

Simulation d'un réseau de neurones
biologiques en présence de substances
psychoactives
(Partie théorique)

ARE DYNAMIC 2018 - L1 UPMC

Sommaire

I	Etude biologique d'un neurone	3
0.1	Caractéristiques d'un neurone biologique	4
0.2	Fonctionnement d'un neurone	5
0.3	Action des substances psychoactives	6
II	Comparaison de la modélisation mathématique d'un réseau neuronal avec un réseau biologique	8
0.4	Modélisation mathématique actuelle des réseaux de neurones	9
0.4.1	Modélisation d'un unique neurone	9
0.4.2	Modélisation de plusieurs neurones	11
0.5	Le temps dans les simulations	11
0.6	Différences avec le modèle biologique	12
III	Modélisations d'un réseau neuronal biologique	13
0.7	Modélisation simplifiée	15
0.7.1	Présentation :	15
0.7.2	Fonctionnement algorithmique	16
0.7.3	Exemple	16
0.8	Modélisation tenant compte du temps de décroissance du potentiel	19
0.8.1	Défaut de la modélisation 0.7	19
0.8.2	Présentation	19
0.8.3	Fonctionnement algorithmique	21
0.8.4	Exemple	21
0.8.5	Remarque sur la simulation synchrone	23
0.9	Modélisation tenant compte du poids des connexions	24
0.9.1	Défaut des modélisations 0.7 et 0.8	24
0.9.2	Présentation	24
0.10	Modélisation tenant compte des potentiels excitateurs et inhibiteurs	25
0.10.1	Autre défaut de la modélisation 0.7	25
0.10.2	Présentation	26
0.11	Modélisation tenant compte de la plasticité synaptique	26
0.11.1	Défaut des modélisations précédentes	26
0.11.2	Plasticité à court terme	26
0.11.3	Présentation	28
0.11.4	Fonctionnement algorithmique	30
0.11.5	Exemple	30
IV	Résultats exploitables	32
0.12	Tracé de l'activité électrique neurone par neurone	33
0.13	Tracé de l'activité du réseau	33

V	Utilisation de la matrice C, matrice des relations du réseau neuronal	34
0.14	Initialisation de la matrice C	35
0.15	Représentation graphique des modélisations	35

Partie I

Etude biologique d'un neurone

0.1 Caractéristiques d'un neurone biologique

Les neurones ([5] et [7]) ont pour rôle de faire circuler les informations entre l'environnement et l'organisme, ou au sein de l'organisme. Ils permettent la communication et la transmission de l'information entre les différentes parties de l'organisme.

Un neurone est une cellule constituée :

- d'un corps cellulaire
- d'un noyau, contenu dans le corps cellulaire
- de dendrites
- d'un axone

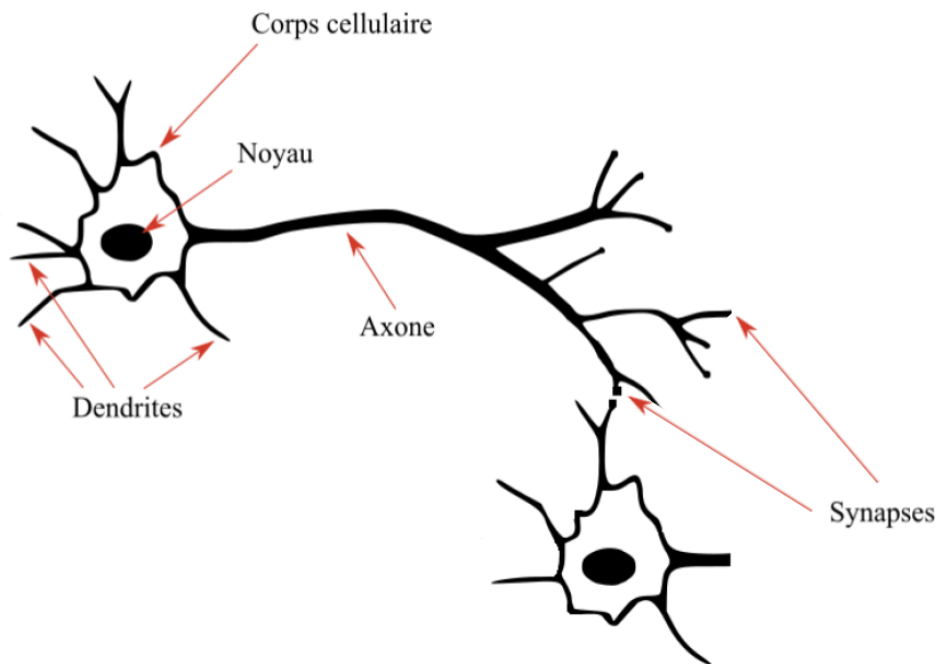


Figure 1: Structure d'un neurone biologique

Les dendrites sont des ramifications permettant à la cellule nerveuse de recevoir les informations, sous forme chimique, de la part des autres neurones ; elles peuvent être assimilées à des antennes. Les dendrites sont uniquement affectées à la réception de messages chimiques (d'informations) et non à leurs émissions.

L'axone est la partie du neurone permettant l'émission d'un message sous forme électrique. Le courant électrique y circule, en outre, grâce à la présence d'ion sodium Na^+ . L'axone se scinde en nombreuses ramifications en direction de différents neurones permettant alors le passage d'une information d'un neurone à plusieurs autres neurones. Cette information conduite électriquement par l'axone est alors reçue chimiquement par les dendrites des autres neurones. Cette conversion d'un message électrique en un message chimique est assurée par les synapses.

Ainsi, les relations entre neurones sont asymétriques en général (un neurone peut envoyer une information à un autre neurone, sans que celui-ci puisse en faire de même).

Les synapses permettent donc la conversion d'un signal électrique en un signal chimique. Dans les faits, des canaux calciques présents sur la membrane de l'axone permettent la libération d'ion calcium Ca^{2+} lorsqu'un courant électrique les active. Dès lors, lorsque le neurone s'active, c'est-à-dire qu'il émet un courant électrique aussi appelé potentiel d'action, il active ces canaux libérant brutalement une dose massive d'ion Ca^{2+} dans le synapse.

A l'intérieur de la synapse se trouvent les vésicules présynaptiques contenant les neurorécepteurs (les molécules chimiques permettant la transmission du signal aux autres neurones). Ces vésicules ne peuvent pas traverser la membrane plasmique de la synapse; ils restent donc à l'intérieur de la synapse. Toutefois, la présence d'ions Ca^{2+} permet la fusion des membranes des vésicules avec la membrane plasmique entraînant alors le déversement du contenu des membranes (les neurorécepteurs) en dehors du synapse.

