САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Поникарова И.В.

Элементы вариационного исчисления

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2019

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики в качестве учебного пособия для студентов естественных факультетов

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики СПбГУ Реснина Н.Н.

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации Афанасьева Г.Б.

Печатается по рекомендации к опубликованию Учебно-методической комиссии математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. В пособии рассматривается тема «Элементы вариационного исчисления» курса «Физико-химическое приложение математических методов». В пособии рассматриваются следующие разделы: «Основные понятия вариационного исчисления», «Первая вариация функционала. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума», «Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера», «Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления». В каждом разделе приводятся необходимые для решения задач теоретические сведения.

Пособие содержит подробное решение наиболее известных задач вариационного исчисления, а также типовых примеров и задач, снабжено иллюстрациями. Имеются 20 вариантов контрольных заданий.

Настоящее пособие может быть полезно для студентов, изучающих указанный выше курс или соответствующие темы в других курсах, а также для преподавателей.

Оглавление

1 Основные понятия вариационного исчисления

1.1 Постановка некоторых вариационных задач

Для того чтобы получить представление, что такое вариационные задачи, рассмотрим некоторые из них.

1.1.1 Простейшая изопериметрическая задача или задача Дидоны

Формулировка этой задачи приписывается карфагенской царице Дидо, которой понадобилось ремешком заданной длины ограничить участок земли наибольшей площади. Математическая формулировка задачи заключается в следующем: среди всех гладких замкнутых кривых заданной длины, найти ту, которая ограничивает наибольшую возможную площадь (см. Рис. 1).

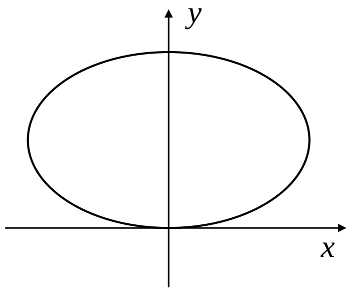

Рис. 1

Решением этой задачи будет окружность. Решение задачи приведено на стр.36.

1.1.2 Задача о брахистохроне

В 1696 году Иоганн Бернулли предложил задачу о линии быстрейшего ската – брахистохроне. Какой формы нужно сделать желоб, чтобы маленький шарик скатился из точки А в точку Б за кратчайшее время (Рис. 2)?

Легко видеть, что линией быстрейшего ската не будет прямая, соединяющая точки A и B, хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками A и B. При движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же взять кривую, более круто спускающуюся около точки A вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном, Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстрейшего ската является циклоида (решение задачи приведено на стр. 24).

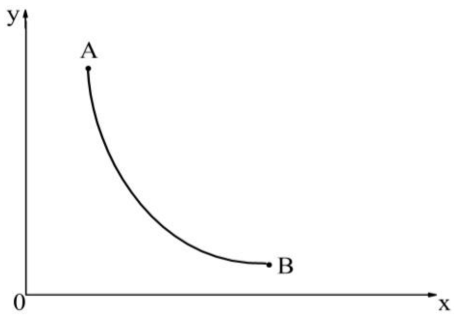

Рис. 2

1.1.3 Задача о геодезической линии

Пусть требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки, на некоторой поверхности $f(x, y, z) = 0$ (Рис. 3).

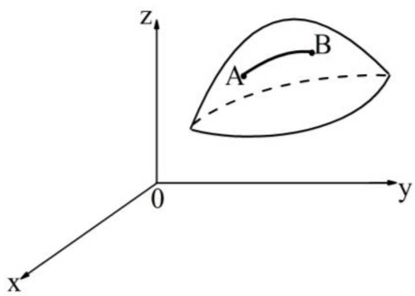

Рис. 3

Такие кратчайшие линии называются геодезическими. Мы имеем типичную задачу на условный экстремум. Воспользуемся известной формулой длины дуги в 3-х мерном пространстве $l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$. Необходимо найти минимальное значение интеграла *l*, причем функции $y(x), z(x)$ должны быть подчинены условию $f(x, y, z) = 0$. Эта задача была решена Я. Бернулли в 1698 году, но общий метод решения задач такого типа был дан позже в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

Итак, наряду с задачами, в которых необходимо найти максимальные и минимальные значения некоторой функции $f(x)$ *, в задачах физики, механики и других наук возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых функционалами. Аргумент функции – число, аргумент функционала – функция.* Например, функционалом является длина *l* дуги плоской или пространственной кривой, соединяющей две заданные точки.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются **вариационными задачами**.

1.2 Понятие функционала

Теперь дадим строгие определения. Если каждому числу x (из некоторого множества D) сопоставлено число $f(x)$, то говорят, что задана функция f с областью определения D; $f: D \to R$. Понятие функционала является обобщением понятия функции: если функция f описывает зависимость числа от числа, то функционал – зависимость числа от функции.

Пусть M – некоторое множество функций. **Функционалом называется отображение** $V: M \to R$, то есть каждой функции f из множества M сопоставляется число $V(f)$.

Совокупность функций, на которых определен функционал, называется **классом допустимых функций**.

Далее мы будем рассматривать следующие классы функций:

1. $M \subset C^0[a;b]$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$,
2. $M \subset C^1[a;b]$ – пространство функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$. В вариационном исчислении в основном рассматриваются именно функционалы $V: C^1[a;b] \to R$.

1.3 Линейный функционал

Функционал $V(f)$ называется **линейным**, если он удовлетворяет условию $V(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 V(f_1) + c_2 V(f_2)$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Пример

Пусть в пространстве $C^1[a;b]$ даны функционалы:

1. $V_1(f) = \int_a^b f(x)dx$.
2. $V_2(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.
3. $V_3(f) = f'(x_0) + 3, \quad x_0 \in [a;b]$.

Из свойств определенного интеграла следует, что V_1 – линейный функционал, функционалы V_2, V_3 не являются линейными.

1.4 Непрерывность функционала

1.4.1 Метрики в пространстве функций

Напомним определение непрерывной функции.

Функция f непрерывна в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Для функционалов необходимо ввести аналогичное определение. Для функций в определении непрерывности участвует расстояние между точками на числовой прямой $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Значит, для функционалов требуется ввести расстояние (метрику) между функциями.

Расстояние в пространстве $C^0[a;b]$ между **двумя непрерывными функциями** f **и** g **(или** C^0**-метрика) определяется следующим образом:**

$$|f - g|_{C^0} = \rho_{C^0}(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f - g|.$$

ε-окрестностью функции f в метрике пространства $C^0[a;b]$, или сильной окрестностью функции f, называется множество всех непрерывных функций g, таких, что

$$\rho_{C^0}(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f - g| < \varepsilon .$$

Говорят, что функции f и g в этом случае C^0-близки.

Расстояние в пространстве $C^1[a;b]$ **между двумя непрерывно дифференцируемыми функциями** f **и** g **(или** C^1**-метрика) определяется следующим образом:**

$$|f - g|_{C^1} = \rho_{C^1}(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f - g| + \max_{a \le x \le b} |f' - g'|.$$

ε-окрестностью функции f в метрике пространства $C^1[a;b]$, или слабой окрестностью функции f, называется множество всех непрерывно дифференцируемых функций g, таких, что

$$\rho_{C^1}(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f - g| + \max_{a \le x \le b} |f' - g'| < \varepsilon .$$

Говорят, что функции f и g C^1-близки.

Различие между этими понятиями наглядно иллюстрирует Рис. 4. На рисунке 4а показаны графики функций, близкие по C^0-метрике, но не близкие по C^1-метрике. На рисунке 4б изображены графики функций, у которых близки не только ординаты, но и направления касательных – здесь функции f и g C^1-близки.

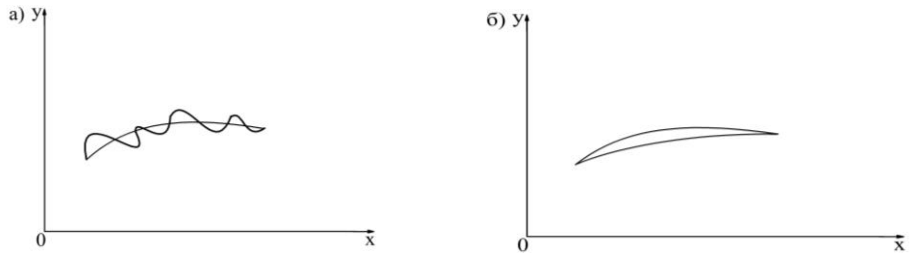

Рис. 4

Пример 1

Найдем расстояние ρ_{C^0} между функциями $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x^2$ на отрезке $[0;1]$ (Рис. 5).

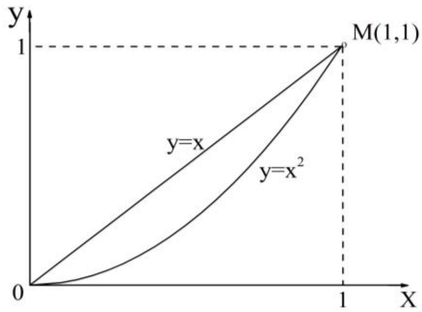

Рис. 5

Решение.

По определению $\rho_{C^0} = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^2 - x\right| = \max\limits_{0\le x\le 1}(x - x^2)$. На концах отрезка $[0;1]$ значения функции $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = x - x^2$ обращаются в нуль. Найдем $\max\limits_{0\le x\le 1}(x - x^2)$. Имеем

$$f' = 1 - 2x, \quad f' = 0 \text{ при } x = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\rho_{C^0}(f_1, f_2) = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^2 - x\right| = (x - x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

Пример 2

Дана последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ $x \in [0;2\pi]$. Выясните, верно ли, что $f_n \to 0$: а) относительно $C^0[0;2\pi]$ метрики; б) относительно $C^1[0;2\pi]$ метрики.

