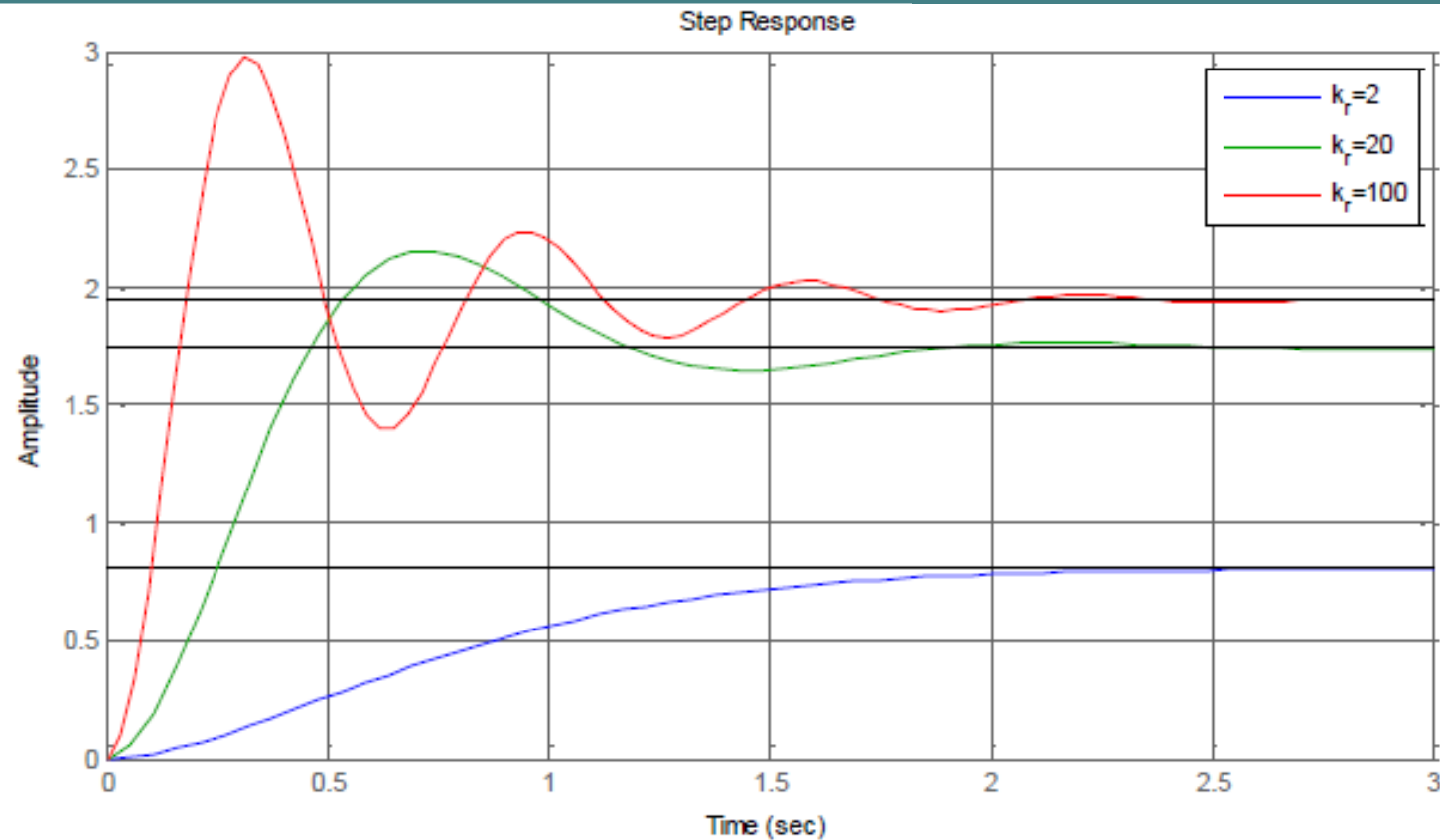
Il guadagno statico μ_C del controllore coincide con il guadagno K_R , mentre l'ampiezza del set-point è $R^* = 2$.