Remarquons que la différence de potentiel entre la forte présence d'ion Ca^{2+} à l'extérieur de la membrane de l'axone et sa faible présence à l'intérieur entraîne une grande force électromotrice poussant les ions Ca^{2+} à se déplacer vers la synapse.

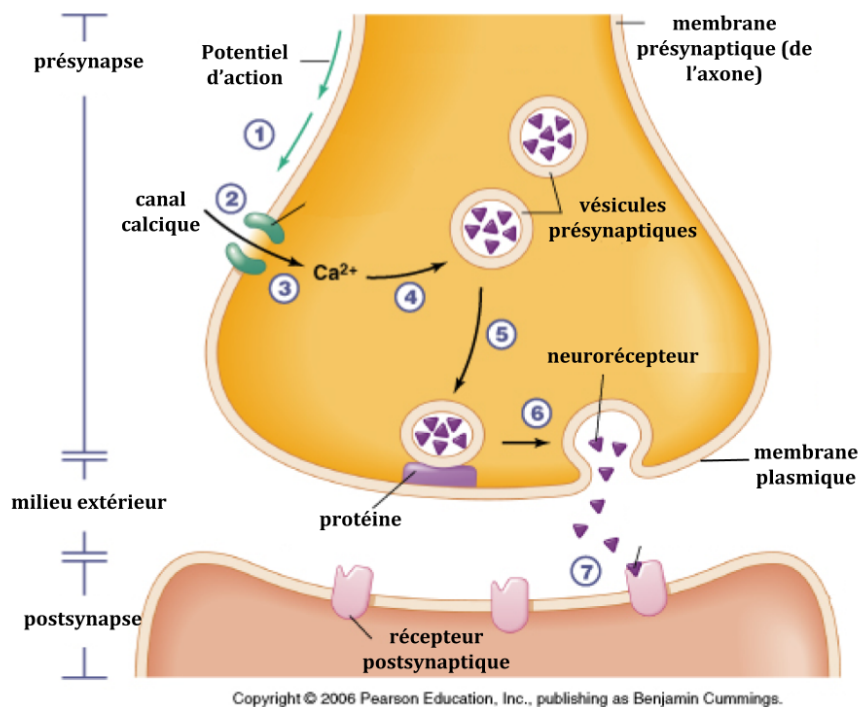


Figure 2: Fonctionnement d'une synapse

0.2 Fonctionnement d'un neurone

- Lorsqu'une dendrite perçoit un ou plusieurs neurorécepteurs, elle va procéder à une conversion, cette fois ci, chimique-électrique. Dès lors, chaque dendrite d'un neurone va avoir un potentiel différents (selon qu'elle a été fortement sollicitée ou non ; qu'elle a perçu un plus ou moins grand nombre de neurorécepteurs). Le neurone en lui-même va procéder à une somme, en sommant à chaque instant le potentiel associé aux dendrites.
- Si le potentiel total est supérieur ou égal à un certain seuil, appelé seuil critique de dépolarisation, alors le neurone va émettre un signal électrique, un potentiel d'action, transmis aux autres neurones par l'intermédiaire de l'axone. En d'autres termes, par cette action, le neurone va libérer son potentiel, se décharger, se dépolariser.

En fait, le neurone procède à une sommation spatiale et temporelle. Spatiale car la somme prend en compte, par l'intermédiaire de ses dendrites, le potentiel des autres neurones dans l'espace et temporelle car une fois le neurone dépolarisé, son potentiel ne chute pas immédiatement à sa valeur au repos. Après une dépolarisation, il s'en suit une lente décroissance (de l'ordre de quelques

millisecondes) du potentiel. Alors, si un potentiel d'une dendrite n'aurait pas suffi à enclencher seul la dépolarisation du neurone, il se peut qu'après une dépolarisation le potentiel total soit encore assez élevé pour permettre de franchir le seuil critique, produisant alors une seconde dépolarisation.

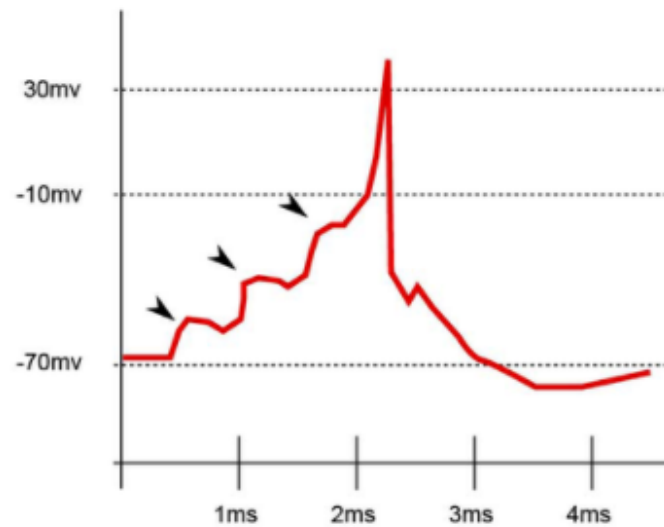


Figure 3: Courbe de l'activité électrique d'un neurone au cours du temps

La figure 3 présente l'évolution du potentiel total d'un neurone au cours du temps. Chaque flèche noire représente la réception d'un nouveau signal de la part d'une dendrite. On constate donc qu'un seul signal ne peut pas franchir seul le seuil critique, mais qu'il faut la réception très peu espacé dans le temps de 3 signaux pour le franchir.

Notons également qu'après une dépolarisation le neurone devient inefficace pour la réception de messages pendant une période de 1 milliseconde. En effet, après une dépolarisation, le neurone ne prendra pas en compte le potentiel de ses entrées (le potentiel des dendrites) pendant 1 ms. Il s'en suit que nous utiliserons ce temps comme pas de temps de simulation.

A présent, nous devons comprendre qu'un même neurorécepteur peut avoir deux effets très distincts. Cela est dû à l'existence de deux types de récepteurs postsynaptiques.

- Certains vont, après avoir été activé par des neurorécepteurs, abaisser le potentiel du neurone. En d'autres termes, il va y avoir une diminution de l'excitabilité de la cellule (on parle de potentiel postsynaptique inhibiteur).
- D'autres vont induire une augmentation du potentiel (on parle de potentiel postsynaptique exciteur).

Ainsi, les potentiel pris en compte dans la sommation effectué par le neurone de la figure 3 étaient des potentiels postsynaptiques exciteurs.