Решение.

а) Так как $\rho_{C^0}(f_n,0) = \max\limits_{[0,2\pi]}\left|\dfrac{\cos nx - 0}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$, то $f_n \to 0$. Таким образом, $f_n \to 0$ в пространстве $C^0[0;2\pi]$.

б) В пространстве $C^1[0;2\pi]$ по определению метрики имеем:

$$\rho_{C^1}(f_n,0) = \max_{[0,2\pi]}\left|\frac{\cos\ nx\ -\ 0}{n}\right| + \max_{[0,2\pi]}\left|\frac{-\ n\sin\ nx}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} + 1 \geq 1\ .$$

Таким образом, $\rho_{C^1}(f_n,0) \geq 1$ при всех n, а потому утверждение б) неверно.

1.4.2 Определение непрерывности функционала

Функционал $V : M \subset C^0[a;b] \to R$ **называется** C^0**-непрерывным, если** $\forall f_0 \in M$ и $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \rho_{C^0}(f_0, f) < \delta \Rightarrow |V(f) - V(f_0)| < \varepsilon$.

Функционал $V : M \subset C^1[a;b] \to R$ **называется** C^1**-непрерывным, если** $\forall f_0 \in M$ и $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \rho_{C^1}(f_0, f) < \delta \Rightarrow |V(f) - V(f_0)| < \varepsilon$.

Функционал, который не является непрерывным в пространстве C^0 (или C^1) мы будем называть **разрывным** в пространстве C^0 (или C^1).

Ясно, что $\rho_{C^0}(f, f_0) \leq \rho_{C^1}(f, f_0)$, поэтому из того, что $\rho_{C^1}(f, f_0) < \varepsilon$ следует, что $\rho_{C^0}(f, f_0) < \varepsilon$, однако обратное утверждение неверно. Другими словами, сильная ε-окрестность f_0 содержит «больше» функций (рис. 4а), чем слабая. В слабую окрестность не попадут функции, значения которых близки к значениям функции f_0, однако производные которых сильно отличаются от производных этой функции.

Пример.

Пусть в $C^1[a;b]$ задан функционал $V(f) = f'(x_0)$, где $x_0 \in [a;b]$, то есть каждой функции из $C^1[a;b]$ ставится в соответствие определенное число – значение производной этой функции в фиксированной точке x_0.

Проверим, является этот функционал непрерывным: а) относительно C^0-метрики; б) относительно C^1-метрики в пространстве $C^1[a;b]$.

Решение.

а) Возьмем функцию $\varphi(x)$, такую что $\varphi'(x_0) = 1$ и $|\varphi(x)| < \delta$ на $[a;b]$. Возьмем функцию $f(x) = f_0(x) + \varphi(x)$, где $f_0(x) \in C^1[a,b]$. Тогда $f'(x_0) = f_0'(x_0) + 1$. Ясно, что $\rho_{C^0}(f, f_0) < \delta$, то есть функции f и f_0 – C^0 близки. В то же время $V(f) - V(f_0) = 1$, то есть $\exists \varepsilon > 0$ (именно $\varepsilon < 1$) такое, что $\forall \delta > 0\ \ \exists f(x) : \rho_{C^0}(f, f_0) < \delta \Rightarrow |V(f) - V(f_0)| \geq \varepsilon$. Это означает, что рассматриваемый функционал не является непрерывным в $C^0[a;b]$.

б) Зададим $\forall \varepsilon > 0$. Покажем, что найдется число $\delta > 0$ такое, что $|V(f) - V(f_0)| < \varepsilon$ как только $\rho_{C^1}(f, f_0) < \delta$. Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда

$$\left|V(f)-V(f_0)\right| = \left|f'(x_0) - f_0'(x_0)\right| \le \max_{a\le x\le b}\left|f'(x_0) - f_0'(x_0)\right| \le$$

$$\le \max_{a\le x\le b}\left|f'(x_0) - f_0'(x_0)\right| + \max_{a\le x\le b}\left|f(x_0) - f_0(x_0)\right| = \rho_{C^1}(f, f_0) < \delta = \varepsilon.$$

Это означает, что рассматриваемый функционал является непрерывным в $C^1[a;b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Этот пример показывает, что из непрерывности функционала относительно C^1-метрики не следует, вообще говоря, его непрерывность в C^0-метрике.

2 Первая вариация функционала. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума

2.1 Вариация функционала

Чтобы ввести понятие вариации функционала, вспомним некоторые сведения из дифференциального исчисления функций. Пусть дано отображение $f: R^n \to R$, другими словами, функция нескольких переменных $f(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Можно двумя способами ввести понятие производной f'.

Первый способ является обобщением понятия дифференциала функции одной переменной. Пусть $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$ – норма в R^n. **Функция** f **называется дифференцируемой в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если существует линейная функция A_{x_0},

$$A_{x_0}: \boldsymbol{h} \mapsto A_{x_0}(\boldsymbol{h}) = A_1h_1 + A_2h_2 + \dots + A_nh_n \text{, где } \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ такая, что}$$

$$f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) = A_{x_0}(\boldsymbol{h}) + o(|\boldsymbol{h}|) \text{ при } |\boldsymbol{h}| \to 0.$$

Эта линейная функция и называется производной функции f в точке $\boldsymbol{x_0}$: $f'(\boldsymbol{x}_0) = A_{x_0}$, при этом коэффициенты A_j совпадают с частными производными $A_j(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$. Это определение производной по Фреше.

Второй способ введения понятия производной – это производная по вектору (направлению). Функция f называется **дифференцируемой в точке** $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ по вектору $\boldsymbol{h}$, если функция $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\cdot\boldsymbol{h})$ одной вещественной переменной t дифференцируема при t=0:

$$f'(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\cdot\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}_0 + t\cdot\boldsymbol{h})\Big|_{t=0} = \varphi'(0).$$

При этом значение производной $\varphi'(0)$ называется производной функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ по вектору $\boldsymbol{h}$ и часто обозначается $D_{\boldsymbol{h}}f(\boldsymbol{x}_0)$:

$$D_{\boldsymbol{h}}f(\boldsymbol{x}_0) = \varphi'(0).$$

Это определение производной по Гато или производной по направлению.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из дифференцируемости по Гато не следует непрерывности функции: функция может быть дифференцируемой по любому вектору в точке x_0 и быть разрывной в точке x_0. Например, функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

дифференцируема по любому направлению, но при этом разрывна в точке (0,0).

Если функция f дифференцируема по Фреше, то она дифференцируема и по Гато и ее производная f' (производная по Фреше) связана с производной по направлению (производной по Гато) равенством

$$f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}=D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}_0).$$

Теперь по аналогии дадим два определения вариации функционала.

Первое определение вариации функционала.

Рассмотрим функционал V. Зафиксируем функцию f из области определения функционала V. Тогда любую другую функцию g из этой области можно представить в виде $g=f+\delta y$ (Рис. 6). Изменение (вариация) аргумента функционала δy аналогично приращению независимой переменной Δx при исследовании экстремумов функций.

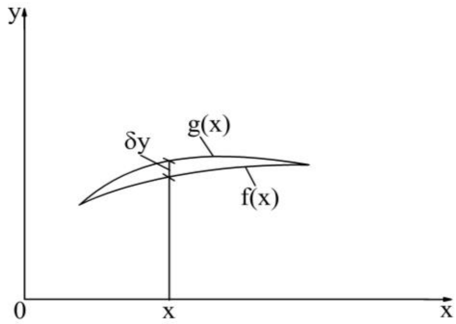

Рис. 6

Функционал $V(f)$ называется **дифференцируемым** в точке f, если существует линейный относительно δy функционал $A(f,\delta y)$ такой что

$$V(f+\delta y)=V(f)+A(f,\delta y)+o(\delta y),$$

Тогда линейная по отношению к δy часть приращения функционала A называется вариацией функционала, то есть $\delta V=A(f,\delta y)$. Это аналог определения производной функции по Фреше.

Второе определение вариации функционала.

Зафиксируем аргумент f функционала $V(f)$, зададим и тоже зафиксируем некоторую вариацию δy аргумента f. Функционал $V(f+t\delta y)$, рассматриваемый на однопараметрическом множестве функций $f+t\delta y$, при фиксированных f и δy обращается в функцию $(t\in R)$ $\varphi(t)=V(f+t\delta y)$. **Вариацией** δV **функционала** $V(f)$ в точке f называют производную функции $\varphi(t)$ по параметру t при t=0:

$$\delta V(f,\delta y)=\lim_{t\to 0}\frac{V(f+t\cdot\delta y)-V(f)}{t}=\left.\frac{d}{dt}V(f+t\delta y)\right|_{t=0}=\varphi'(0).$$

Это аналог определения производной функции по Гато.

ЗАМЕЧАНИЕ, Если существует вариация функционала в смысле главной линейной части его приращения, то существует и вариация функционала в смысле производной по параметру.

Вариация интегрального функционала.

В задачах физики, химии часто встречается интегральный функционал вида

$$V(f)=\int_a^b F(x,f(x),f'(x))\,dx \qquad (1)$$

.

Выражение под интегралом можно рассматривать как функцию трех переменных, поэтому для краткости принято записывать этот функционал так:

$$V(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx, \text{ где } y=f(x) \qquad (2)$$

Найдем вариацию функционала (2). Согласно второму определению вариации...