$$K_R = 2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 0.8$$

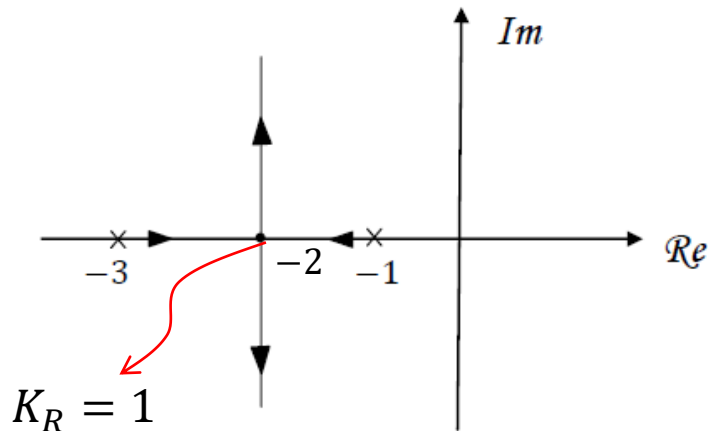
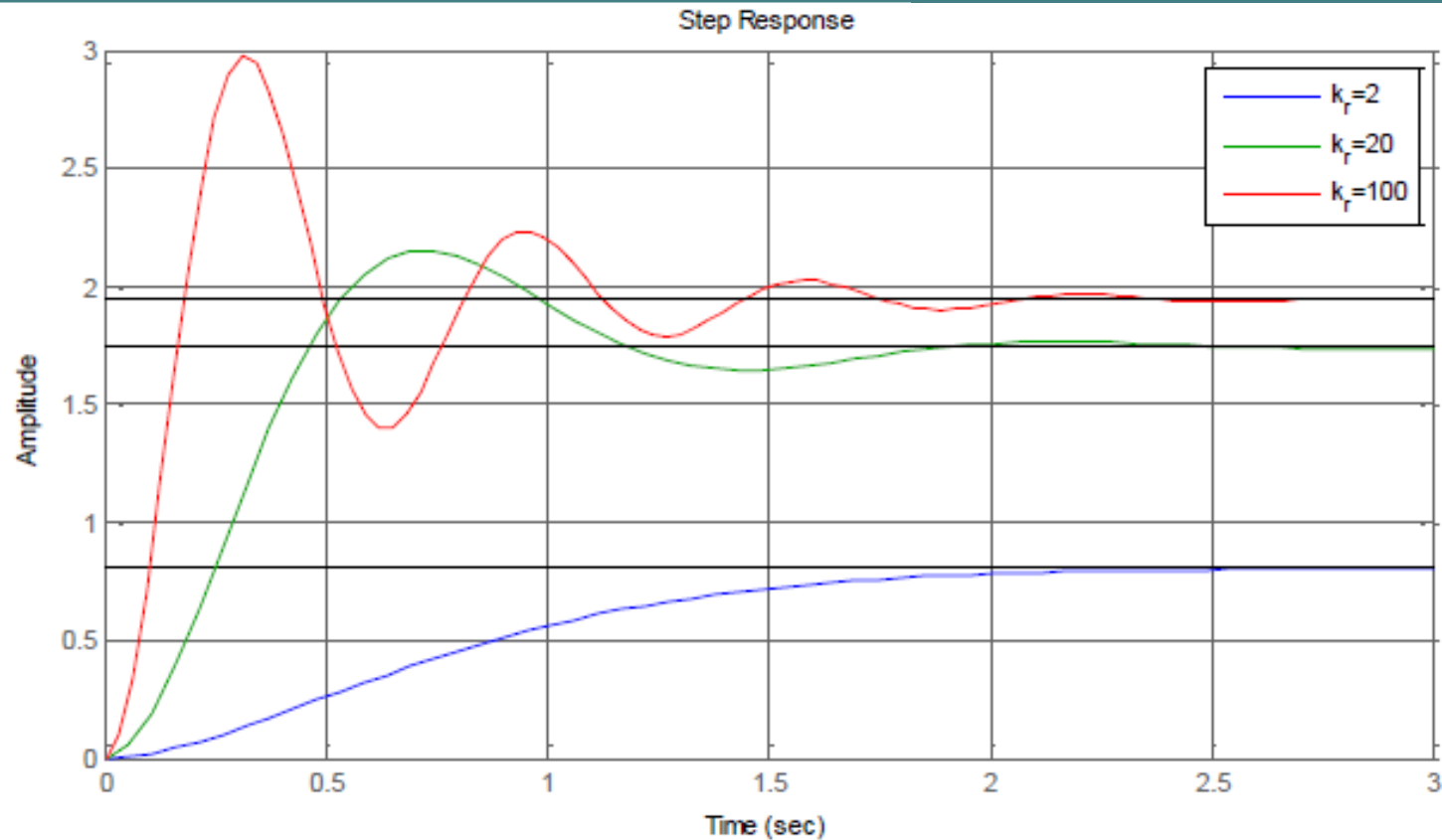
$$K_R = 20 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{20 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{3}} \cong 1.8$$

$$K_R = 100 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{100 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 100 \cdot \frac{1}{3}} \cong 1.94$$

Si noti come **il valore di regime dell'uscita si avvicina sempre più al set-point al crescere del guadagno K_R**



In corrispondenza del valore del guadagno $K_R = 2$ i poli della FdT a ciclo chiuso sono collocati in $-2 \pm j$, ed hanno uno smorzamento pari a 0.89 al quale corrisponde una sovraelongazione pressoché nulla.



I **tempi di assestamento** delle tre risposte sono **identici** perché una volta che K_R è scelto maggiore di 1 la coppia di poli complessi coniugati a ciclo chiuso risulta avere la stessa costante di tempo equivalente (pari a mezzo secondo)

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **disturbo costante** (e set point nullo).

$$\xi(t) = \Delta = \text{cost.} \qquad r(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione $Y(s) = W_{\xi}^y(s) \Xi(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} \cdot \frac{\Delta}{s}$

Teorema del valore finale (la condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta in conseguenza del fatto che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

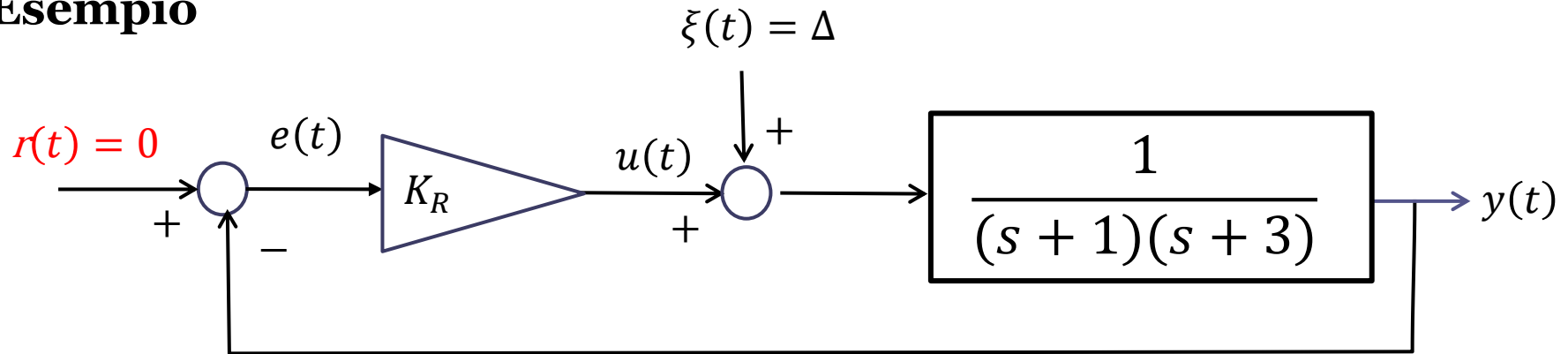
Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, un disturbo costante altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dai guadagni di regolatore e processo.

Incrementando il guadagno μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si attenua l'effetto del disturbo sul valore di regime dell'uscita (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende a zero al crescere di μ_C)

L'incremento del guadagno del controllore si rileva lo strumento progettuale utile a garantire determinate specifiche sul comportamento a regime in presenza di disturbi (ad esempio, sulla **attenuazione minima richiesta** per il disturbo sull'uscita)

Esempio



Si valuti il comportamento a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta ad un disturbo costante di ampiezza $\Delta = 5$ in corrispondenza dei valori di guadagno del controllore $K_R = 2$, $K_R = 20$, $K_R = 100$

Abbiamo già verificato nel corso del precedente esempio che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile in corrispondenza dei valori indicati per il guadagno del controllore, possiamo quindi applicare la relazione vista in precedenza.

