

# Controlli automatici

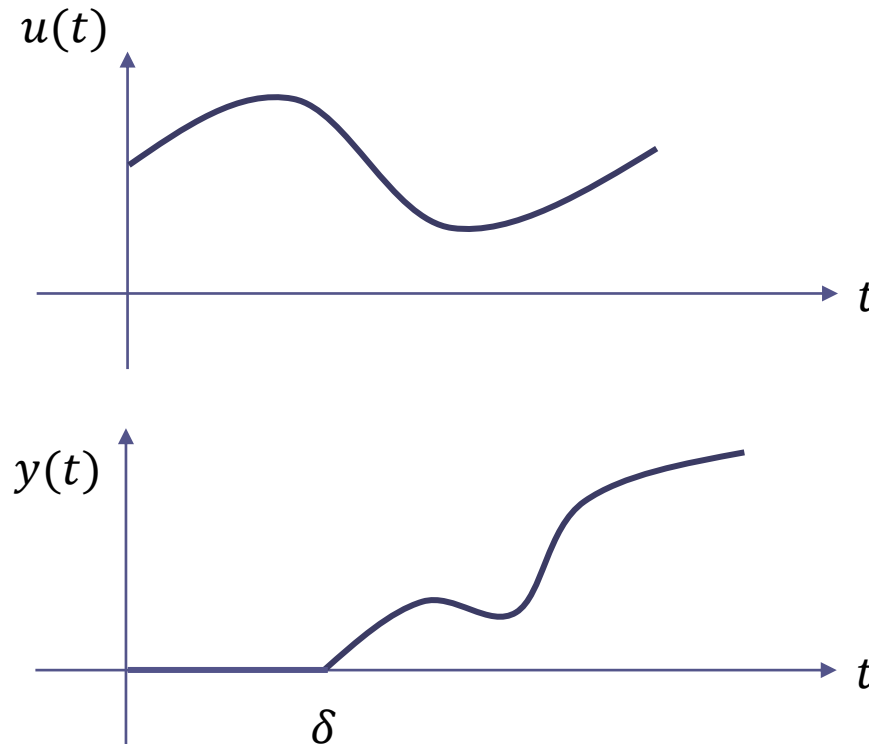
## Sistemi con ritardo

**Ing. Alessandro Pisano**  
**`apisano@unica.it`**

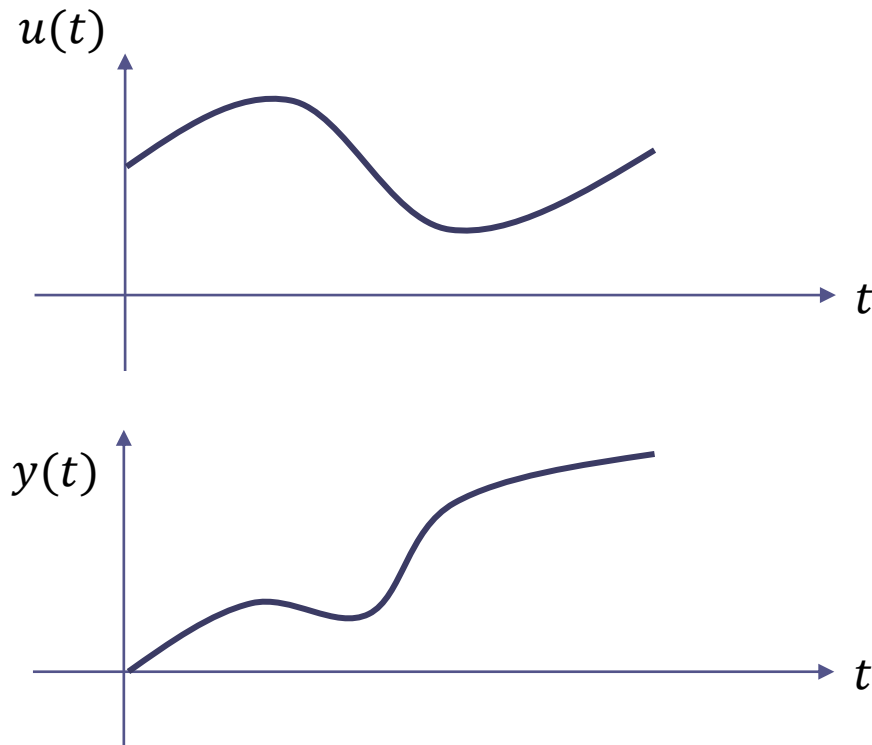
# Sistemi con ritardo

Una vasta gamma di processi industriali sono descritti da equazioni differenziali in cui compaiono esplicitamente dei **ritardi temporali**.

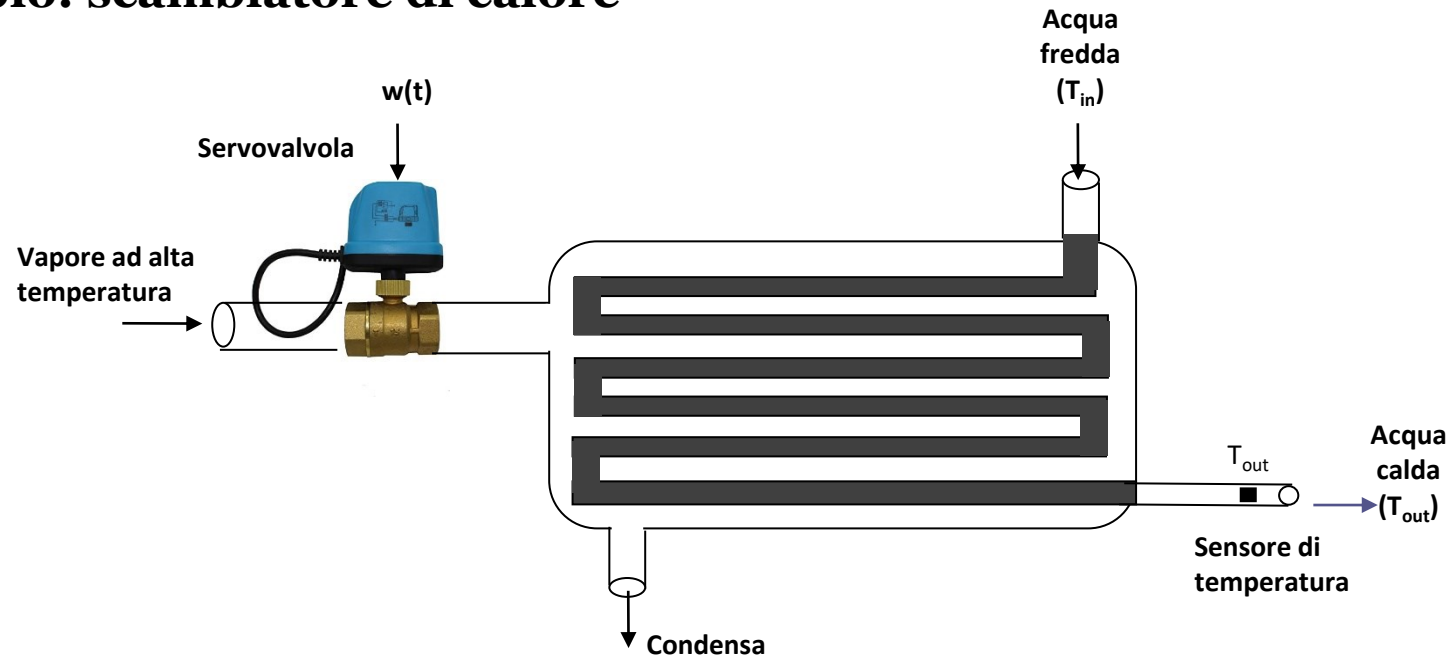
In generale un sistema dinamico è descritto da un modello con ritardo se a fronte della applicazione di una certa sollecitazione  $u(t)$  in ingresso l'uscita  $y(t)$  «risponde» solo dopo che sia trascorso un intervallo finito  $\delta$  detto «**tempo morto**» (dead time)



Abbiamo finora implicitamente assunto che i processi fossero caratterizzati da una risposta «istantanea», e si è ottenuta una loro rappresentazione attraverso una FdT avente la forma di un rapporto di polinomi.



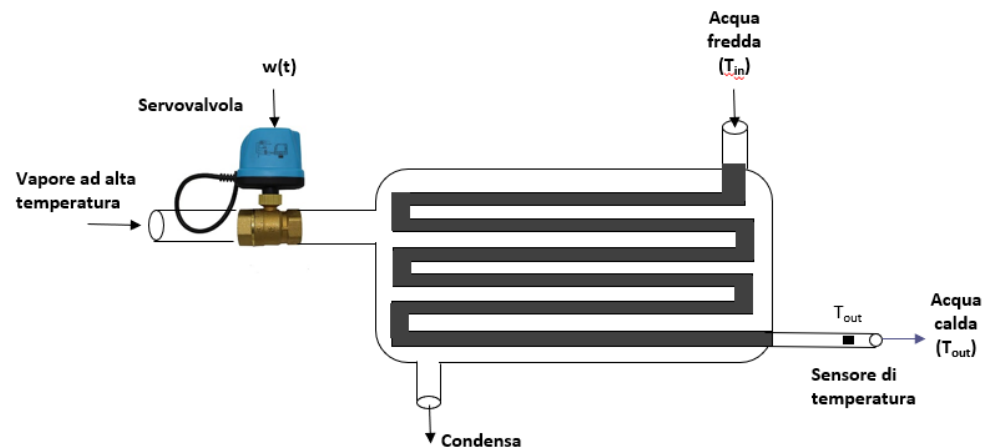
## Esempio: scambiatore di calore



Consideriamo uno **scambiatore di calore a fasci tubieri per la produzione di acqua calda**. All'interno dei fasci tubieri viene immessa acqua fredda. I fasci tubieri vengono investiti da vapore ad alta temperatura che trasferisce energia termica al fluido che scorre al loro interno. All'uscita dello scambiatore troviamo pertanto acqua riscaldata (oltre che, ovviamente, il vapore condensato).

La portata del vapore in ingresso viene modulata per mezzo di una servovalvola di regolazione, che è pertanto l'organo attuatore dell'azione di controllo

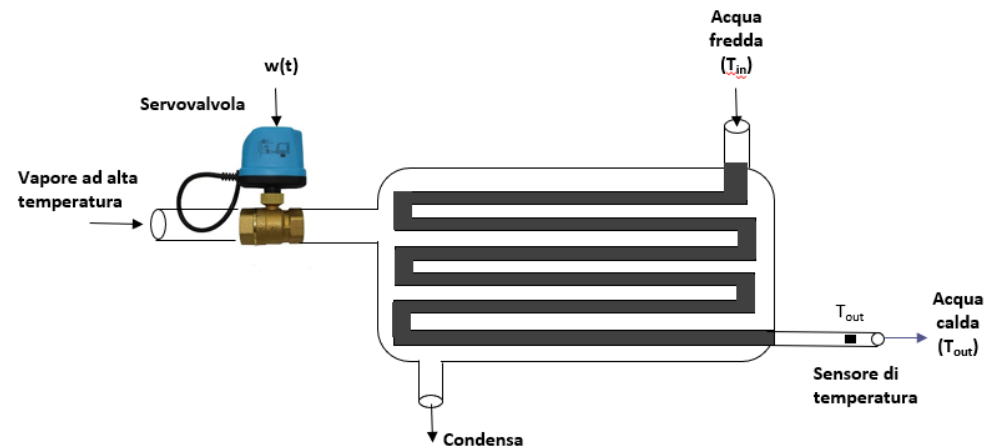
## Scambiatore di calore



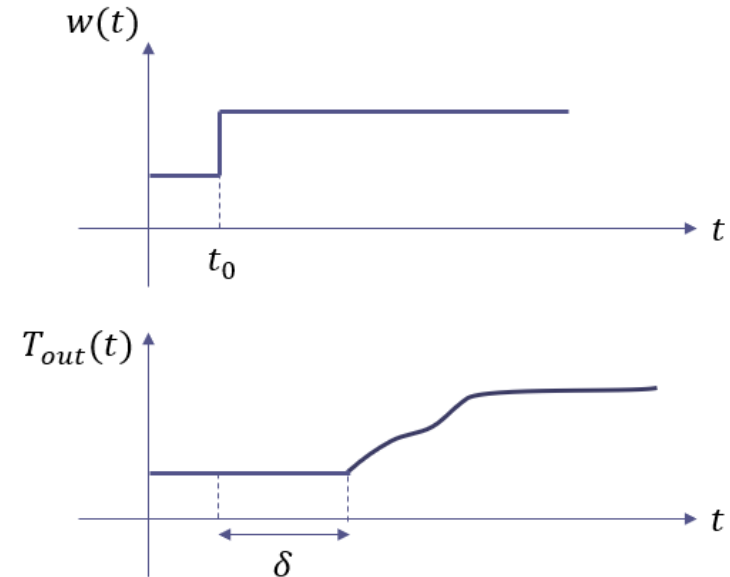
A fronte di una variazione del segnale di comando  $w(t)$  della servo valvola si produce una variazione della portata del vapore che transita verso l'interno dello scambiatore. Tale variazione avviene secondo la dinamica propria della servo valvola, e dipende anche dalle condizioni termodinamiche (pressione, temperatura,..) del vapore a monte e a valle.

La variazione della portata del vapore induce un transitorio di adeguamento della temperatura nella regione esterna ai fasci tubieri che viene investita dal vapore ad alta temperatura. Si ha quindi la dinamica dello scambio termico tra l'esterno e l'interno dei fasci tubieri ed in aggiunta si deve mettere in conto il tempo di transito del fluido all'interno dei fasci tubieri fino al condotto di uscita in cui viene misurata la temperatura

# Scambiatore di calore



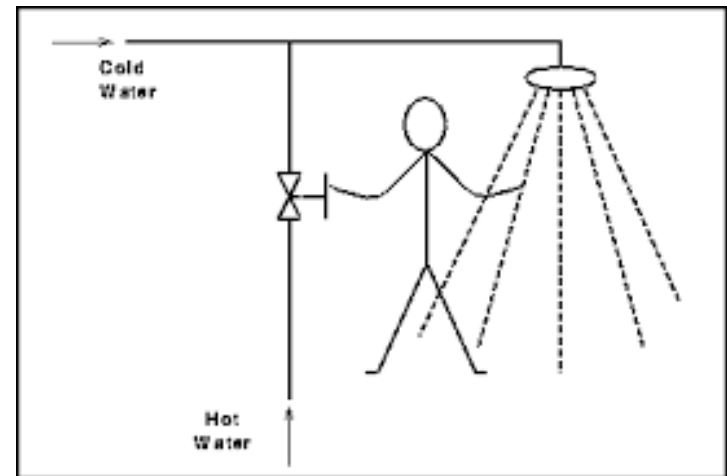
In definitiva, a fronte (ad esempio) di una variazione a gradino del segnale di comando della servovalvola (v. figura a lato) si avrà un **ritardo finito** prima di osservare una corrispondente variazione della temperatura  $T_{out}(t)$



La presenza di **ritardi finiti** complica enormemente il compito di controllare il processo ...



Con che «prestazioni» riusciamo a regolare la temperatura dell'acqua quando ci facciamo la doccia?



## Funzione di trasferimento di sistemi con ritardo

Analizziamo un esempio molto semplice, e vediamo se anche in presenza di ritardi nei legami ingresso-uscita che descrivono il comportamento di sistemi dinamici lineari è possibile determinare una funzione di trasferimento, e in caso affermativo che forma assume.

Si consideri un tratto di una pipeline di lunghezza  $L$ . In corrispondenza della sezione  $S_{IN}$  posta sul lato sinistro viene immessa una portata  $q(t)$  di un certo fluido, che si propaga verso destra nella tubazione con velocità costante  $V$



Se si considerano come variabile di ingresso  $u(t)$  la portata  $q(t)$  che transita alla sezione di ingresso  $S_{IN}$  e come variabile di uscita  $y(t)$  la portata misurata all'istante  $t$  nella sezione di uscita  $S_{OUT}$ , si ricava facilmente come l'uscita dipenda dalla portata in ingresso attraverso un legame (**statico**) che coinvolge un **ritardo temporale**  $\delta$

$$u(t) = q(t) \qquad y(t) = q(t - \delta) \qquad \delta = \frac{L}{V}$$



$$y(t) = q(t - \delta) \quad \delta = \frac{L}{V}$$

Applicando l'operatore della TdL alla relazione ingresso-uscita, e utilizzando le proprietà della TdL si ottiene

$$Y(s) = \mathcal{L}\{q(t - \delta)\} = Q(s)e^{-\delta s}$$

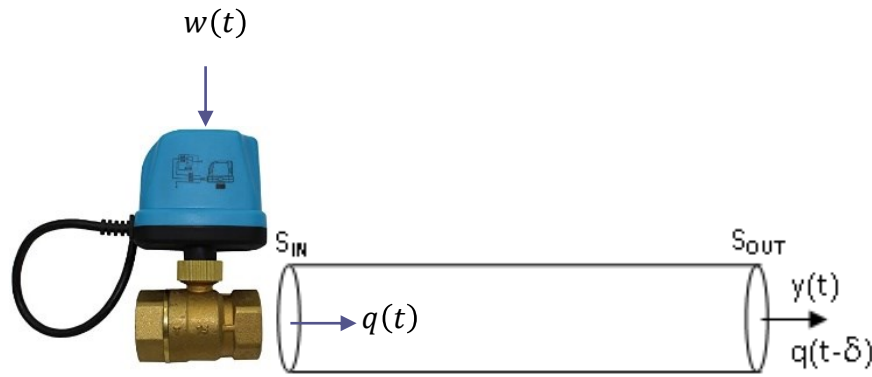
Il sistema ha pertanto FdT

$$H(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} = e^{-\delta s} \quad \text{FdT irrazionale contenente un fattore esponenziale}$$

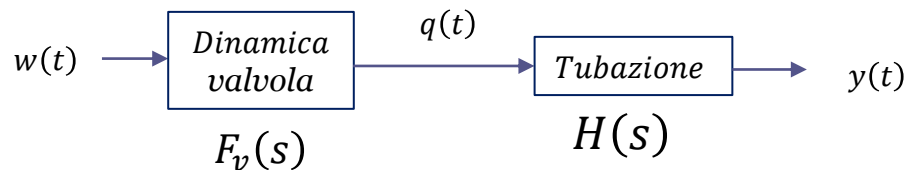
Più in generale, processi con ritardo sono descritti da un modello della forma

$$G(s) = F(s)e^{-\delta s} \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad F(s) \text{ è un rapporto di polinomi}$$

Inserendo ad esempio una servovalvola nel circuito precedente



in cui  $w(t)$  è il segnale di comando della valvola si realizza il seguente schema a blocchi



La FdT fra il segnale di comando  $w(t)$  della valvola e l'uscita  $y(t)$  sarà il prodotto fra la FdT associata alla dinamica della valvola e la FdT della tubazione

$$G_w^y(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = F_v(s)H(s) = F_v(s)e^{-\delta s}$$

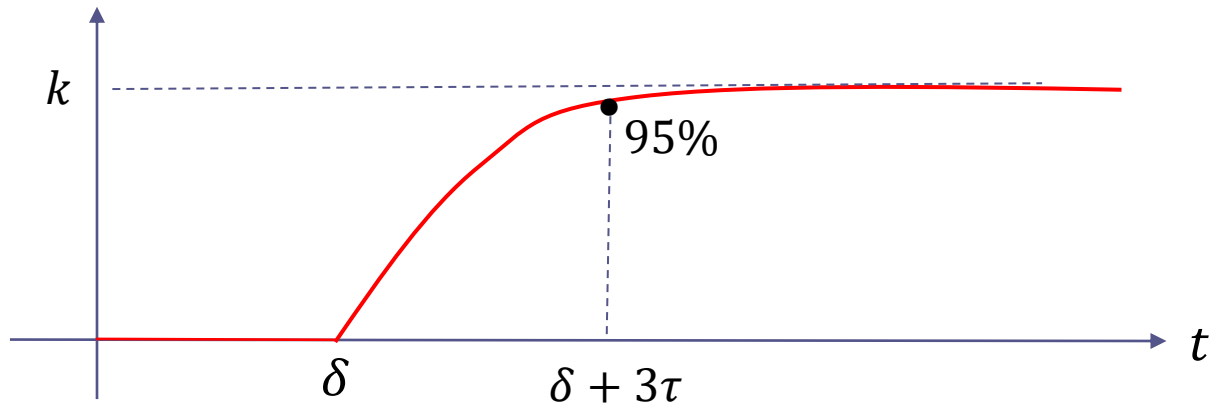
La valvola può essere rappresentata da una FdT del primo ordine

$$F_v(s) = \frac{k}{1 + \tau s}$$

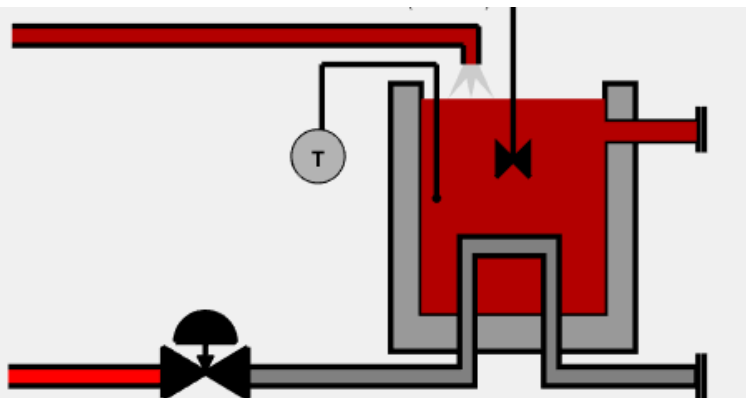
Si ottiene quindi

$$G_w^y(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s} \quad \text{Processo FOPDT (First Order Plus Dead Time)}$$

**Risposta al gradino unitario di un processo FOPDT**

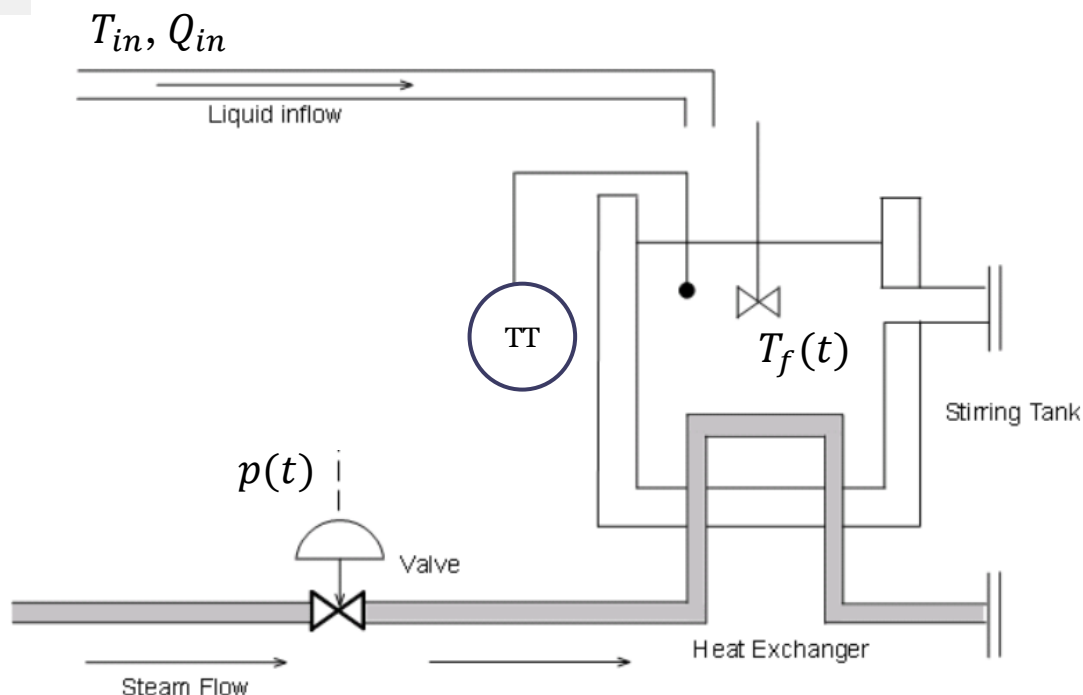


## Scambiatore di calore (sistema discusso durante la presentazione del corso).



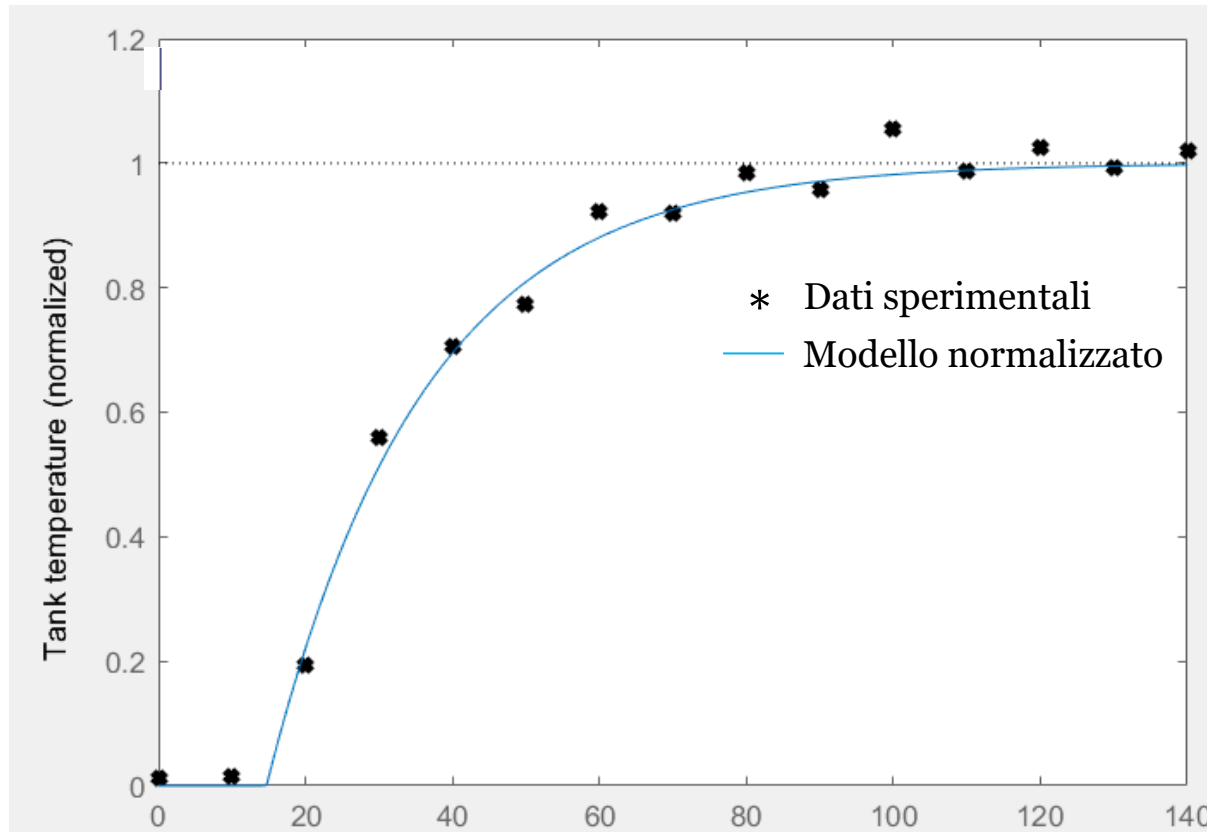
Il processo è attuato per mezzo di una servovalvola attraverso la quale è possibile modulare la portata del vapore. Il segnale di comando  $p(t)$  (che varia da 0% a 100%) viene detto «apertura» (opening) della servovalvola

Un liquido a temperatura  $T_{in}$  viene immesso con portata  $Q_{in}$  in un serbatoio all'interno del quale deve essere riscaldato ad una temperatura  $T_{des}$ . Nel serbatoio transita una conduttura percorsa da vapore ad alta temperatura.