Согласно второму определению вариации

$$\delta V=\left.\frac{d}{dt}\int_a^b F(x,y+t\delta y,y'+t\delta y')dx\right|_{t=0}, \qquad (3)$$

Вспомним формулу Лейбница для дифференцирования интеграла по параметру. Пусть $f(x,t)$ – непрерывна и дифференцируема на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$. Тогда интеграл $I(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ дифференцируем по *t* на $[c;d]$, и производная равна

$$\frac{dI}{dt}=f(b(t),t)\frac{db(t)}{dt}-f(a(t),t)\frac{da(t)}{dt}+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

Если пределы интегрирования не зависят от параметра, то формула упрощается:

$$\frac{dI}{dt}=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

Вспомним также формулу дифференцирования сложной функции $u(x,y,z)$, где $y=Y(x,t)$, $z=Z(x,t)$ – функции класса C^1:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

Используя приведенные выше формулы, вычислим правую часть равенства (3):

$$\delta V=\int_a^b[F_y(x,y+t\delta y,y'+t\delta y')\delta y+F_{y'}(x,y+t\delta y,y'+t\delta y')\delta y']dx\ . \qquad (4)$$

Полагая $t=0$, находим:

$$\delta V=\int_a^b(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx\ . \qquad (5)$$

В дальнейших задачах результат (5) может использоваться как готовая формула.

Пример 1.

Найти вариацию функционала $V(f)=\int_a^b f^2(x)dx$.

Решение.

Способ 1. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta V(f)=V(f+\delta y)-V(f)=\int_a^b(f+\delta y)^2dx-\int_a^b f^2dx=2\int_a^b f\delta ydx+\int_a^b(\delta y)^2dx\ .$$

Здесь приращение ΔV состоит из двух слагаемых, первое из которых при фиксированном $f(x)$ представляет собой линейный функционал относительно вариации δy аргумента функционала. Второе слагаемое – квадратичный относительно δy функционал. Таким образом, вариацией данного функционала является

$$\delta V=2\int_a^b f\delta ydx\ .$$

Способ 2. В соответствии со вторым определением вариации функционала

$$\delta V=\frac{d}{dt}\int_a^b(f+t\delta y)^2dx=2\int_a^b(f+t\delta y)\cdot\delta ydx\Bigg|_{t=0}=2\int_a^b f\delta ydx$$

Пример 2.

Найти вариацию функционала $V(y)=\int_{-1}^{1}(y'e^y+xy^2)dx$

Решение.

Функция $F(x,y,y')=y'e^y+xy^2$ непрерывна по совокупности переменных x,y,y', имеет частные производные всех порядков по y,y', ограниченные в любой ограниченной области изменения переменных y, y'.Поэтому данный функционал дифференцируем в пространстве $C^1[-1;1]$ и его вариация согласно (5) равна

$$\delta V = \int_{-1}^{1} (y'e^y + 2xy)\delta y + e^y \delta y')dx \ .$$

2.2 Экстремум функционала

Вспомним определение экстремума функции одной независимой переменной.

Точка x_0 называется точкой **максимума** функции f, если $\exists \delta > 0 : \forall x \in D(f)$ $|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0)$. Аналогично определяется точка минимума. Точки максимума и минимума называются точками экстремума функции.

В вариационном исчислении таким же образом вводится определение экстремума функционала, только роль точек экстремума здесь играют функции.

Функционал $V(f)$ достигает на функции f_0 **максимума** в пространстве C^1, если $\exists \delta > 0, \ \forall f : \left| f - f_0 \right|_{C^1} < \delta \ \Rightarrow V(f) \le V(f_0)$.

Если $V(f) = V(f_0)$ только при $f = f_0$, то говорят, что на функции f_0 достигается строгий максимум. Аналогично определяется функция f_0, на которой реализуется минимум.

2.3 Необходимое условие экстремума

Из курса дифференциального исчисления известно необходимое условие экстремума функции f в точке x_0: если функция f в точке x_0 (x_0 – внутренняя точка области определения) имеет экстремум, то производная $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Дадим аналогичное определение для функционалов.

Если функционал $V(f)$, имеющий вариацию, достигает экстремума на функции f_0, где f_0 – внутренняя точка области определения функционала, то имеем:

$$\delta V(f_0) = 0 \ .$$

Функции, для которых $\delta V(f) = 0$, называются стационарными функциями.

Найдем необходимое условие экстремума для функционала вида (2), для чего сформулируем и докажем утверждение, называемое **основной леммой вариационного исчисления**.

Теорема (основная лемма вариационного исчисления). Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[x_0; x_1]$ и для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, такой, что $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$ имеет место равенство $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\varphi(x)dx=0$. Тогда функция $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[x_0;x_1]$.

Доказательство.

Докажем от противного. Пусть $f(x)\neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f(x)>0$ (если $f(x)\le 0$, то заменим $f(x)$ на $-f(x)$). Тогда в силу непрерывности $f(x)$ существует окрестность $(a;b)$ точки x_0, в которой $f(x)>0$.

Положим $\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, x\in(a;b),\\ 0, x\notin(a;b).\end{cases}$

Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную и на концах интервала $[x_0;x_1]$ обращается в 0, но $\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi(x)f(x)dx=\int\limits_a^b(x-a)^2(x-b)^2 f(x)dx>0$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

3 Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим множество функций $C^1[x_0;x_1]$. Пусть функция $F(x,y,y')$ класса $C^2[x_0;x_1]$.Требуется найти экстремум функционала

$$V(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\,. \tag{6}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$y(x_0)=y_0,\,y(x_1)=y_1\,. \tag{7}$$

С геометрической точки зрения простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании экстремума функционала на множестве всех гладких функций, соединяющих две заданные точки $A(x_0;y_0)$ и $B(x_1;y_1)$ (Рис. 7). Эту задачу называют задачей с **закрепленным границами**.

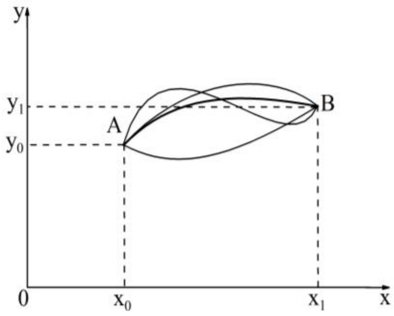

Рис. 7

3.2 Уравнение Эйлера.

Теорема. Для того чтобы функционал (6), определенный на множестве функций $y(x) \in C^1$, удовлетворяющих граничным условия (7), достигал на данной функции $y(x)$ экстремума необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 . \tag{8}$$

Доказательство.

Действительно, необходимое условие экстремума функционала $\delta V = 0$. Согласно формуле (5) имеем:

$$\delta V = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx = 0 . \tag{9}$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx . \tag{10}$$

В силу граничных условий (7) имеем: $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, поэтому первое слагаемое в (10) должно быть равно нулю. Тогда вместо (9) получим:

$$\delta V = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx = 0 . \tag{11}$$

Применяя к (11) основную лемму вариационного исчисления, приходим к выводу, что в силу произвольности вариации аргумента функционала, выражение в скобках в интеграле (11) равно нулю

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 . \tag{12}$$

Полученное уравнение называется уравнением Эйлера, а интегральные кривые уравнения Эйлера называются **экстремалями**. Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{yy'} \cdot y' + F_{xy'} - F_y = 0 . \tag{13}$$

Уравнение (13) в общем случае представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, так что его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных определяются из граничных условий (7).

Экстремум функционала (6) может реализоваться только на тех экстремалях, которые удовлетворяют условиям (7).

Краевая задача

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>: Если краевая задача для уравнения Эйлера и разрешима, то это еще не означает существование экстремумов у функционала, так как экстремаль – это кривая, на которой может достигаться экстремум функционала. Как и при исследовании экстремумов функций, требуется дополнительный анализ решения, чтобы установить, реализуется ли в действительности экстремум и какого характера (максимум или минимум). Для этого надо использовать достаточные условия экстремума.

3.3 Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

3.3.1 *F* не зависит от y'

F не зависит от y', то есть функционал имеет вид $V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y)dx$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид

$$F_y(x, y) = 0 . \tag{14}$$

Уравнение (14) не является дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число функций, которые могут и не удовлетворять граничным условиям. Лишь в исключительных случаях, когда функция (14) проходит через граничные точки $y_0(x_0)$ и $y_1(x_1)$, существует функция, на которой может достигаться экстремум.

Пример.

Найти экстремали функционала $V(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx$, $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$2x - 2y = 0, \text{ то есть } y = x.$$

Так как граничные условия удовлетворяются, то на прямой $y = x$ интеграл $V(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx$ может достигать экстремума. При других граничных условиях, например, $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, экстремаль $y = x$ не проходит через граничные точки (0,0) и $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, так что при этих граничных условиях вариационная задача не имеет решения.

3.3.2 *F* линейно зависит от y'

F зависит от y' линейно: $F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \qquad (15)$$

Полученное уравнение (15) не является дифференциальным уравнением. Функция, определяемая уравнением $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, и, значит, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций.

Если в некоторой области D плоскости *Oxy* $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то выражение $F(x, y, y') = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом, и функционал

$$V(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} M(x, y)dx + N(x, y)dy. \qquad (16)$$

не зависит от пути интегрирования, значения функционала $V(y)$ одно и то же на допустимых функциях.

Пример.

Найти экстремали функционала $V(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')dx$, $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$

Решение.

Здесь *F* линейно зависит от y'. Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 2y, \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

значит, подынтегральное выражение $(y^2 + 2xyy')dx$ является полным дифференциалом. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$V(y) = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx + 2xydy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} d(xy^2) = xy^2 \Big|_{x_0}^{x_1} = x_1 y_1^2 - x_0 y_0^2$$

по какой бы функции *y(x)*, проходящей через точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, мы не интегрировали.