0.3 Action des substances psychoactives

Les substances psychoactives telles la drogue ou l'alcool ont deux effets notables. Ils vont se lier aux récepteurs postsynaptiques

- soit sans entraîner d'effet (les récepteurs touchés ne sont alors plus sensibles à la réception de neurorécepteurs)
- soit ils vont entrainer une hyperactivité des récepteurs en simulant la réception quasi-continue de neurorécepteurs

Notons qu'une fois ingéré, l'alcool se transmet dans le sang répartissant alors de manière quasi-uniforme sa présence dans l'organisme. Ainsi, nous n'aurons pas besoin de prendre en compte le

phénomène de diffusion de l'alcool dans l'organisme. Nous considérerons qu'une fois introduit dans l'organisme, chaque neurone est affecté de la même manière. Seule la concentration de l'alcool sera donc prise en compte.

Partie II

Comparaison de la modélisation mathématique d'un réseau neuronal avec un réseau biologique

0.4 Modélisation mathématique actuelle des réseaux de neurones

Actuellement [3], le modèle mathématique des réseaux de neurones, principalement utilisés pour le Deep Learning, s'inspirent du fonctionnement de neurones biologiques. Mais ces modèles présentent une grande disparité avec le fonctionnement biologique. Pour autant, l'étude de ces réseaux artificiels permet de s'approprier une base mathématique utile pour la suite.

0.4.1 Modélisation d'un unique neurone

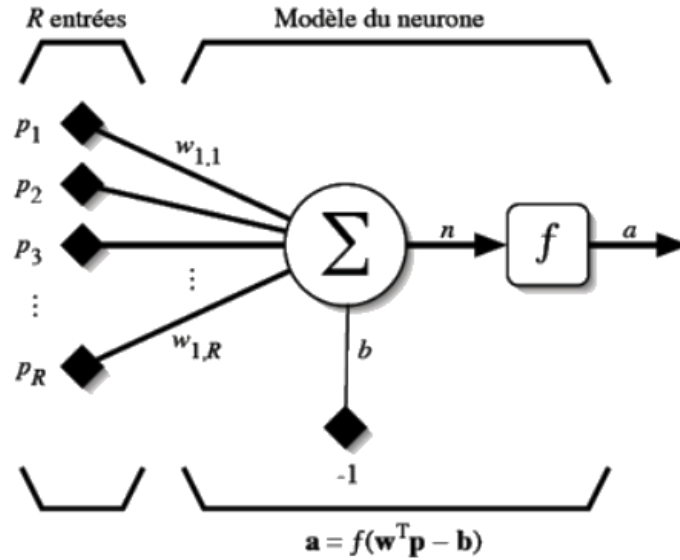


Figure 4: Fonctionnement d'un réseau de neurones artificiel

On modélise [8] alors un neurone par :

- R entrées chacune ayant une valeur $p_i, i \in \llbracket 1; R \rrbracket$. Ces entrées correspondent donc aux dendrites d'un neurone biologique. Ces valeurs sont initialisées aléatoirement.
- R "poids" associés aux différentes connexions. Ces poids représentent biologiquement la qualité de la connexion entre deux neurones, c'est-à-dire la relation plus ou moins forte qu'ont deux neurones. Biologiquement la qualité d'une connexion entre deux neurones est d'autant meilleur que plusieurs dendrites sont affectés au même neurone ou que plusieurs ramifications de l'axone sont en direction du même neurone.
- Une fois les valeurs et les poids attribués on somme à un instant t la valeur de toutes les entrées affectées de leurs poids. On réalise donc l'opération :

$$\sum_{i=1}^R (p_i * w_{1,i})$$

- on rajoute également un coefficient b , appelé biais du neurone, et correspondant à un facteur correctif (fixé à tâtons).
- Une fois la somme effectuée, on applique au résultat une fonction activatrice permettant de reproduire le processus de dépolarisation d'un neurone biologique vu sur la figure 3

Ce modèle mathématique se prête bien au calcul matriciel. Ainsi, on peut résumer le fonctionnement d'un neurone artificiel de la manière suivante :

On pose :

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{1,R} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_R \end{bmatrix}$$

Dès lors, si on appelle a la sortie du neurone, on obtient :

$$a = f(W^T * P - b)$$

où f est la fonction activatrice pouvant être une de celles de la figure 5

Nom de la fonction	Relation d'entrée/sortie	Icône
seuil	$a = 0 \quad \text{si } n < 0$ $a = 1 \quad \text{si } n \geq 0$	
seuil symétrique	$a = -1 \quad \text{si } n < 0$ $a = 1 \quad \text{si } n \geq 0$	
linéaire	$a = n$	
linéaire saturée	$a = 0 \quad \text{si } n < 0$ $a = n \quad \text{si } 0 \leq n \leq 1$ $a = 1 \quad \text{si } n > 1$	
linéaire saturée symétrique	$a = -1 \quad \text{si } n < -1$ $a = n \quad \text{si } -1 \leq n \leq 1$ $a = 1 \quad \text{si } n > 1$	
linéaire positive	$a = 0 \quad \text{si } n < 0$ $a = n \quad \text{si } n \geq 0$	
sigmoïde	$a = \frac{1}{1+\exp^{-n}}$	
tangente hyperbolique	$a = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$	
compétitive	$a = 1 \quad \text{si } n \text{ maximum}$ $a = 0 \quad \text{autrement}$	

Figure 5: Tableau des fonctions activatrices (ou fonctions de transferts) possibles

0.4.2 Modélisation de plusieurs neurones

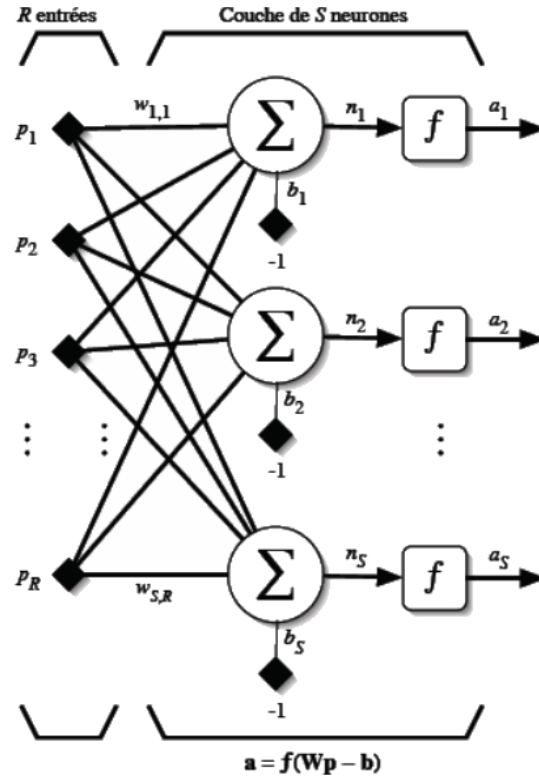


Figure 6: Association de plusieurs neurones artificiel

Comme le montre la figure 6, l'association de plusieurs neurones se fait en connectant les R entrées à tous les neurones (à toutes les fonctions somme). Ces R neurones forment alors une couche de neurone.