Il guadagno statico del processo $P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ è $\mu_P = P(0) = \frac{1}{3}$

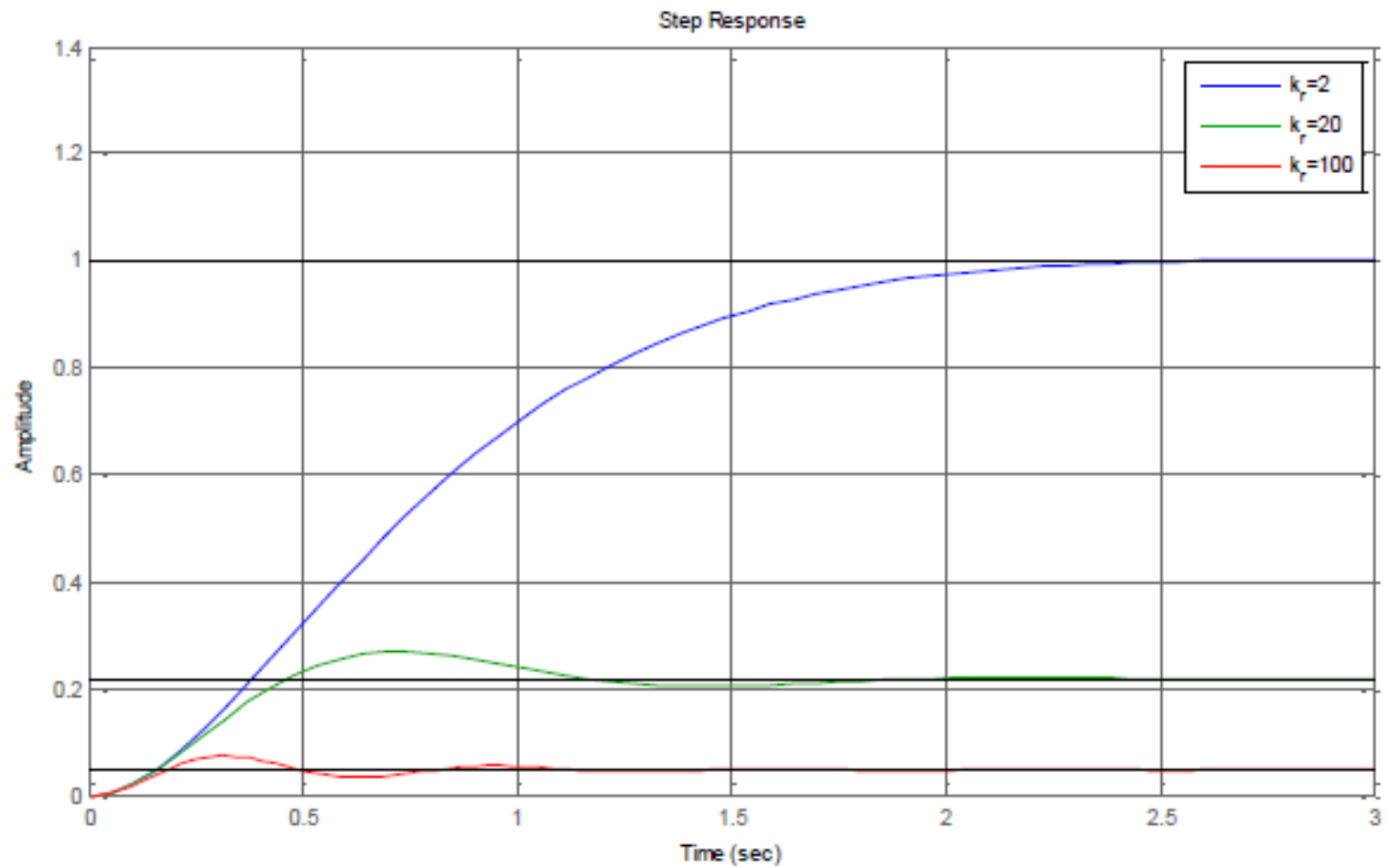
Il guadagno statico μ_C del controllore coincide con il guadagno K_R , mentre l'ampiezza del set-point è $\Delta = 5$

$$K_R = 2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$K_R = 20 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\frac{1}{3}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{3}} \cong 0.21$$

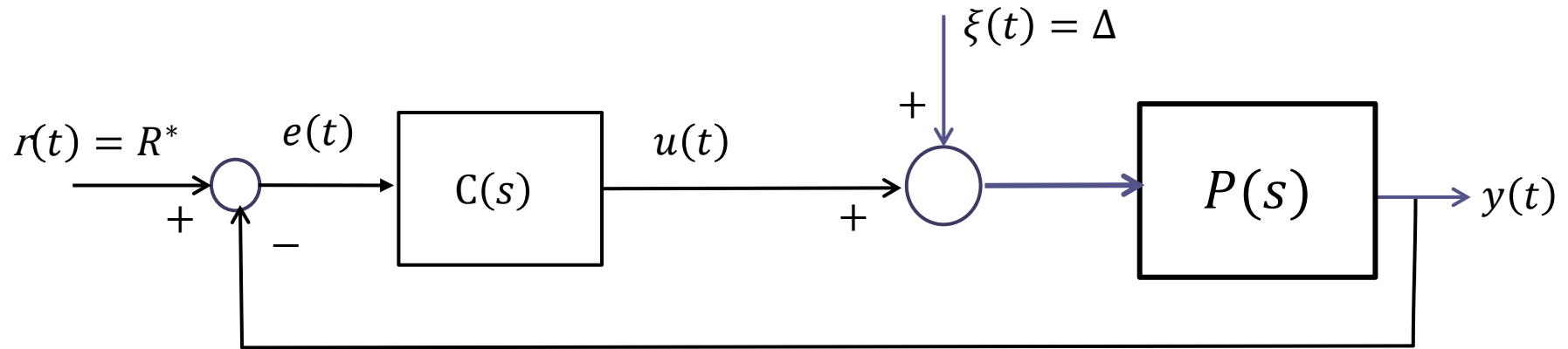
$$K_R = 100 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\frac{1}{3}}{1 + 100 \cdot \frac{1}{3}} \cong 0.05$$

Si noti come il valore di regime dell'uscita diventa progressivamente più piccolo al crescere del guadagno K_R



Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante e disturbo costante che intervengono simultaneamente**



Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo zero soggetto simultaneamente ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza Δ il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

μ_C e μ_P sono i guadagni statici del controllore e del processo

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y^* = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

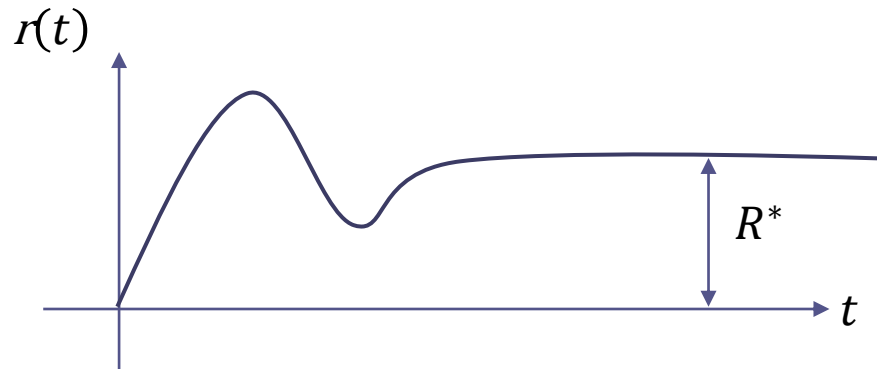
All'aumentare di μ_C si realizza, con precisione progressivamente crescente, la relazione «desiderata»

$$Y^* = R^*$$

che in ogni caso in un sistema di controllo di tipo zero non è **mai ottenibile**, nemmeno in assenza di disturbi.