3.3.3 *F* зависит только от y'

F зависит только от y', то есть функционал имеет вид $V(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y')dx$. Уравнение Эйлера в этом случае примет вид:

$$y'' \cdot F_{y'y'} = 0 . \qquad (17)$$

В этом случае экстремалями являются прямые линии $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – производные постоянные.

3.3.4 *F* не зависит от *y*

F не зависит от y, то есть функционал имеет вид $V(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид:

$$F_{y'}(x, y') = C . \qquad (18)$$

где C – производная постоянная. Уравнение (18) является дифференциальным уравнением первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

Пример.

Найти экстремаль функционала $V(y) = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')dx$,проходящую через заданные точки *A(1;3)* и *B(2;5)*.

.Решение.

В этом случае F не зависит от *y*, и уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx} F(x, y') = 0 .$$

В нашем случае:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y') = 0 \Rightarrow (1 + 2x^2 y') = C .$$

Тогда

$$y' = \frac{C-1}{2x^2} \Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 .$$

Для определения постоянных C_1, C_2 составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -4, C_2 = 7$. Искомая экстремаль $y = 7 - \dfrac{4}{x}$.

3.3.5 *F* не зависит явно от *x*

F не зависит явно от x, то есть функционал имеет вид $V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(y, y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 . \qquad (19)$$

Умножив на y' обе части этого уравнения, в левой части получим точную производную, т.е. $\dfrac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0$, откуда

$$F - y' \cdot F_{y'} = C , \qquad (20)$$

где C – производная постоянная. Это уравнение может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и разделения переменных или путем введения параметра.

Пример 1.

Найти экстремаль функционала $V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx$, проходящую через заданные точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Решение.

Подынтегральная функция не содержит явно *x*, поэтом уравнение Эйлера имеет интеграл (20). В нашем случае получаем:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1 + y'^2}} = C .$$

После упрощений:

$$y\sqrt{1 + y'^2} = C_1 .$$

Введем параметр *t*, полагая $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \cos t .$$

Далее получим

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = -\frac{C_1 \sin tdt}{\operatorname{tg} t} = -C_1 \cos tdt \Rightarrow x = C_2 - C_1 \sin t .$$

Исключая t, получим

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2 .$$

Это семейство окружностей с центром на оси Ox. Искомой будет та экстремаль, которая проходит через заданные точки. Задача имеет единственное решение, так как через любые две точки, лежащие в верхней полуплоскости, проходит одна и только одна полуокружность с центром на оси Ox.

Пример 2.

Найти экстремали функционала $V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.

Решение.

Этот функционал определяет длину кривой, соединяющей точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$. Геометрически задача сводится к поиску кратчайшей линии, соединяющей данные точки. Подставив функционал в уравнение Эйлера в виде (19) после упрощения получим:

$$y''(x) = 0 .$$

Общее решение этого уравнения:

$$y = C_1 x + C_2 .$$

Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, есть прямая, проходящая через точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 .$$

Примечание: функция F зависит только от y', поэтому можно было взять уравнение Эйлера в форме (17).

Пример 3.

Найти экстремаль функционала $V(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - 4y^2 - 2xe^x y)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Решение.

Найдем частные производные:

$$F_y = -8y - 2xe^x, F_{y'} = 2y', F_{y'y'} = 2y'', F_{yy'} = F_{xy'} = 0.$$

Уравнение Эйлера примет вид:

$$2y'' + 2y + 2xe^x = 0,$$

или

$$y'' + y = -xe^x. \qquad (21)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение однородного уравнения будет:

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частное решение y_* неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_* = (Ax + B)e^x.$$

Подставляя выражение для y_* в уравнение (21), методом неопределенных коэффициентов находим $A = -\frac{1}{5}$ и $B = \frac{2}{25}$.

Поэтому общее решение уравнения (семейство экстремалей функционала) будет иметь вид:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}\left(-x + \frac{2}{5}\right)e^x.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 находим из граничных условий:

$$C_1 = -\frac{2}{25}, C_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}\right)e^{\pi/4}.$$

Искомая экстремаль будет иметь вид:

$$y = -\frac{2}{25}\cos 2x + \frac{5\pi - 8}{100}e^{\pi/4}\sin 2x + \frac{2 - 5x}{25}e^x.$$

3.4 Задачи вариационного исчисления

3.4.1 Задача о наименьшей поверхности вращения

Даны две точки $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ плоскости xOy, $x_0 < x_1$. Пусть $y = y(x)$ – уравнение кривой, соединяющей точки A и B, т.е.

$$y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1).$$

Кривая вращается вокруг оси Ox, заметая некоторую поверхность вращения (Рис. 8). Какой должна быть эта кривая, чтобы площадь получившейся поверхности была наименьшей?

Решение.

Отрезок кривой $y = y(x)$ (образующая поверхности вращения) будет решение вариационной задачи

$$S(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,\; y(x_0) = y_0\,,\; y(x_1) = y_1\,.$$

Здесь $S(y)$ – площадь поверхности вращения кривой с концами в точках $A(x_0, y_0),\ B(x_1, y_1)$.

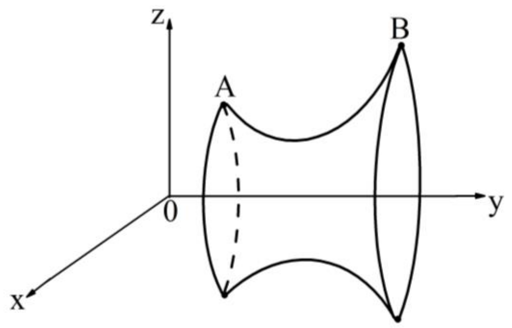

Рис. 8

Функция $F = y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от *x*. В этому случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C_1$, т.е.

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1\,,$$

откуда после преобразований получим:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1\,.$$

Введем параметр t, полагая, что $y' = \operatorname{sh} t$. Тогда

$$y = C_1 \operatorname{ch} t,\; dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt \;\Rightarrow\; x = C_1 t + C_2\,.$$

Исключая параметр *t*, получим семейство *цепных линий* (их форму принимает тяжелая нить)

$$y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1}\,,$$

от вращения которых получаются поверхности, называемые *катеноидами*. Постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий. В зависимости от координат $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ может быть одно, два и ни одного решения.

3.4.2 Задача о брахистохроне

Найти кривую $y(x)$, соединяющую заданные точки $A(0,0)$ и $B(x_1, y_1)$ (не лежащие на одной вертикальной прямой), такую, чтобы материальная точка, выпущенная из точки *A* без начальной скорости, скатилась под действием силы тяжести в точку *B* за кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Решение.

Поместим начало координат в точку *A*, ось *Ox* направим горизонтально, ось *Oy* – вертикально вниз (Рис. 9).

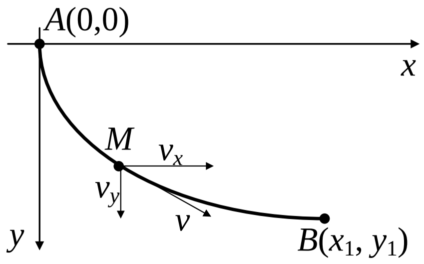

Рис. 9

Приобретенная материальной точкой кинетическая энергия равна потере потенциальной энергии, то есть $\frac{m\left|\bar{v}^2\right|}{2} = mgh$, где m – масса точки, g – ускорение свободного падения, $h = y(x)$ – величина перемещения точки по вертикали. Вектор скорости движения разложим по координатам: $\bar{v} = (v_x, v_y)$, $\left|\bar{v}^2\right| = v_x^2 + v_y^2$, $y'(x) = \frac{v_y}{v_x}$ (по геометрическому смыслу производной). Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = 2gy, \\ y'(x) = \dfrac{v_y}{v_x}, \end{cases}$$

откуда получаем $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2gy(1 + y'^2)} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{(1 + y'^2)}{2gy}}dx$. Таким образом, время движения точки выражается интегралом

$$t(y) = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \to \min,$$

граничные условия $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$.

У этого функционала подынтегральная функция не содержит явно *x*, поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C$. В нашем случае он будет иметь вид:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}-\frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C\ ,$$

откуда после преобразований получим $\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C$ или $y(1+y'^2)=C_1$, где $C_1=\frac{1}{2gC^2}$.

Введем параметр *t* такой, что $y'=\operatorname{ctg} t$. Получим:

$$y=\frac{C_1}{1+y'^2}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos tdt}{\operatorname{ctg} t}=2C_1\sin^2 tdt=C_1(1-\cos 2t)dt\,,$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид:

$$x=\frac{C_1}{2}(t_1-\sin t_1),\ y=\frac{C_1}{2}(t_1-\cos t_1)\ ,$$

Это *циклоида* – кривая, которую описывает точка окружности, если окружность катится по прямой. Радиус окружности $\frac{C_1}{2}$ определяется из условий прохождения циклоиды через точку $B(x_1 y_1)$.

3.4.3 Геометрическая оптика

Согласно принципу Ферма, путь света между двумя точками в однородной среде является отрезком прямой. Ввиду постоянства скорости света в однородной среде, этот принцип можно выразить словами: путь света между двумя точками в однородной среде сообщает наименьшее значение времени движения. В неоднородных средах этот принцип требует минимума для функционала времени:

$$t=\int_{\gamma}\frac{ds}{v}$$

на пути γ движения светового луча. Здесь ds – элемент длины дуги, v – скорость света.