Dès lors, on modifie légèrement nos matrices. On pose désormais W telle que :

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{2,1} & \dots & w_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{1,R} & w_{2,R} & \dots & w_{n,R} \end{bmatrix}$$

où n est le nombre de couches constituées d'au plus R neurones.

Ainsi, chaque colonne de la matrice correspondant à une couche de neurone.

0.5 Le temps dans les simulations

Il existe dans grand types de simulations :

- Les simulations synchrones où l'état de chaque neurone d'une même couche est mis à jour en même temps
- Les simulations asynchrones où seul les états des neurones ayant été sollicité par d'autres sont mis à jour.

Une première idée est de simuler à chaque étape uniquement les neurones connectés à d'autres ayant déchargé à l'étape ultérieure. Ce type de simulation est valable pour un réseau où chaque neurone peut recevoir des stimulations que d'un seul autre neurone. Or pour les réseaux plus complexes, chaque neurone peut recevoir des stimuli de plusieurs autres neurones. Ce faisant, lorsque la sortie d'un neurone est calculée, car un neurone relie à lui en transmission à déchargé, elle est calculée avec une seule de ses entrées actualisée (les autres ayant été calculé plusieurs

étapes avant). En effet, si on calcule la sortie du neurone i à l'instant t cela signifie qu'une de ses entrées vient d'être (re)calculée au temps $t-1$ et que le résultat a permis une stimulation. Or au temps $t-1$ ce neurone n'est pas le seul connecté au neurone i , mais leurs sorties (correspondant aux entrées du neurone i) n'est pas (re)calculées. Ainsi, il faudrait (re)calculer la sortie de chaque neurone connecté au neurone i , mais la problématique est la même pour les entrées des neurones reliés en transmission au neurone i .

Ainsi, à chaque étape de la simulation la sortie de tous les neurones doit être calculée. Nous optons donc pour une modélisation synchrone.

0.6 Différences avec le modèle biologique

- Premièrement, les valeurs des entrées $p_i, i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ peuvent prendre n'importe quelle valeur à tout instant (soit toutes positives, soit toutes négatives, soit un mixte des deux). Or nous avons vu que le modèle biologique possède deux types d'entrées (l'une excitatrice, l'autre inhibitrice). Nous devons donc, dans notre modèle mathématique prendre en compte ces deux types d'entrées.
- Ensuite, ce modèle mathématique ne prend pas en compte la "mémoire du neurone", c'est-à-dire la sommation temporelle que fait un neurone (il ne prend pas en compte le potentiel du neurone à l'étape ultérieure lors de la sommation).
- Nous nous passerons, de plus, du facteur d'incertitude (le coefficient b)

Partie III

Modélisations d'un réseau neuronal biologique

Rappelons ici les points importants de notre simulation :

- Le pas de temps de la simulation est de 1 milliseconde (le temps durant lequel le neurone est inefficace à la réception de messages après une décharge)
- La simulation sera synchrone
- Le potentiel de chaque neurone à l'étape ultérieure est pris en compte à l'étape suivante
- La fonction activatrice utilisée sera une fonction seuil dont la valeur supérieur au seuil sera de +60mV (ce qui correspond à la valeur des potentiels d'actions ramener à des valeurs positives) car tous les potentiel d'action ont la même intensité maximale (le neurone fonctionne comme un capteur tout ou rien, les informations ne sont donc pas distribuée au travers de l'intensité mais grâce à la modulation de fréquence, le nombre d'impulsions envoyées dans le temps).

Pour la suite, on considère une **réseau récurrent** (contenant une boucle : plusieurs neurones d'une même couche sont connectés ensemble) **à une couche de R neurones**. Autrement dit, on ne considère pas les neurones organisés en différentes couches (ce indispensable pour une modélisation asynchrone comme la nôtre).

on pose :

- $V_i(t)$ le potentiel du neurone i à l'instant t de la simulation

•

$$V_t = \begin{bmatrix} V_1(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & V_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & V_R(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

•

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{R,1} \\ c_{1,2} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & c_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & c_{R,R-1} \\ c_{1,R} & c_{2,R} & \dots & c_{R-1,R} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

$$\text{où } \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, R \rrbracket, c_{i,i} = 1 \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, R \rrbracket^2, i \neq j, c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le neurone } i \text{ peut transmettre un signal au neurone } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

La i-ème colonne de la matrice C permet de savoir avec quels neurones le neurone i peut envoyer des informations et la i-ème ligne permet de savoir de quels neurones le neurone i peut recevoir des informations.

D'après la construction de la matrice on constate que le neurone i est connecté avec lui-même, ce qui est aberrant. En fait fixer $c_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ permet de prendre en compte le potentiel du neurone du temps t au temps t+1.

- $L_{C,i}$ la i-ème ligne de la matrice C

•

$$T_t = \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ t_{2,1} \\ \vdots \\ t_{R,1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{R,1}(\mathbb{R})$$

Cette matrice permet de prendre en compte la décroissance du potentiel. Nous verrons dans la suite comment est initialisée cette matrice

•

$$N_i = \begin{bmatrix} \delta i, 1 \\ \delta i, 2 \\ \vdots \\ \delta i, R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{R,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{où : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, R \rrbracket^2, \delta i, j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

0.7 Modélisation simplifiée

0.7.1 Présentation :

Une première modélisation [4] est celle où le fonctionnement des neurones est binaire, c'est-à-dire lorsque le neurone a été dépolarisé à l'étape ultérieure (au temps t) alors son potentiel $V_i(t)$ vaut 0 à l'étape suivante (au temps $t+1$).