Considerazioni aggiuntive

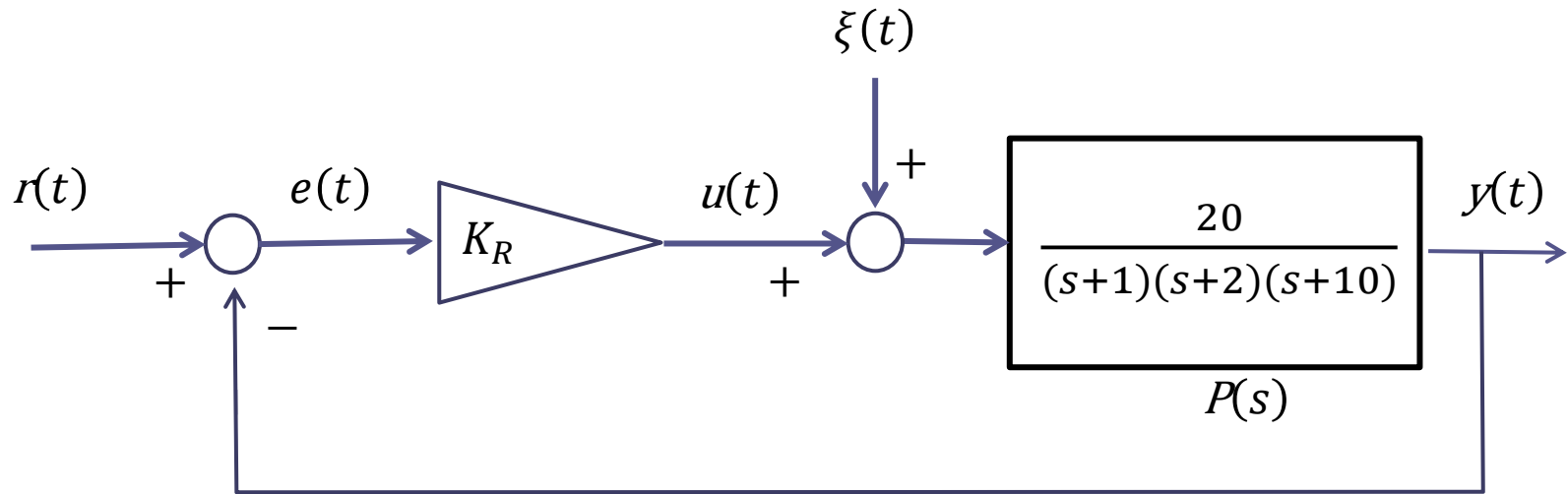
Le considerazioni sviluppate valgono anche in casi più generali in cui il set-point o il disturbo siano tempo varianti ma tendano ad un valore costante per t tendente all'infinito



L'evoluzione transitoria dell'uscita può risultare, naturalmente, completamente differente rispetto alla applicazione di set-point e disturbi costanti, ma il valore di regime è comunque lo stesso

Per sistemi di controllo di **tipo zero** soggetti a set point o disturbi costanti abbiamo visto quindi come **le uniche grandezze che intervengono nella determinazione del valore di regime dell'uscita siano (oltre ovviamente all'ampiezza del set point e del disturbo) il guadagno statico del processo ed il guadagno statico del regolatore**

Esempio



Determinare l'intervallo di valori di K_R in corrispondenza dei quali il sistema di controllo risulta essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Assumendo per il guadagno K_R un valore pari alla metà del massimo guadagno ammissibile (guadagno critico) valutare quindi il comportamento dell'uscita a regime per

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0.5(1 - e^{-2t})$$



$$P_{car}(s) = D_C(s)D_P(s) + N_C(s)N_P(s)$$

Il pol. caratteristico del sistema a ciclo chiuso è la somma dei prodotti fra numeratori ed i denominatori del controllore e del processo

Il polinomio caratteristico risulta pertanto essere il seguente

$$P_{car}(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 10) + 20K_R = s^3 + 13s^2 + 32s + 20 + 20K_R$$

Abbiamo visto come un polinomio di terzo grado risulti essere un polinomio di Hurwitz (cioè un polinomio avente tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se tutti i suoi coefficienti hanno lo stesso segno e in aggiunta il prodotto fra i coefficienti dei termini lineare e quadratico risulta essere strettamente maggiore del prodotto fra il coefficiente del termine cubico ed il termine noto

Si ricava pertanto la seguente disequaglianza che fissa il massimo valore ammissibile per il guadagno del controllore

$$13 \cdot 32 > 20 + 20K_R$$



$$K_R < 19.8$$

Consideriamo pertanto nel prosieguo dell'esercizio il valore $K_R = 9.9$

Poiché in corrispondenza di tale valore il sistema di controllo a ciclo chiuso risulta essere asintoticamente stabile possiamo fare riferimento alle formule viste per il comportamento dei sistemi di controllo di tipo zero.

Il controllore ha ovviamente guadagno statico $\mu_C = K_R = 9.9$.