Рассмотрим движение светового луча в плоскости xy от точки $A(x_1,y_1)$ до точки $B(x_2,y_2)$. Пусть скорость света задается функций $v(y)$. В силу того, что $t=\frac{ds}{v}$, где ds – длина дуги между точками A и B, то мы приходим к вариационной задаче нахождения экстремалей функционала следующего вида:

$$t=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}dx$$

У этого функционала подынтегральная функция не содержит явно *x*, поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C$. В нашем случае он будет иметь вид:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} - \frac{y'^2}{v\sqrt{1+y'^2}} = C \,,$$

и после приведения к одному знаменателю

$$\frac{1}{v\sqrt{1+y'^2}} = C \,. \tag{22}$$

Решим это дифференциальное уравнение разделением переменных:

$$\frac{\sqrt{1-C^2v^2}}{Cv} = y' = \frac{dy}{dx} \,,$$

$$x = \int \frac{Cv}{\sqrt{1-C^2v^2}} dy \,.$$

Рассмотрим частный случай – луч света переходит из одной однородной среды в другую, то есть функция $v(y)$ – кусочно-постоянная:

$$v(y) = \begin{cases} v_1, \, y < 0, \\ v_2, \, y > 0. \end{cases}$$

Из (22) видим, что y' – кусочно-постоянная функция, а $y(x)$ в верхней и нижней полуплоскоскости – линейная функция с разными угловыми коэффициентами (

Рис. 10

). Найдем эти угловые коэффициенты. В (22) подставим $y' = \operatorname{tg}\varphi$ и, используя тригонометрические формулы, получим:

$$Cv = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \cos\varphi = \sin\theta$$

Отсюда следует закон преломления света:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

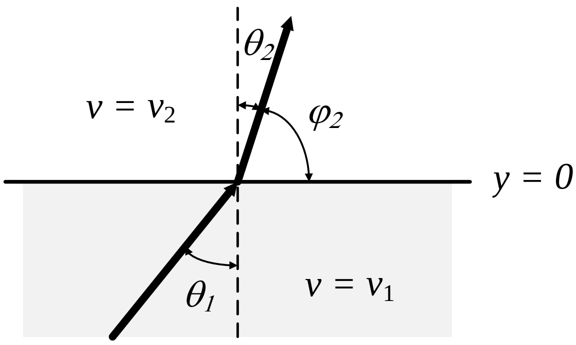

Рис. 10

4 Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

4.1 Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Пусть дан функционал

$$V(y) = \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))\, dx\ . \tag{23}$$

где F – функция, дифференцируемая n+2 раза по всем аргументам, $y(x) \in C^n[x_0; x_1]$, а граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\ y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y_1', \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Экстремалями функционала (23) являются интегральные кривые уравнения Эйлера – Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0\ . \tag{25}$$

Общее решение (25) зависит от *2n* произвольных постоянных, которые определяются из условий (24).

Пример 1.

Найти семейство экстремалей функционала $V(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 16y^2 + 2yx^2)dx$.

Решение.

Для данного функционала уравнение Эйлера – Пуассона будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0\ .$$

Вычислим частные производные:

$$F_y = -32y + 2x^2, F_{y''} = 2y'', \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 2y^{IV}\ .$$

Уравнение Эйлера – Пуассона запишется в виде:

$$y^{IV} - 16y = -x^2\ . \tag{26}$$

Общее решение однородного уравнения $y^{IV} - 16y = 0$ будет равно:

$$y_0 = C_1e^{2x} - C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x\ .$$

Частное решение неоднородного уравнения (26) находим методом подбора, принимая его в виде:

$$y_* = Ax^2 + Bx + C. \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (26), найдем неопределенные коэффициенты $A = \frac{1}{16}, B = 0, C = 0$.

Таким образом, частное решение будет равно $y_* = \frac{x^2}{16}$.

Итак, семейство экстремалей рассматриваемого функционала будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{x^2}{16}.$$

Пример 2.

Найти семейство экстремалей для функционала

$$V(y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y''^2 - 2y'y'' - yy'' + \frac{1}{2} y^2 + y' \sin 2x\right) dx.$$

Решение.

Вычислим частные производные

$$F_y = -y'' + y, F_{y'} = -2y'' + \sin 2x, \frac{d}{dx}(F_{y'}) = -2y''' + 2\cos 2x,$$

$$F_{y''} = y'' - 2y' - y, \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = y^{IV} - 2y''' - y''.$$

Уравнение Эйлера – Пуассона для рассматриваемого функционала будет иметь вид:

$$y^{IV} - 2y''' + y = 2\cos 2x. \qquad (28)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения будет:

$$y_0 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 x e^{-x}. \qquad (29)$$

Частное решение неоднородного уравнения находим методом подбора, принимая его в виде

$$y_* = A\cos 2x + B\sin 2x. \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (28), находим неопределенные коэффициенты $A = \frac{2}{25}, B = 0$.

Семейство экстремалей будет иметь вид:

$$y = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 x e^{-x} + \frac{2}{25}\cos 2x. \qquad (31)$$

Пример 3.

Найти экстремали функционала $V(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2) dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Решение.

Для данного функционала уравнение Эйлера – Пуассона будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 .$$

Вычислим частные производные: $F_y = -2y, F_{y'} = 0, F_{y''} = 2y''$.

Уравнение Эйлера – Пуассона запишется в виде:

$$y^{IV} - y = 0$$

Общее решение будет равно:

$$y_0 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

Из граничных условий находим значения постоянных:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0 .$$

Таким образом, экстремаль рассматриваемого функционала будет иметь вид

$$y = \cos x .$$

4.2 Функционалы, зависящие от нескольких функций.

Пусть дан функционал, зависящий от m функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$,

$$V(y_1, y_2, \dots, y_m) = \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_m')dx . \qquad (32)$$

где F – дважды дифференцируемая функция своих аргументов и граничные условия вида

$$y_k(x_0) = y_k^0, y_k(x_1) = y_k^1 \quad (k = 1,2,\dots m),. \qquad (33)$$

Экстремали функционала (32) находятся из следующей системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1,2,\dots m).. \qquad (34)$$

Общее решение системы m уравнение 2-го порядка (34) зависит от $2m$ произвольных постоянных, определяемых из условий (33).

Пусть дан функционал, зависящий от двух функций:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))\,dx ,$$

определенный на классе допустимых функций *y(x), z(x)*, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1, z(x_1) = z_1.$$

Необходимое условие экстремума функционала согласно (34) получим в виде системы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, появление в подынтегральном выражении дополнительной функции приводит к дополнительному уравнению Эйлера.

Пример.

Найти экстремаль функционала $V = \int\limits_{-1}^{1}(2xy - y'^2 + \dfrac{z'^3}{3})dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(-1) = 2, y(1) = 0, z(-1) = -1, z(1) = 1$.

Решение.

Вычисляем частные производные функции $F = 2xy - y'^2 + \dfrac{z'^3}{3}$:

$F_y = 2x, F_{y'} = -2y', F_{y'y'} = -2, F_{yy'} = F_{xy'} = 0, F_z = 0, F_{z'} = z'^2, F_{z'z'} = 2z', F_{zz'} = F_{xz'} = 0$.

Уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{cases} y'' = -x, \\ z'z'' = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения независимы. Интегрируя первое уравнение системы, получим

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{35}$$

Второе уравнение равносильно совокупности двух:

$$\begin{cases} z' = 0, \\ z'' = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения $z' = 0$: $z = x + C$ принадлежит общему решению последнего уравнения системы

$$z = C_3x + C_4. \tag{36}$$

Определяя произвольные постоянные из граничных условий, находим:

$$C_1 = -\frac{5}{6}, C_2 = 1, C_3 = 1, C_4 = 0. \tag{37}$$

Подставляя полученные выражения (37) в (35) и (36), получим экстремали данного функционала:

$$y(x) = -\frac{x}{6}(x^2+5)+1,$$
$$z = x.$$

5 Условный экстремум функционала

5.1 Связи вида $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$

Вариационными задачами на условный экстремум называются задачи, в которых требуется найти экстремум функционала, причем на функции, от которых зависит функционал, наложены некоторые связи.

Напомним, как решается задача на условный экстремум функции $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии связей $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1,2,\dots, m, m < n)$. Как известно из курса дифференциального исчисления функций нескольких переменных, записывается функция Лагранжа $z^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$, где λ_i – постоянные множители. Функция z^* исследуется на безусловный экстремум, то есть составляется система уравнений $\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,2,\dots, n$, дополненная уравнениями связей $\varphi_i = 0 \quad (i = 1,2,\dots, m)$, из которой определяются $n+m$ неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Совершенно аналогично может быть решена задача на условный экстремум в вариационном исчислении.

Пусть требуется исследовать на экстремум функционал

$$V(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx$$

с граничным условиями $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_1(x_1) = y_1^{(1)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}, y_n(x_1) = y_n^{(1)}$ при наличии условий $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \quad (i = 1,2,\dots, m, m < n)$.

Составим вспомогательный функционал $V^* = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_m)dx$, где $L = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$ – функция Лагранжа. Теперь необходимо функционал V^* исследовать на безусловный экстремум, то есть решить систему уравнений Эйлера – Лагранжа, дополненную уравнениями связи:

$$\begin{cases} L_{y_j} - \frac{d}{dx}L_{y_j'} = 0, \; j = 1,2,\dots n, \\ \varphi_i = 0, i = 1,2,\dots m. \end{cases}$$

Число уравнений $m+n$ достаточно для определения $m+n$ неизвестных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а граничные условия $y_j(x_0) = y_{j0}$ и $y_j(x_1) = y_{j1}$ $j = 1,2,\dots n$, которые не должные противоречить уравнениям связей, дадут возможность определить $2n$ произвольных постоянных в общем решение системы уравнений Эйлера.