Il seguente grafico mette a confronto dati sperimentali acquisiti in uno scambiatore reale a fronte di una variazione a gradino del segnale di comando della valvola con la risposta del modello FOPDT normalizzato

$$G(s) = \frac{1}{1+21.3s} e^{-14.7s}$$

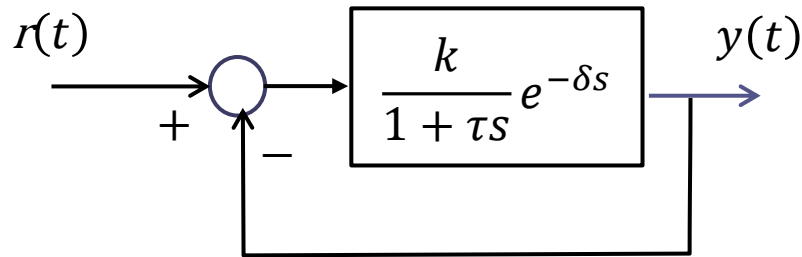


Il funzionamento dello scambiatore è ben approssimato dalla FdT

$$G(s) = \frac{1}{1+21.3s} e^{-14.7s}$$

# Stabilità a ciclo chiuso di sistemi con ritardo

Consideriamo un sistema a in retroazione in cui la FdT a ciclo aperto è di tipo FOPDT



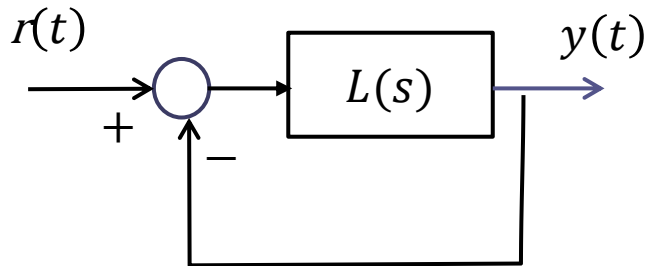
La FdT a ciclo chiuso ha un denominatore irrazionale

$$W_r^y = \frac{\frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s}}{1 + \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s}} = \frac{k e^{-\delta s}}{1 + \tau s + k e^{-\delta s}}$$

La stabilità a ciclo chiuso **non può più essere analizzata con le tecniche viste finora.**

## Criterio di Bode

Presentiamo un criterio di stabilità che mette in relazione la stabilità del sistema a ciclo chiuso con determinate proprietà «frequenziali» della funzione di risposta armonica  $L(j\omega)$  associata alla FdT  $L(s)$  a ciclo aperto.

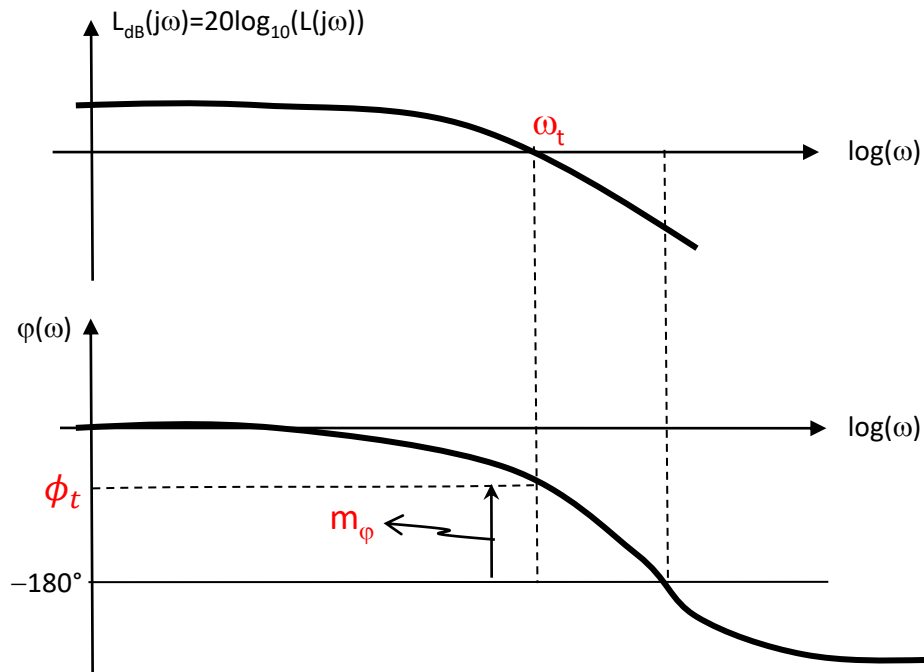


$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

### Ipotesi di applicabilità

- 1  $L(s)$  non ha poli a parte reale positiva (il polinomio  $D(s)$  non ha radici a parte reale positiva)
- 2 Il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB una sola volta

# Definizioni



## Pulsazione di attraversamento $\omega_t$

Pulsazione alla quale il diagramma del modulo di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB

$$|L(j\omega_t)|_{dB} = 0$$

cioè

$$|L(j\omega_t)| = 1$$

## Margine di fase $m_\phi$

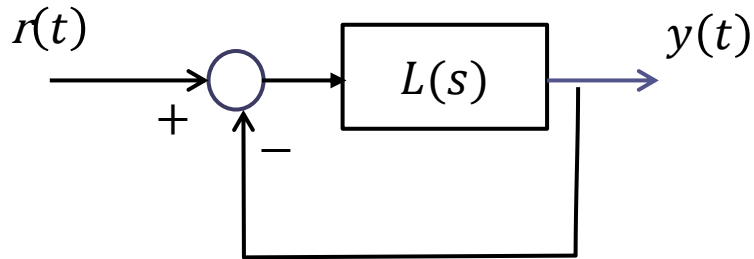
$$m_\phi = 180 - |\phi_t|$$

$$\phi_t = \arg L(j\omega_t)$$

$\phi_t$  è il valore della fase di  $L(j\omega)$  alla pulsazione di attraversamento  $\omega_t$

Il margine di fase è positivo quando  $\phi_t > -180^\circ$  e negativo quando  $\phi_t < -180^\circ$





$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

## Criterio di Bode

Sotto le ipotesi di applicabilità, il sistema a ciclo chiuso rappresentato in figura è asintoticamente stabile a ciclo chiuso **se e solo se** il **guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **di  $L(s)$**  ed il **marginale di fase** sono **entrambi positivi**:

$$\mu_L > 0$$

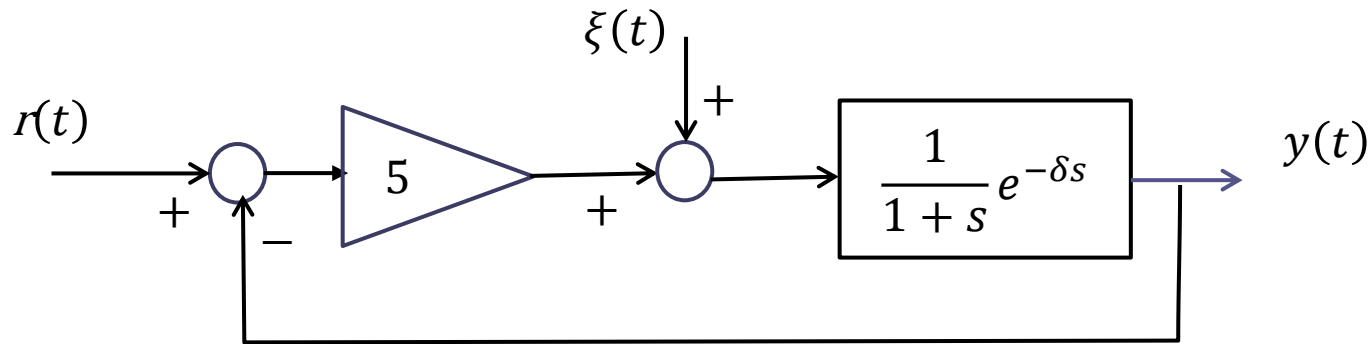
Guadagno statico (eventualmente generalizzato) della FdT  $L(s)$

$$m_\varphi > 0$$

**COROLLARIO** Se il diagramma di Bode del modulo di  $\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$  si trova sempre sotto l'asse a 0 dB (cioè se  $\left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|_{dB} < 0 \quad \forall \omega$ ) il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile

## Esercizio RIT-01

Si consideri il seguente sistema in retroazione



Valutare la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo nel caso in cui  $\delta = 0.1$  e  $\delta = 0.5$

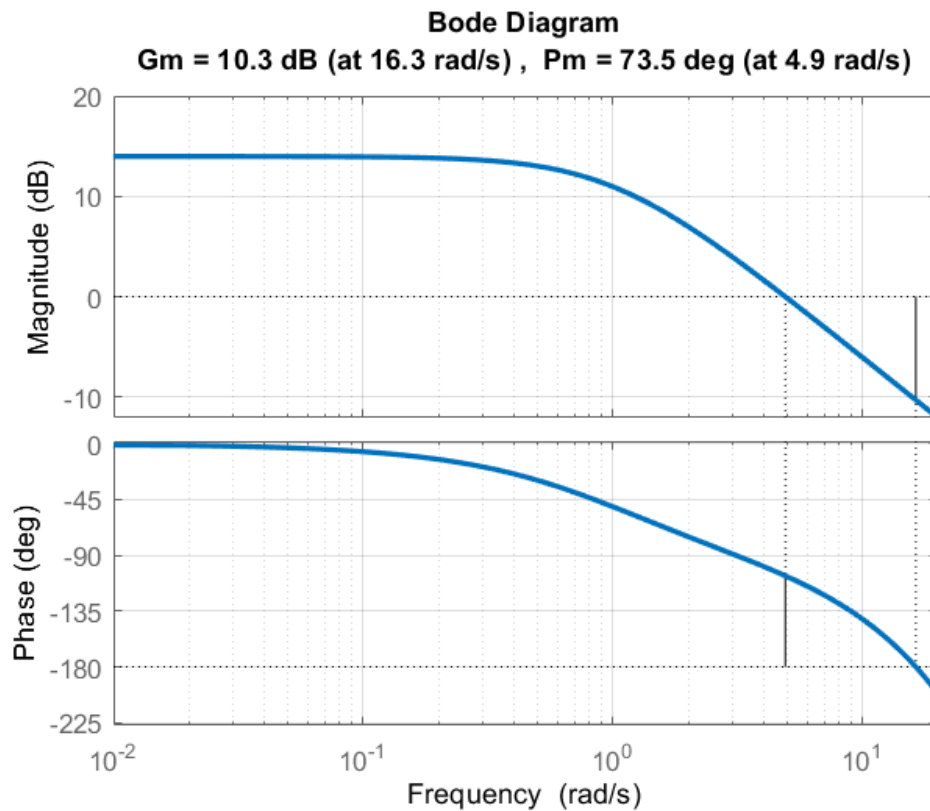
Determinare l'evoluzione di regime dell'uscita per  $r(t) = 10$  e  $\xi(t) = 1$

## Applichiamo il Criterio di Bode

$$\delta = 0.1$$

Diagrammi di Bode della FdT a ciclo aperto  $L(s) = \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}$

Ipotesi di applicabilità soddisfatte



**Pulsazione di attraversamento  $\omega_t$**

$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

**Margine di fase  $m_\phi$**

$$m_\phi = 73.5^\circ$$

Guadagno statico di  $L(s)$

$$\mu_L = L(0) = 5$$

**Sistema a ciclo chiuso asintoticamente stabile.**



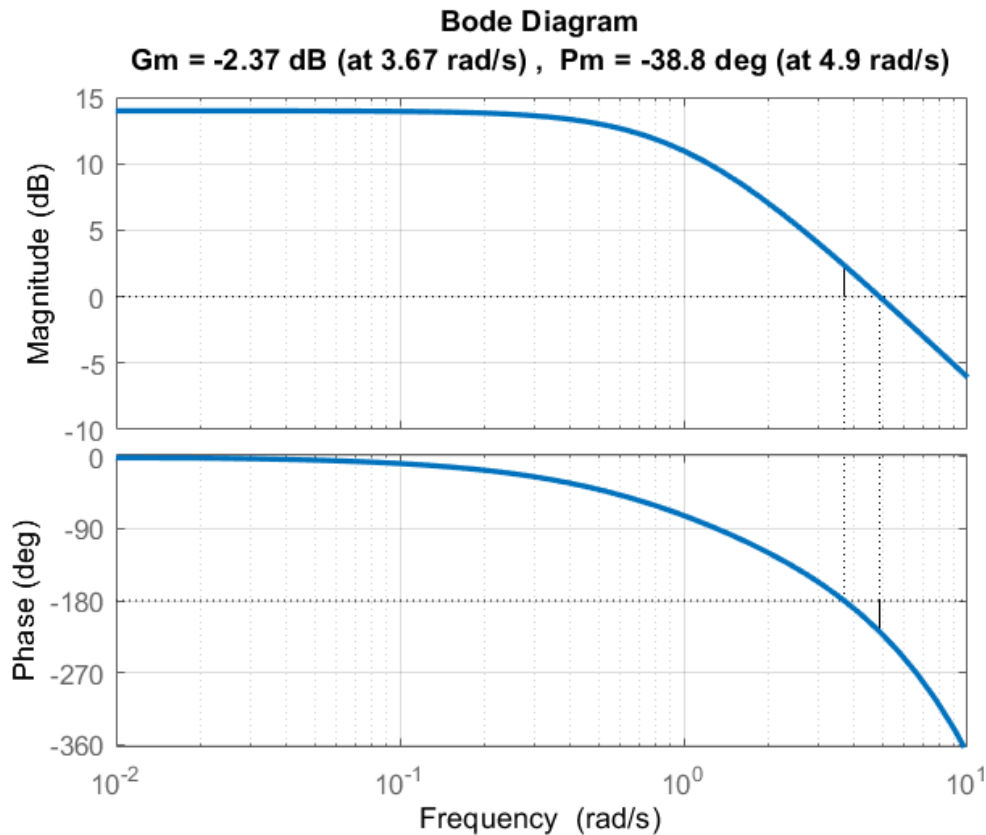
```
delta=0.1;
s = tf('s');
L = 5*exp(-delta*s)/(s+1);
margin(L),grid
xlim([0.01 20])
```

## Applichiamo il Criterio di Bode

$$\delta = 0.5$$

Diagrammi di Bode della FdT a ciclo aperto  $L(s) = \frac{5}{1+s} e^{-0.5s}$

Ipotesi di applicabilità soddisfatte



**Pulsazione di attraversamento  $\omega_t$**

$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

**Margine di fase  $m_\varphi$**

$$m_\varphi = -38.8^\circ$$

Guadagno statico di  $L(s)$

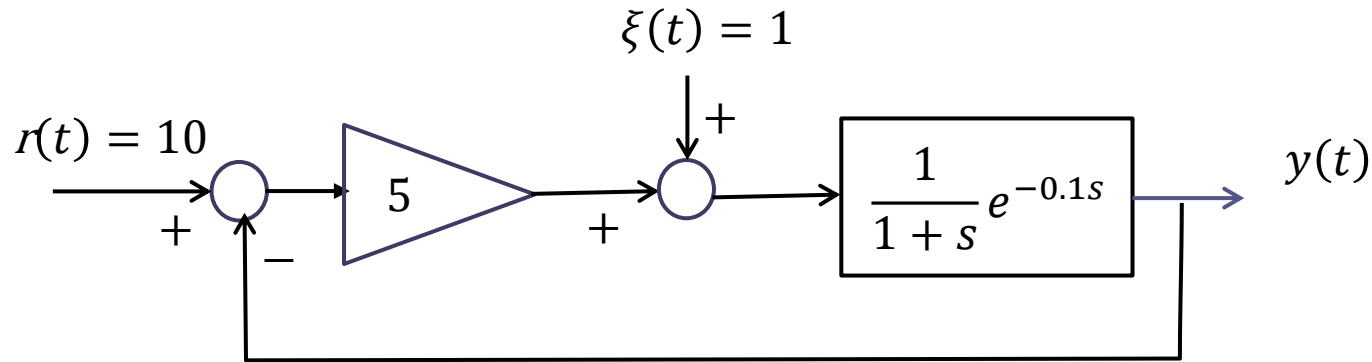
$$\mu_L = L(0) = 5$$

**Sistema a ciclo chiuso instabile.**



```
delta=0.5;
s = tf('s');
L = 5*exp(-delta*s)/(s+1);
margin(L),grid
xlim([0.01 10])
```

Comportamento di regime dell'uscita quando  $\delta = 0.1$



FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{5}{1+s} e^{-0.1s}}{1 + \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}} = \frac{5e^{-0.1s}}{1 + s + 5e^{-0.1s}}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{1}{1+s} e^{-0.1s}}{1 + \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}} = \frac{e^{-0.1s}}{1 + s + 5e^{-0.1s}}$$

Sono FdT asintoticamente stabili (sulla base del Criterio di Bode). Possiamo pertanto determinare il valore di regime della relativa risposta al gradino sulla base del corrispondente guadagno statico

Comportamento di regime dell'uscita quando  $\delta = 0.1$

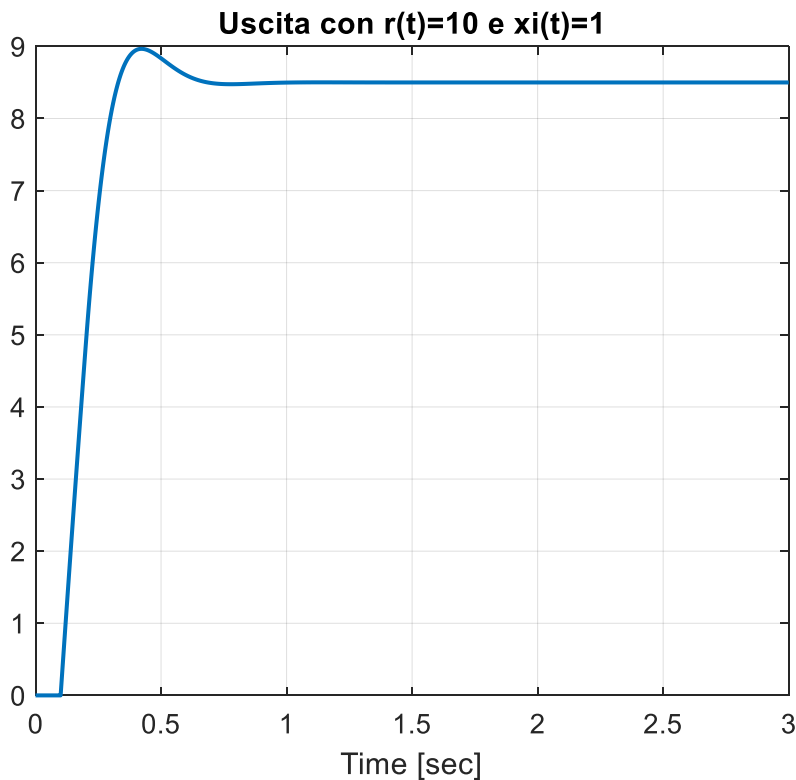
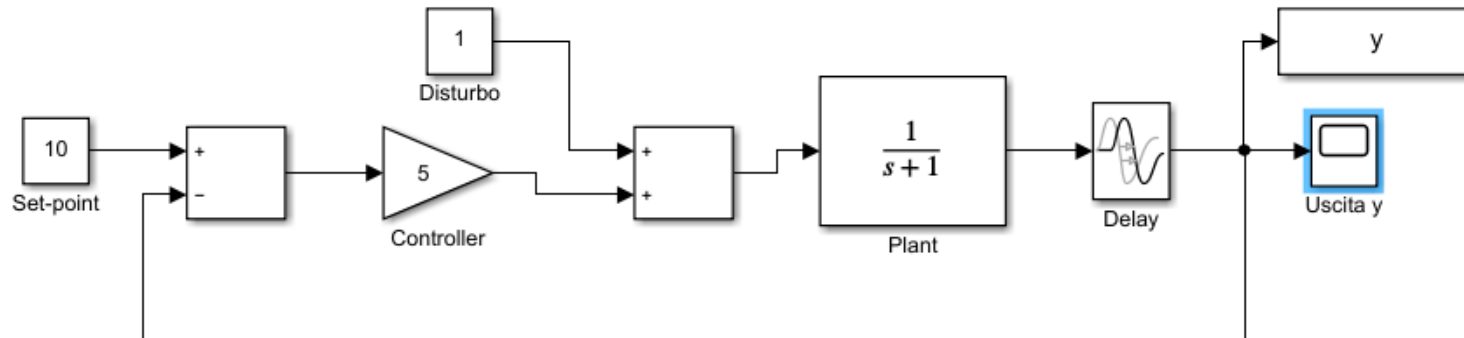
$$r(t) = 10 \quad y(t) \rightarrow 10 \cdot W_r^y(0) = 10 \cdot \frac{5}{6} = 8.33$$

$$\xi(t) = 1 \quad y(t) \rightarrow 1 \cdot W_\xi^y(0) = 1 \cdot \frac{1}{6} = 0.166$$

**Il termine di ritardo non altera i guadagni delle FdT a ciclo aperto e a ciclo chiuso** (i guadagni statici delle due FdT a ciclo chiuso, e quindi i valori di regime calcolati, coincidono con quelli che si sarebbero avuti nel caso  $\delta = 0$ ).

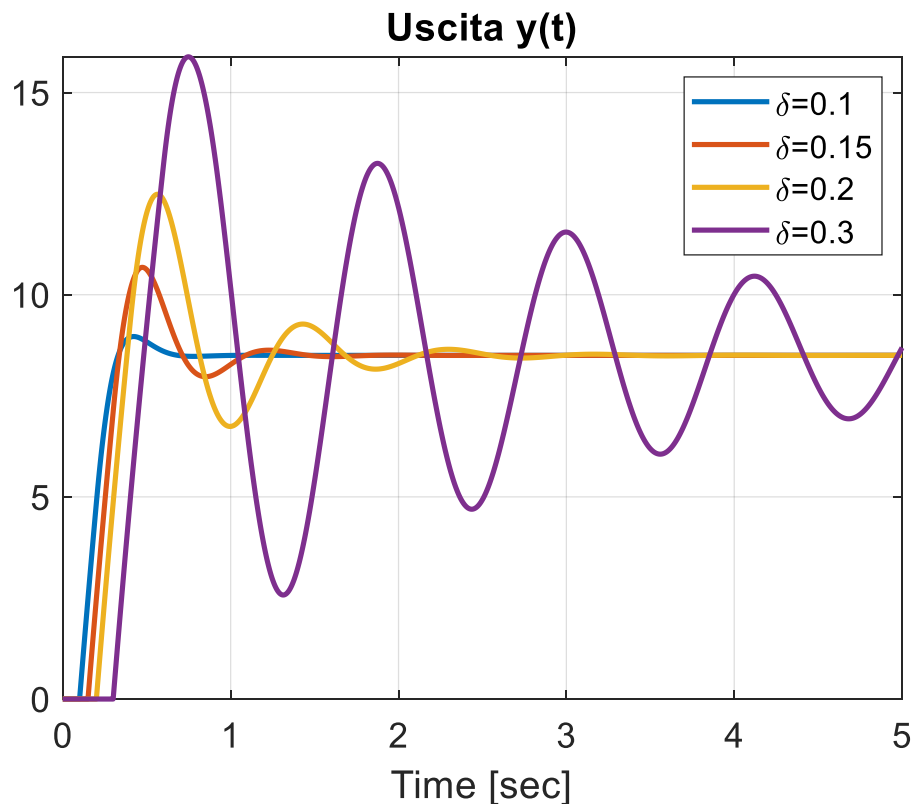
**Continuano pertanto a valere tutte le relazioni e proprietà del comportamento di regime studiate in relazione ai sistemi di controllo di tipo zero, uno, due etc, incluso il principio del modello interno.**

File: RIT\_01.slx



La risposta converge al valore 8.5 determinato sulla carta, e presenta una sovraelongazione indotta dal ritardo

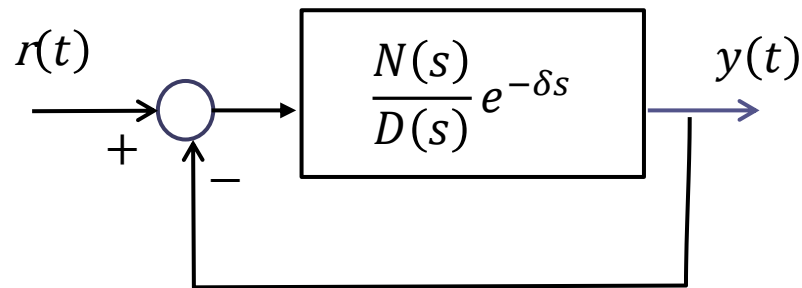
Mostriamo, con riferimento al sistema di controllo oggetto dell'esercizio, come le prestazioni del sistema a ciclo chiuso si deteriorano rapidamente al crescere del valore del ritardo. Per valori del ritardo superiori ad una soglia critica che impareremo a determinare più avanti il sistema di controllo diventa instabile a ciclo chiuso



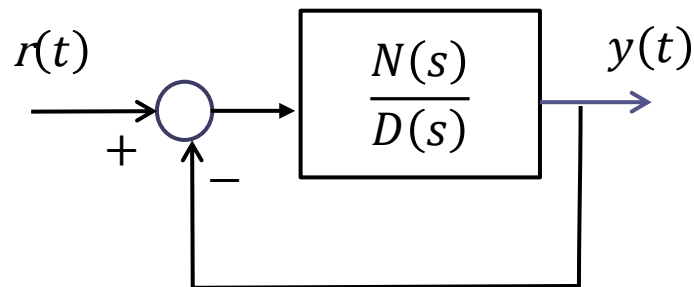


## Puntualizzazione sulla stabilità a ciclo chiuso di sistemi con ritardo

La presenza di un termine di ritardo nella FdT a ciclo aperto ha sempre **effetti negativi** sulla stabilità a ciclo chiuso. Ciò significa che il seguente sistema in retroazione

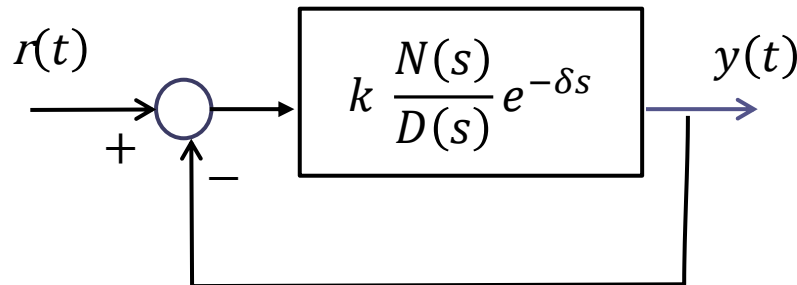


non potrà **mai** essere asintoticamente stabile se non lo è anche il relativo sistema in retroazione nel quale il ritardo sia stato azzerato



## Determinazione del ritardo critico e del guadagno critico

Con riferimento al seguente sistema di controllo



$$L(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

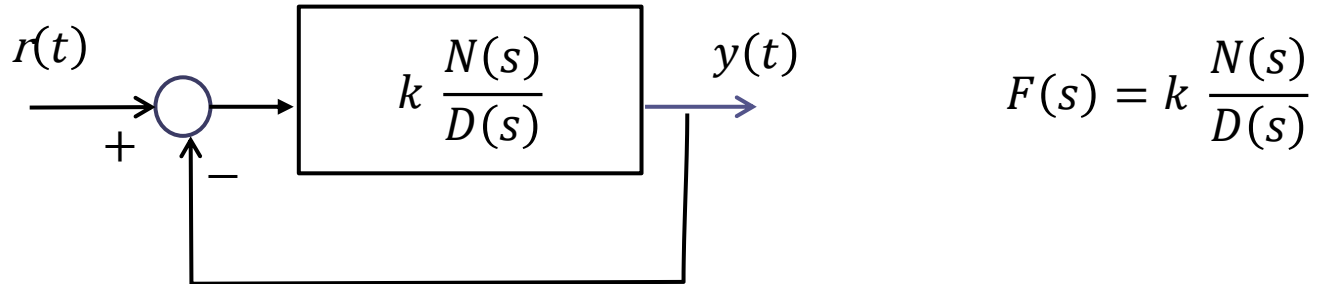
desideriamo rispondere ai due seguenti quesiti:

Quesito 1 Fissato  $k$ , ed ipotizzato che se  $\delta = 0$  il relativo sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso, qual è il **massimo valore consentito per il ritardo  $\delta$**  («ritardo critico  $\delta_{cr}$ ») tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso ?

