<u>Exercice 1 :</u>

1) a) $a(1+i) = 1+3i \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)\,(1-i)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$i\,a^2 = i\,(2+i)^2 = i\,(3+4\,i) = \ -4+3i$

b) $a^2 - \ (1+3i)\,a - 4 + 3i = \ (2+i)^2 - \ (1+3i)\,(2+i) - 4 + 3i$

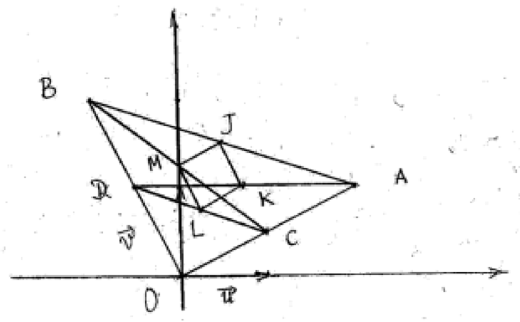
$= 3 + 4i + 1 - 7i - 4 + 3i = 0$, donc a est solution de l'équation.

$(i\,a)^2 - \ (1+3i)\,(i\,a) - 4 + 3i = \ -a^2 - i\,(1+3i)a - 4 + 3i$

$= \ -3 - 4i + i\,(1 - 7\,i) - 4 + 3i$

$= \ -3 - 4i + i + 7 - 4 + 3i = 0$, donc $i\,a$ est une solution de l'équation.

2) a)



b) $i\,a = i\,(2+i) = \ -1+2i$ et $b = \ -1+2i$, donc $b = i\,a$.

$OA = \ |a| \quad ; OB = \ |b| = \ |i\,a| = \ |i|\,|a| = 1|a| = \ |a|$

$OA = \ |a| \ \ et \ \ OB = \ |a|$; donc $OA = OB$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{OB}}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{i\,a}{a}\right) = arg(i) \ \equiv \ \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$OA = OB\ et\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \ \equiv \ \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc OAB est un triangle rectangle isocèle de sommet principal O

3) a) OCD est isocèle et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OC = OD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow |c| = |d|$ et $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{|d|}{|c|} = 1$ et $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d}{c} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{d}{c} = i$

$\Rightarrow d = i\,c \Rightarrow d = i\left(1 + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow d = -\frac{1}{2} + i$

b) J milieu de $[AB] \Rightarrow z_J = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(2 + i - 1 + 2i) = \frac{1}{2}(1+3i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

K milieu de $[DA] \Rightarrow z_K = \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2}\left(2 + i - \frac{1}{2} + i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2i\right) = \frac{3}{4} + i$

L milieu de $[CD] \Rightarrow z_L = \frac{1}{2}(c+d) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

M milieu de $[BC] \Rightarrow z_M = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2i + 1 + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}i\right) = \frac{5}{4}i.$

$$\left.\begin{array}{r} z_J - z_K = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{3}{4} - i = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \\ z_M - z_L = \frac{5}{4}i - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \end{array}\right\} \Rightarrow z_J - z_K = z_M - z_L$$

$\Rightarrow \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LM}$; $KJ = |z_J - z_K| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$

$KJ = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $KL = |z_L - z_K| = \left|\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4} - i\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}$

$KL = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $KJ = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $KL = \frac{\sqrt{5}}{4}$; donc $KJ = KL$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) = \arg\left(\frac{z_L - z_K}{z_J - z_K}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i}\right) = \arg\left(\frac{-2-i}{-1+2i}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) = \arg\left[\frac{i(1-2i)}{1-2i}\right] = \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LM} \\ KJ = KL \\ \left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow JKLM \text{ est un carré.}$$

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Complétons ces propriétés sur les modules et arguments de nombres complexes ci-après :

a. $|z^n| = |z|^n$; **b.** Si z' non nul, alors $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$; **$(0,25 + 0,25)$ pt**

c. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$, n un entier naturel ; **$0,25$ pt**

d. Si z' non nul, alors $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$. **$0,25$ pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Nous avons les interprétations géométriques suivantes :

a. $|z_B - z_A| = AB$; **b.** $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$. **$(0,25 + 0,25)$ pt**

3. Formule de Moivre : Pour tout entier relatif n et tout réel θ on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. **$0,5$ pt**

Partie B

s est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. Soit $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de s.
Calculons a^3 et a^2.
On sait que $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où
$a^3 = e^{i\pi} = -1$, **$0,25$ pt**
et $a^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **$0,25$ pt**
Ainsi $z' = -z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **$0,25$ pt**
Déterminons l'ensemble des points invariants de s.
Soit $\Omega(z_0)$ tel que $s(\Omega) = \Omega$, on a $z_0 = -z_0 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $z_0 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
s admet un unique point invariant le point Ω d'affixe $z_0 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **$0,25$ pt**
On a $z' - z_0 = -z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = -z - \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = -(z - z_0)$.
Ce qui donne, pour tout $z \neq z_0$, $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = -1$,
ceci implique, pour tout $z \neq z_0$, que $|z' - z_0| = |z - z_0|$ et $\arg(\frac{z' - z_0}{z - z_0}) = \pi\ [2\pi]$. **$0,5$ pt**

D'où pour tout point $M(z)$ distinct de Ω, d'image par s le point $M'(z')$, on a :
$\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \pi\ [2\pi]$.
Donc s est une symétrie centrale de centre Ω. **0,5 pt**

2. Déterminons les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation.

On sait que s est une translation si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = 1$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = 1$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = 0\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 1$, $a_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Ou encore $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $a_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,75 pt**

b. s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

On sait que s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}} z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -i$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = i^3$ ou encore $a^3 - i^3 = 0$. Ce qui donne $(a - i)(a^2 + ai - 1) = 0$.
On trouve $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

Autre méthode :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}} z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = \dfrac{3\pi}{2}\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ sont :
$a_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $a_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $a_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Ou $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

c. s est une homothétie de rapport -8.