Пример.

Найти функции $y_1(x), y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционал $V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + x^3)dx$ при дополнительном условии $y_1 - 2y_2 + 3x = 0$. Граничные условия $y_1(0) = y_2(1) = 2$, $y_2(0) = y_1(1) = 1$.

Решение.

Запишем функцию Лагранжа $L = y_1'^2 + y_2'^2 + x^3 + \lambda(y_1 - 2y_2 + 3x)$. Для нахождения функций $y_1(x), y_2(x), \lambda(x)$ составим систему из уравнений Эйлера и уравнение связи:

$$\begin{cases} 2y_1'' - \lambda = 0, \\ y_2'' + \lambda = 0, \\ y_1 - 2y_2 + 3x = 0. \end{cases}$$

Сложив 1-е и 2-е уравнения, получим:

$$2y_1'' + y_2'' = 0. \qquad (38)$$

Из последнего уравнения системы выразим $y_1 = 2y_2 - 3x$ и, продифференцировав это равенство дважды, подставим в (38), получим:

$$y_2'' = 0.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$y_2 = C_1 x + C_2,$$
$$y_1 = (2C_1 - 3)x + 2C_2.$$

Из граничных условий находим, что $C_1 = C_2 = 1$ и экстремум может достигаться на функциях:

$$y_1 = -x + 2, y_2 = x + 1.$$

5.2 Изопериметрические задачи

5.2.1 Определение

Одна из первых изопериметрических задач сформулирована на стр. 4 данного учебного пособия. В настоящее время к изопериметрическим задачам относятся задачи нахождения экстремалей функционала вида

$$V(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx \ . \tag{39}$$

с граничными условиями

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_1(x_1) = y_1^{(1)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}, y_n(x_1) = y_n^{(1)} \ . \tag{40}$$

если заданы дополнительные изопериметрические условия:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx = l_i \ , \ i = 1, \dots, m \ . \tag{41}$$

Для получения необходимых условий экстремума рассмотрим вспомогательный функционал

$$V^* = \int_{x_0}^{x_1} L dx \ ,$$

где $L = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$ функция Лагранжа.

Для изопериметрической задачи можно показать, что множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются постоянными. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ доставляют **экстремум функционалу** (39) при заданных граничных условиях (40), то эти функции **удовлетворяют системе уравнений Эйлера**

$$\begin{cases} L_{y_1} - \dfrac{d}{dx} L_{y_1'} = 0, \\ \dots \\ L_{y_n} - \dfrac{d}{dx} L_{y_n'} = 0. \end{cases}$$

Входящие в общее решение последней системы m постоянных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и $2n$ констант определяются из m условий (41) и $2n$ граничных условий.

Пример.

Найти экстремали функционала $V(y) = \int_0^1 y'^2 dx$ с изопериметрическим условием $\int_0^1 y dx = 3$ и граничными условиями $y(0) = 1, y(1) = 6$.

Решение.

Функция Лагранжа имеет вид $L = y'^2 + \lambda y$. Запишем уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$2y'' - \lambda = 0 \ .$$

Интегрируя это уравнение дважды, находим $y = \dfrac{\lambda}{4} x^2 + C_1 x + C_2$.

Используя граничные условия и интегральное (изопериметрическое) условие, составляем систему

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ \dfrac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4} x^2 + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 2, C_2 = 1, \lambda = 12$. Искомая экстремаль имеет вид $y = 3x^2 + 2x + 1$.

5.2.2 Задача о цепной линии

Найти форму гибкой однородной нерастяжимой цепи длиной l, подвешенной в концевых точках (x_0, y_0), (x_1, y_1).

Решение.

Цепь с линейной плотностью массы ρ закреплена в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) (см. Рис. 11).

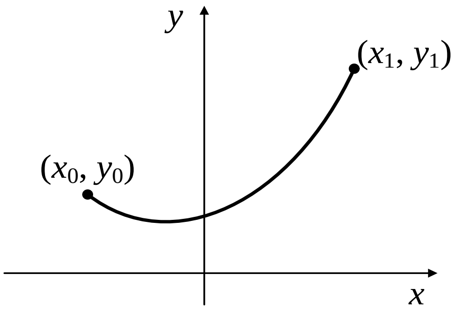

Рис. 11

Форма цепи в положении равновесия задается функцией $y(x)$. Согласно принципу механики система материальных точек в силовом потенциальном поле находится в равновесии тогда и только тогда, когда ее потенциальная энергия минимальна. Следовательно, задача сводится к нахождению формы цепи функции $y(x)$, обеспечивающей минимум потенциальной энергии.

Элемент дуги цепи имеет массу $dm = \rho ds = \rho \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Этот элемент, находясь в поле тяготения, обладает потенциальной энергией $dU = dmgh = \rho g y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Для всей цепи:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} dU = \int_{x_0}^{x_1} \rho g y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функции $y(x)$, для которой

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min$$

при граничных условиях $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ и дополнительном условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l\,. \tag{42}$$

Составляем вспомогательный функционал

$$V^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx\,.$$

Подынтегральная функция не зависит явно от x, поэтому уравнение Эйлера будет иметь вид:

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'(1+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C\,,$$

откуда $(y+\lambda) = C\sqrt{1+y'^2}$. Введем параметр $y' = sht$. Тогда

$$y = C\cdot \mathrm{ch}\, t - \lambda\,.$$

Продифференцируем полученное соотношение, получим:

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = C\,\mathrm{sh}\, t\,\frac{dt}{dx}\,, \text{ или } C\,\frac{dt}{dx} = 1$$

откуда $x'_t = C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$. Получили семейство экстремалей

$$y = C_1 ch\,\frac{x-C_2}{C_1} - \lambda\,.$$

Это уравнение *цепной линии*.

Для определения значений параметров λ, C_1, C_2 составим систему уравнений с учетом (42) и двух граничных условий:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+sh^2\frac{x-C_2}{C_1}}\,dx = C_1\left(sh\,\frac{x_1-C_2}{C_1} - sh\,\frac{x_0-C_2}{C_1}\right) = l, \\ C_1 ch\,\dfrac{x_0-C_2}{C_1} - \lambda = y_0, \\ C_1 ch\,\dfrac{x_1-C_2}{C_1} - \lambda = y_1. \end{cases}$$

5.2.3 Задача Дидоны

Вернемся к задаче Дидоны (стр. 4). Будем искать функцию γ в параметрической форме:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [0; a], \end{cases}$$

$$x(0) = x(a) = 0, y(0) = y(a) = 0.$$

Эта функция должна доставлять максимум интеграла $S = \frac{1}{2}\int_0^a (x\dot{y} - y\dot{x})dt$ при условии, что задана длина $l = \int_0^a \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$. Имеем изопериметрическую задачу.

Система уравнений Эйлера – Лагранжа будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \end{cases} \quad (43)$$

где $L = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{2} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Находим производные функции L и подставляем в систему уравнений (43):

$$\begin{cases} \frac{\dot{y}}{2} - \frac{d}{dt}\left[-\frac{y}{2} + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right] = 0, \\ -\frac{\dot{x}}{2} - \frac{d}{dt}\left[\frac{x}{2} + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right] = 0. \end{cases}$$

Находим первые интегралы системы:

$$\begin{cases} y - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1, \\ x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_2. \end{cases}$$

Выполнив элементарные преобразования и сложив уравнения системы, получим:

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \frac{\lambda^2\dot{x}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \frac{\lambda^2\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda^2.$$

Это уравнение окружности радиуса λ с центром в точке (C_2, C_1) . Радиус находим из изопериметрического условия: $\lambda = \frac{L}{2\pi}$. Из граничных условий получаем $C_2^{\,2} + C_1^{\,2} = \lambda^2$.

Таким образом, решение задачи – это семейство окружностей, проходящих через начало координат (центры окружностей лежат на окружности радиуса λ с центром в начале координат).

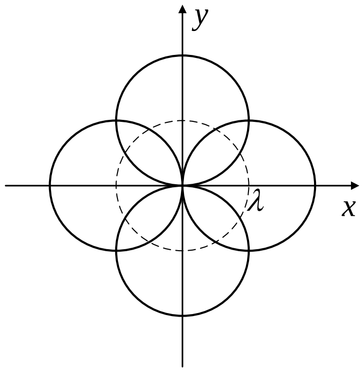

Рис. 12

6 Задания для самостоятельного решения.

Задание №1.

№ варианта	Установить, верно ли, что последовательность функций $f_n(x) \to 0$ относительно: а) метрики C^0, б) метрики C^1:
1	$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$ на $[0;2\pi]$
2	$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ на $[0;\pi]$
3	$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2+1}$ на $[0;2\pi]$
4	$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ на $[0;\pi]$
5	$f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ на $[0;1]$
6	$f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{n^2+1}$ на $[0;2\pi]$
7	$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ на $[0,\pi]$
8	$f_n(x) = \frac{\cos n^2 x}{n}$ на $[0;\pi]$
9	$f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ на $[0;\pi]$
10	$f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n^2+1}$ на $[0;2\pi]$
11	$f_n(x) = \frac{\cos x}{n}$ на $[0;\pi]$
12	$f_n(x) = \cos\frac{x}{n}$ на $[0;1]$
13	$f_n(x) = \frac{\cos^3 x}{n^2+1}$ на $[0;\pi]$
14	$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^2+1}$ на $[0;\pi]$
15	$f_n(x) = \frac{\sin x - \sin nx}{n}$ на $[0;2\pi]$
16	$f_n(x) = \frac{\sin x \sin nx}{n^2+1}$ на $[0;2\pi]$

	Найти расстояние ρ_0 между функциями на указанных интервалах
17	$f(x) = xe^{-x}, g(x) \equiv 0$ на $[0;2]$
18	$f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin x$ на $[0;\frac{\pi}{2}]$
19	$f(x) = x, g(x) = \ln x$ на $[e^{-1};e]$
	Найти расстояние ρ_1 между функциями на указанных интервалах:
20	$f(x) = \ln x, g(x) = x$ на интервале $[e^{-1};e]$

Задание №2.