Il processo $P(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ ha guadagno statico $\mu_P = P(0) = 1$

Il disturbo $\xi(t)$ è tempo-variante ma converge verso il valore costante di regime 0.5

Pertanto le analisi inerenti il comportamento a regime possono far riferimento ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta = 0.5$

Nei sistemi di controllo di tipo zero con set-point e disturbo costante si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

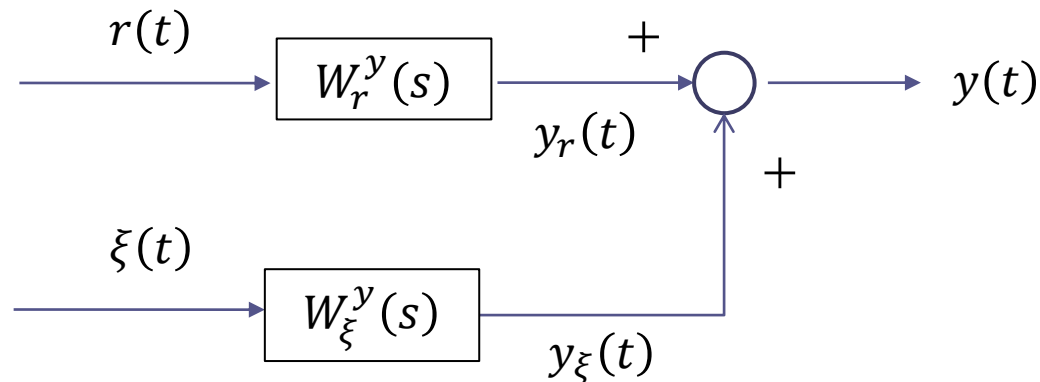
$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 4.541 + 0.045 = 4.886$$

Componente dovuta al disturbo

Componente dovuta al set-point

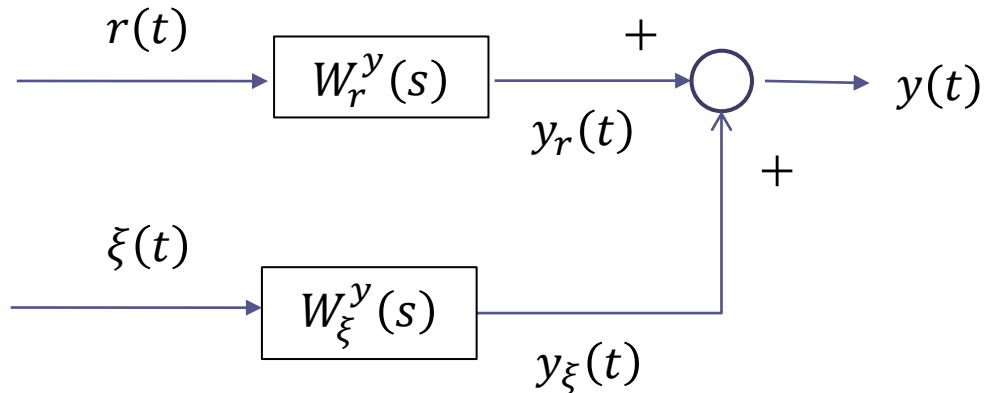
Il principio di sovrapposizione degli effetti stabilisce come la risposta complessiva $y(t)$ sia la somma fra la risposta $y_r(t)$ dovuta al solo set point e la risposta $y_\xi(t)$ dovuta al solo disturbo



$$W_r^y(s) = \frac{\frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti



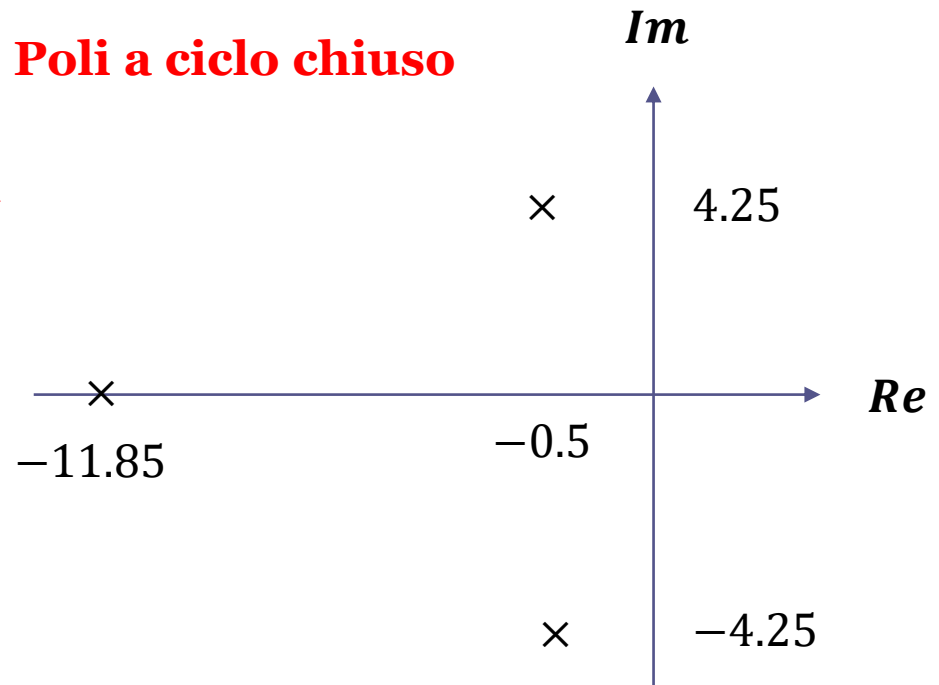
$$W_r^y(s) = \frac{198}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{20}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

Poli a ciclo chiuso

Coppia di **poli dominanti** complessi coniugati nelle FdT a ciclo chiuso

E' possibile predire con precisione le caratteristiche transitorie della risposta al gradino a ciclo chiuso (si tracci un grafico approssimato delle risposte $y_r(t)$ e $y_\xi(t)$)



Ricaviamo il medesimo risultato senza ricorrere alla formula, basandoci unicamente sulla applicazione del Teorema del valore finale.

Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti valutando separatamente i contributi al valore di regime dell'uscita introdotti dal set-point e dal disturbo.

Contributo del set-point

FdT set-point uscita:

$$W_r^y(s) = \frac{198}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

Trasformata di Laplace dell'uscita:

$$Y_r(s) = W_r^y(s)R(s) = \frac{198}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218} \cdot \frac{5}{s}$$

Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{990}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218} = 4.541$$

Si poteva anche direttamente moltiplicare il guadagno statico $W_r^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita per l'ampiezza $R^* = 5$ del set-point

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5 \cdot 0.9083 = 4.541$$

Contributo del disturbo

FdT disturbo uscita:

$$W_{\xi}^y(s) = \frac{20}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

Trasformata di Laplace dell'uscita:

$$Y_{\xi}(s) = W_{\xi}^y(s)D(s) = \frac{20}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218} \cdot \frac{0.5}{s}$$