On sait que s est une homothétie de rapport -8 si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = (-2)^3$.
Ce qui donne $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = 0$.
On trouve $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

Autre méthode :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = -8$.
On a $|a|^3 = 8$ ce qui donne $|a| = 2$.
Et $3(\arg(a)) = \pi\,[2\pi]$ ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a_1 = 2e^{i\pi}$ et $a_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
Ou $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

Exercice 3 :

Partie A

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1. Déterminons le polynôme Q tel que, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

En faisant la division euclidienne de $f(z)$ par $z^3 - 1$ ou trouve que $Q(z) = z^2 + 2z + 2$. **0, 5 pt**

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.

$f(z) = 0$ si, et seulement si $(z^3 - 1)(z^2 + 2z + 2) = 0$.

$$z^3 - 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 2 = 0.$$

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Ce qui donne $z = 1$ ou $z = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -1 - i$ ou $z = -1 + i$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est :

$$S = \left\{1; -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; -1 - i; -1 + i\right\}.$$

0, 5 pt

3. a. Ecriture des solutions de (E) sous forme trigonométrique :

On pose :

— $z_0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ car $\arg(1) = 0\,[2\pi]$.

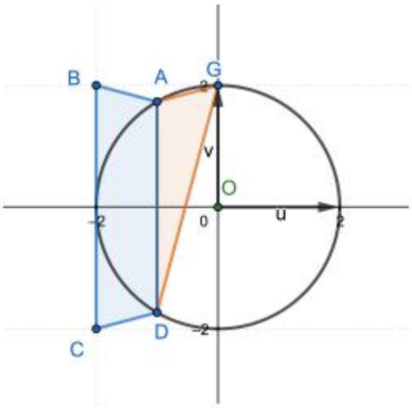
— $z_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $|z_1| = 1$ et $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
 d'où $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$,

— $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \overline{z}_1$, $|z_2| = 1$ et $\arg z_2 = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
 d'où $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}$,

— $z_3 = -1 + i$, $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg z_3 = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
 d'où $z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}$,

— $z_4 = -1 - i = \overline{z}_3$, $|z_4| = \sqrt{2}$ et $\arg z_4 = -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
 d'où $z_4 = \cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4}$. **0, 5 pt**

b. Plaçons les points G, A, D, B et C d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



0, 5 pt

Partie B

1. La nature du quadrilatère ABCD :
$z_{\overrightarrow{BC}} = -2i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -i$ d'où $z_{\overrightarrow{BC}} = 2z_{\overrightarrow{AD}}$ ce qui implique que (BC) et (AD) sont parallèles.
$z_{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ non réel donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Or (BC) et (AD) parallèles, et puis $AB = CD$ donc $ABCD$ est un trapèze isocèle. **0, 5 pt**

2. r étant une rotation de centre Ω qui transforme A en D. On a : $r(\Omega) = \Omega$ et $r(A) = D$.

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à r, alors
$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

$r(\Omega) = \Omega$ équivaut à $f(z_\Omega) = z_\Omega$ et $r(A) = D$ équivaut à $f(z_A) = z_D$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_D = az_A + b \end{cases}$$

$$a = \frac{z_D - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$b = z_\Omega - az_\Omega = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui donne

$$f(z) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

0, 5 pt

3. <u>Nature du triangle ΩAD</u> :

On sait que $r(A) = D$ donc $\Omega A = \Omega D = 3$, or $AD = |z_D - z_A| = \sqrt{3}$,

d'où le triangle ΩAD est isocèle en Ω. **0, 5 pt**

4. Soit S le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD.

Puisque le triangle ΩAD est isocèle en Ω donc S appartient à la médiatrice du segment $[AD]$ qui est l'axe réel, ce qui implique que

z_S l'affixe de S est réelle et $SA = SD$.

On pose $z_S = x$ ($x \in \mathbb{R}$), puisque S est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD on a aussi : $|z_S - z_\Omega| = |z_S - z_D|$,

ce qui implique $|x-1| = |x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}|$ d'où

$$(x-1)^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

ou

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

Ce qui donne $x = 0$.

Donc S est confondu avec O l'origine du repère d'affixe 0. **0, 5 pt**

5. $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$, où z_A est l'affixe du point A.

On sait que $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d'où

$$u_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

u_n est réel si, et seulement si $\sin\frac{2\pi}{3}n = 0$, ce qui implique :

$$\frac{2\pi}{3}n = k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

ou

$$n = \frac{3}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}, \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

En prenant $k = 2$, alors 3 est la valeur minimale de n pour que u_n soit un réel. **1 pt**

6. La forme algébrique de u^{2019} :

$$u_{2019} = e^{i\frac{4038\pi}{3}} = e^{i1346\pi}$$

d'où

$$u_{2019} = 1.$$

0, 5 pt