Quesito 2 Fissato  $\delta$  qual è il **massimo valore consentito per il guadagno  $k$**  («guadagno critico  $k_{cr}$ ») tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso ?

## Determinazione del ritardo critico

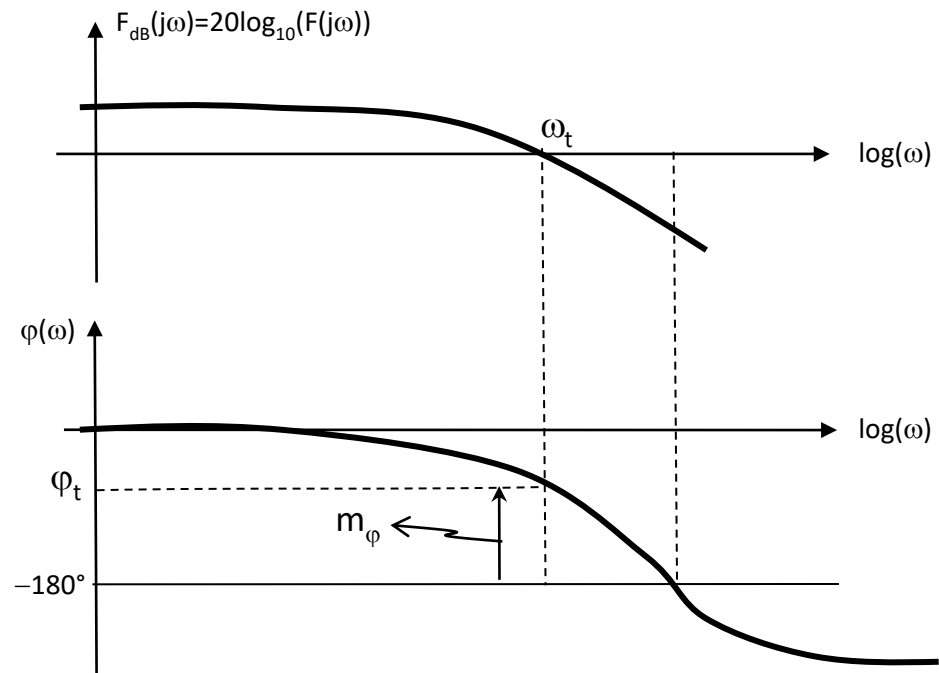
Per ipotesi il seguente sistema di controllo (ricavato ponendo pari a zero il ritardo  $\delta$ ) è asintoticamente stabile a ciclo chiuso



### Diagrammi di Bode della $F(s)$

Sulla base del Criterio di Bode, il margine di fase di  $F(s)$  sarà positivo.

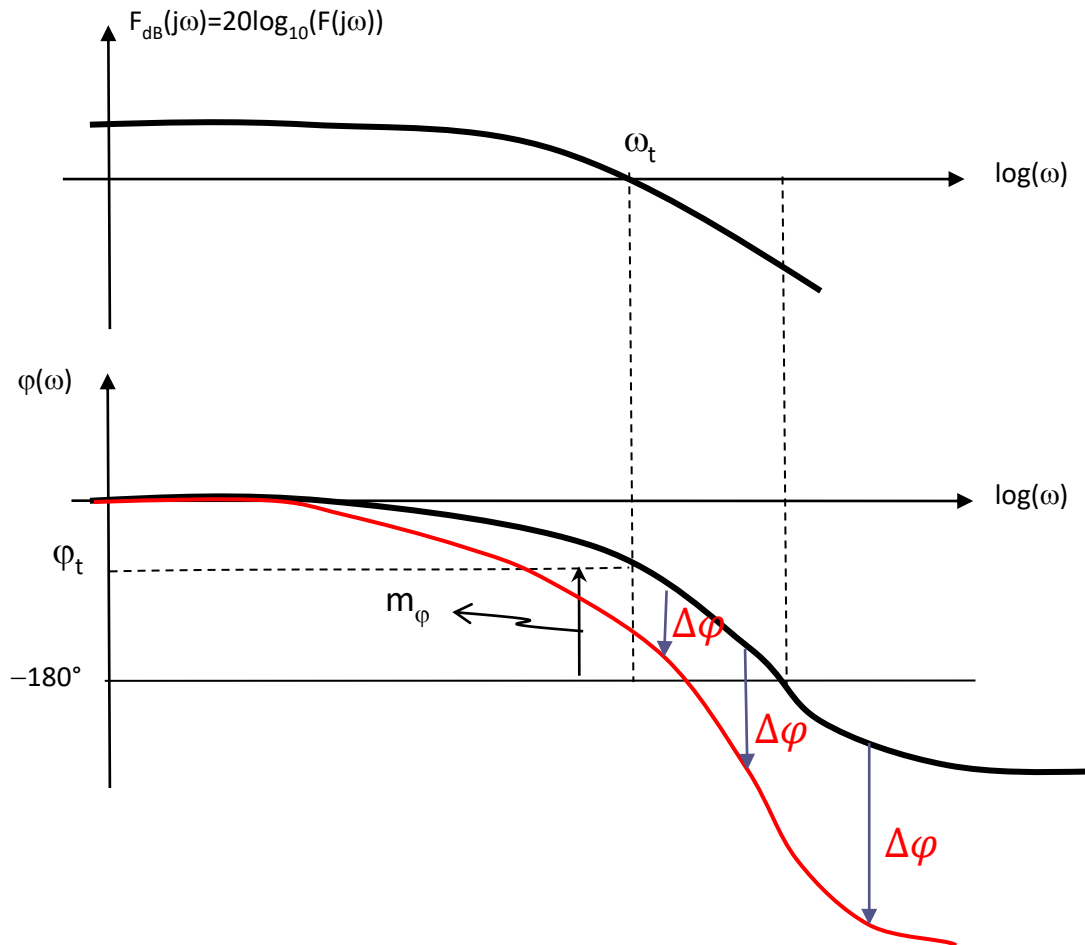
Qual'è l'effetto del termine di ritardo  $e^{-\delta s}$  sui diagrammi di Bode?



In cosa differiscono i diagrammi di Bode delle due FdT seguenti ?

$$F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

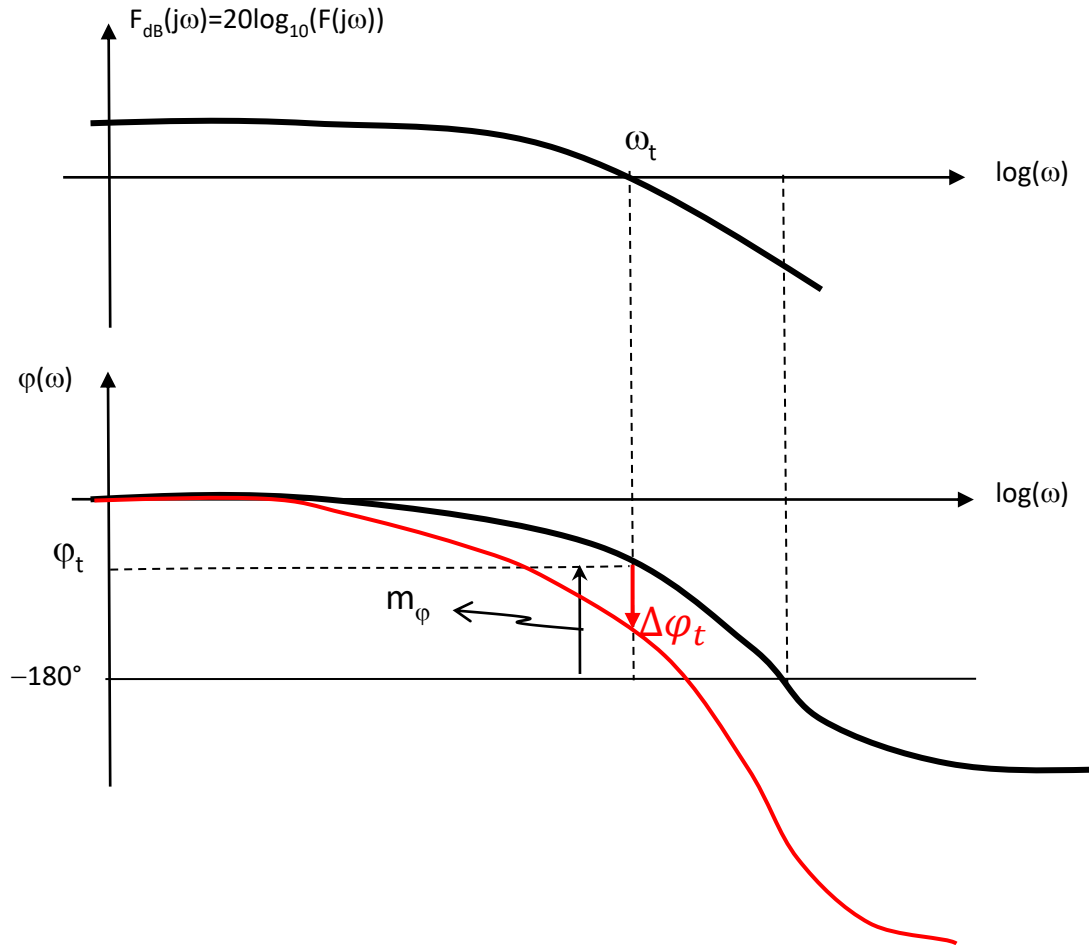
$$L(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$



Il diagramma dei moduli è identico

Il diagramma delle fasi viene alterato. Il termine di ritardo  $e^{-\delta s}$  induce nella fase di  $L(j\omega)$  uno sfasamento **in ritardo** addizionale che alla generica frequenza  $\omega$  vale

$$\Delta\varphi = -\delta\omega$$



In corrispondenza della pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  il ritardo induce uno sfasamento  $\Delta\varphi_t$  pari a

$$\Delta\varphi_t = -\delta\omega_t$$

**Quanto può valere al massimo tale sfasamento in ritardo  $\Delta\varphi_t$  senza che venga pregiudicata la stabilità a ciclo chiuso ?**

Desumiamo dal Criterio di Bode che il massimo sfasamento  $\Delta\varphi_t$  consentito tale da non pregiudicare la stabilità a ciclo chiuso **è pari al margine di fase**

$$|\Delta\varphi_t| = \delta\omega_t < m_\varphi$$



$$\delta < \frac{m_\varphi}{\omega_t}$$



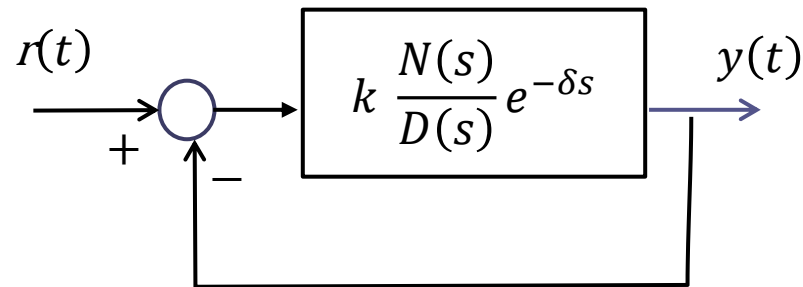
$$\delta_{cr} = \frac{m_\varphi}{\omega_t}$$

## ritardo critico – *espressione finale*

$$\delta_{cr} = \frac{m_\varphi}{\omega_t}$$

in cui la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase sono associati alla FdT  $F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$  e vengono letti sui relativi diagrammi di Bode

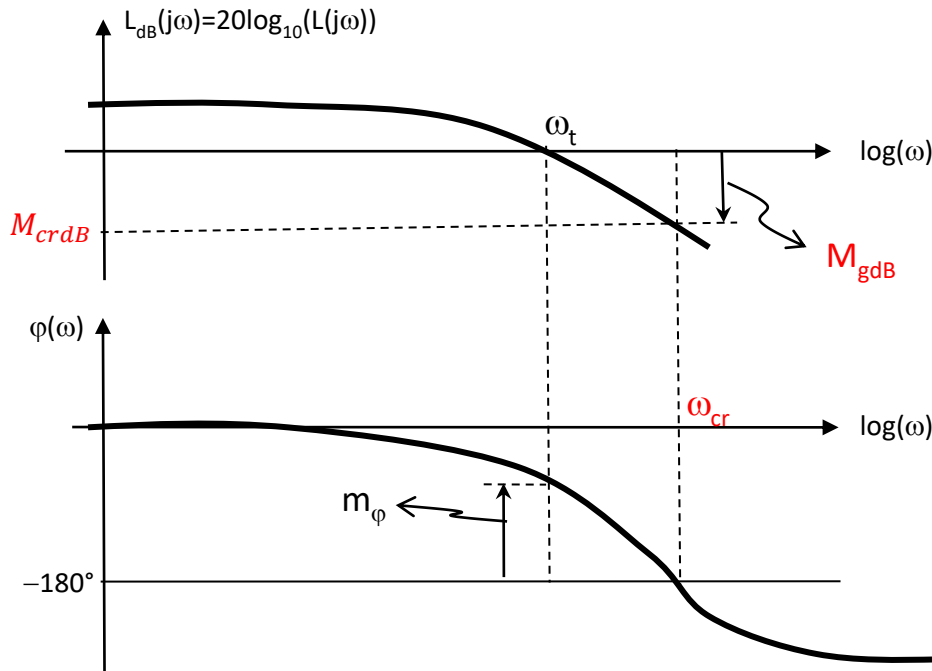
## Determinazione del guadagno critico



Fissato  $\delta$  qual è il **massimo valore consentito per il guadagno  $k$**  («**guadagno critico  $k_{cr}$** ») tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso ?

Per poter fornire una espressione compatta del guadagno critico dobbiamo definire due ulteriori grandezze caratteristiche associate ai diagrammi di Bode di una FdT

# Definizioni



## Pulsazione critica $\omega_{cr}$

Pulsazione alla quale il diagramma delle fasi di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a  $-180^\circ$

$$\arg L(j\omega_{cr}) = -180^\circ$$

## Margine di guadagno $M_{gdB}$

$$M_{gdB} = -M_{crdB}$$

$$M_{crdB} = |L(j\omega_{cr})|_{dB}$$

$M_{crdB}$  è il modulo di  $L(j\omega)$  (in dB) in corrispondenza della pulsazione critica

Il margine di guadagno è positivo quando il valore del modulo di  $L(j\omega)$  in dB alla pulsazione critica è negativo

## Guadagno critico – *espressione finale*

Sia  $M_{gdB}$  il margine di guadagno della FdT  $\frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$

Il guadagno critico si determina mediante la seguente espressione

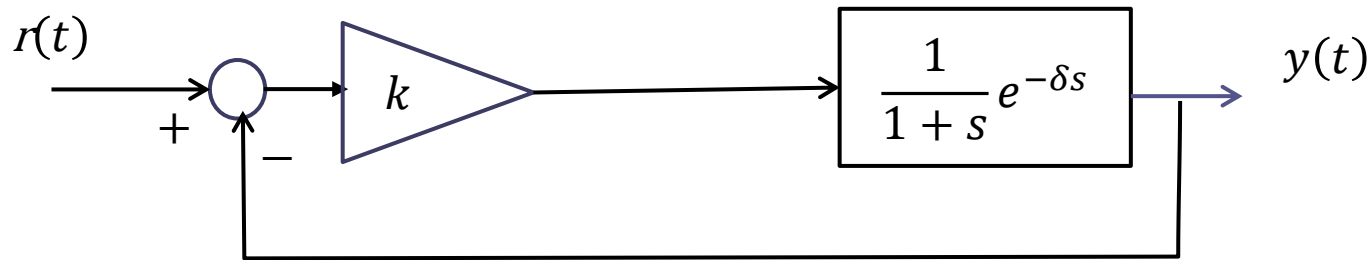
$$k_{cr} = 10^{M_{gdB} / 20}$$

Il guadagno critico è la conversione in valore naturale del margine di guadagno in dB della FdT  $\frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$



## Esercizio RIT-02

Si consideri il seguente sistema in retroazione



1. Assegnando al guadagno  $k$  il valore  $k = 5$  determinare il ritardo critico  $\delta_{cr}$
2. Assegnando al ritardo  $\delta$  il valore  $\delta = 0.5$  determinare il guadagno critico  $k_{cr}$

**Soluzione**

Quesito 1:  $\delta_{cr} = 0.363s$

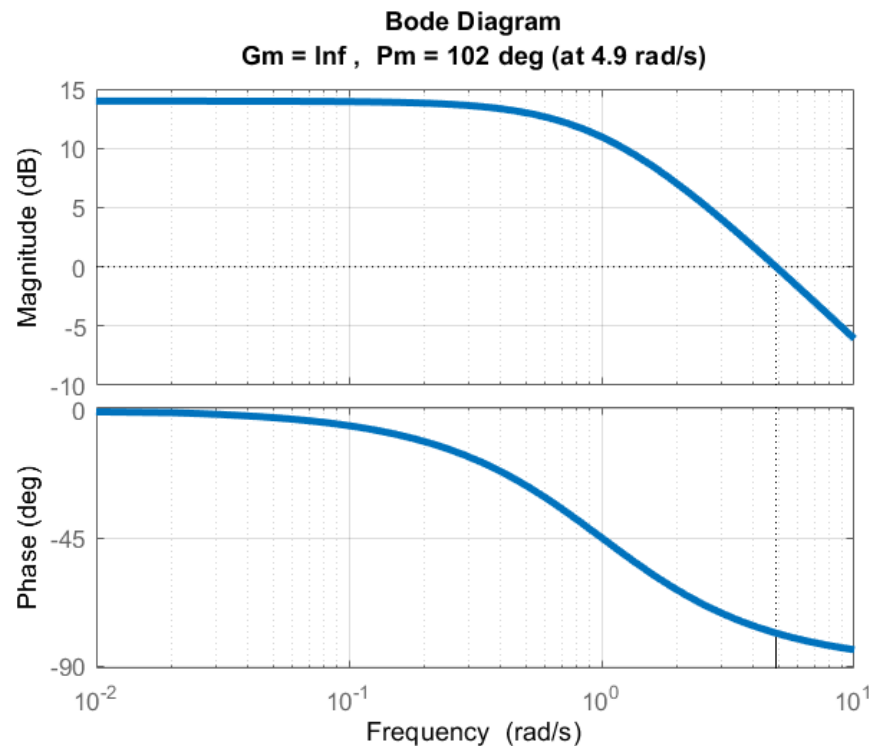
Quesito 2:  $k_{cr} = 3.8$

1. Assegnando al guadagno  $k$  il valore  $k = 5$  determinare il ritardo critico  $\delta_{cr}$

$$\delta_{cr} = \frac{m_{\varphi}}{\omega_t}$$

La pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  ed il margine di fase  $m_{\varphi}$  sono associati alla FdT  $F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5}{1+s}$  e vengono letti sui relativi diagrammi di Bode

```
s = tf('s');
F = 5/(s+1);
margin(F), grid
xlim([0.01 10])
```



$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

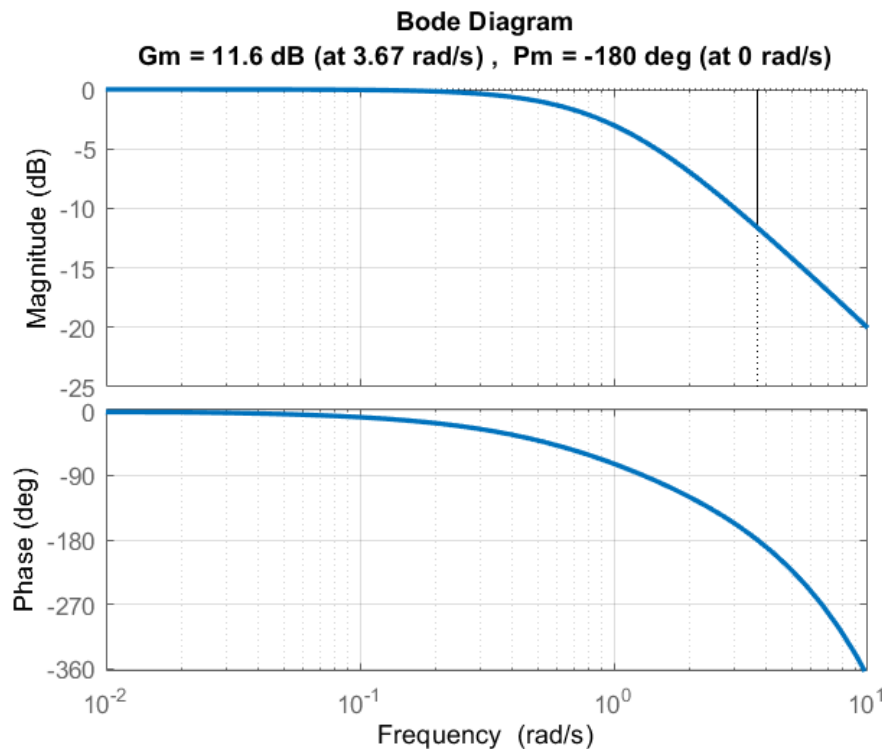
$$m_{\varphi} = 102^\circ = 1.78 \text{ rad}$$

$$\delta_{cr} = \frac{m_{\varphi}}{\omega_t} = 0.363 \text{ s}$$

2. Assegnando al ritardo  $\delta$  il valore  $\delta = 0.5$  determinare il guadagno critico  $k_{cr}$

$$k_{cr} = 10^{M_{gdB}/20}$$

$M_{gdB}$  è il margine di guadagno della FdT  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s} = \frac{1}{1+s} e^{-0.5s}$



$$\omega_{cr} = 3.67 \text{ rad/s}$$

$$M_{gdB} = 11.6 \text{ dB}$$

$$k_{cr} = 10^{M_{gdB}/20} = 3.8$$

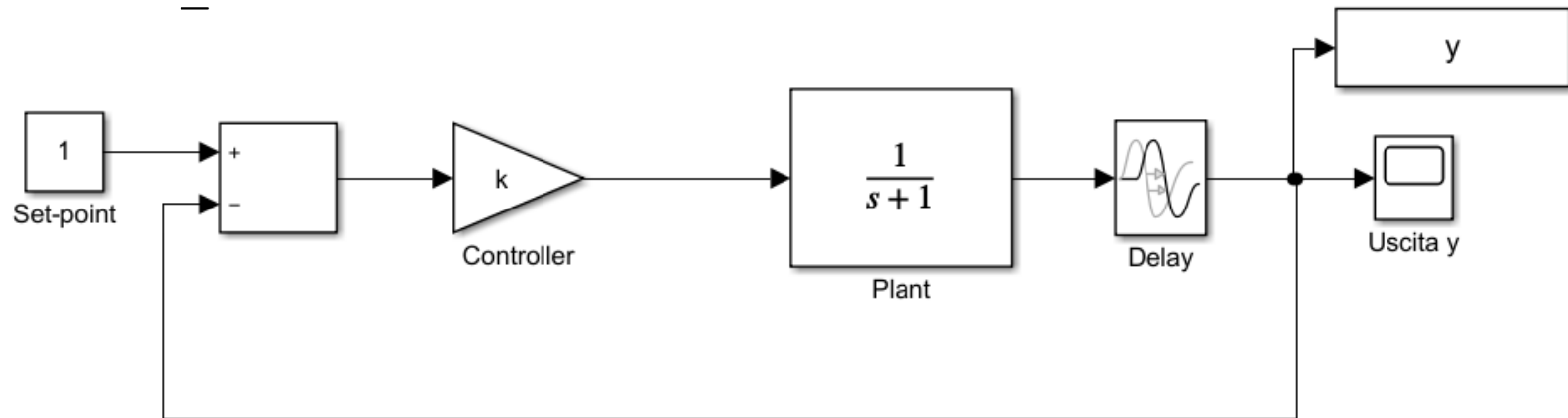
```
s = tf('s');
L = exp(-0.5*s)/(s+1);
margin(L),grid
xlim([0.01 10])
```

Istruzioni Matlab per visualizzare i diagrammi di Bode di una generica FdT di tipo FOPDT nell'intervallo di frequenza che va da 0.01 a 10

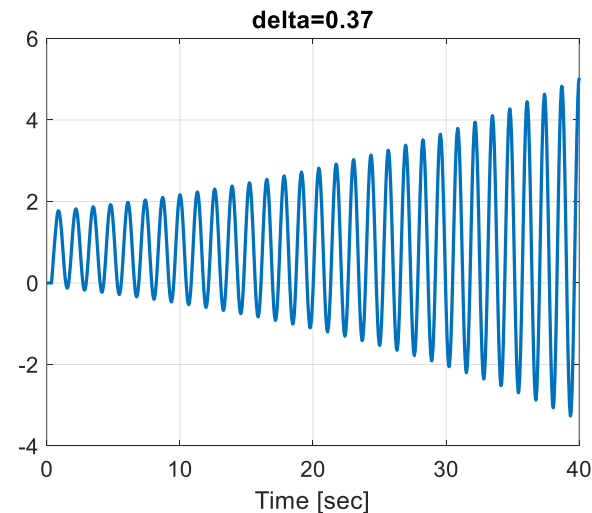
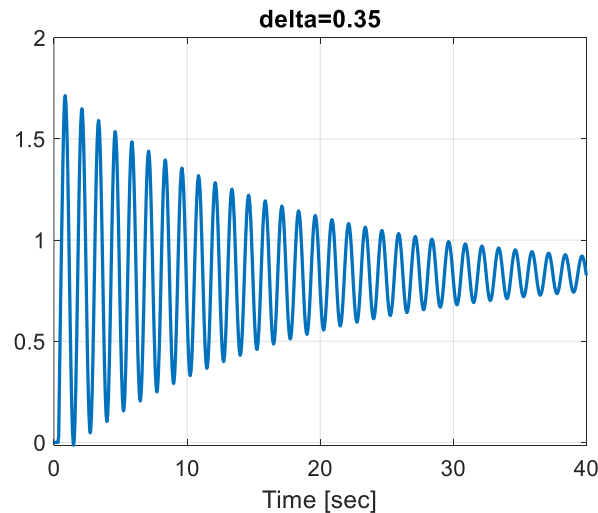
```
k=5;  
delta=0.5;  
tau=1;  
  
s = tf('s');  
L = k*exp(-delta*s)/(tau*s+1);  
  
bode(L),grid  
xlim([0.01 10])
```

Se si utilizza la funzione `margin` anziché `bode` vengono visualizzati i valori di pulsazione di attraversamento, pulsazione critica, margine di fase e margine di guadagno