Найти экстремали функционалов:

№ варианта	
1	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx$
2	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')dx$
3	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} y'(x + y')dx$
4	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}dx$
5	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)dx$
6	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x)dx$
7	$V(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)dx$
8	$V(y) = \int\limits_{0}^{1} (y^2 + \frac{1}{2}y'^2)e^x dx$
9	$V(y) = \int\limits_{0}^{1} (1 + x)y'^2 dx$
10	$V(y) = \int\limits_{1}^{e} (xy'^2 + yy')dx$

11	$V(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2-2xy)dx$
12	$V(y)=\int_{a}^{b}(2xy+(x^2+e^y)y')dx$
13	$V(y)=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+10y^2-2y\cos x)dx$
14	$V(y)=\int_{0}^{\pi}(y'^2+y+x)dx+3y(1),\ y(x)\in C^1[0,\pi]$
15	$V(y)=\int_{a}^{b}(10x^2y+y'(e^y+xy^2))dx$
16	$V(y)=\int_{x_0}^{x_1}(y\sin x+y'^2+y^2)dx$
17	$V(y)=\int_{a}^{b}(xy'^2+y')dx$
18	$V(y)=\int_{a}^{b}(y'+x^3y'^2)dx$
19	$V(y)=\int_{a}^{b}(y'+y'^2e^{2x}-2xy')dx$
20	$V(y)=\int_{a}^{b}(y'+y'^2\cos 2x-\sin 2x)dx$

Задание №3.

Найти экстремали в вариационных задачах:

№ варианта	
1	$V(y)=\int_{0}^{1}(y'^2+y^2+2xye^x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0$
2	$V(y)=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(y'^2-9y^2+2xye^{3x})dx,\ y(0)=-\frac{1}{54},\ y\left(\frac{1}{3}\right)=0$
3	$V(y)=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(y'^2-9y^2+4xy\sin x)dx,\ y(0)=-\frac{1}{16},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{48}$
4	$V(y)=\int_{0}^{\pi}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=0$

5	$V(y)=\int_0^1 (y'^2-y^2-y)e^{2x}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=e^{-1}$
6	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2-y^2-2y'\sin x)dx,\ y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$
7	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2+y^2-4xy\sin x)dx,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$
8	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2-y^2+8xy\cos x)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$
9	$V(y)=\int_0^1 (y'^2-y^2+2y)e^{-2x}dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$
10	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2-4y^2+2y\sin x)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$
11	$V(y)=\int_0^{\pi} (y'^2+y^2-2y'\cos x)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{4}$
12	$V(y)=\int_0^1 (y'^2+4y(x+1))e^{x}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$
13	$V(y)=\int_0^{\pi} (y'^2-y^2+4y\cos x)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=0$
14	$V(y)=\int_0^2 (y'^2+y^2-2y'e^{x})dx,\ y(0)=0,\ y(2)=e^2$
15	$V(y)=\int_0^1 (y'^2-y^2+2y\cos x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0$
16	$V(y)=\int_{-1}^1 (y'^2+4y^2-8xy+2x^2)dx,\ y(-1)=3,\ y(1)=1$
17	$V(y)=\int_{-1}^1 (y'^2-4y^2+2xy-x^2)dx,\ y(-1)=2,\ y(1)=4$
18	$V(y)=\int_{-1}^1 (y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x)dx,\ y(-1)=2,\ y(1)=\frac{1}{2}$
19	$V(y)=\int_0^2 (2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x)dx,\ y(0)=-1,\ y(2)=4$

20	$V(y)=\int_0^2 (2y'^2+2y^2+y\cos x-5x)dx,\ y(0)=2,\ y(2)=2$

Задание №4.

Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера:

№ варианта	
1	$V(y)=\int_1^e (xy'^2-2y')dx,\ y(1)=1,\ y(e)=2$
2	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$V(y)=\int_0^1 (x+y'^2)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=2$
4	$V(y)=\int_0^1 (y'^2+y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=1$
5	$V(y)=\int_0^1 (y'^2+4y^2)dx,\ y(0)=e^2,\ y(1)=1$
6	$V(y)=\int_0^1 (2e^y-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=e$
7	$V(y)=\int_0^1 (y'^2+12xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$
8	$V(y)=\int_1^2 (y'+x^2y'^2)dx,\ y(1)=1,\ y(2)=2$
9	$V(y)=\int_1^3 (12xy'+y'^2)dx,\ y(1)=0,\ y(3)=26$
10	$V(y)=\int_0^1 \frac{y'^2}{1+y^2}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\frac{3}{4}$
11	$V(y)=\int_0^7 (1+y)y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(7)=3$
12	$V(y)=\int_1^3 xy'(6+x^2y')dx,\ y(1)=5,\ y(3)=3$
13	$V(y)=\int_0^1 yy'^2dx,\ y(0)=1,\ y(1)=\sqrt[3]{4}$

14	$V(y)=\int_2^4(\sqrt{x^2-1}\,y'^2+y'-e^x)dx,\ y(2)=1,\ y(4)=-2$
15	$V(y)=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(\pi)=-1$
16	$V(y)=\int_1^3 y\sqrt{y'}dx,\ y(1)=2,\ y(3)=8$
17	$V(y)=\int_0^2(y'^5+5y)dx,\ y(0)=0,\ y(2)=2$
18	$V(y)=\int_1^2\frac{x^3}{y'^2}dx,\ y(1)=1,\ y(2)=4$
19	$V(y)=\int_0^2(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=-2$
20	$V(y)=\int_1^3(y'^2+2xy'\ln x-\ln x)dx,\ y(1)=-1,\ y(3)=2$

Задание №5.

Найти экстремали, если функционал зависит от производных высших порядков:

№ варианта	
1	$V(y)=\int_0^1(360x^2y-y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=2{,}5$
2	$V(y)=\int_0^1(y'^2+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=e-2,\ y'(1)=e-1$
3	$V(y)=\int_0^{\pi}(y^2-y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(\pi)=sh1,\ y'(\pi)=ch1$
4	$V(y)=\int_0^1 y''dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$
5	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2},\ y'(\frac{\pi}{2})=0$
6	$V(y)=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx,\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=e$
7	$V(y)=\int_0^1(y'^2+2y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=sh1,\ y'(1)=ch1$

8	$V(y)=\int_0^1 (y''^2-48y)dx,\ y(0)=1,\ y'(0)=-4,\ y(1)=0,\ y'(1)=0$
9	$V(y)=\int_0^1 (y^2+2y'^2+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=-sh\,1$
10	$V(y)=\int_0^1 (4y'^2+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0, y(1)=\frac{1}{4}(e^2-3),\ y'(1)=\frac{1}{2}(e^2-1)$
11	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y''^2+16y^2+xe^{-x})dx,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y(\frac{\pi}{4})=0,\ y'(\frac{\pi}{4})=-2$
12	$V(y)=\int_0^{\pi} (4y^2+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=sh\,\pi$
13	$V(y)=\int_0^1 (y'+y'')dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2$
14	$V(y)=\int_0^1 (y''^2+3yy')dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=2,\ y'(1)=5$
15	$V(y)=\int_{-1}^0 (40y+y''^2)dx,\ y(-1)=1,\ y'(-1)=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$
16	$V(y)=\int_0^1 (24xy-y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=0,\ y'(1)=\frac{1}{10}$
17	$V(y)=\int_0^1 (27ye^{-3x}+81y-\frac{1}{2}y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0,\ y'(0)=0,\ y'(1)=0$
18	$V(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (16y^2-y''^2+x^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=sh\,\pi,\ y'(0)=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=2(ch\,\pi+1)$
19	$V(y)=\int_0^1 (y''^2-4y'y''+y'^2+2y\sin x)dx,\ y(0)=2,\ y(1)=0,\ y'(0)=1,\ y'(1)=-1$
20	$V(y)=\int_0^1 (y''^2-y^2+ye^x)dx,\ y(0)=2,\ y(1)=0,\ y'(0)=1,\ y'(1)=-1$

Задание №6.