On modélise également de manière très simple la décroissance du potentiel après une dépolarisation par un coefficient k (biologiquement $k \in [0.9, 0.95]$). Ainsi :

$$V_i(t+1) = f(k(1 - d_i(t))V_i(t) + \sum_{k \in P_i} (d_k(t) * V_k(t))) \quad (1)$$

où :

- $d_i = \begin{cases} 1 & \text{si le neurone } i \text{ a déchargé à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- f la fonction activatrice choisie
- $P_i = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ l'ensemble des indices des neurones connectés au neurone i

On adapte ce modèle sous forme matricielle. On obtient alors :

$$T_t = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_R(t) \end{bmatrix}$$

Si le neurone i a déchargé au temps t alors $t i, 1 = k$, sinon $t i, 1 = 0$. Ce qui signifie qu'au temps $t+1$ on prendra en compte (si $t i, 1 = k$) ou non (si $t i, 1 = 0$) le potentiel du neurone du temps t . Autrement dit, la matrice T_t permet de connaître l'activité des neurones à l'étape ultérieure (lesquels sont actifs, ont déchargés, et lesquels ne le sont pas).

Finalement on obtient la formule suivante :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, R \rrbracket, V_i(t+1) = f(L_{C,i} * (V_t * (T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i)))} \quad (2)$$

Explications : Dans l'équation 2 la partie $(-1)^{t_{i,1}} * N_i$ traduit la partie $(1 - d_i(t))$ de la formule 1. Tandis que la partie T_t traduit la partie d_k pour $k \in P$. En fait $V_t * T_t$ (équation 2) est équivalent à $\sum_{k \in P} (d_k * V_k(t))$ (équation 1). Mais lorsque que le neurone considéré i n'a pas déchargé alors $t_{i,1} = 0$,

on obtiendrait donc la somme suivante : $\sum_{k=1, k \neq i}^R (d_k * V_k(t)) + 0 * V_i(t)$.

Ce qui ne correspond pas à l'équation 1 où on prend en compte le potentiel du neurone i des étapes précédentes s'il n'a pas déjà déchargé. Dans ce cas, sommer T_t et $(-1)^{t_{i,1}} * N_i$ avant d'effectuer la multiplication par $V_i(t)$ permet de s'assurer que :

- si le neurone i a déchargé, alors $(-1)^{t_{i,1}} = -1$ puis $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$ permet d'avoir $[T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i]_{i,1} = 0$, c'est-à-dire avoir $0 * V_i(t)$ dans la somme des potentiels.
- si le neurone i n'a pas déchargé, alors $(-1)^{t_{i,1}} = 0$ puis $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$ permet d'avoir $[T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i]_{i,1} = 1$, c'est-à-dire avoir $1 * V_i(t)$ dans la somme des potentiels (la multiplication par k est faite ultérieurement).

Pour des explications plus concrètes, voir l'exemple réalisé ci-dessous.

0.7.2 Fonctionnement algorithmique

- (1) : Initialiser la matrice C de manière aléatoire telle que les éléments de la diagonale soient égaux à k
- (2) : Initialiser la matrice V_0
- (3) : Initialiser à 0 toutes les valeurs de T_0
- (4) : Calculer la sortie des R neurones du réseau.
On pose $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ les neurones dont la sortie est supérieure au seuil
- (5) : Remplacer pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ $t_{i,1}$ par $\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- (6) : Mettre à jour la valeur du potentiel des R neurones du réseau
- (7) : Recommencer à l'étape (4)

0.7.3 Exemple

On considère le réseau de neurones représenté sur la figure 7

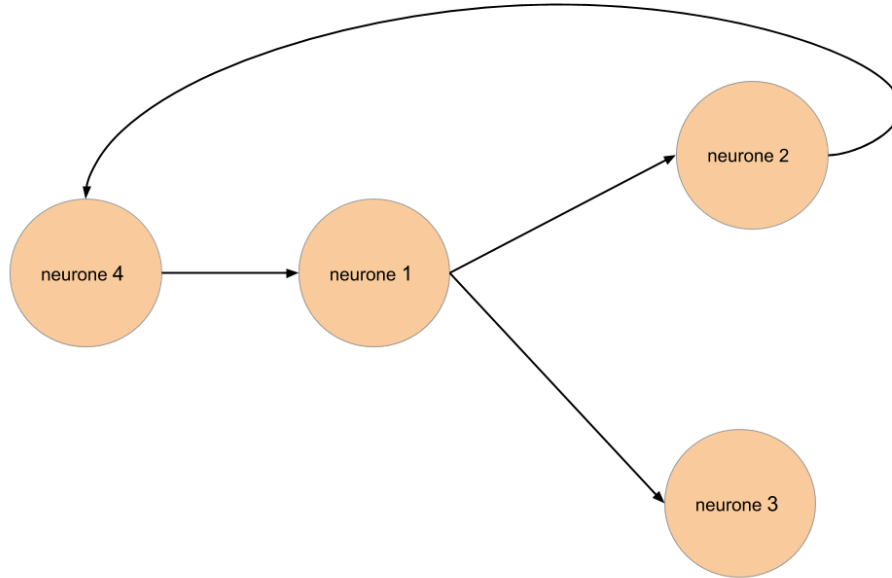


Figure 7: exemple de fonctionnement de la modélisation

Supposons que les neurones 3 et 4 ont déchargés à l'étape $t=0$.
On doit maintenant calculer la sortie de tous les neurones du réseau. Commençons par le neurone 1. Selon l'équation 1, on doit obtenir (on considérant, pour simplifier, que la fonction activatrice est $f : x \mapsto x$) :

- $d_1(0) = 0$ car le neurone 1 n'a pas été dépolarisé à au temps $t=0$
- $d_4(0) = 1$ car le neurone a été dépolarisé, par hypothèse, au temps $t=0$

D'où :

$$V_1(t = 1) = k(1 - 0)V_1(0) + 1 * V_4(0) \quad (3)$$

Retrouvons ce résultat à l'aide de l'équation matricielle 2.

Tout d'abord on définit nos matrices :

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_3(0) \\ d_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selon la formule 3, le potentiel du neurone 1 au temps $t=0$ est pris en compte dans la calcul au temps $t=1$; car le neurone 1 n'a pas encore déchargé. Cette opération est assurée dans le calcul matricielle (équation 2) à l'aide de la matrice N_i intervenant dans $T_t + (-1)^{t_{i,1}} * N_i$. Illustrons ci-dessous son utilité.