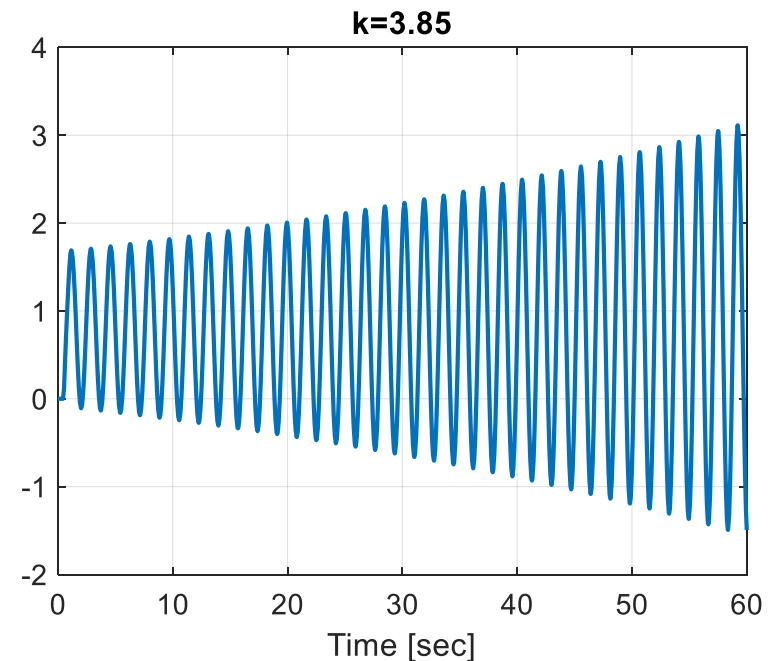
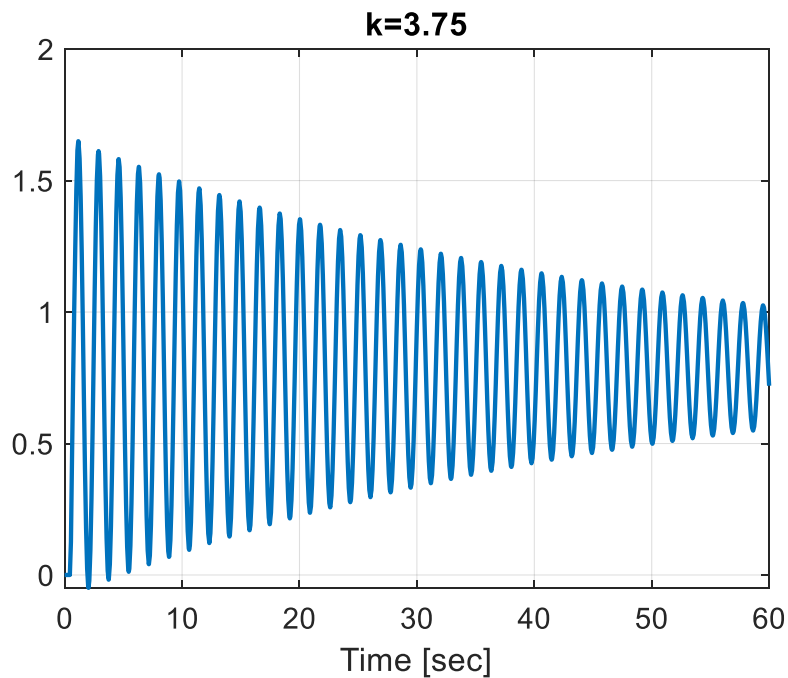
File: RIT\_02.slx



Con riferimento al primo problema trattato, fissiamo il valore del guadagno  $k$  a 5 e mostriamo la risposta a ciclo chiuso in corrispondenza di due valori distinti del ritardo, uno di poco inferiore al ritardo critico ed uno di poco superiore



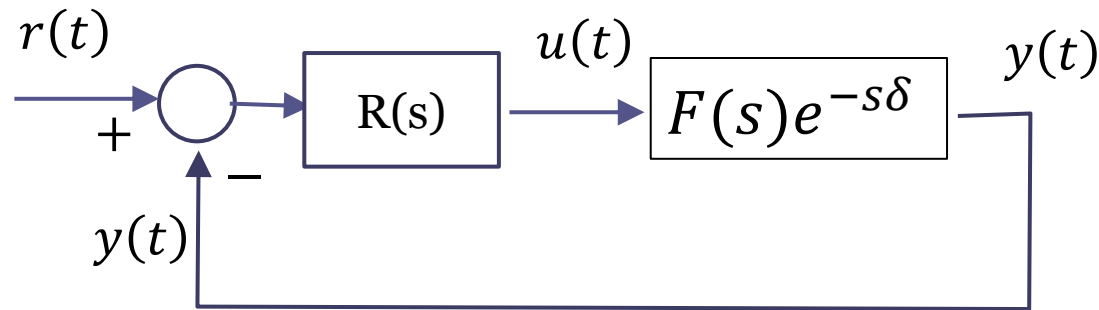
Con riferimento al secondo problema trattato, fissiamo il valore del ritardo a  $\delta = 0.5$  e mostriamo la risposta a ciclo chiuso in corrispondenza di due valori del guadagno, uno di poco inferiore al guadagno critico ed uno di poco superiore



## Predittore di Smith

L'architettura denominata «Predittore di Smith» serve per controllare in retroazione processi **asintoticamente stabili** affetti da un valore di ritardo  $\delta$  tale da rendere problematica la realizzazione di un sistema di controllo a loop singolo come quello riportato nella seguente figura, in cui  $F(s)$  rappresenta una FdT espressa mediante un rapporto di polinomi.

Architettura convenzionale a loop singolo

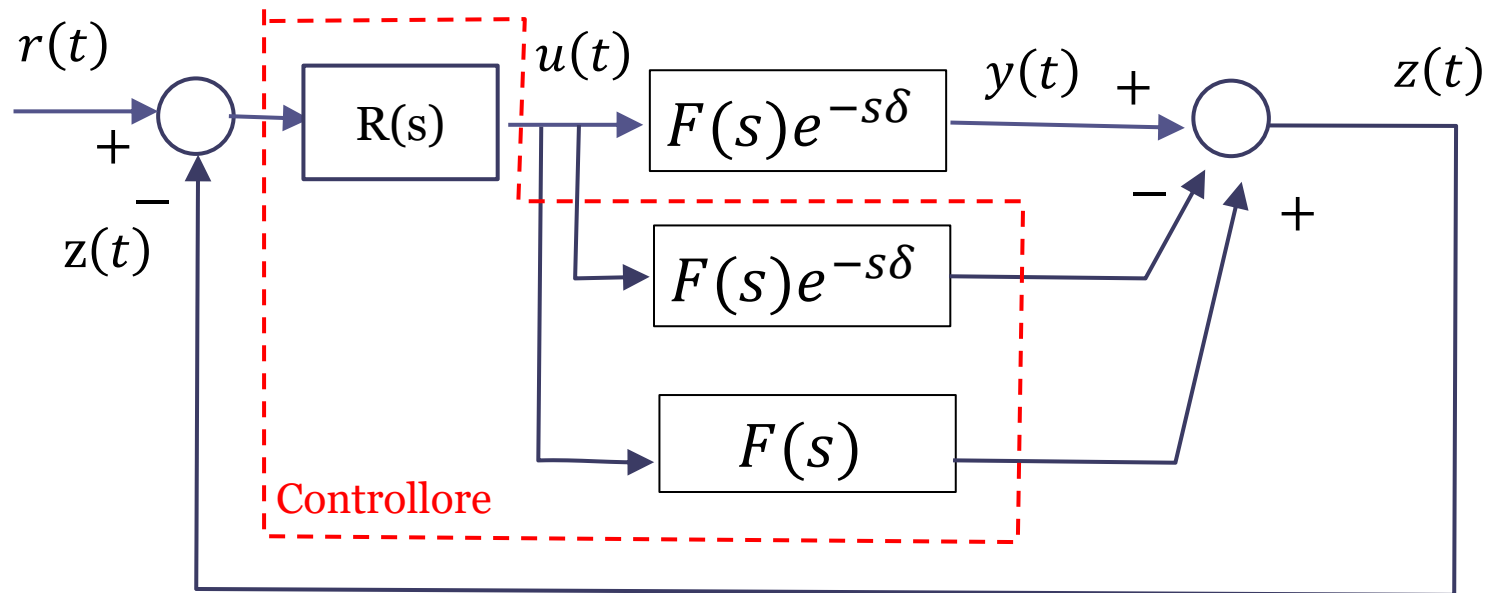


$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{Parte razionale del processo da controllare}$$

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)e^{-s\delta}}{1 + R(s)F(s)e^{-s\delta}}$$

Quando il ritardo  $\delta$  è elevato rispetto alla costante di tempo più grande del sistema (si dice in questo caso che il ritardo «domina» la dinamica del processo) serve una **architettura di controllo più complessa**.

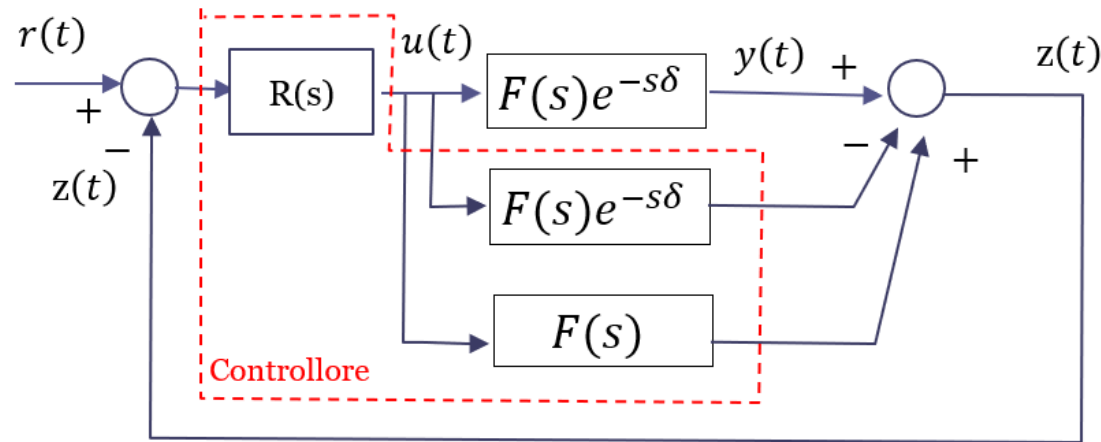
## Predittore di Smith



Nella architettura denominata «Predittore di Smith» viene retroazionata una variabile differente dalla variabile di uscita, la variabile  $z(t)$ , ottenuta sommando all'uscita  $y(t)$  del processo dei segnali ausiliari, **generati artificialmente dal sistema di controllo**.

**N.B.** Tale architettura è applicabile unicamente nel caso in cui il processo  $F(s)e^{-s\delta} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\delta}$  sia asintoticamente stabile, cioè le radici del polinomio  $D(s)$  abbiano parte reale strettamente negativa.

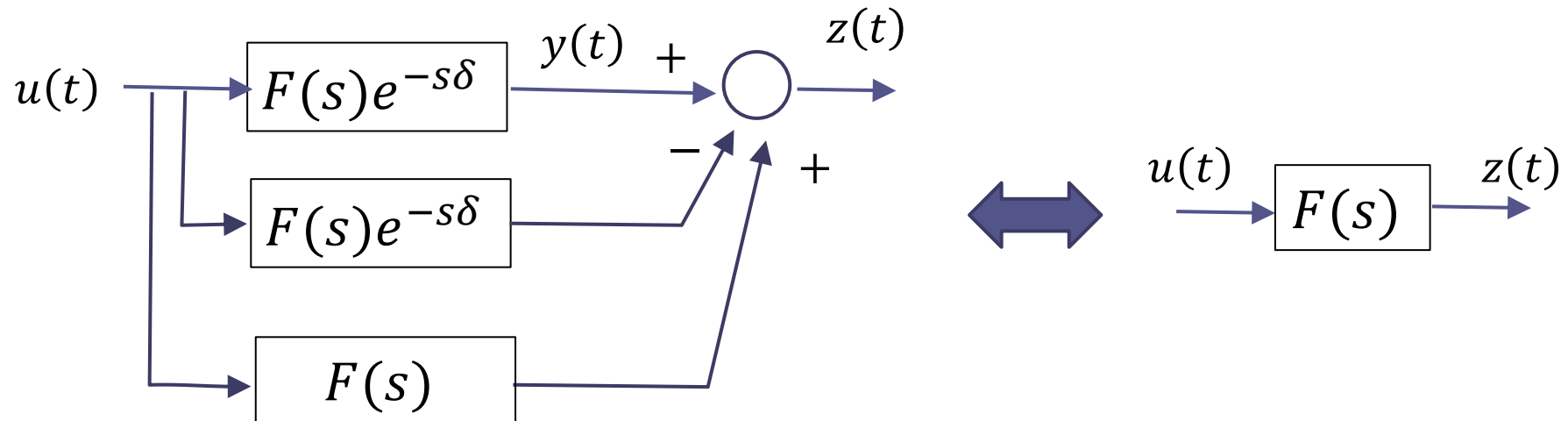




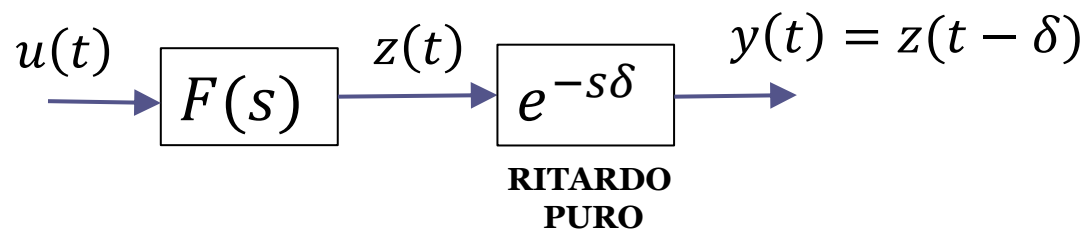
Il sistema di controllo mediante Predittore di Smith **include tutti i blocchi racchiusi all'interno del rettangolo tratteggiato**. Il sistema di controllo fa pertanto uso esplicito della dinamica del processo, e ciò costituisce il principale limite implementativo. In altri termini, per poter implementare il Predittore di Smith si deve disporre della **perfetta conoscenza del modello matematico del processo da controllare**.

I due blocchi  $F(s)e^{-s\delta}$  hanno nello schema un significato completamente differente. Quello in alto rappresenta il processo fisico da controllare, quello sottostante invece è un blocco che fa parte del sistema di controllo, e che viene pertanto realizzato come parte integrante dello schema di controllo. Esso è, per intenderci, un blocco analogo per funzionalità ad un blocco Simulink che emula il medesimo comportamento ingresso-uscita del sistema fisico.

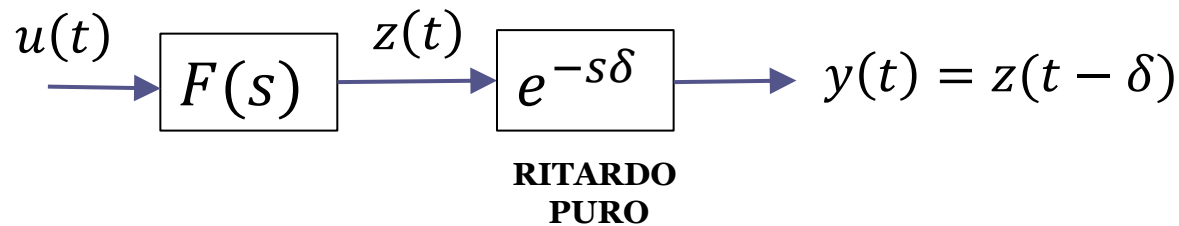
**Perchè si chiama «Predittore» ?** Concentriamoci sulla parte del sistema di controllo che costruisce il segnale  $z(t)$  e chiediamoci in che relazione stanno fra loro il segnale  $z(t)$  e l'uscita  $y(t)$



Poiché il legame fra  $u(t)$  e  $y(t)$  è descritto dalla FdT  $F(s)e^{-s\delta}$ , per ottenere  $y(t)$  a partire da  $z(t)$  si deve far propagare quest'ultimo attraverso un ulteriore blocco avente FdT  $e^{-s\delta}$ . Tale blocco rappresenta, come abbiamo visto, un **ritardo puro**



Dalla seguente rappresentazione



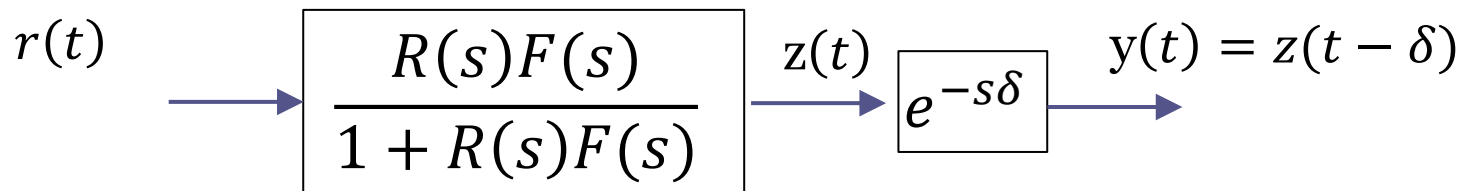
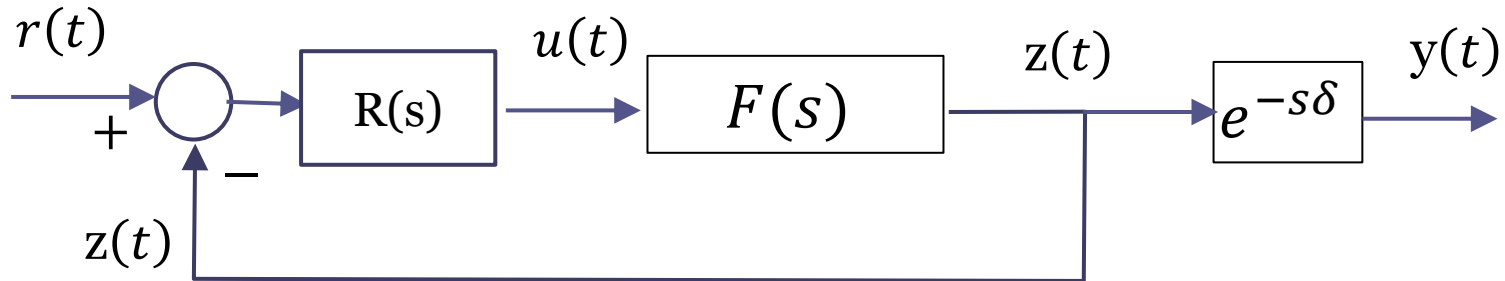
ed in particolare dalla relazione  $y(t) = z(t - \delta)$  si desume che

$$z(t) = y(t + \delta)$$

Il valore del segnale  $z(t)$  all'istante  $t$  rappresenta pertanto una «**predizione**» di quello che sarà il valore dell'uscita all'istante futuro  $t + \delta$

E' chiaro che la possibilità di costruire tale «predizione» del comportamento futuro del processo discende dalla perfetta conoscenza del suo modello matematico

Sulla base delle analisi precedentemente svolte, lo schema di controllo con Predittore di Smith può essere analizzato riferendosi al seguente **schema equivalente**



Funzione di trasferimento a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

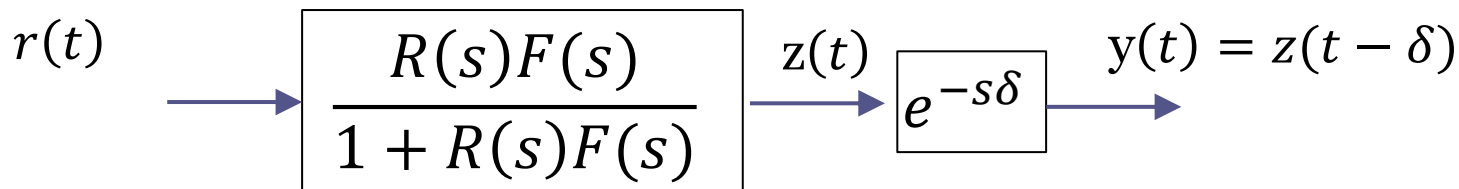
$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

L'espressione ricavata per la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

rende estremamente semplice analizzare la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo, che sarà determinata dai poli della FdT  $\frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)}$

La seguente decomposizione



fornisce inoltre una facile soluzione al problema della determinazione delle caratteristiche della variabile di uscita. L'evoluzione temporale della variabile  $z(t)$  può essere analizzata (e anche «imposta» mediante una opportuna scelta del regolatore  $R(s)$ ) con le tecniche viste in precedenza per i sistemi dinamici **non affetti da ritardo**. L'evoluzione temporale della variabile di uscita  $y(t)$  replicherà fedelmente quella della variabile  $z(t)$  con l'unica differenza di un ritardo temporale  $\delta$  fra i due segnali.

## FdT a ciclo chiuso con e senza il predittore di Smith

Senza il predittore di Smith:

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s) e^{-s\delta}}{1 + R(s)F(s)e^{-s\delta}}$$

Usando il predittore di Smith:

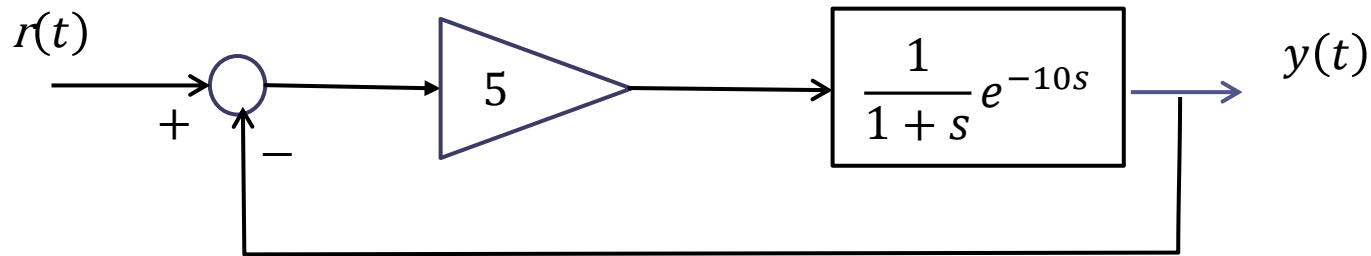
$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

Si nota come utilizzando il predittore di Smith la FdT a ciclo chiuso ha una forma differente. **Il termine di ritardo è sparito dal denominatore.**

Utilizzando il predittore di Smith la stabilità a ciclo chiuso dipende unicamente dalla posizione nel piano dei poli della FdT  $\frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)}$ , che è una FdT **algebrica**.

## Esercizio RIT-03

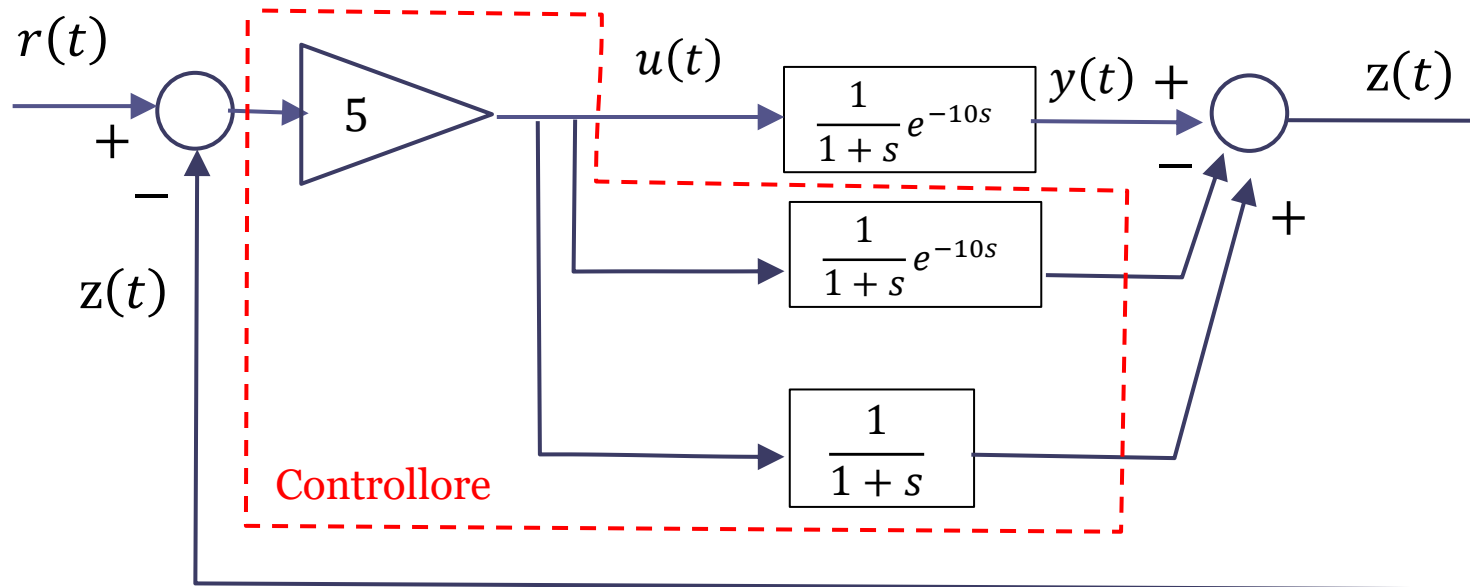
Si **riprogetti** il seguente sistema in retroazione



che risulta essere **instabile a ciclo chiuso** implementando l'architettura basata sul Predittore di Smith

Per lo schema con predittore di Smith determinare l'evoluzione completa (transitoria e di regime) dell'uscita in risposta ad un set point a gradino unitario

## Schema a blocchi della architettura basata sul Predittore di Smith



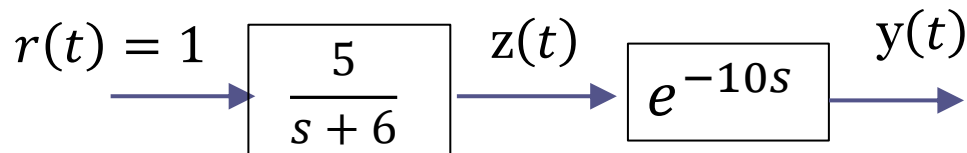
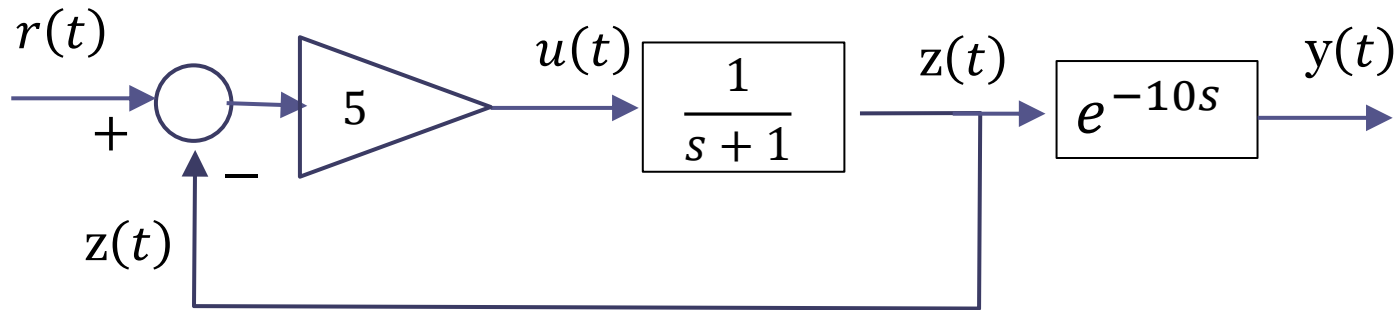
Lo schema in figura garantisce un comportamento stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore del ritardo in conseguenza del fatto che la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è la seguente

$$W_r^y(s) = \frac{5}{s+6} e^{-10s}$$



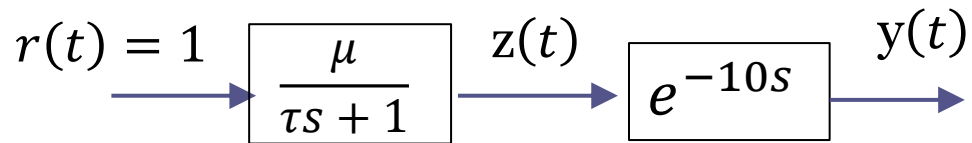
## Evoluzione dell'uscita in risposta ad un set point a gradino unitario