Найти экстремали, если функционал зависит от нескольких функций:

№ варианта	
1	$V(y,z)=\int_{\frac{1}{2}}^1 (y'^2-2xyz')dx,\ y(\frac{1}{2})=2,\ y(1)=1,\ z\left(\frac{1}{2}\right)=15,\ z(1)=1$

2	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2yz-y'^2-z'^2)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ z(0)=1,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
3	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2z+y'^2-4y^2-z'^2)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ z(0)=1,\ z\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$
4	$V(y,z)=\int_0^1(2y+y'^2+z'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\frac{3}{2},\ z(0)=1,\ z(1)=1$
5	$V(y,z)=\int_0^1(yz+y'z')dx,\ y(0)=0,\ y(1)=e,\ z(0)=1,\ z(1)=\frac{1}{e}$
6	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2yz+y'^2+z'^2)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ z(0)=0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
7	$V(y,z)=\int_1^2(y'^2+z^2+z'^2)dx,\ y(1)=1,\ y(2)=2,\ z(1)=0,\ z(2)=1$
8	$V(y,z)=\int_0^1(y'z'+6xy+12x^2z)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=0,\ z(1)=1$
9	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'z'-yz)dx,\ y(0)=z(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
10	$V(y,z)=\int_0^1(2y'z'-y^2+z^2-2ye^x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=0$
11	$V(y,z)=\int_{-2}^2(y^2+z^2-2y'z'+2ze^{-x})dx,\ y(-2)=0,\ y(2)=3,\ z(-2)=0,\ z(2)=1$
12	$V(y,z)=\int_0^1(2y'z'+y^2+z^2-z\sin x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=0$
13	$V(y,z)=\int_0^1(2y'z'+y^2-z^2+2z\cos x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=0$
14	$V(y,z)=\int_{-2}^2(2y'z'+y^2-z^2+2ye^x)dx,\ y(-2)=0,\ y(2)=3,\ z(-2)=2,\ z(2)=1$
15	$V(y,z)=\int_0^1(y^2+4yz+z^2+y'^2+z'^2+2ze^x)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=0$
16	$V(y,z)=\int_0^{\pi}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=1,\ z(0)=1,\ z(\pi)=-1$

17	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2-8yz)dx,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2,\ z(0)=3,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$
18	$V(y,z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+y\sin x+z\cos x)dx,\ y(0)=-1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ z(0)=1,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$
19	$V(y,z)=\int_0^2(2y'z'+y^2-z^2+2ze^x)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=-1,\ z(0)=-2,\ z(2)=1$
20	$V(y,z)=\int_0^2(2y'z'-y^2+z^2+2y\sin x)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=-1,\ z(0)=-2,\ z(2)=1$

Задание №7

Найти экстремали в задачах с изопериметрическим условием:

№ варианта	
1	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2+4y^2-8xy+2x^2)dx,\ y(-1)=3,\ y(1)=1$, $\int_{-1}^1 ydx=1$
2	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2-4y^2+2xy-x^2)dx,\ y(-1)=2,\ y(1)=4$, $\int_{-1}^1 ydx=1$
3	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x)dx,\ y(-1)=2,\ y(1)=0{,}5$, $\int_{-1}^1 ydx=0{,}5$
4	$V(y)=\int_0^2(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=2$, $\int_0^2 ydx=2$
5	$V(y)=\int_{-2}^0(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x})dx,\ y(-2)=0,\ y(0)=1$, $\int_{-2}^0 ydx=1$
6	$V(y)=\int_0^1(y'^2-9y^2+2y\sin x-x^2e^x)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=-1$, $\int_0^1 ydx=1$
7	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x)dx,\ y(-1)=1,\ y(1)=3$, $\int_{-1}^1 ydx=3$
8	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x)dx,\ y(-1)=1,\ y(1)=3$, $\int_{-1}^1 ydx=3$
9	$V(y)=\int_{-1}^1(y'^2+4y^2+8ye^{2x}+3x^2)dx,\ y(-1)=1,\ y(1)=3$, $\int_{-1}^1 ydx=2$
10	$V(y)=\int_0^2(2y'^2+2y^2+y\cos x-5x)dx,\ y(0)=2,\ y(2)=2$, $\int_0^2 ydx=2$

11	$V(y)=\int_0^2(2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x)dx,\ y(0)=-1,\ y(2)=4,\ \int_0^2 ydx=6$
12	$V(y)=\int_0^2(2y'^2-2y^2+y\cos x+xe^{2x})dx,\ y(0)=1,\ y(2)=2,\ \int_0^2 ydx=4$
13	$V(y)=\int_{-1}^1(2y'^2+2y^2+ye^x+4xe^{2x})dx,\ y(-1)=1,\ y(1)=2,\ \int_{-1}^1 ydx=1$
14	$V(y)=\int_{-1}^1(2y'^2+2y^2+ye^{2x}+4\sin x)dx,\ y(-1)=4,\ y(1)=3,\ \int_{-1}^1 ydx=6$
15	$V(y)=\int_0^2(2y'^2+4y^2-8y\cos x+4x^2)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=3,\ \int_0^2(\sin x+y)dx=5$
16	$V(y)=\int_2^4(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2)dx,\ y(2)=1,\ y(4)=4\ \int_2^4(x^2+y)dx=8$
17	$V(y)=\int_{-1}^0(y'^2-9y^2+4y\sin 3x+5x^2)dx,\ y(-1)=2,\ y(0)=0,\ \int_{-1}^0(y+y')dx=3$
18	$V(y)=\int_2^4(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2)dx,\ y(2)=2,\ y(4)=3,\ \int_2^4(x+y+y')dx=8$
19	$V(y)=\int_0^3(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x)dx,\ y(0)=2,\ y(3)=4,$ $\int_0^3(\sin x+y+y')dx=8$
20	$V(y)=\int_0^1(y'^2-9y^2+6y\sin 3x+5x^2)dx,\ y(0)=3,\ y(1)=1,$ $\int_0^1(\sin x+y+y')dx=10$

Задание №8

Найти экстремали в задачах на условный экстремум:

№ варианта	
1	$V(y_1,y_2)=\int_0^1(y_1^2+y_2^2+2y_1'y_2')dx,\ y_1(0)=1,\ y_1(1)=\frac{e+e^{-1}}{2},\ y_2(0)=1,\ y_2(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}$ уравнение связи $y_1'+y_2'-4x=0$
2	$V(y_1,y_2)=\int_0^\pi(y_1'^2-y_2'^2)dx,\ y_1(0)=-1,\ y_1(\pi)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(\pi)=-\pi$ уравнение связи $y_1'-y_2-2\sin x=0$

3	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_2^2)dx,\ y_1(0) = -4,\ y_1(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2},\ y_2(0) = 0,\ y_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ уравнение связи $y_1 + y_2 + 4\cos x = 0$
4	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + 2y_2'^2 + y_2^2)dx,\ y_1(0) = 1,\ y_1(1) = 2e,\ y_2(0) = 0,\ y_2(1) = e$ уравнение связи $y_1 + y_2 + 4\cos x = 0$
5	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 - 2y_2'^2 + y_2^2)dx,\ y_1(0) = 0,\ y_1(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ уравнение связи $y_1 - y_2' = 0$
6	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 1,\ y_1(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y_2(0) = -1,\ y_2(\frac{\pi}{2}) = 1$ уравнение связи $y_1 - y_2 - 2\cos x = 0$
7	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 2,\ y_1(1) = 2\,ch\,1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(1) = 2\,sh\,1$ уравнение связи $y_1' - y_2 = 0$
8	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1^2 + 2y_1'^2 + 2y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 1,\ y_1(1) = e + e^{-1},\ y_2(0) = 0,\ y_2(1) = 2e + e^{-1}$ уравнение связи $y_1' - y_2 = 0$
9	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = -1,\ y_1(1) = -1,\ y_2(0) = 0,\ y_2(1) = 1$, уравнение связи $y_1 + y_2 - 2x^2 + x + 1 = 0$
10	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1)dx,\ y_1(0) = 0,\ y_1(1) = 2,\ y_2(0) = 0,\ y_2(1) = 0$ уравнение связи $y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$
11	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} (y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}$ уравнение связи $y_1' - y_2 - x\cos x = 0$
12	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2)dx,\ y_1(0) = 1,\ y_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 1,\ y_2(0) = -1,\ y_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - 1$ уравнение связи $y_1' + y_2' - 4x = 0$

13	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + 2y_2 y_2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 1, y_1(1) = e, y_2(0) = 1, y_2(1) = e^{-1}$ уравнение связи $y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$
14	$V(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 - y_2'^2)dx,\ y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}, y_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ уравнение связи $y_1' - y_2 - \sin x = 0$
15	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(0) = 1, y_2(1) = 0$, уравнение связи $y_1' - y_2 = 0$
16	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2})dx,\ y_1(0) = 1, y_1(1) = 2, y_2(0) = 2, y_2(1) = 1$ уравнение связи $2y_1 - y_2 - 3x = 0$
17	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1^2 + 2y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 1, y_1(1) = e + e^{-1}, y_2(0) = 0, y_2(1) = 2e - e^{-1}$ уравнение связи $y_1' - y_2 = 0$
18	$V(y_1, y_2) = \int_1^2 (\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2})dx,\ y_1(1) = -1, y_1(2) = 1, y_2(1) = 0, y_2(2) = -1$ уравнение связи $15x - 7y_1 + y_2 - 22 = 0$
19	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2})dx,\ y_1(0) = -1, y_1(1) = 0, y_2(0) = 1, y_2(1) = -1$ уравнение связи $x + y_1 + y_2 = 0$
20	$V(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx,\ y_1(0) = 0, y_1(1) = 2sh1, y_2(0) = 2, y_2(1) = 2ch1$ уравнение связи $y_1' - y_2 = 0$

7 Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. / Вариационное исчисление: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л.С. Эльсгольц. – М.: URSS, 2008. – 205 с.
2. Цлаф, Л.Я. / Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство / Л.Я. Цлаф. – 3-е изд., стереотипное. – СПб.: Лань, 2005. – 192 с.
3. Краснов М.Л. / Вариационное исчисление: задачи и упражнения: учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 190 с.
4. Краснов М.Л. / Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 166 с.
5. Васильева А.Б./ Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах/ А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
6. Пантелеев, А.В. / Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие/ А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 2-е изд., исправленное. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
7. Пантелеев, А.В. / Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М: Изд-во МАИ. 2000 -228 с.
8. Эльсгольц Л.Э. / Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физ. спец. ун-тов / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
9. Андреева, Е.А. / Вариационное исчисление и методы оптимизации: учебное пособие для университетов / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – М.: Высшая школа, 2006. – 583 с.