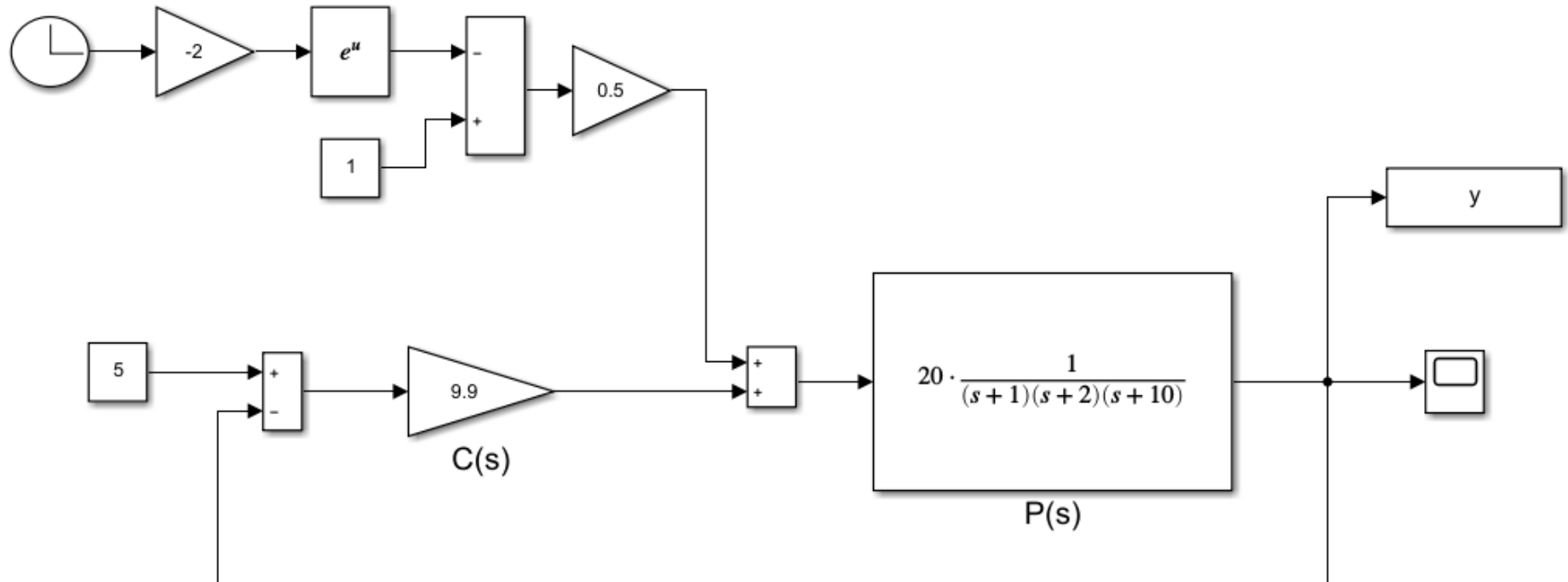
Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\xi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{\xi}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218} = 0.045$$

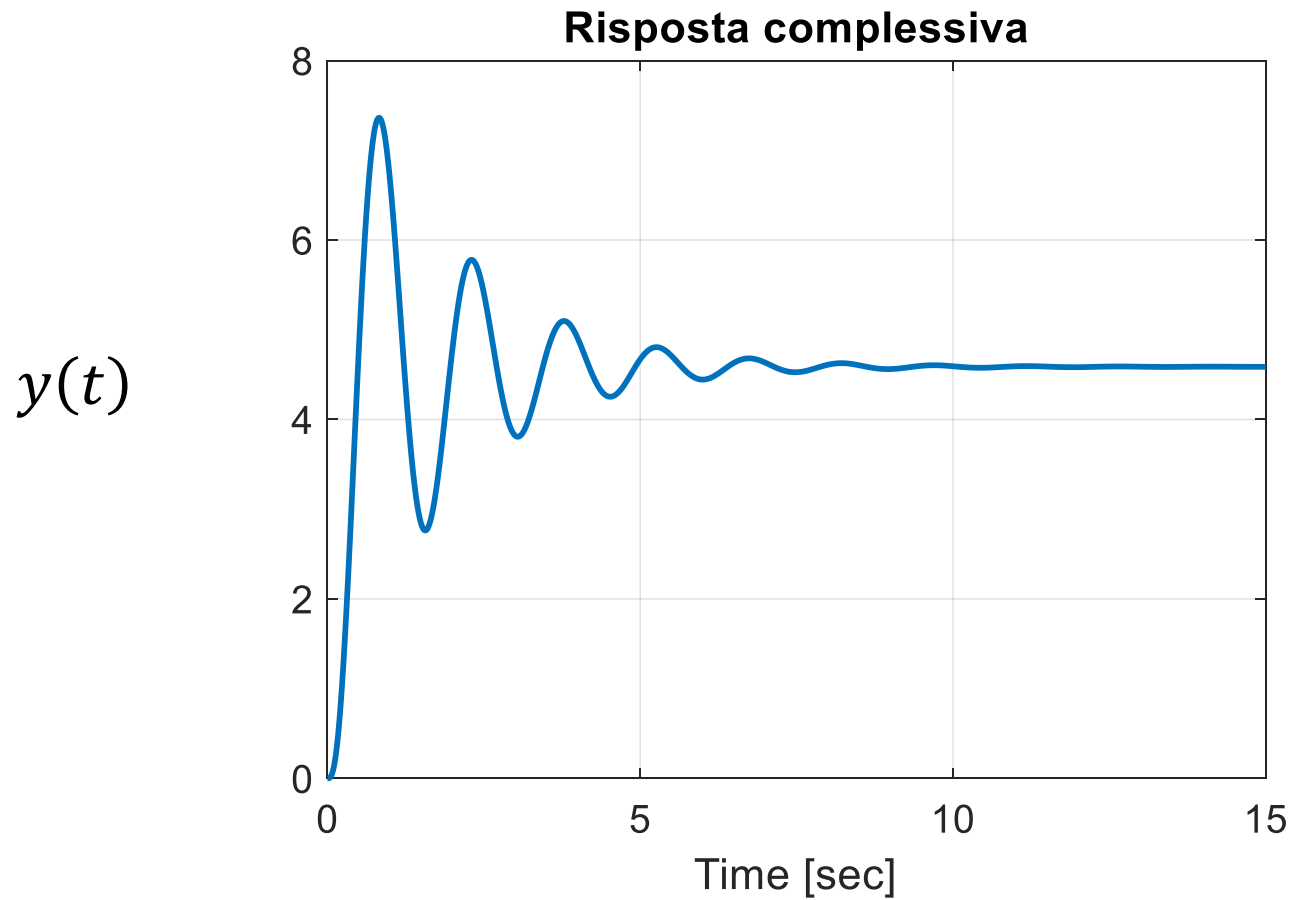
Si poteva anche direttamente moltiplicare il guadagno statico $W_{\xi}^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita per l'ampiezza $\Delta = 0.5$ del disturbo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\xi}(t) = 0.5 \cdot W_{\xi}^y(0) = 0.5 \cdot 0.091 = 0.045$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