Schema equivalente

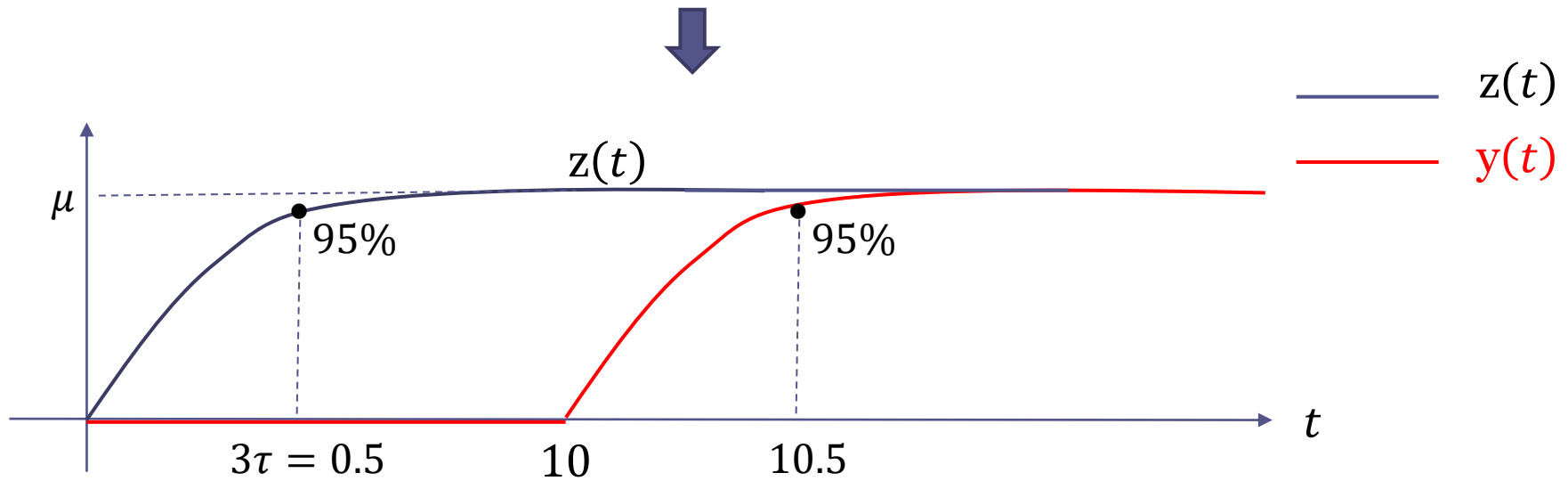


$$\frac{5}{s+6} = \frac{5/6}{\frac{1}{6}s + 1}$$

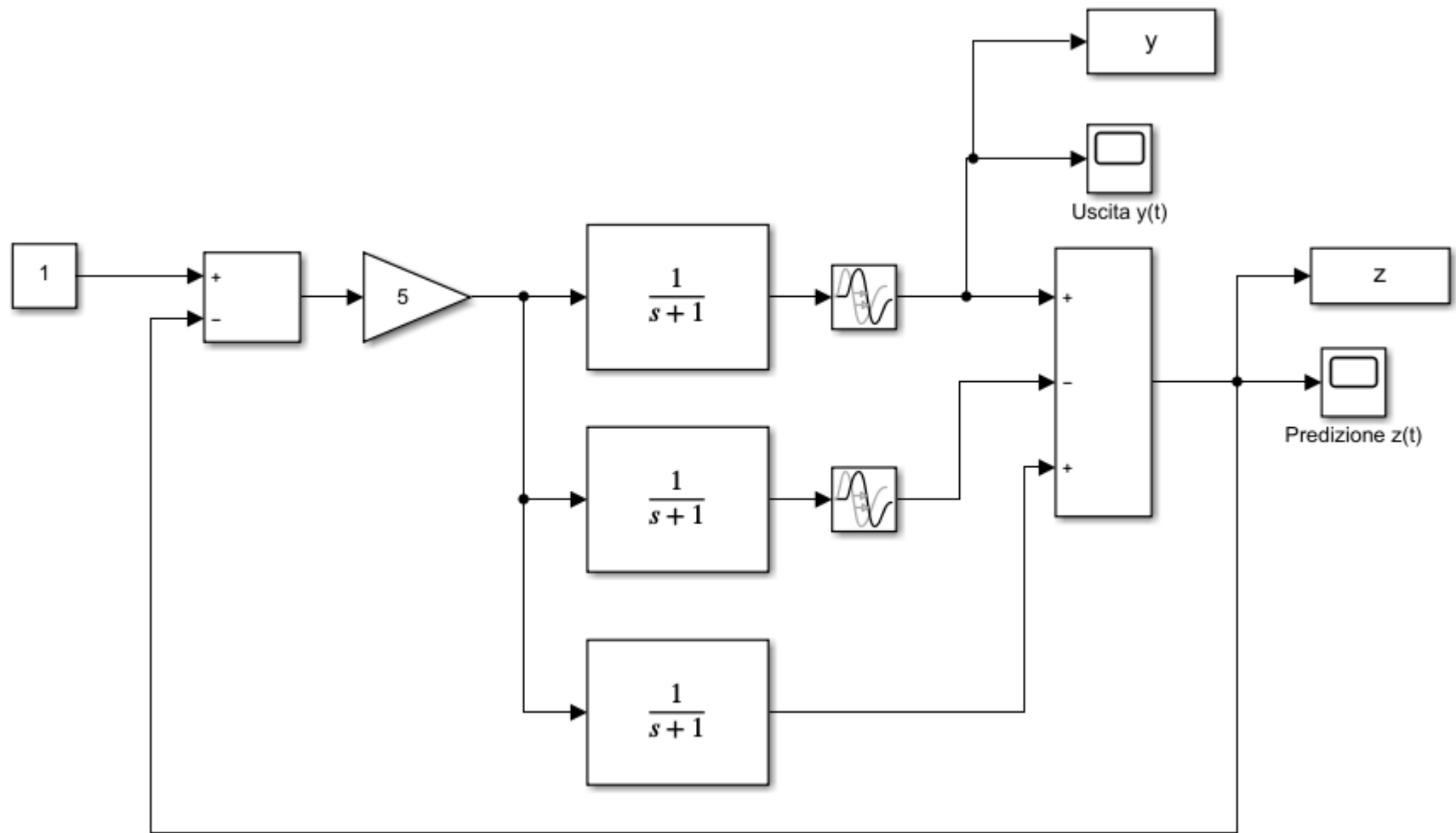
Sistema STC con guadagno  $\mu = 5/6$  e costante di tempo  $\tau = \frac{1}{6}$ . La risposta al gradino unitario di tale FdT definisce l'evoluzione temporale del segnale  $z(t)$ . L'uscita  $y(t)$  replica l'evoluzione temporale di  $z(t)$  con 10 secondi di ritardo.

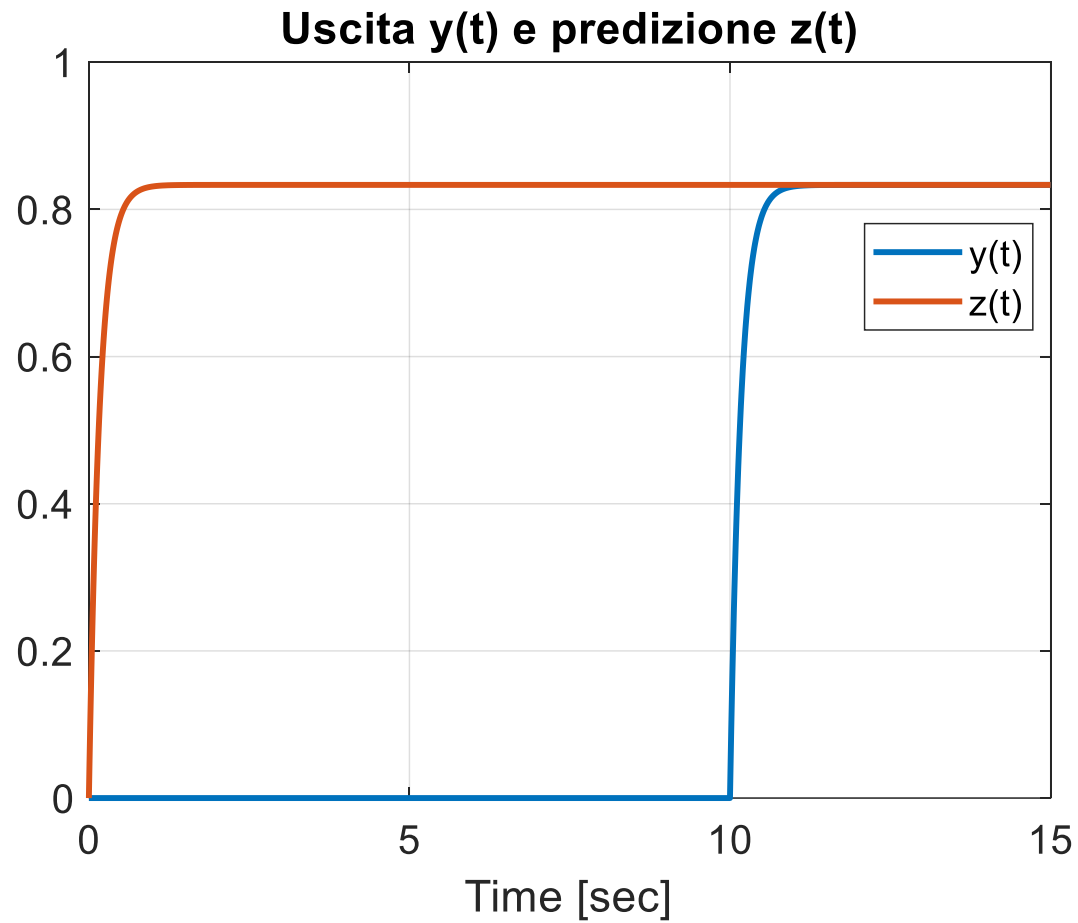


$$\mu = \frac{5}{6} \quad \tau = \frac{1}{6}$$



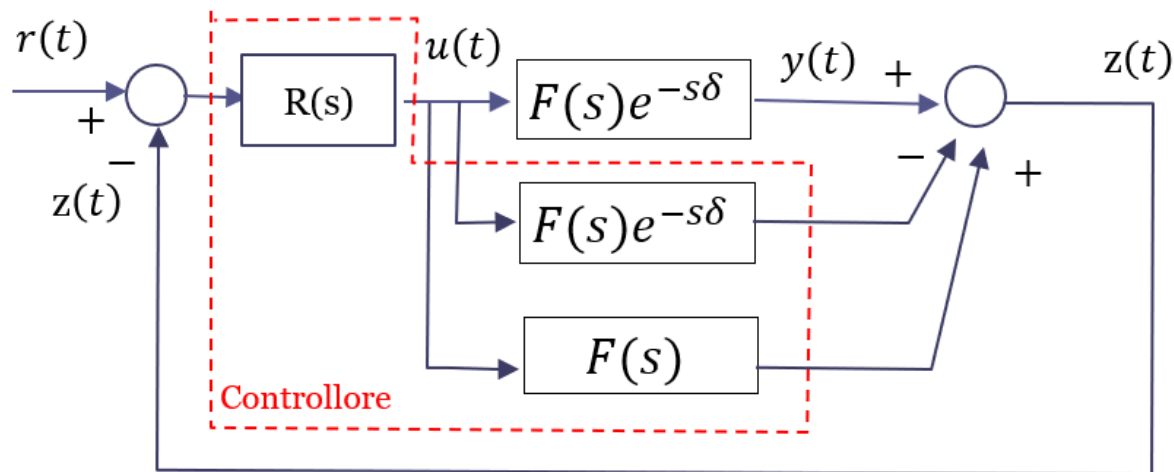
File: RIT\_03.slx



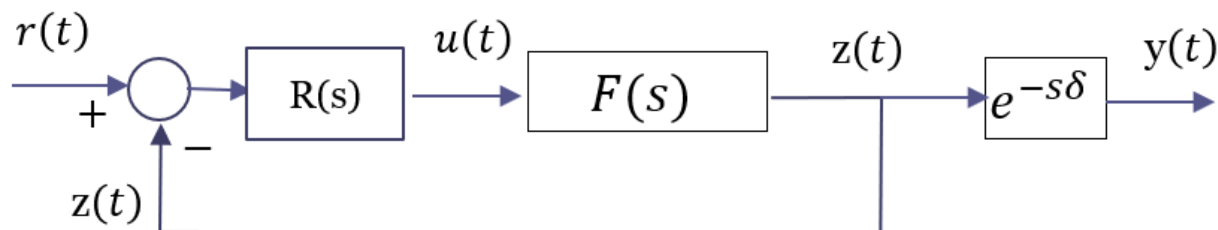


## Progetto del regolatore $R(s)$

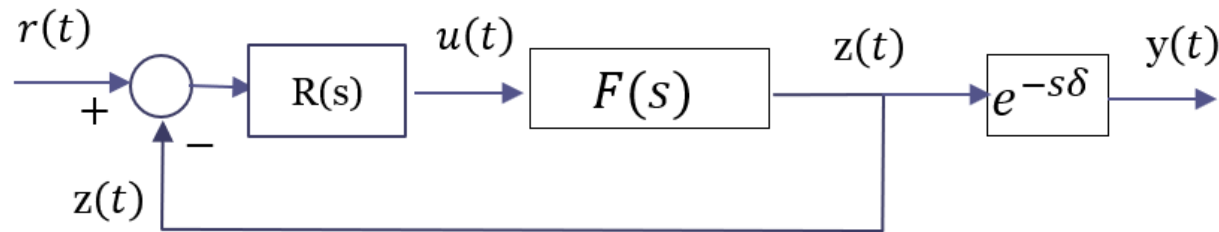
Vediamo come sviluppare il progetto del regolatore  $R(s)$  volto a garantire il soddisfacimento di determinate specifiche sul comportamento di regime e transitorio della variabile di uscita



Per comprendere come deve essere impostato il ragionamento risulta utile riferirsi al seguente schema equivalente.

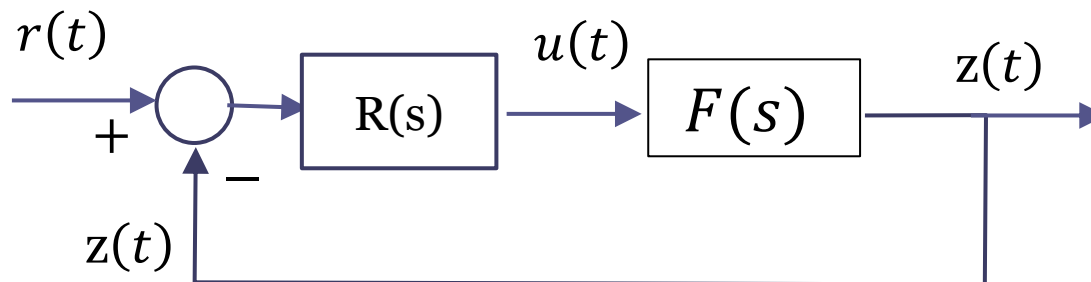


Per comprendere come deve essere impostato il ragionamento risulta utile riferirsi al seguente schema equivalente.

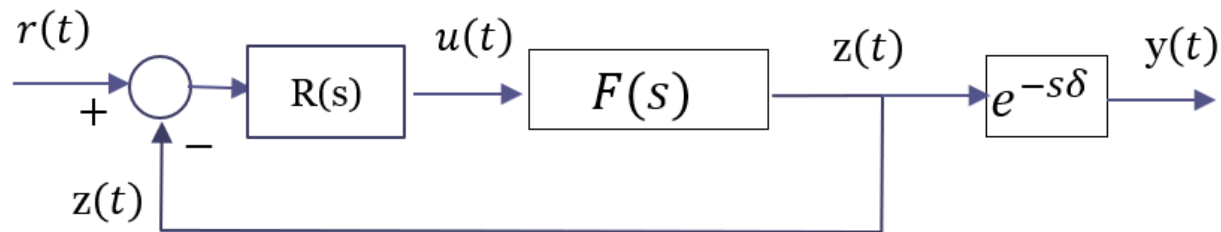


**Il comportamento di regime dell'uscita  $y(t)$  coincide con quello del segnale  $z(t)$ .**

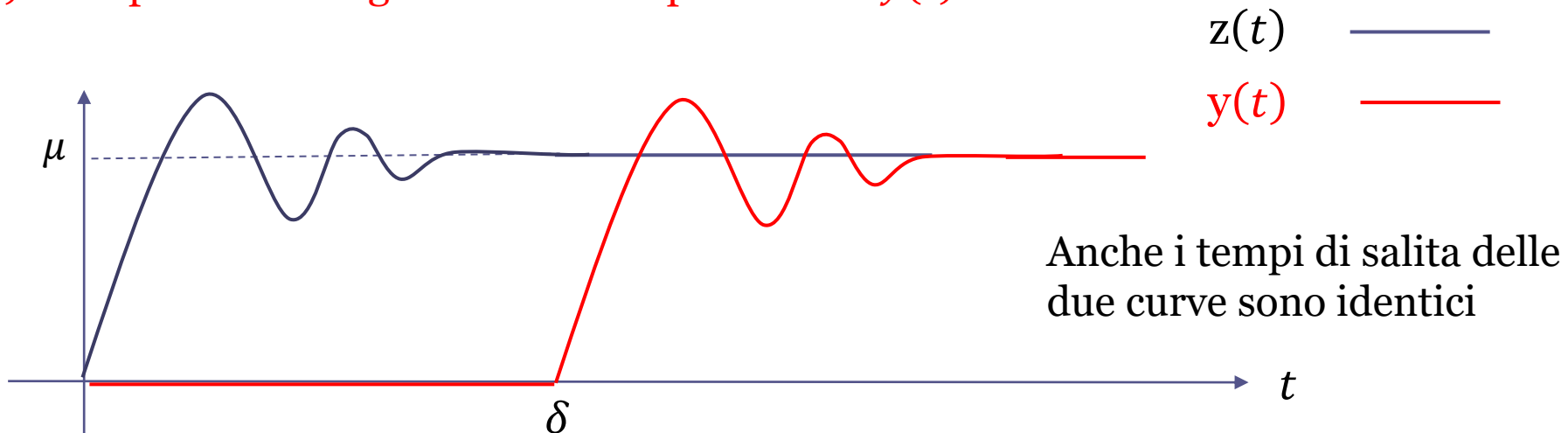
Per garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento di regime (ad esempio la precisione statica) sarà pertanto sufficiente progettare il regolatore per fare in modo che tali specifiche siano soddisfatte dal segnale  $z(t)$ . In altri termini, il progetto del regolatore va fatto con riferimento al seguente sistema in retroazione, in cui il processo coincide con la sola **parte algebrica**  $F(s)$  del processo complessivo  $F(s)e^{-\delta s}$



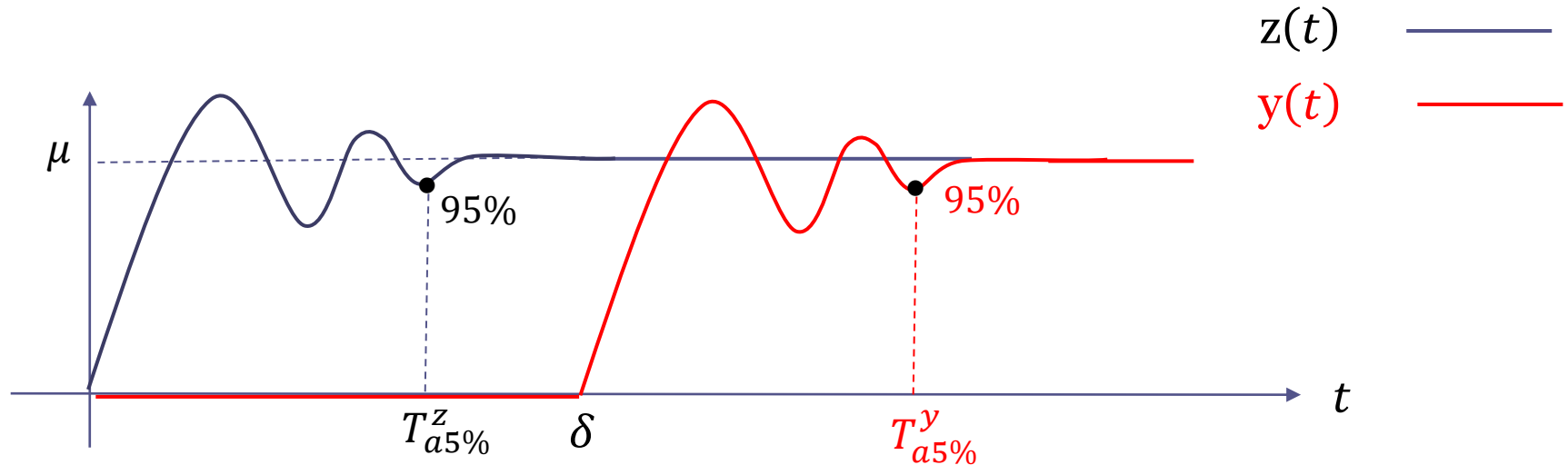
Circa le specifiche sul comportamento transitorio si deve tenere in considerazione il fatto che l'evoluzione temporale della variabile di uscita  $y(t)$  replicherà fedelmente quella della variabile  $z(t)$  con l'unica differenza di un ritardo temporale  $\delta$  fra i due segnali.



Ciò implica che  $z(t)$  ed  $y(t)$  sono caratterizzati dalla **medesima sovraelongazione**, e pertanto **se viene garantita una certa specifica sulla sovraelongazione della variabile  $z(t)$  tale specifica sarà garantita anche per l'uscita  $y(t)$**



Invece i tempi di assestamento delle due curve differiscono di  $\delta$



$$T_{a5\%}^y = T_{a5\%}^z + \delta$$

Se ad esempio il ritardo  $\delta$  vale 1, per garantire un tempo di assestamento della uscita  $y(t)$  minore o uguale di 1.2 si dovrà progettare il regolatore in modo da imporre un tempo di assestamento per la variabile  $z(t)$  minore o uguale di 0.2

(chiaramente, se il ritardo vale 1 secondo non è possibile fare in modo che il tempo di assestamento di  $y(t)$  sia inferiore ad 1 secondo, dato che l'uscita si mantiene identicamente nulla per  $t \in [0, \delta]$  ed inizia a «rispondere» solo per  $t > \delta$ )



## Esercizio RIT-04

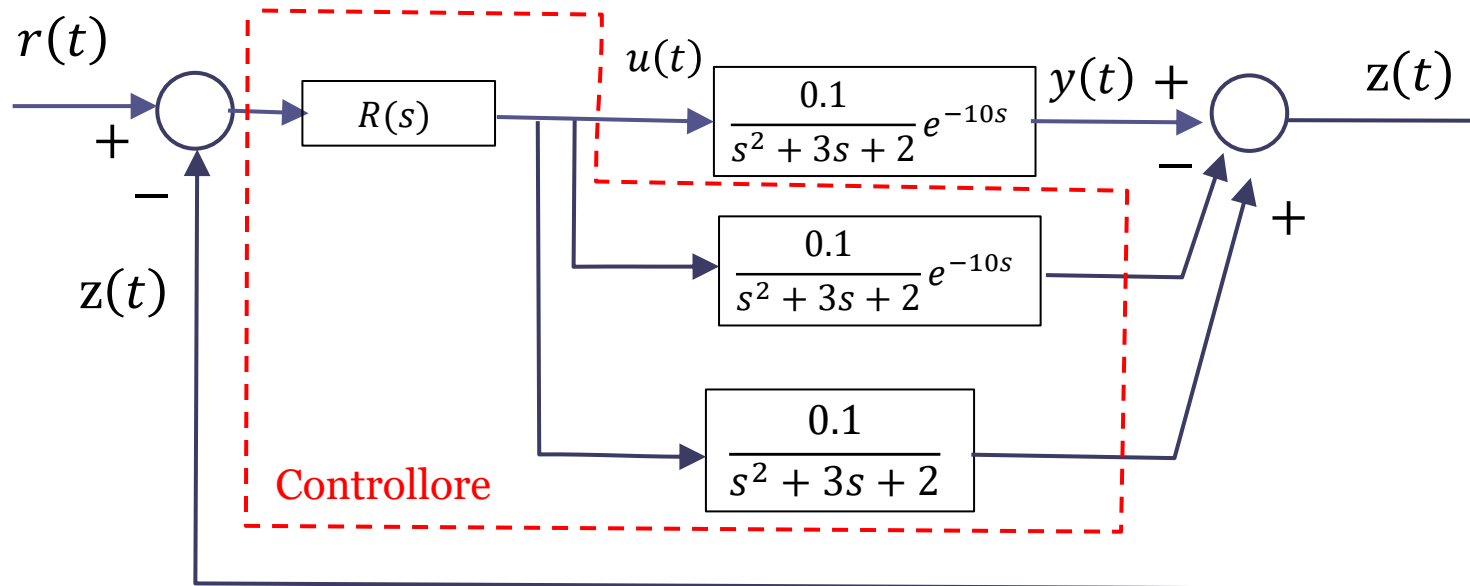
Con riferimento al processo  $P(s) = \frac{0.1}{s^2 + 3s + 2} e^{-10s}$  si progetti un sistema di controllo a ciclo chiuso in grado di garantire la precisione statica ed una risposta ad un set point costante monotona crescente e caratterizzata da un tempo di assestamento al 5% non superiore a 15 secondi

S1 precisione statica

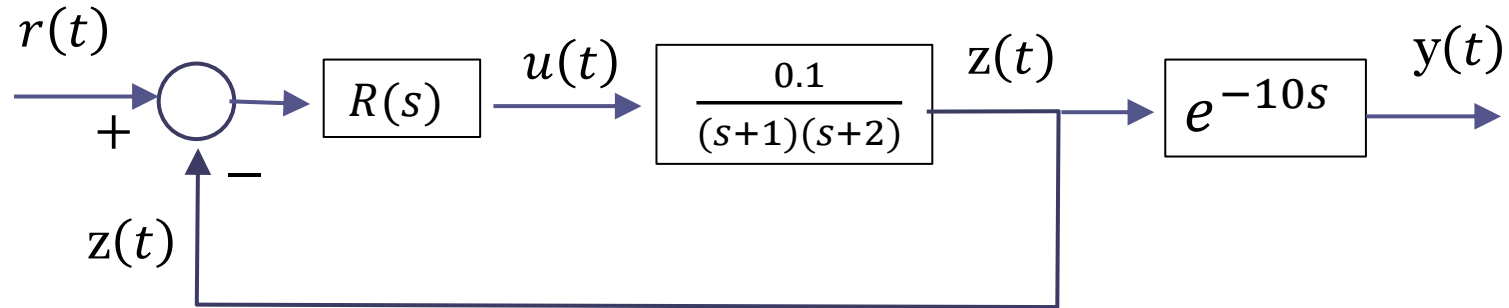
S2 risposta ad un set point costante monotona crescente

S3 tempo di assestamento al 5% non superiore a 15 secondi

# Schema a blocchi della architettura basata sul Predittore di Smith



Per il progetto del regolatore facciamo riferimento allo **schema equivalente**



Si deve progettare il regolatore  $R(s)$  in modo che  $z(t)$  soddisfi il requisito di precisione statica, esibisca una risposta al gradino monotona crescente, ed il suo tempo di assestamento al 5% sia non superiore a **5 secondi** ( $= 15-10$ )

$R(s)$  deve contenere un polo nell'origine. Inseriamo anche uno zero in modo da realizzare un controllore con grado relativo nullo. In prima battuta, posizioniamo lo zero sovrapposto al polo del processo più in bassa frequenza

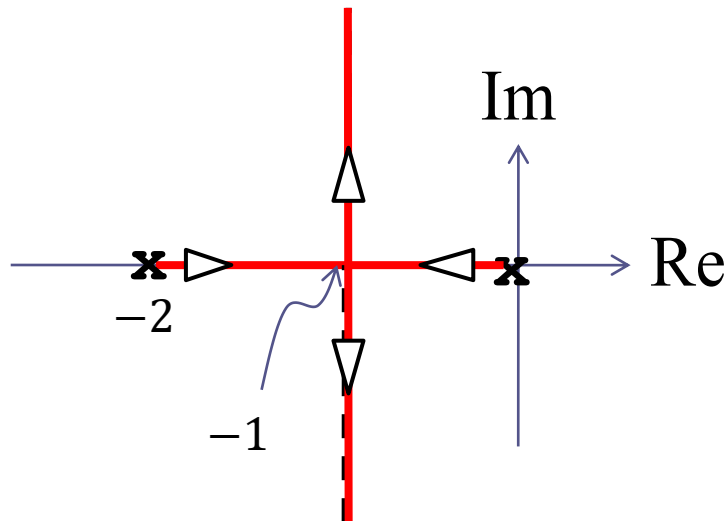
$$R(s) = K_R \frac{s+1}{s}$$

Tracciamo il LdR per comprendere l'effetto della variazione del guadagno  $K_R$  sui poli a ciclo chiuso

$$R(s) = K_R \frac{s+1}{s}$$

$$L(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{0.1}{(s+1)(s+2)} = \frac{0.1}{s(s+2)}$$

$\bar{k} = 0.1$  Guadagno in alta frequenza di  $L(s)$

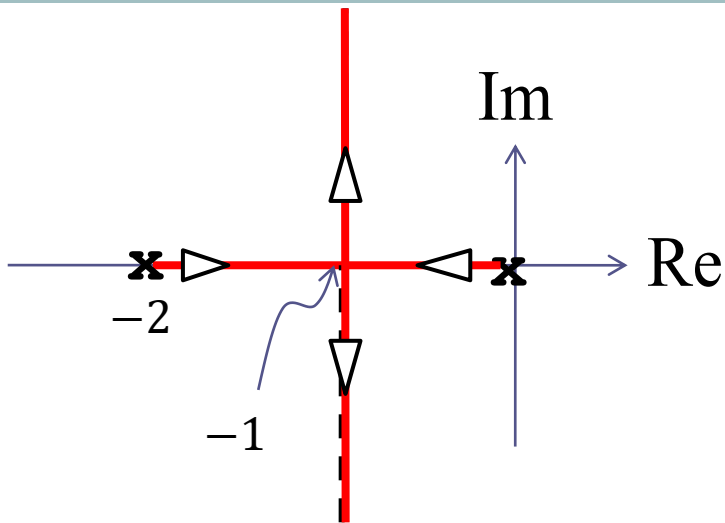


Taratura del punto doppio:  $K_R = 10$

La specifica S1 è soddisfatta grazie alla presenza nella FdT a ciclo aperto del polo nell'origine.