Supposons que nous n'ayons pas introduit la matrice N_i dans l'équation 2. On obtiendrait alors la formule suivante :

$$V_1(1) = L_{C,1} * (V_0 * T_0)$$

Autrement dit,

$$V_1(t = 1) = [k \quad 0 \quad 0 \quad 1] * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t = 1) = [k \quad 0 \quad 0 \quad 1] * \begin{bmatrix} 0 * V_1(0) \\ 0 * V_2(0) \\ 1 * V_3(0) \\ 1 * V_4(0) \end{bmatrix}$$

$$V_1(t = 1) = k * 0 * V_1(0) + 0 * 0 * V_2(0) + 0 * 1 * V_3(0) + 1 * 1 * V_4(0)$$

$$V_1(t = 1) = V_4(0)$$

Ce qui n'est pas correcte puisque le potentiel de $V_1(t = 0)$, n'est pas pris en considération dans $V_1(t = 1)$

Désormais, observons le résultat en introduisant la matrice N_i . Calculons, dans un premier temps $T_0 + (-1)^{t_{1,1}} * N_1$:

$$T_0 + (-1)^{t_{1,1}} * N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^0 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On constate ici que l'intervention de N_1 dans le calcul permet d'avoir $t_{1,1} = 1$ et non $t_{1,1} = 0$ comme vu précédemment. Ce changement permet, comme nous allons le voir, de prendre en compte le potentiel $V_1(0)$ dans le calcul de $V_1(t = 1)$. En fait, nous sommes obligé d'introduire N_1 car nous ne pouvons changer directement la valeur de T_0 , sans quoi les futurs résultats des sorties de tous les autres neurones seraient affectés (car $t_{1,1} = 1$ signifie que le neurone 1 a déjà déchargé, ce qui n'est pas le cas ici). Dès lors, N_1 permet d'altérer temporairement et localement le résultat de $V_1(t = 1)$, sans affecter l'ensemble du réseau.

On se retrouve donc avec :

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) * 1 \\ V_2(0) * 0 \\ V_3(0) * 1 \\ V_4(0) * 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=1) = 1 * k * V_1(0) + 0 * 0 * V_2(0) + 0 * 1 * V_3(0) + 1 * 1 * V_4(0)$$

$$V_1(t=1) = k * V_1(0) + V_4(0)$$

Ce qui est bien le résultat trouvé à l'aide de la formule 1.

Avant de poursuivre les calculs, il nous faut remplacer $V_1(t=0)$ par $V_1(t=1)$ dans la matrice V_1

Une fois la sortie du neurone 1 calculée, il y a deux possibilités :

- Si $V_1(t=1)$ est supérieur au seuil alors $t_{1,1} = 1$
- Sinon $t_{1,1} = 0$

On refait ensuite les mêmes calculs pour tous les autres neurones :

$$V_2(t=1) = 0 * V_2(0) + 0 * V_1(0) + 0 * V_3(0) + 0 * V_4(0)$$

$$V_3(t=1) = k * V_3(0) + 0 * V_1(0) + 0 * V_2(0) + 0 * V_4(0)$$

$$V_4(t=1) = k * V_4(0) + 0 * V_1(0) + 0 * V_2(0) + 0 * V_3(0)$$

On met alors à jour la matrice V_t :

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(1) \end{bmatrix}$$

Supposons dans la suite que le seuil de tout les neurones soit franchis. Alors :

$$T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On calcul de nouveau la sortie de tous les neurones. Pour le neurone 1 on obtient :

$$T_1 + (-1)^{t_{1,1}} * N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On observe ici que la matrice N_1 a permis de passer le coefficient $t_{1,1}$ de 1 à 0 (le temps du calcul de $V_1(t=2)$). Cela est bien le résultat souhaité, puisque le neurone 1 ayant déchargé au temps $t=1$, on ne doit pas prendre en compte ce potentiel dans le calcul de $V_1(t=2)$. D'où :

$$V_1(t=2) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(1) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t=2) = k * 0 * V_1(1) + 0 * 1 * V_2(1) + 0 * 1 * V_3(1) + 1 * 1 * V_4(1)$$

De même :

$$V_2(t = 2) = k * 0 * V_2(1) + 1 * 1 * V_1(1) + 0 * 1 * V_3(1) + 0 * 1 * V_4(1)$$

$$V_3(t = 2) = k * 0 * V_3(1) + 1 * 1 * V_1(1) + 0 * 1 * V_2(1) + 0 * 1 * V_4(1)$$

$$V_4(t = 2) = k * 0 * V_4(1) + 0 * 1 * V_1(1) + 1 * 1 * V_2(1) + 0 * 1 * V_3(1)$$

Alors :

$$V_2 = \begin{bmatrix} V_1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(2) \end{bmatrix}$$

Et en supposant que seul le potentiel du neurone 4 est dépassé le seuil, on obtient :

$$T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

0.8 Modélisation tenant compte du temps de décroissance du potentiel

0.8.1 Défaut de la modélisation 0.7

La modélisation précédente (modélisation 0.7) procédait à une décroissance binaire du potentiel d'un neurone après une dépolarisation. En effet, tant que le neurone n'avait pas déchargé, son potentiel était pris en compte et ce même après que le temps de décroissance biologique (vu sur la figure 3) ait été passé. Dans la modélisation qui suit, nous tentons d'introduire une décroissance du potentiel (pseudo) continue.

0.8.2 Présentation

Nous pourrions introduire une fonction en exponentielle décroissante copiant l'allure de la courbe de la figure 3. Toutefois, comme le temps de la simulation est discrétisé à 1 ms et que la décroissance est de l'ordre de quelques millisecondes, nous introduisons une fonction en escalier prenant donc comme argument le temps et retournant un pourcentage de décroissance. Les valeurs de décroissance sont approximées à partir de la courbe de la figure 8 en ramenant le minimum de la courbe à 0, en faisant en sorte que le maximum du potentiel soit égale à 1 et en prenant comme origine du temps l'instant où le maximum est atteint. Ainsi, pour $t=2$ ms (2 ms après l'instant où le maximum est atteint), le potentiel maximal a diminué de 30% environ. Ainsi, $V_i(t = 2) = V_{max} * (1 - 0.3)$

On pose alors :

$$A = ((a_{i,j})) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.55 & 0.1 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\text{Puis, } \begin{cases} \forall t \in \llbracket 0, \text{Dim}(A) - 1 \rrbracket, f_d^i(t) = a_{1,t} \\ \forall t \geq \text{Dim}(A), f_d^i(t) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, f_d^i renvoie soit des valeurs de A, si le temps n'est pas trop grand, sinon elle renvoie 0. Cette fonction traduit donc le fait qu'au bout d'un certain temps après une dépolarisation, le potentiel du neurone est revenu au repos (il n'est donc plus à prendre en compte dans les calculs)