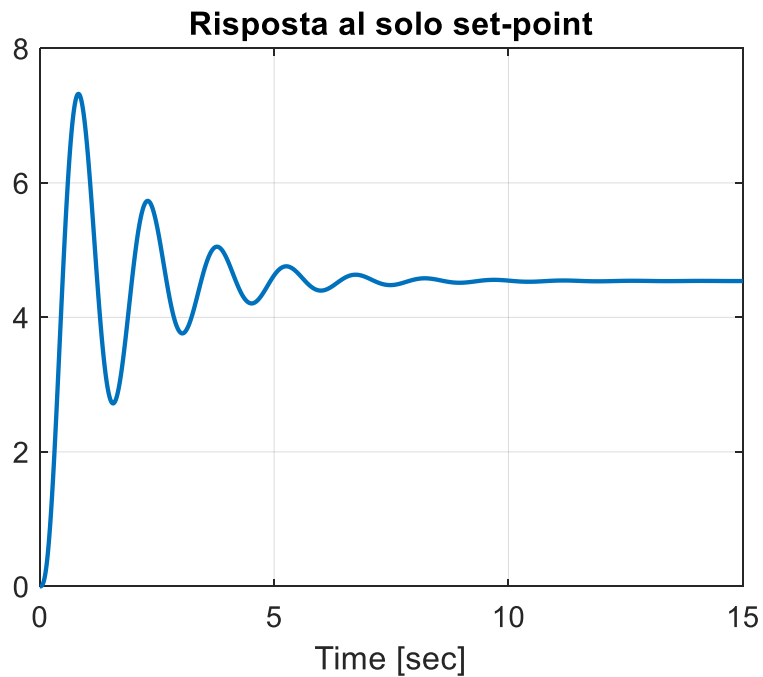


Uscita complessiva (in presenza sia del set-point che del disturbo)

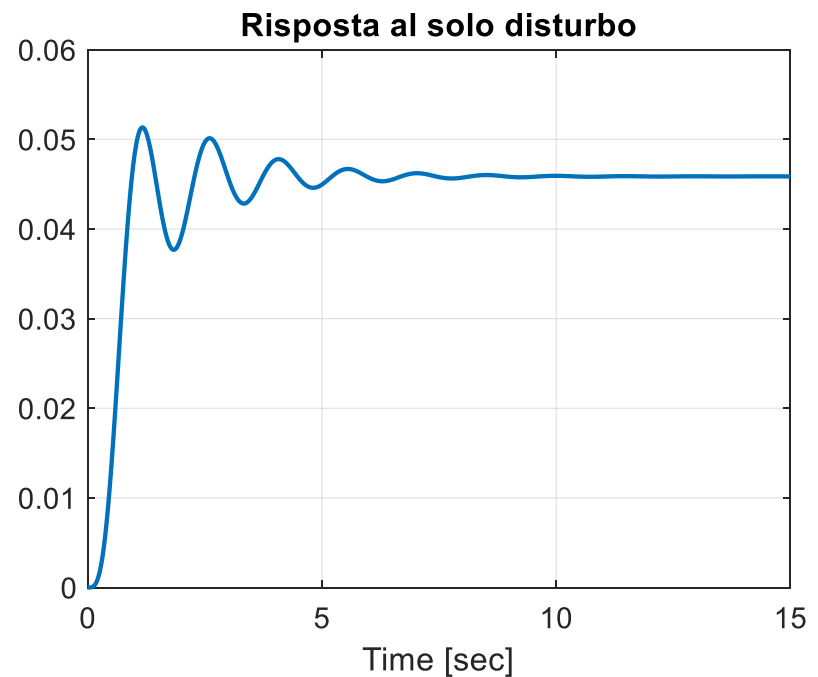


Uscita in presenza del solo disturbo e del solo set-point

$$y_r(t)$$

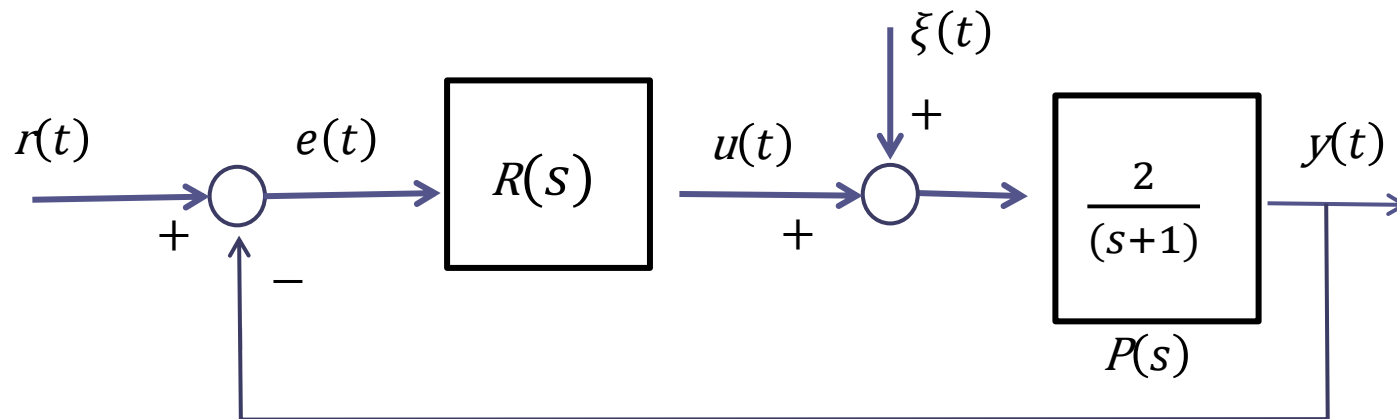


$$y_\xi(t)$$



Esempio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile e un regolatore $R(s)$ da progettare



Le specifiche di controllo sono le seguenti

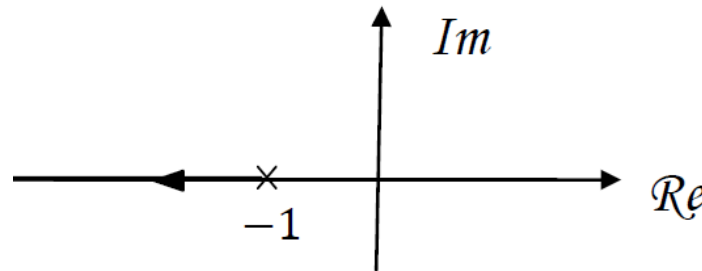
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un **errore massimo del 2 %**
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 95%
- S3. Risposta ad un set point a gradino monotona crescente
- S4. Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino non superiore a **0.04** secondi

Le specifiche sul comportamento a regime sono **compatibili con le prestazioni di un sistema di controllo di tipo zero**. Ipotizziamo quindi l'impiego di un regolatore proporzionale $R(s) = K_R$

Valutiamo le relative proprietà di stabilità a ciclo chiuso.