La specifica S2 implica che i poli a ciclo chiuso debbano essere tutti reali

$$0 < K_R \leq 10$$

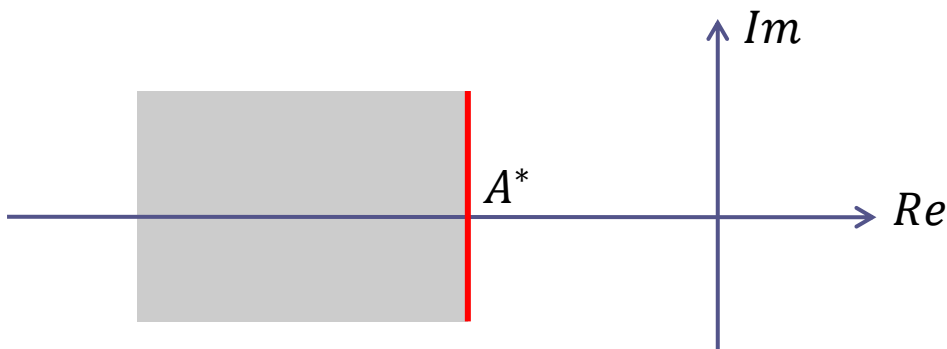


Taratura del punto doppio:  $K_R = 10$

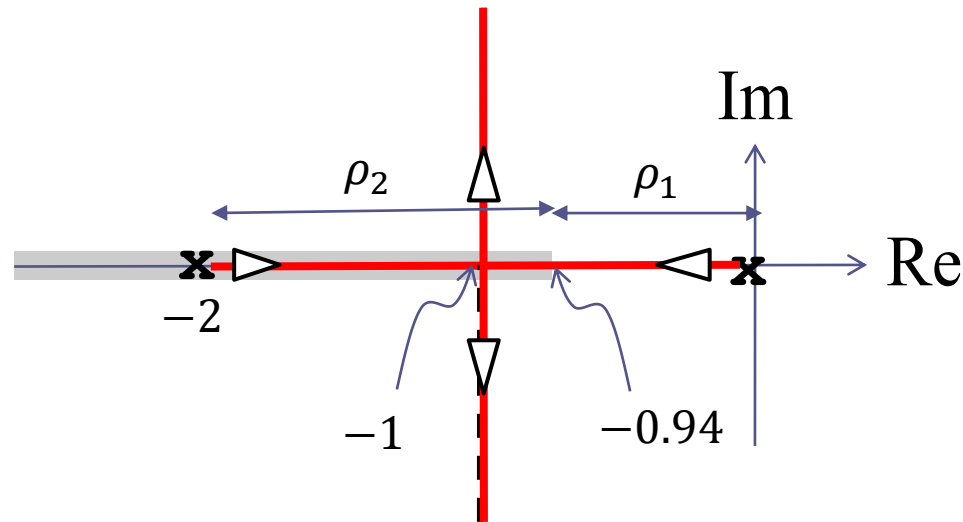
La specifica S3 implica un vincolo sulla parte reale dei 2 poli a ciclo chiuso

$$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2} \quad T_{a5\%} = 4.7 \tau \quad \Rightarrow \quad 4.7 \tau \leq 5 \quad \Rightarrow \quad \tau \leq \frac{5}{4.7} = 1.06s$$

cui corrisponde la regione ammissibile per i poli



$$A^* = -\frac{1}{1.06} = -0.94$$



La taratura del punto dell'asse reale posizionato sul bordo della regione ammissibile (il punto di ascissa  $-0.94$ ) fornisce come risultato

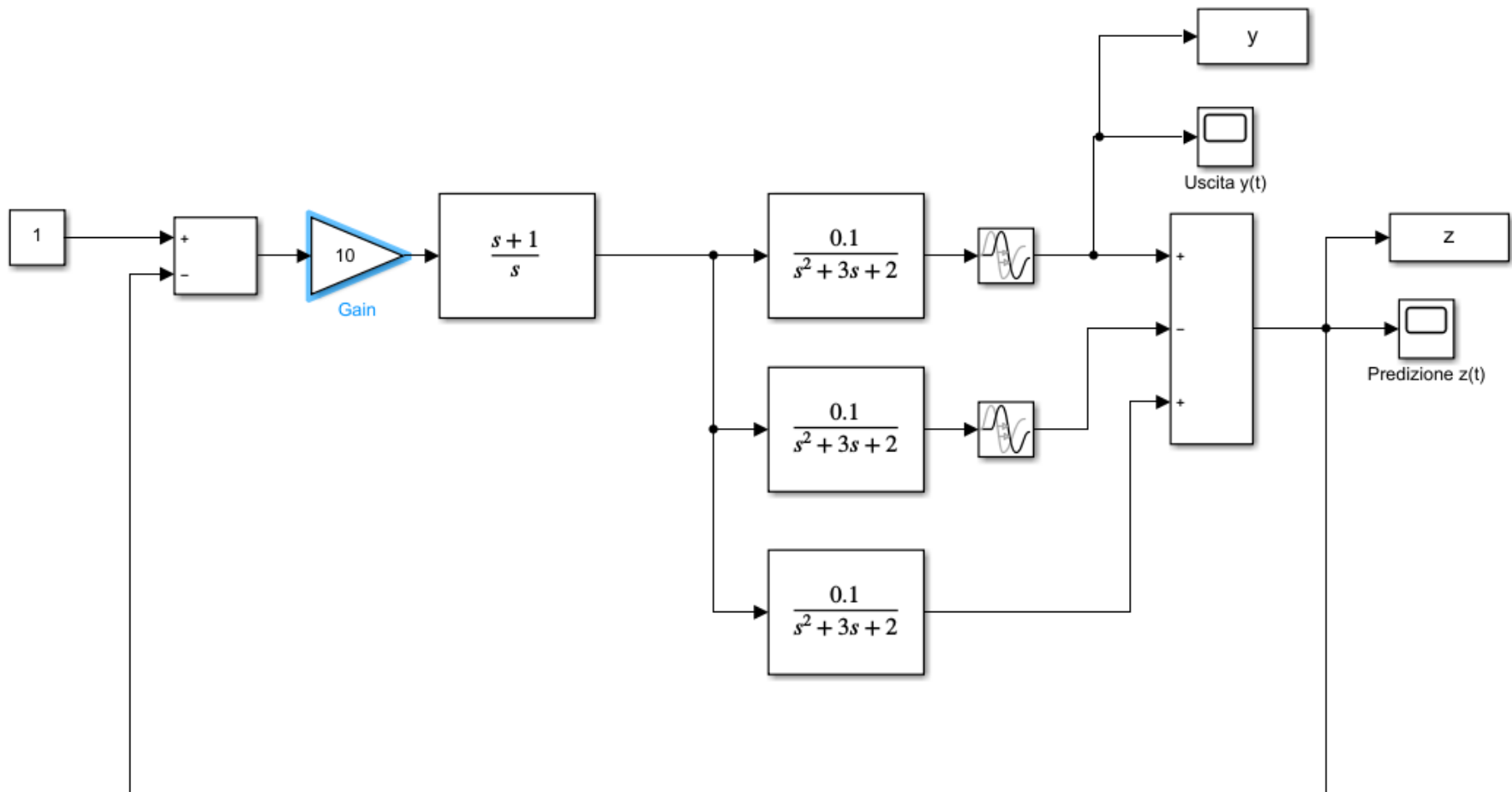
$$K_R = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{0.1} \cdot 0.94 \cdot 1.06 = 9.96$$

L'esercizio è pertanto risolto dal regolatore

$$R(s) = K_R \frac{s + 1}{s} \qquad 9.96 < K_R \leq 10$$

File: RIT\_04.slx

Verifichiamo mediante Simulink le prestazioni del sistema di controllo progettato



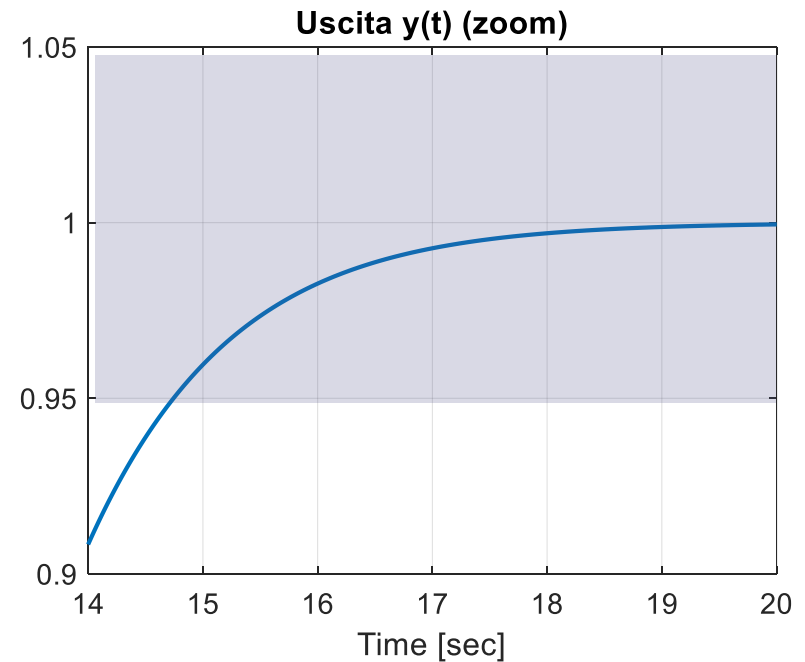
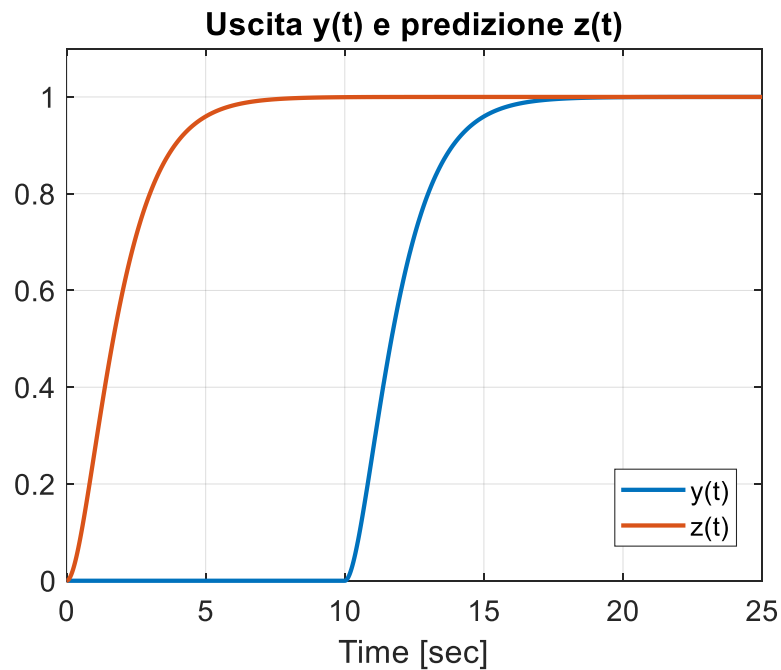
S1 precisione statica



S2 risposta ad un set point costante monotona crescente



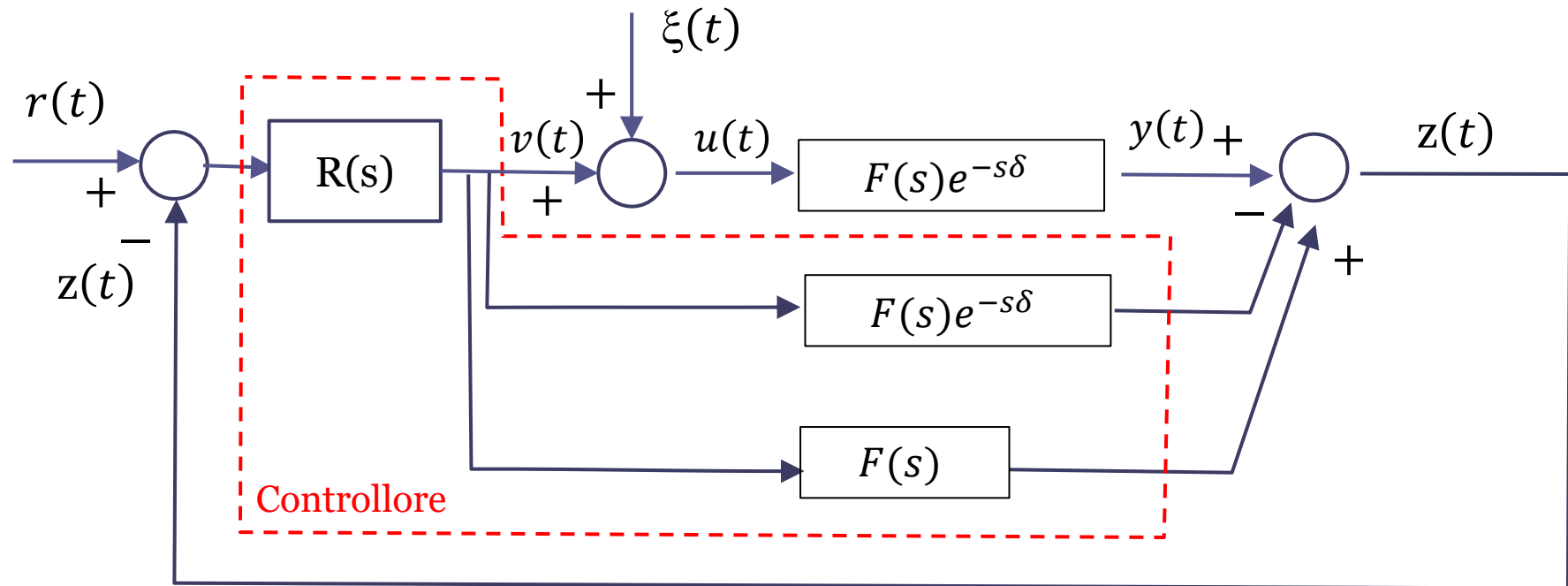
S3 tempo di assestamento al 5% non superiore a 15 secondi





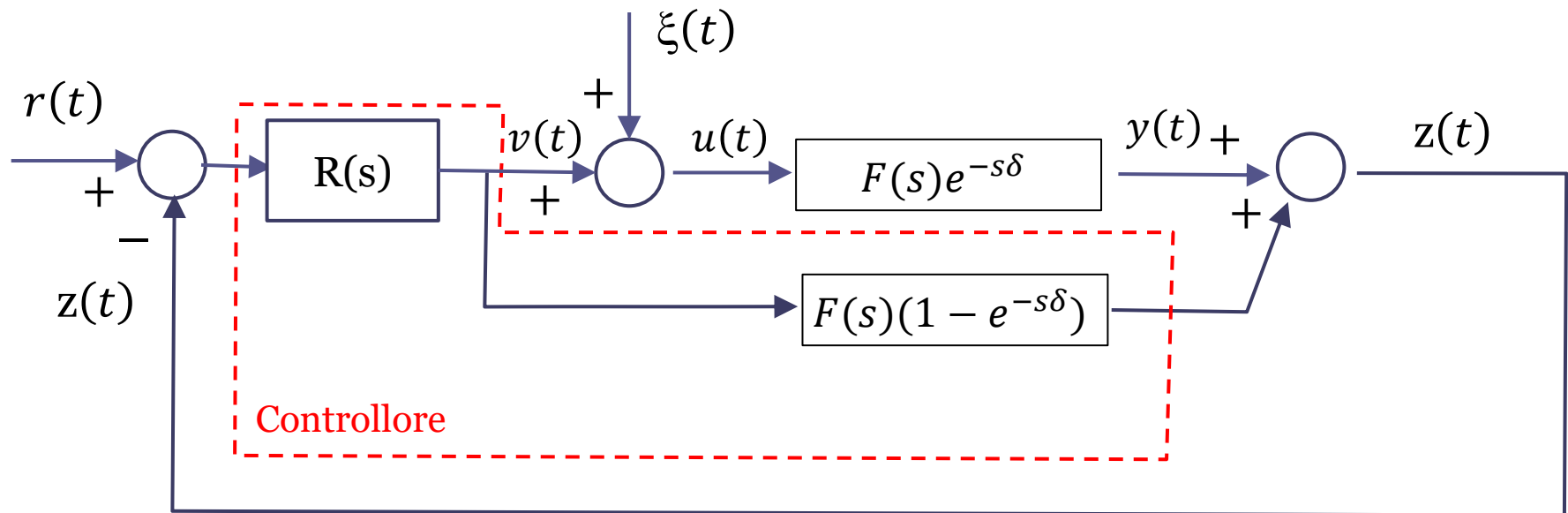
## Predittore di Smith in presenza di disturbi

L'analisi delle prestazioni di un sistema di controllo con Predittore di Smith in presenza di disturbi non è banale.

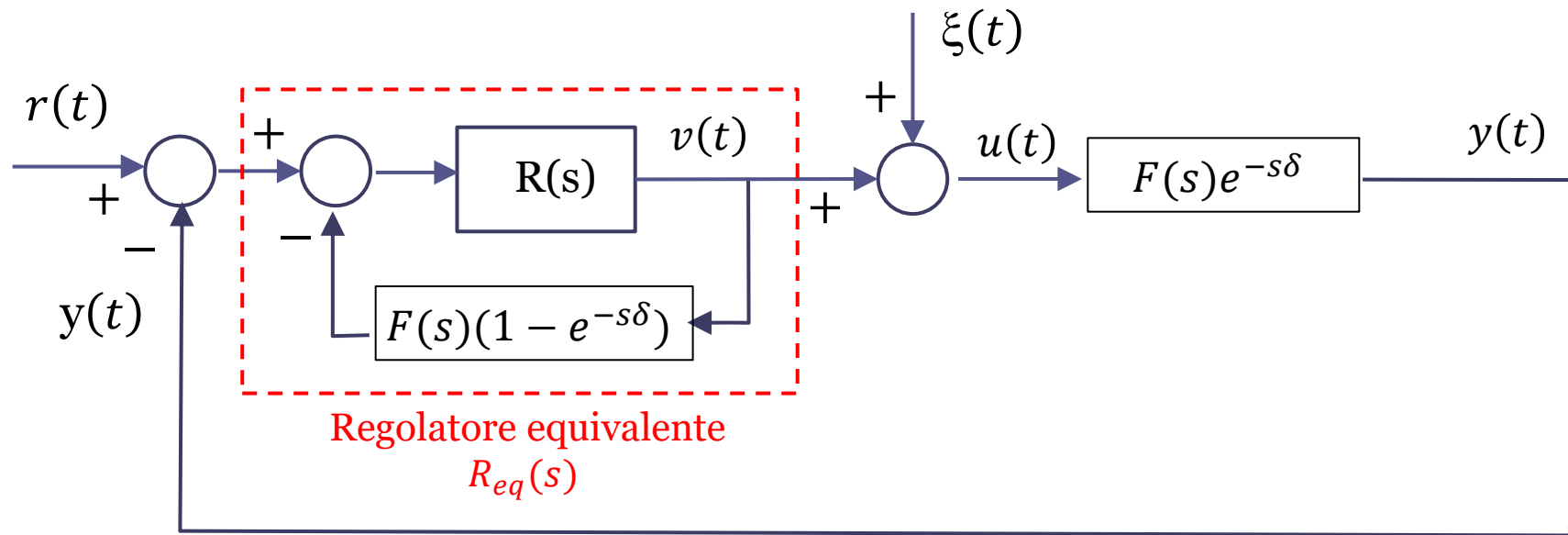


Per determinare la FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita non è possibile semplificare le tre FdT combinandole fra loro secondo lo schema in parallelo in quanto tali FdT **non sono più in parallelo**. Infatti il processo riceve in ingresso il segnale  $u(t) = v(t) + \xi(t)$  mentre i due blocchi sottostanti ricevono in ingresso il segnale  $v(t)$  prodotto in uscita dal regolatore  $R(s)$

Procediamo semplificando via via lo schema fino a ricondurci ad una configurazione più familiare. Come primo passo componiamo in parallelo i due blocchi interni al controllore aventi FdT  $F(s)e^{-s\delta}$  e  $F(s)$ . Tale operazione è possibile in quanto tali blocchi ricevono in ingresso il medesimo segnale



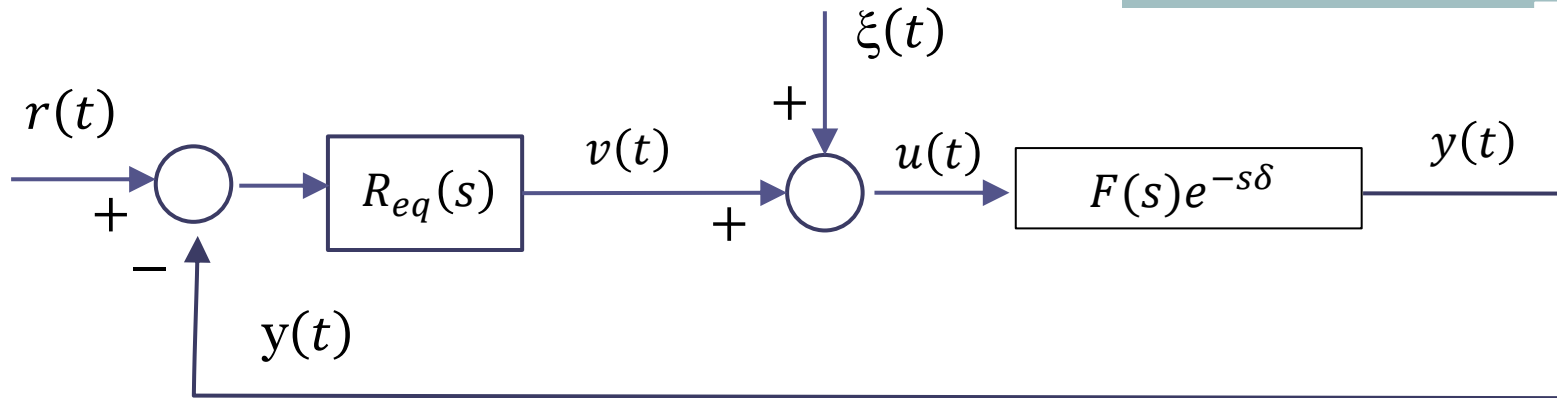
Ora rappresentiamo in maniera diversa lo schema senza alterarne in alcun modo la funzionalità



Lo schema precedente, completamente equivalente a quello della slide precedente, consente di ricondurre il sistema di controllo alla configurazione standard previa la definizione di un «regolatore equivalente»  $R_{eq}(s)$  avente FdT

$$R_{eq}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)F(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

Il regolatore equivalente è caratterizzato da una FdT irrazionale di non facile decodifica in termini di zeri e poli



$$R_{eq}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)F(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

Lo schema precedente, consente di desumere il semplice, ma fondamentale, risultato che **se il regolatore  $R(s)$  contiene un polo nell'origine anche il regolatore equivalente  $R_{eq}(s)$  contiene un polo nell'origine.**

$$\text{Es.} \quad R(s) = \frac{k}{s} \quad \Rightarrow \quad R_{eq}(s) = \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}F(s)(1 - e^{-s\delta})} = \frac{k}{s + kF(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

$$\quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} R_{eq}(s) = \infty$$

**Per garantire la reiezione di un disturbo costante in un sistema di controllo in retroazione con Predittore di Smith si dovrà pertanto inserire un polo nell'origine nel regolatore  $R(s)$  (e ovviamente garantire contestualmente la stabilità del sistema a ciclo chiuso)**

## Esercizio RIT-05

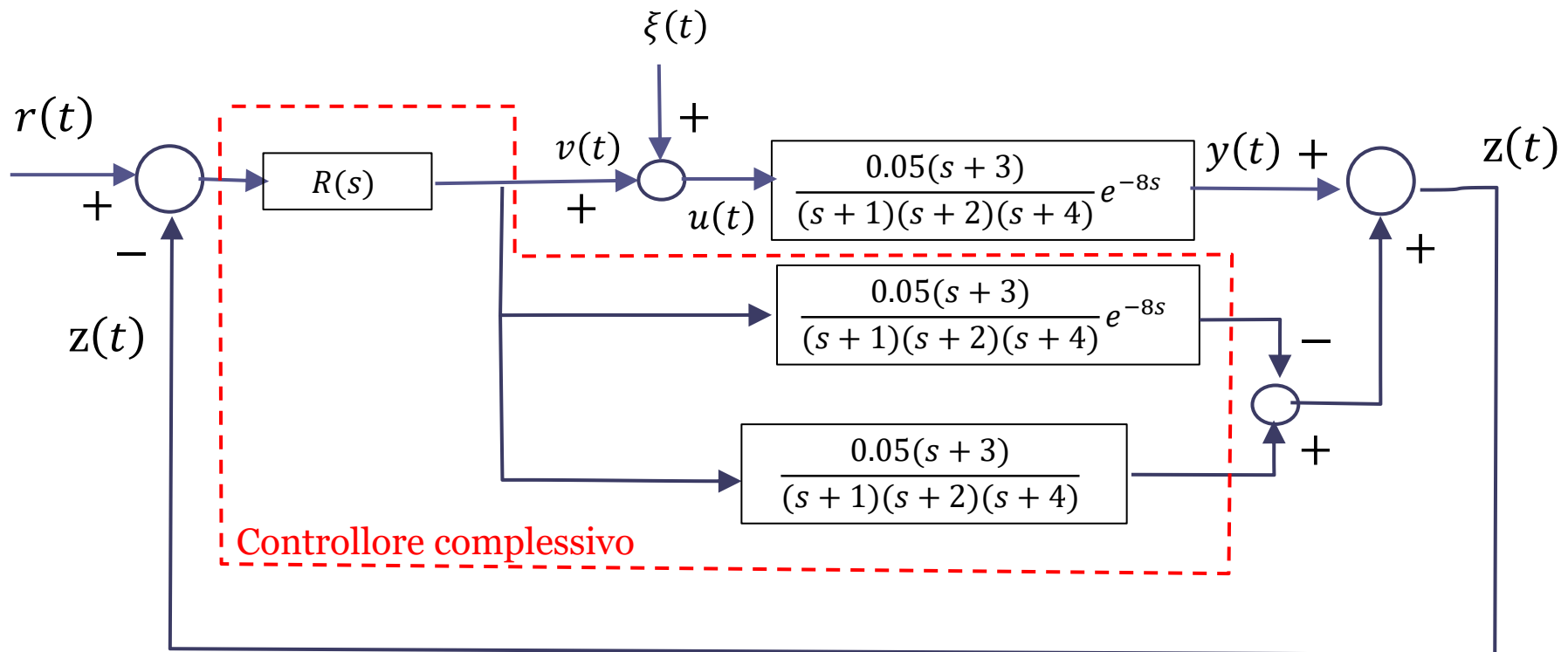
Con riferimento al processo  $P(s) = \frac{0.05(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)} e^{-8s}$  si progetti un sistema di controllo a ciclo chiuso in grado di garantire la precisione statica, la reiezione di un disturbo costante, ed una risposta a ciclo chiuso ad un set point costante caratterizzata da una sovraelongazione inferiore al 5%.