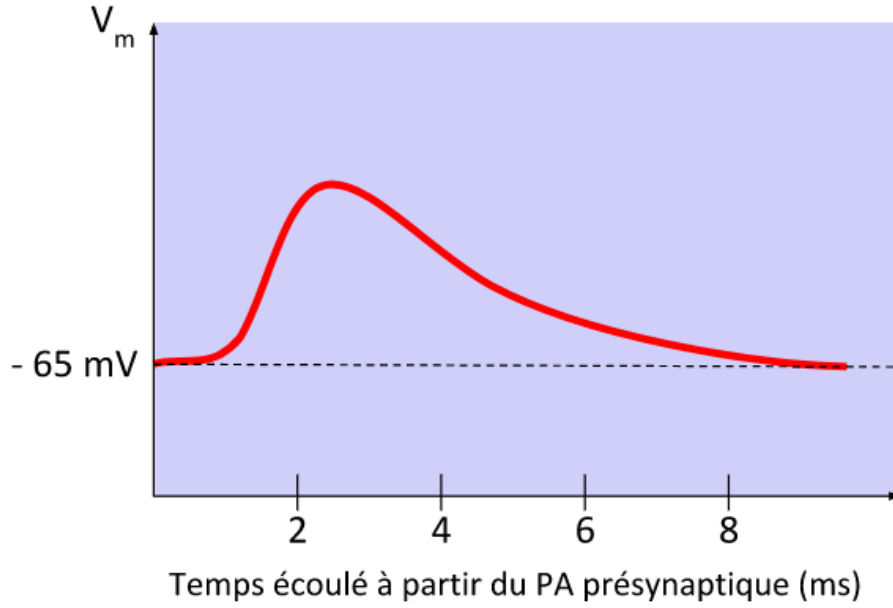


Figure 8:

Ci-dessous, nous indiquons comment calculer la valeur de décroissance à une certaine étape, sans garder en mémoire l'instant où chaque neurone a déchargé. En effet, il nous faudrait normalement stocker ces instants en mémoire pour passer de la valeur $f_d^i(t)$ à $f_d^i(t+1)$, où t est le temps où le neurone i a déchargé.

Cependant, par construction $f_d^i|_{\llbracket 0, \text{Dim}(A)-1 \rrbracket}$ est bijective alors :

$$\begin{cases} \text{si } y \in A, f_d^i(t+1) = f_d^i((f_d^i|_{\llbracket 0, \text{Dim}(A)-1 \rrbracket})^{-1}(y) + 1) \\ \text{si } y = 0, f_d^i(t+1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Par exemple, si on stocke la valeur 0.7 au temps t pour le neurone i , alors comme A est muni d'un ordre et que chacune de ses composantes sont différentes deux à deux, on peut savoir qu'au temps $t+1$ la valeur à stocker est celle suivant 0.7, c'est-à-dire, 0.55.

En tenant compte de l'introduction de cette nouvelle fonction f_d^i , nous devons modifier la matrice C de la manière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} f_d^1(t) & c_{2,1} & c_{3,1} & \dots & c_{R,1} \\ c_{1,2} & f_d^2(t) & & & \vdots \\ \vdots & c_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & c_{R,R-1} \\ c_{1,R} & c_{2,R} & \dots & c_{R-1,R} & f_d^R(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

Dans ce cas :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, R \rrbracket, V_i(t+1) = f(L_{C,i} * (V_t * (T_t + (1 - t_{i,1}) * N_i)))} \quad (5)$$

Remarquons que la fonction de décroissance est la même pour tous les neurones. Autrement dit, peu importe le potentiel de sortie du neurone, en $\text{Dim}(A)$ étapes, le potentiel sera revenu à 0. Cela serait incorrecte dans un modèle où chaque potentiel de sortie est différent (une valeur de sortie plus faible mettra moins de temps à atteindre 0 qu'une valeur plus grande, car le à chaque étape les ions Na^+ assurant la circulation du courant sont évacués en même quantité à chaque étape, donc le

potentiel de sortie décroît d'une même quantité à chaque étape peu importe la valeur de sortie du neurone). Pour prendre en compte ce phénomène, il faudrait remplacer la fonction f_d^i prenant un même nombre de valeur possible pour tous les neurones par la soustraction d'une même quantité au potentiel de sortie. En d'autres termes, à la place de f_d^i sur les éléments de la diagonale de C, on aurait une valeur initiale de 1, puis à chaque étape on soustrait à cette valeur une quantité identique pour chaque neurone; en réinitialisant cette valeur à 1 après une dépolarisation du neurone, sinon à 0 lorsque cette valeur devient négative.

Mais le problème ne se pose pas ici, car toutes les sorties ont la même valeur après une dépolarisation (car le potentiel d'action à la même intensité pour tous les neurones).

0.8.3 Fonctionnement algorithmique

- (1) : Initialiser la matrice C de manière aléatoire telle que les éléments de la diagonale soient égaux à 0
- (2) : Initialiser la matrice V_0
- (3) : Initialiser à 0 toute les valeurs de T_0
- (4) : Calculer la sortie des R neurones du réseau.
On pose $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ les neurones dont la sortie est supérieure au seuil
- (5) : Mettre à jour la valeur du potentiel des R neurones du réseau
- (6) : Remplacer pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ $t_{i,1}$ par $\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- (7) : Remplacer pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ $c_{i,i}$ par $\begin{cases} \text{la valeur de } f_d^i \text{ selon la formule 4} & \text{si } i \in \llbracket 1, R \rrbracket \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \\ f_d^i(0) & \text{sinon} \end{cases}$
- (8) : Recommencer à l'étape (4)

Remarquons que le potentiel subit une diminution que le seuil ait été franchis ou non. Cela s'explique par le fait qu'en absence d'un potentiel dépassant le seuil critique de dépolarisation, le potentiel décroît tout de même au cours du temps (le potentiel n'est pas maintenu indéfiniment jusqu'à ce que le seuil soit atteint)

0.8.4 Exemple

On considère le même réseau de neurone que celui représenté sur la figure 7. Supposons qu'au temps $t=0$ les neurones 3 et 4 ont déchargés. Alors :

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A l'instant $t=1$, on doit calculer la sortie de tout les neurones. Commençons par le neurone 1 :

$$T_0 + (1 - t_{1,1}) * N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1 - 0) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En fait, cette fois-ci, $(1 - t_{1,1}) * N_1$ ne s'assure plus que le coefficient devant $V_1(0)$ soit 0 ou 1 dans le calcul de $V_1(t = 1)$, selon que le neurone est déchargé ou non, mais elle s'assure que le coefficient devant $V_1(0)$ soit toujours égal à 1 dans le calcul de $V_1(t = 1)$. Puisque, comme nous le verrons ci-dessous, c'est désormais la fonction f_d^i qui s'assure de valeur à mettre, qui n'est plus binaire (0 ou 1) mais qui au cours du temps évolue pour passer de 1 à 0.7, puis à 0.55, pour finir à 0 lorsque le temps depuis la dernière dépolarisation est trop grand. Ce phénomène implique donc de mettre à jour à chaque étape les valeurs de f_d^i pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$. Comme ces valeurs sont celles de la diagonale de C (à la place du coefficient de décroissance k de la modélisation 0.7), il faut mettre à jour continuellement les valeurs de C (indépendamment du fait que le neurone considéré est déchargé ou non).