L'analisi mediante LdR indica come il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile per qualunque valore, anche arbitrariamente grande, del guadagno K_R

$$L(s) = \frac{2}{s+1}$$



Le specifiche S1 ed S2 potranno quindi essere garantite da un valore di guadagno sufficientemente grande opportunamente scelto.

Per soddisfare la specifica S3 si deve fare in modo che i poli a ciclo chiuso siano tutti **reali negativi** e che non sia presente uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli o a parte reale positiva.

Per soddisfare la specifica S4 si deve fare in modo che il polo a ciclo chiuso sia collocato **sufficientemente in alta frequenza** in modo che la costante di tempo associata sia sufficientemente piccola.

Abbiamo ora la **certezza** che un regolatore proporzionale, opportunamente tarato, risolve il problema di controllo.

Il sistema a ciclo chiuso è rappresentato dalle **FdT set-point uscita**

$$W_r^y(s) = \frac{2K_R}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_1}{1 + sT_1} \quad \mu_1 = W_r^y(0) = \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \quad T_1 = \frac{1}{1 + 2K_R}$$

e **disturbo-uscita**

$$W_\xi^y(s) = \frac{2}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_2}{1 + sT_1} \quad \mu_2 = W_\xi^y(0) = \frac{2}{1 + 2K_R} \quad T_2 = T_1 = \frac{1}{1 + 2K_R}$$

Polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso con regolatore proporzionale

$$P_{car}(s) = s + 1 + 2K_R$$

Il polo p_{cc} a ciclo chiuso assume il seguente valore in dipendenza dal guadagno K_R

$$p_{cc} = -(1 + 2K_R)$$

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo dell'2%
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 95%

Le specifica **S1** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_r^y(0) \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 24.5$$

Le specifica **S2** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_\xi^y(0) \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1 + 2K_R} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 19.5$$

Il vincolo più stringente deriva dalla specifica S1

E' consigliabile scegliere un valore incrementato di una certa percentuale per compensare possibili variazioni parametriche sfavorevoli

- S3. Risposta al gradino monotona crescente
- S4. Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino non superiore a **0.04** secondi

La specifica **S3** è soddisfatta da qualunque valore del guadagno K_R perché il polo a ciclo chiuso è sempre reale negativo

La valutazione della specifica **S4** richiede l'impiego della relazione che lega il Tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino con la costante di tempo del polo a ciclo chiuso. Poiché con un regolatore proporzionale abbiamo un **unico polo a ciclo chiuso**, la relazione da impiegare è:

$$F(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad \Rightarrow \quad T_{a5\%} = \mathbf{3T} < 0.04$$

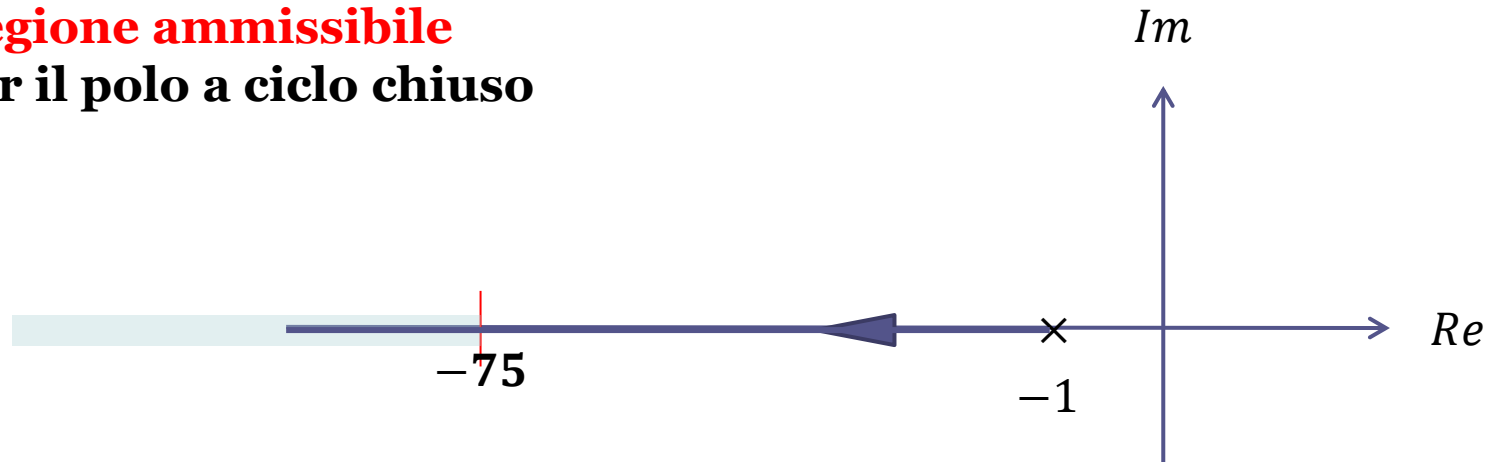
La costante di tempo della FdT $W_r^y(s)$ a ciclo chiuso è $T = T_1 = \frac{1}{1+2K_R}$

$$3T_1 = \frac{3}{1 + 2K_R} \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 37$$

Il vincolo $3T \leq 0.04$ può essere interpretato in termini di un vincolo sulla posizione del polo $p = -\frac{1}{T}$ della FdT a ciclo chiuso

$$3T \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad T \leq 0.0133 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{T} \leq -75$$

Regione ammissibile
per il polo a ciclo chiuso



Scegliendo $K_R \geq 37$ si fa in modo che il polo p_{cc} della FdT a ciclo chiuso (che è $p_{cc} = -(1 + 2K_R)$) sia collocato all'interno della regione ammissibile (che è il segmento dell'asse reale che parte dal punto -75 a va verso meno infinito).

L'esercizio è quindi risolto da un regolatore proporzionale con guadagno $K_R \geq 37$