S1 precisione statica

S2 reiezione di un disturbo costante

S3 sovraelongazione inferiore al 5%

Dato il valore molto elevato del ritardo  $\delta$  in relazione alle costanti di tempo del processo si utilizza una architettura di controllo basata sul predittore di Smith, di seguito schematizzato in maniera lievemente differente a quanto fatto fino ad ora.

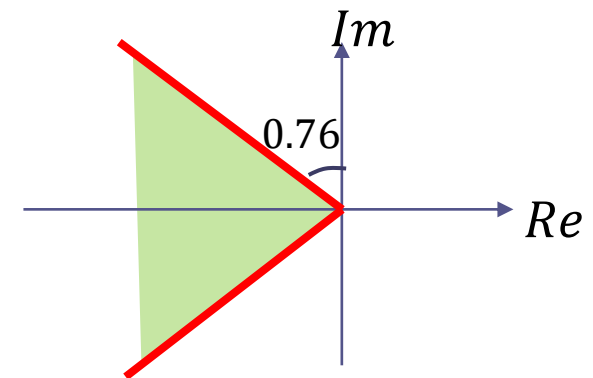


- S1 precisione statica
- S2 reiezione di un disturbo costante
- S3 sovraelongazione inferiore al 5%

Il soddisfacimento delle specifiche S1 ed S2 implica la realizzazione di un sistema di controllo di tipo 1 con il polo nell'origine nel regolatore. La specifica S3 induce una regione ammissibile già valutata esplicitamente in precedenti esercizi

$$S_{\%} \leq 5 \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0.69$$

$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1} \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln \frac{S^*}{100} \right\} = 0.76 \text{ rad}$$

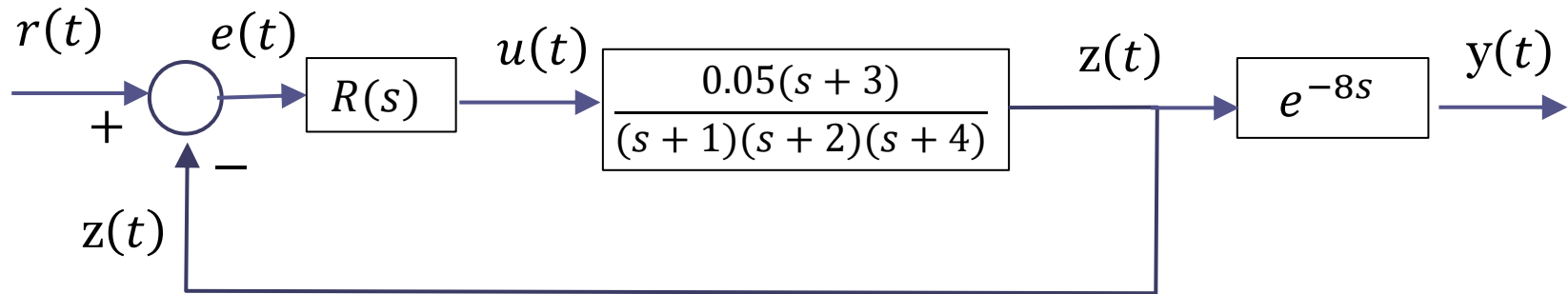


Poniamo a confronto i risultati ottenibili con due diversi regolatori:

$$R_1(s) = \frac{K_R}{s} \quad R_2(s) = K_R \frac{s+1}{s}$$

$R_2(s)$  cancella con il proprio zero il polo del processo collocato più a bassa frequenza. Ci attendiamo prestazioni significativamente migliori rispetto al regolatore  $R_1(s)$

Per il progetto del regolatore facciamo riferimento allo **schema equivalente**



Analizziamo la scelta del regolatore  $R_1(s)$  (regolatore integrale)

$$\mathbf{R(s) = R_1(s) = \frac{K_R}{s}}$$

$$u(t) = K_R \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Tracciamo il LdR

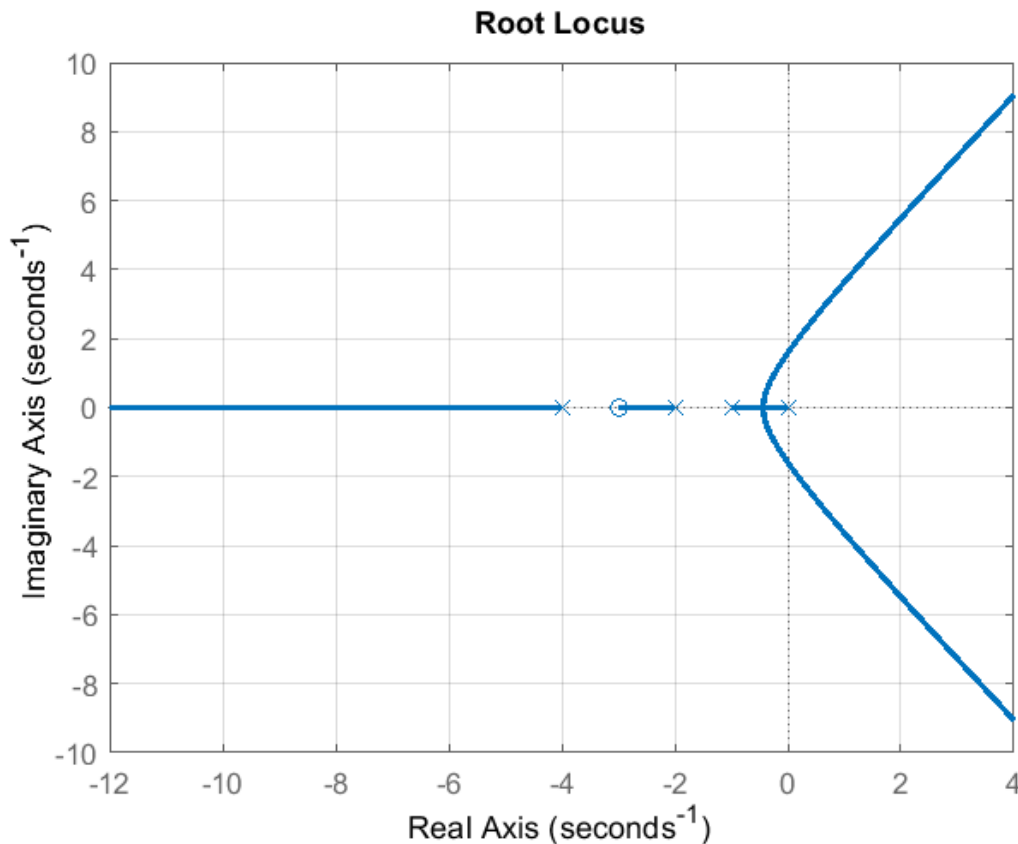
$$L(s) = \frac{0.05(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Utilizziamo Matlab per la costruzione e l'analisi del LdR



```
numL=0.05*[1 3];
denL=poly([0 -1 -2 -4]);
rlocus(numL,denL)
```

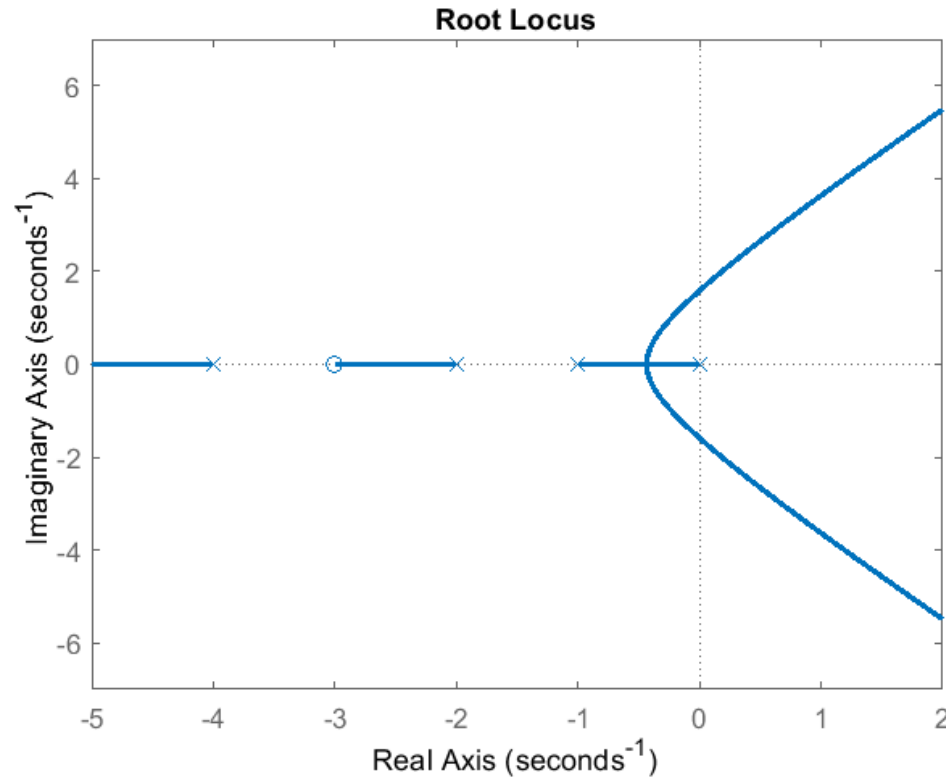
$$L(s) = \frac{0.05(s + 3)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$



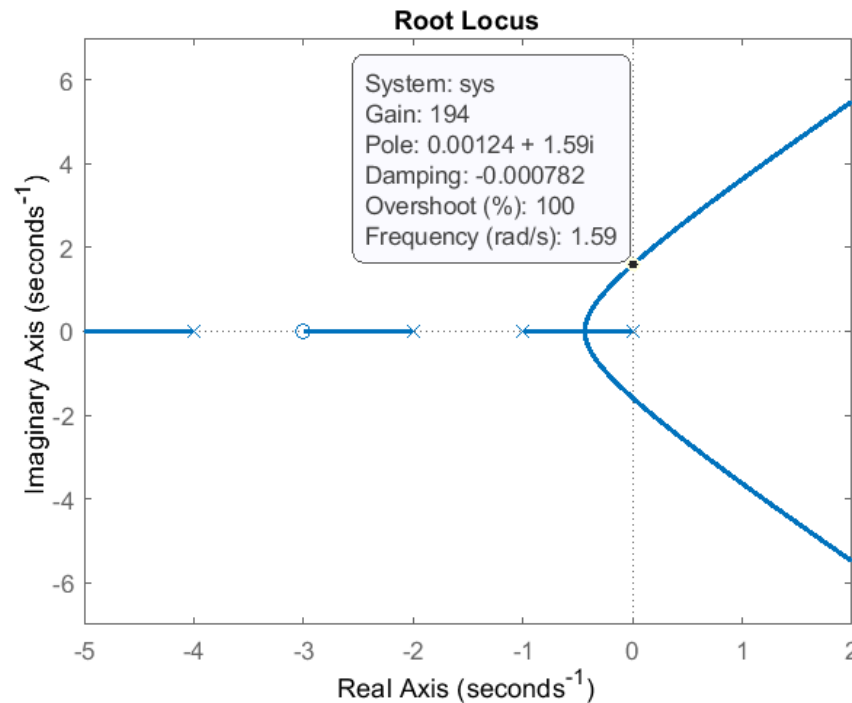
La rappresentazione grafica dei poli e dei zeri della  $L(s)$  è analoga a quella impiegata a lezione.

Il LdR ha 4 rami, due dei quali convergono nel semipiano destro per valori di  $K_R$  superiori ad un valore critico.

Facciamo uno zoom del LdR



Cliccando con il mouse su un punto dei rami del luogo compare una finestra che mostra il valore del guadagno associato a tale punto, la posizione del polo, e i valori di smorzamento (Damping) e sovraelongazione (Overshoot) corrispondenti.

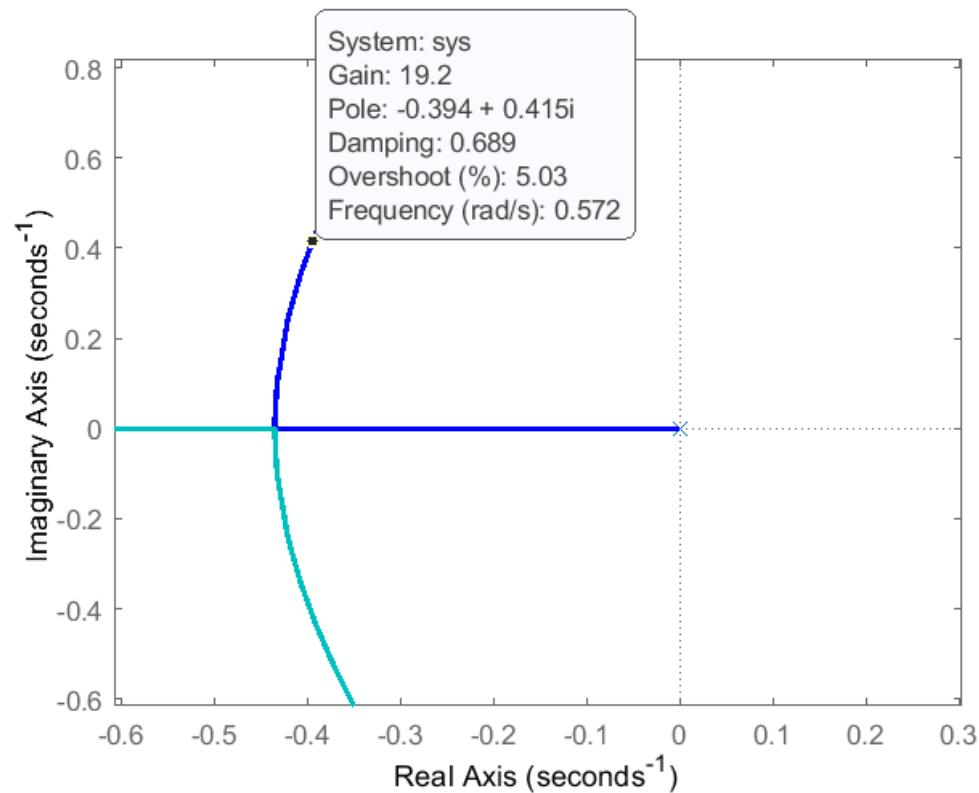


Selezioniamo il punto in corrispondenza del quale i rami attraversano l'asse immaginario

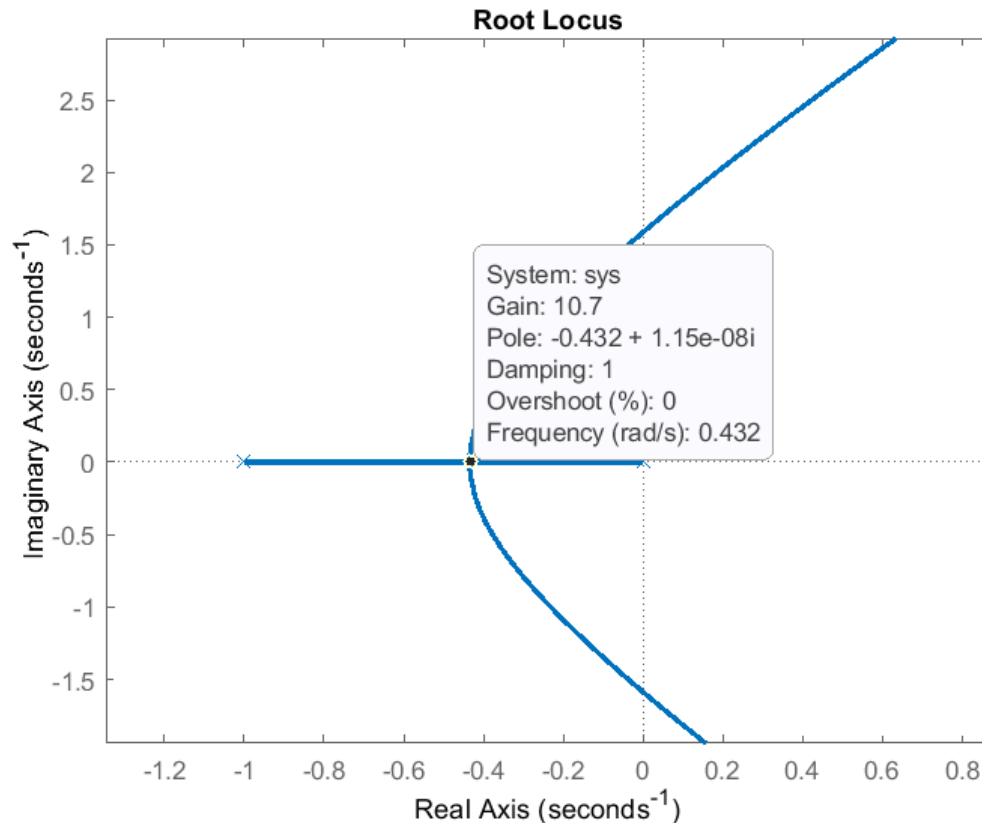
Il **valore critico del guadagno** oltre il quale il sistema di controllo diventa instabile è pari a circa **194**.

Tale valore può essere determinato esattamente per via analitica applicando il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = s(s + 1)(s + 2)(s + 4) + 0.05K_R(s + 3)$$



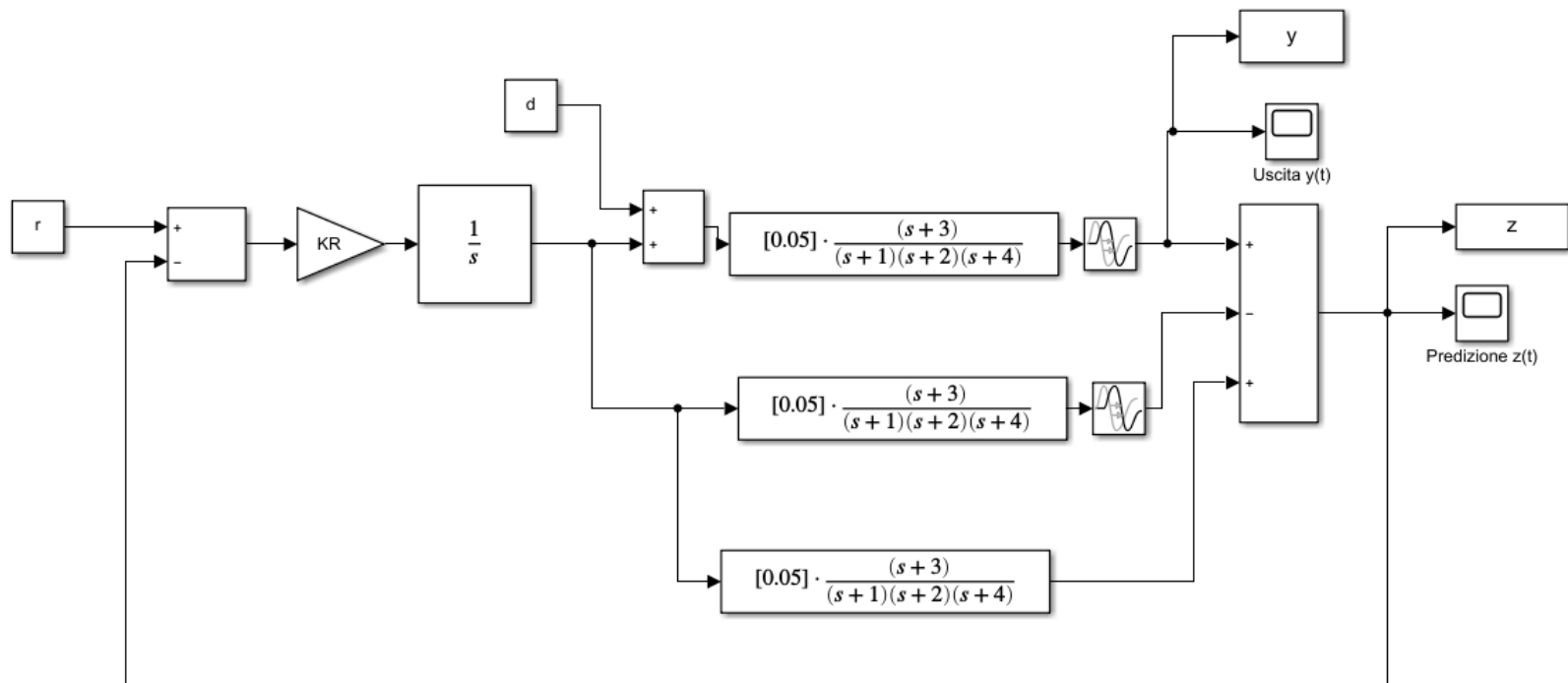
Operando un ulteriore zoom possiamo andare a ricercare il valore del guadagno in corrispondenza del quale lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati vale 0.69, e la sovraelongazione è quindi pari al 5% come da specifica. Tale valore di guadagno è pari a poco meno di 19.2.



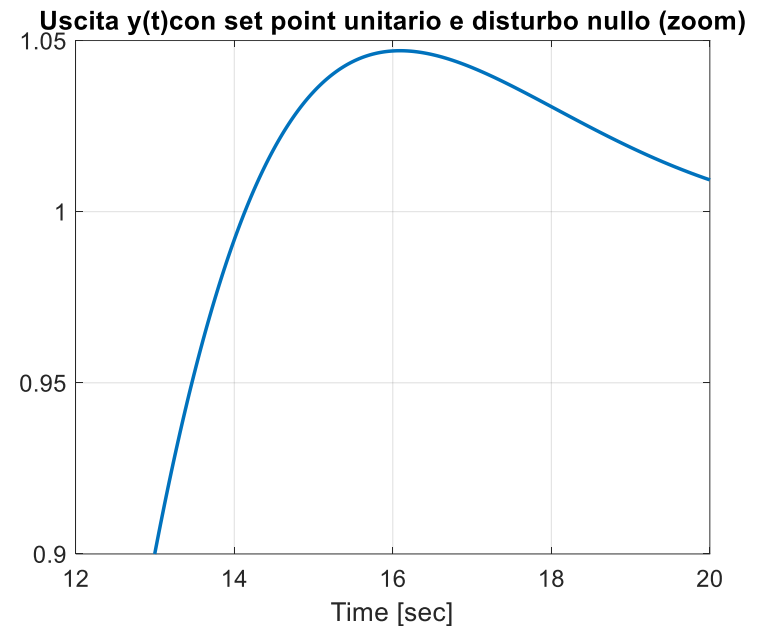
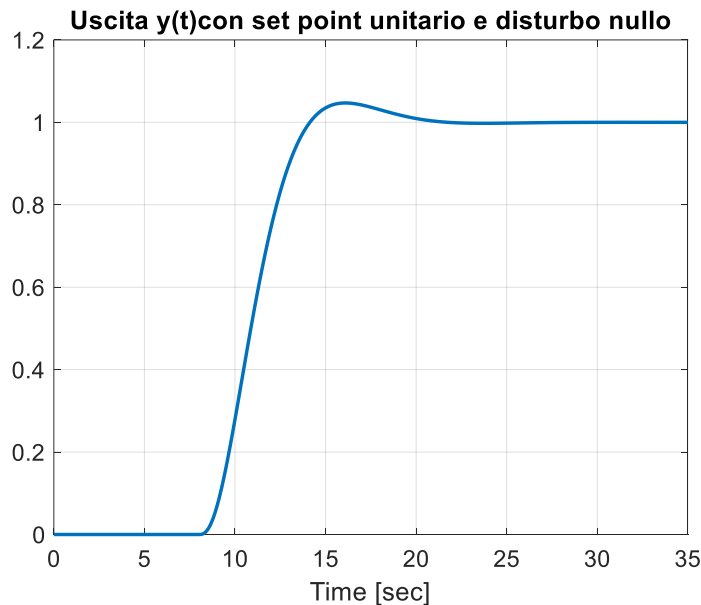
Il **valore di guadagno associato al punto doppio** è pari a circa 10.7. Valori di guadagno inferiori a tale soglia danno luogo ad una risposta al gradino a ciclo chiuso monotona crescente con sovraelongazione nulla.

Soddisfa pertanto le 3 specifiche del problema la seguente famiglia di regolatori di tipo **integrale**

$$R_1(s) = \frac{K_R}{s} \quad 0 < K_R < 19.1$$



Scegliamo per il guadagno il valore  $K_R = 19$  e visualizziamo la risposta conseguente alla applicazione di un set point unitario in assenza di disturbo



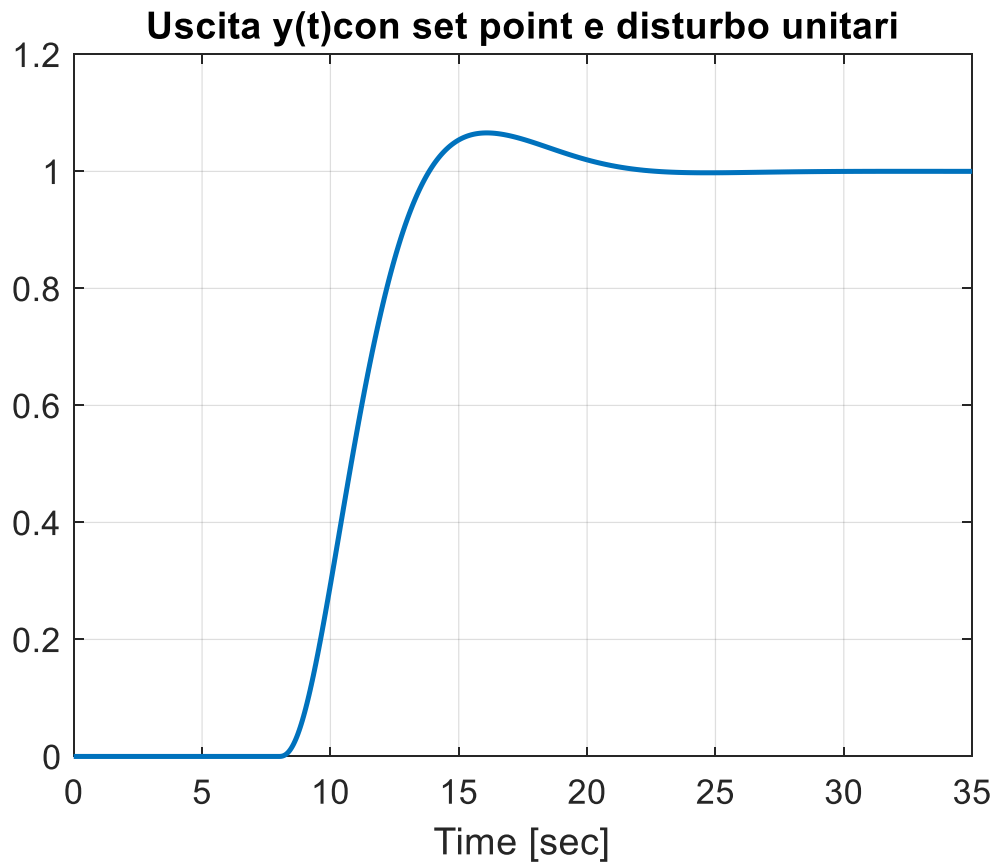
S1 precisione statica



S3 sovraelongazione inferiore al 5%



Ora visualizziamo la risposta conseguente alla applicazione simultanea di un set point e di un disturbo costanti entrambi di ampiezza unitaria.



Si è ottenuto un **tempo di assestamento** della risposta dell'ordine dei 22 secondi.

S2 reiezione di un disturbo costante





Ora analizziamo la scelta del regolatore  $R_2(s)$  (regolatore proporzionale-integrale)

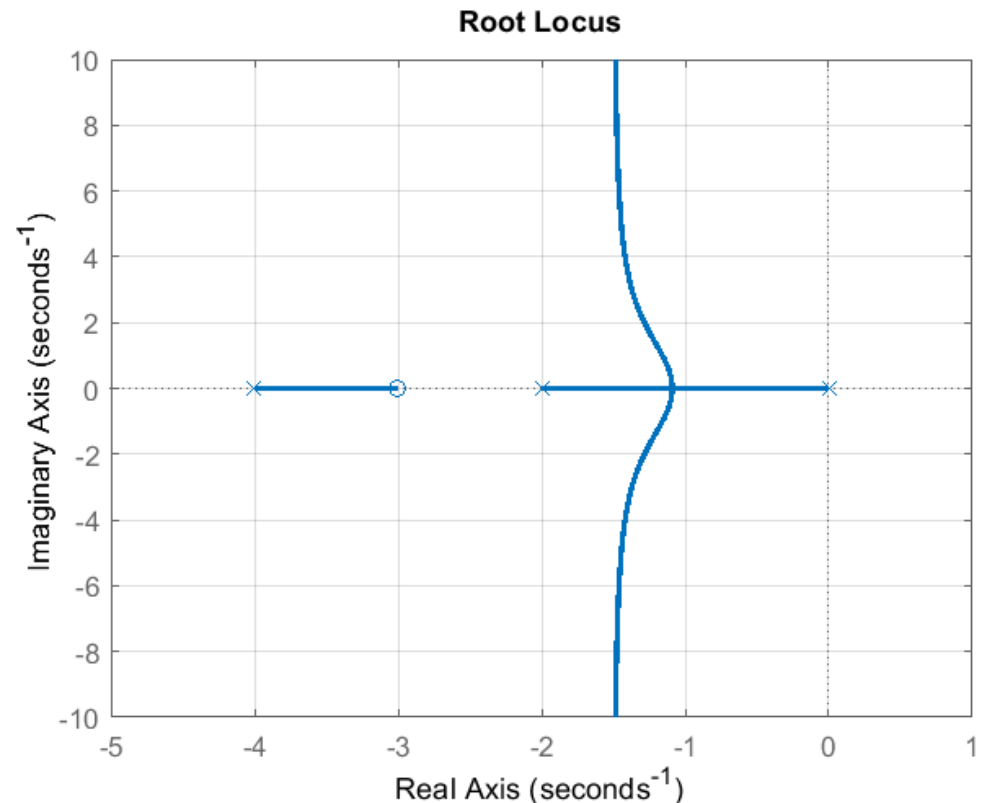
$$R(s) = R_2(s) = \frac{K_R(s + 1)}{s}$$

Tracciamo il LdR

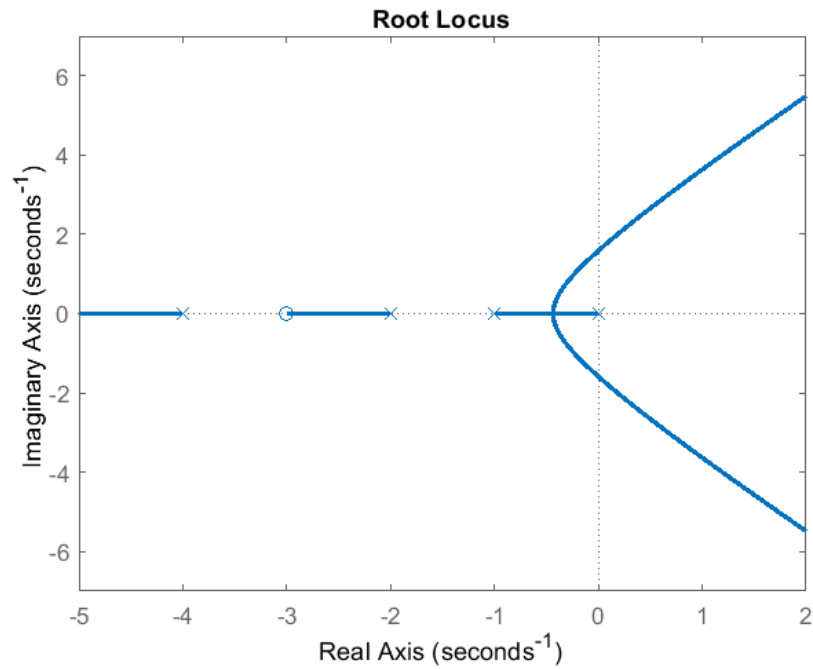
$$L(s) = \frac{0.05(s + 3)}{s(s + 2)(s + 4)}$$

```
numL=0.05*[1 3];
denL=poly([0 -2 -4]);
rlocus(numL,denL)
```

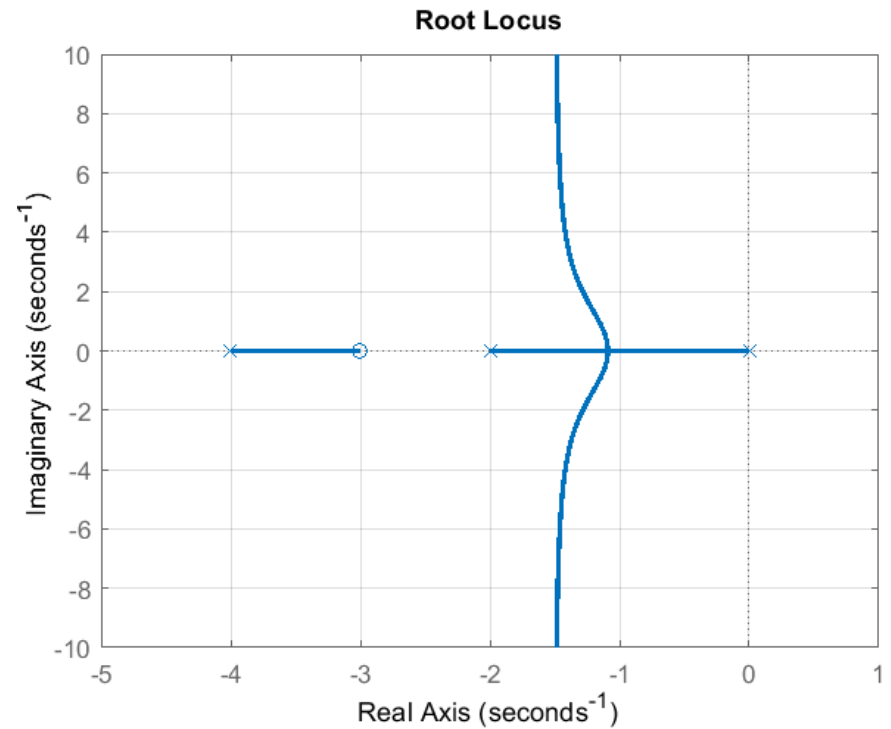
Sistema di controllo  
asintoticamente stabile a  
ciclo chiuso per qualunque  
valore di  $K_R$

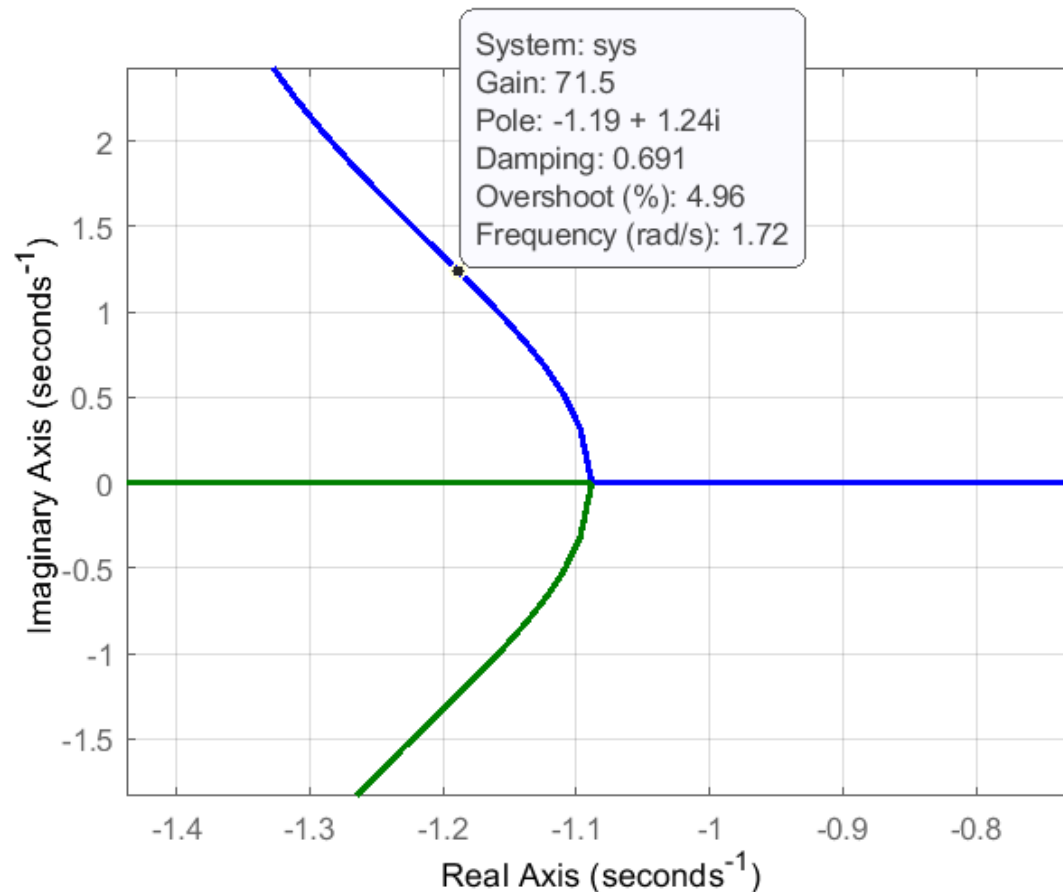


Con regolatore  $R_1(s)$



Con regolatore  $R_2(s)$

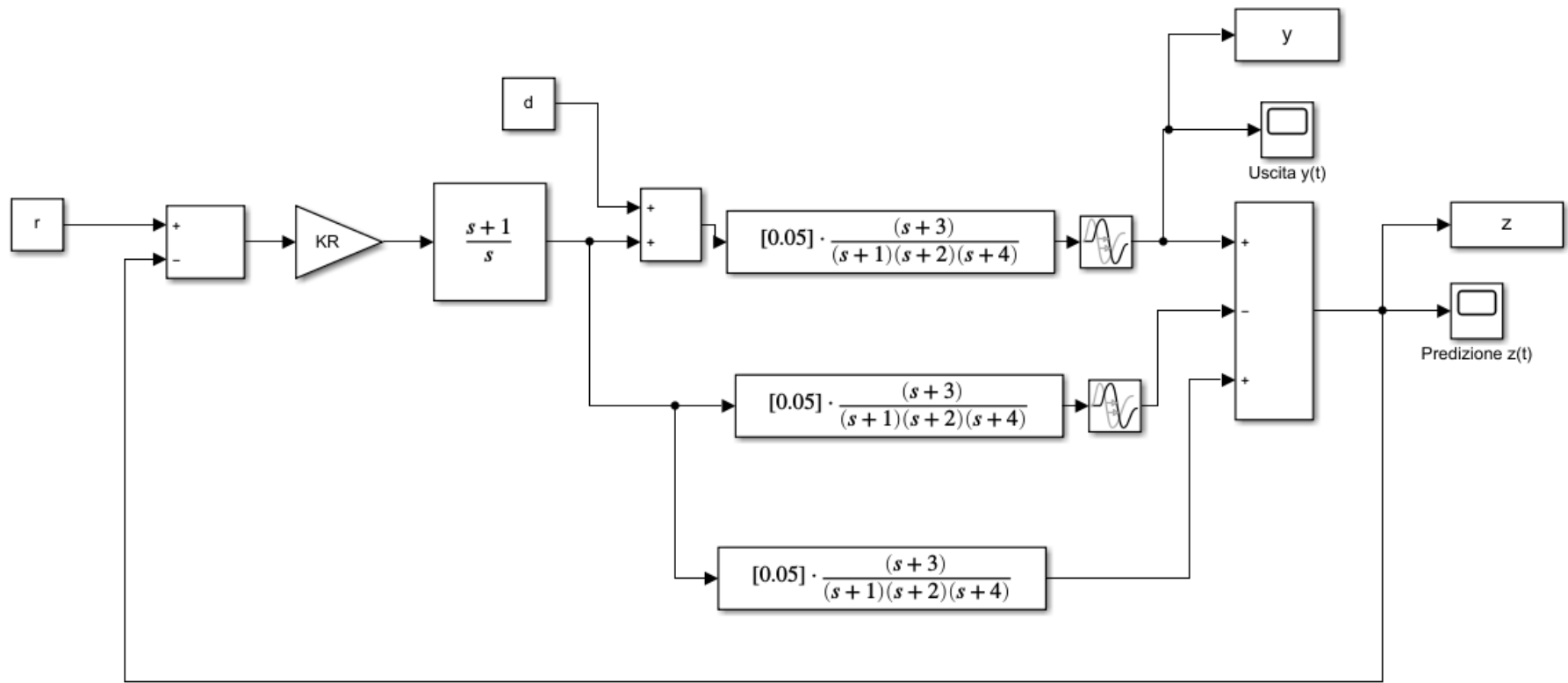




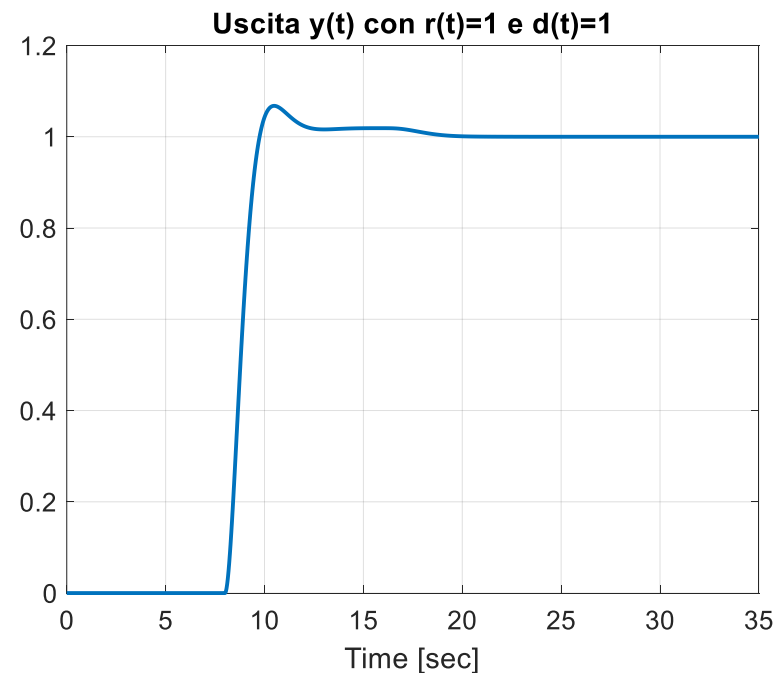
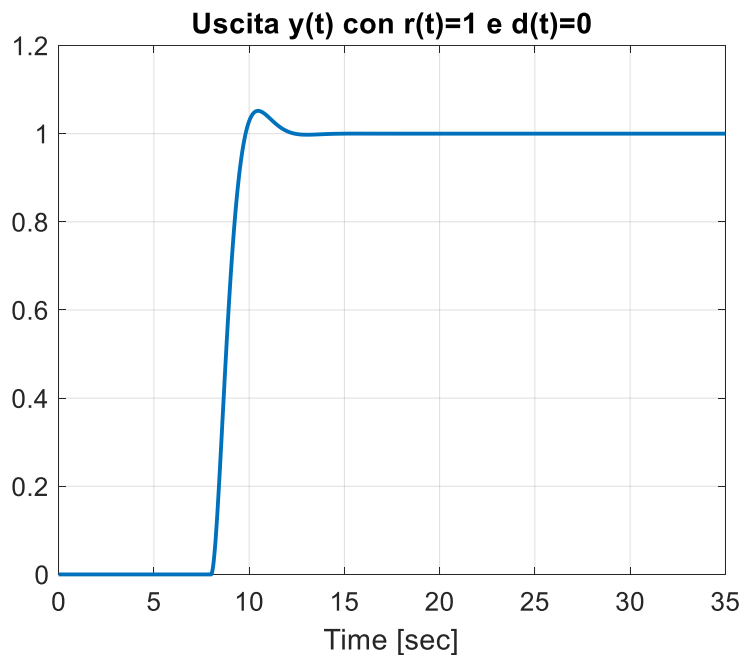
Come fatto in precedenza, ricerchiamo il valore del guadagno in corrispondenza del quale lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati vale 0.69, e la sovraelongazione è pari al 5%. Tale valore di guadagno è pari a poco più di **71.5**

Soddisfa pertanto le 3 specifiche del problema la seguente famiglia di regolatori

$$R_2(s) = \frac{K_R(s+1)}{s} \quad 0 < K_R < 71.7$$



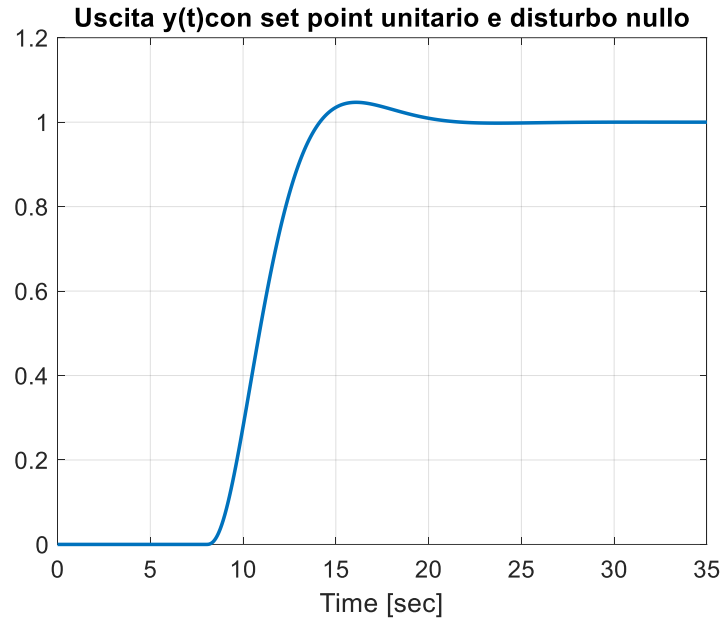
Scegliamo per il guadagno il valore  $K_R = 70$  e visualizziamo le risposta conseguente alla applicazione di un set point unitario in assenza di disturbo (figura a sinistra) e inseriamo successivamente anche un disturbo costante che agisce in simultanea (figura a destra)



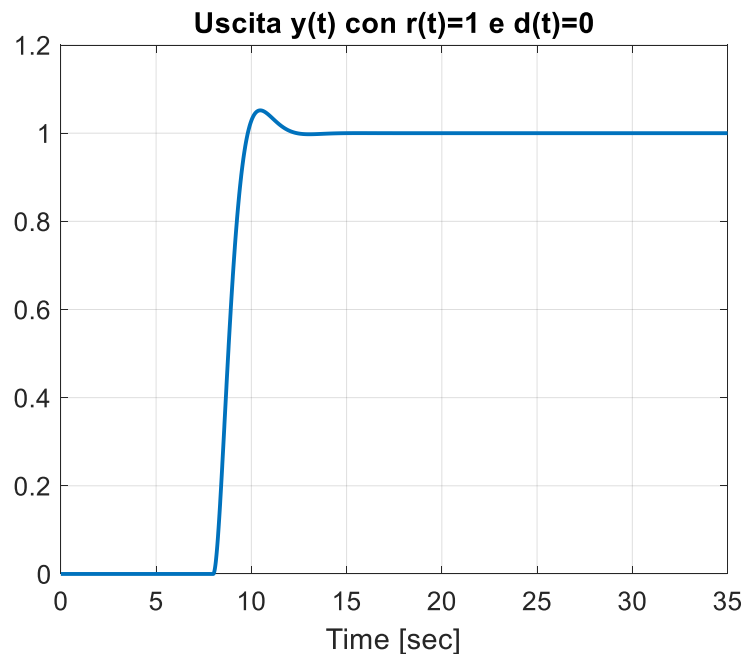
- S1 precisione statica
- S2 reiezione di un disturbo costante
- S3 sovraelongazione inferiore al 5%



$$R_1(s) = \frac{19}{s}$$

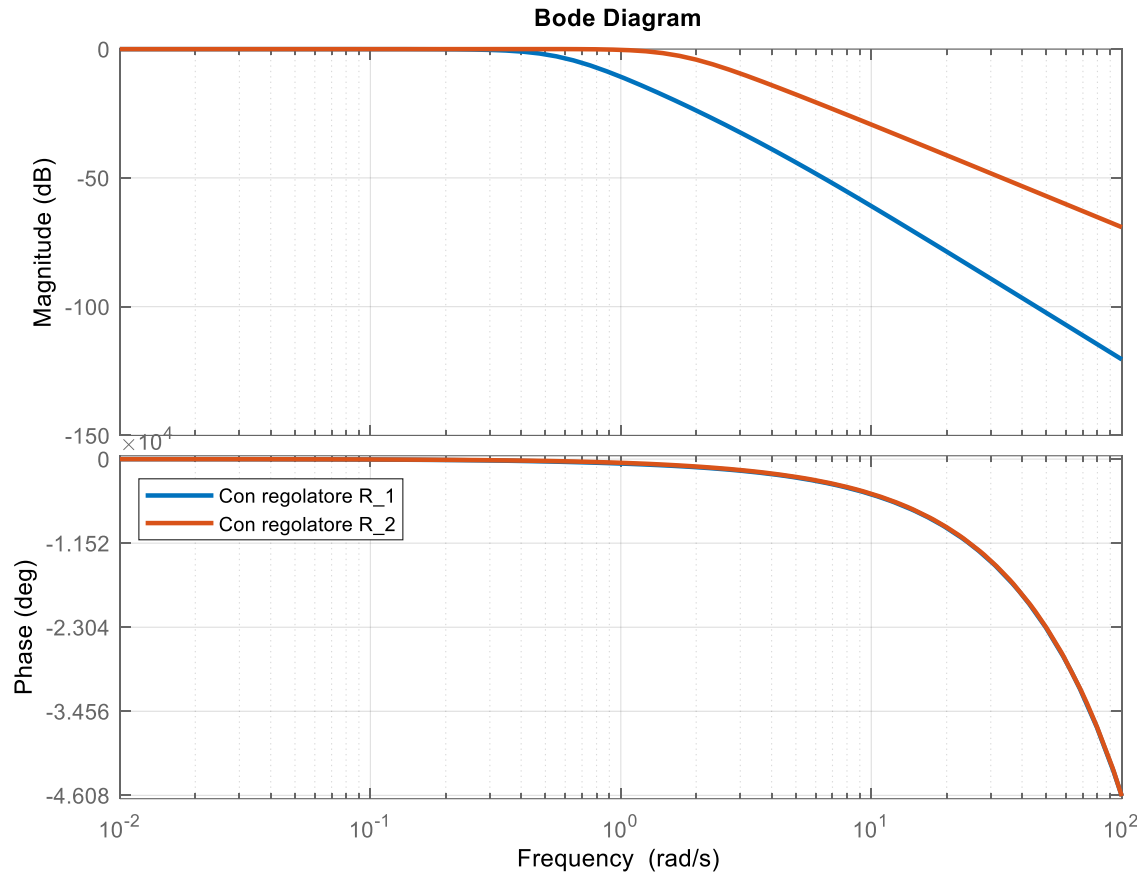


$$R_2(s) = \frac{70(s + 1)}{s}$$



Utilizzando il regolatore proporzionale-integrale  $R_2(s)$  la risposta a ciclo chiuso esibisce un **transitorio nettamente più rapido** rispetto all'impiego del regolatore integrale  $R_1(s)$

## Confronto fra le bande passanti a ciclo chiuso nei due casi



Diagrammi di Bode delle FdT a ciclo chiuso fra set point e uscita nei due casi

La banda passante ottenuta impiegando il regolatore PI  $R_2(s)$  è circa 10 volte superiore