On obtient donc :

$$V_1(t = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t = 1) = 1 * V_1(0) + V_4(0)$$

De même :

$$V_2(t = 1) = 0 * V_2(0) + 1 * V_1(0) + 0 * V_3(0) + 0 * V_4(0)$$

$$V_3(t = 1) = 1 * V_3(0) + 1 * V_1(0) + 0 * V_2(0) + 0 * V_4(0)$$

$$V_4(t = 1) = 1 * V_4(0) + 0 * V_1(0) + 1 * V_2(0) + 0 * V_3(0)$$

On met ensuite à jour la matrice V_t :

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(1) \end{bmatrix}$$

Supposons que seul $V_1(t)$ soit supérieur au seuil. Alors :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et, } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

On recalcule alors la sortie de tous les neurones :

$$V_1(t = 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(1) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1(t = 2) = 1 * V_1(1) + 0 * V_4(1)$$

De même :

$$V_2(t = 2) = 0 * V_2(1) + 1 * V_1(1) + 0 * V_3(1) + 0 * V_4(1)$$

$$V_3(t = 2) = 0.7 * V_3(1) + 1 * V_1(1) + 0 * V_2(1) + 0 * V_4(1)$$

$$V_4(t = 2) = 0.7 * V_4(1) + 0 * V_1(1) + 1 * V_2(1) + 0 * V_3(1)$$

Alors :

$$V_2 = \begin{bmatrix} V_1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(2) \end{bmatrix}$$

Et en supposant que le potentiel des neurones 2 et 3 ont dépassés le seuil :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et, } C = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Alors,

$$V_1(t=3) = 0.7 * V_1(2) + 0 * V_2(2) + 0 * V_3(2) + 0 * V_4(2)$$

$$V_2(t=3) = 1 * V_2(2) + 0 * V_1(2) + 0 * V_3(2) + 0 * V_4(2)$$

$$V_3(t=3) = 1 * V_3(2) + 0 * V_1(2) + 0 * V_2(2) + 0 * V_4(2)$$

$$V_4(t=3) = 0.55 * V_4(2) + 0 * V_1(2) + 1 * V_2(2) + 0 * V_3(2)$$

On remarque donc, qu'à chaque nouvelle dépolarisation, il faut remettre $f_d^i(t)$ à 1. Et pour que cette valeur soit, éventuellement, prise en compte lors du calcul à l'étape $t+1$, il faut s'assurer d'actualiser les coefficients de C , une fois (seulement) la sortie de tous les nouveaux neurones calculée.

0.8.5 Remarque sur la simulation synchrone

Une simulation asynchrone permettrait théoriquement d'obtenir pour un neurone en particulier la courbe de décroissance du potentiel de la figure 8 car ce type de simulation fait qu'un neurone peut demeurer sans être stimulé par ses entrées pendant plusieurs étapes; ce qui dans la réalité n'est pas possible. En effet, chaque neurone possède des millions de connexions et est donc stimulé à chaque instant. Ce faisant la courbe de la figure 8 n'est que théorique. En fait, expérimentalement cette courbe est obtenu en isolant un neurone et en le soumettant à des stimulations contrôlée à l'aide d'électrodes [1]. Dans la réalité la probabilité que le potentiel d'un neurone est le temps de diminuer jusqu'à sa valeur au repos est très faible. On obtiendrait alors une courbe comme celle présentée sur la figure 9

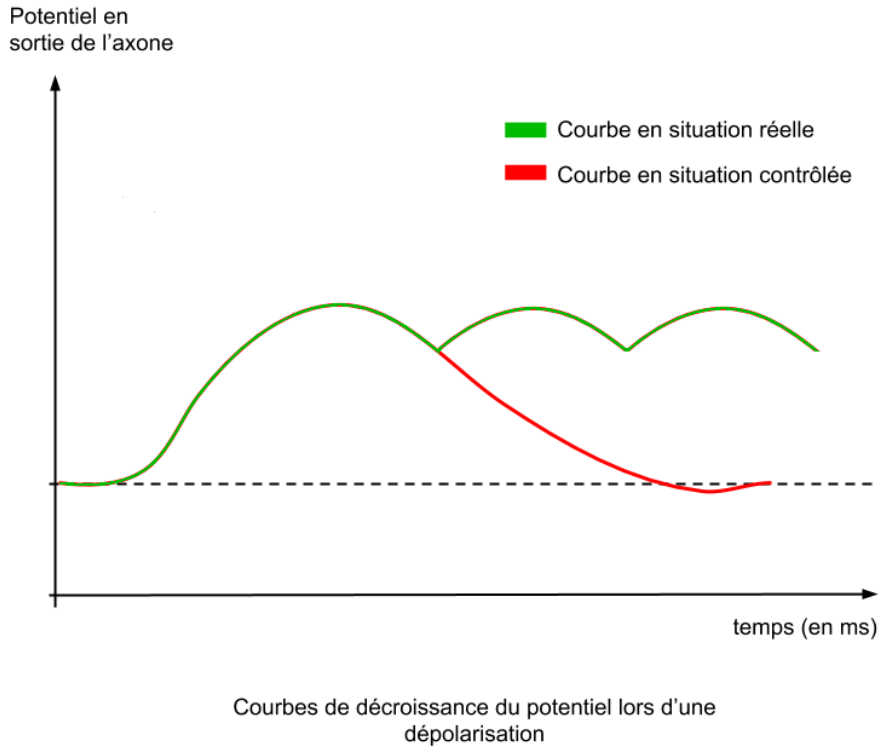


Figure 9:

Ce phénomène, difficilement remarquable dans une simulation asynchrone, est rendu visible dans une simulation synchrone.

0.9 Modélisation tenant compte du poids des connexions

0.9.1 Défaut des modélisations 0.7 et 0.8

Dans les modélisations précédentes nous considérons qu'une fois le potentiel d'action libéré par le neurone, l'activation des récepteurs synaptique se faisait de manière uniforme. Autrement dit, on a considéré que $P_B = P_C = P_D = P_E = P_F$ où $(P_i)_i$ sont définis sur la figure 10

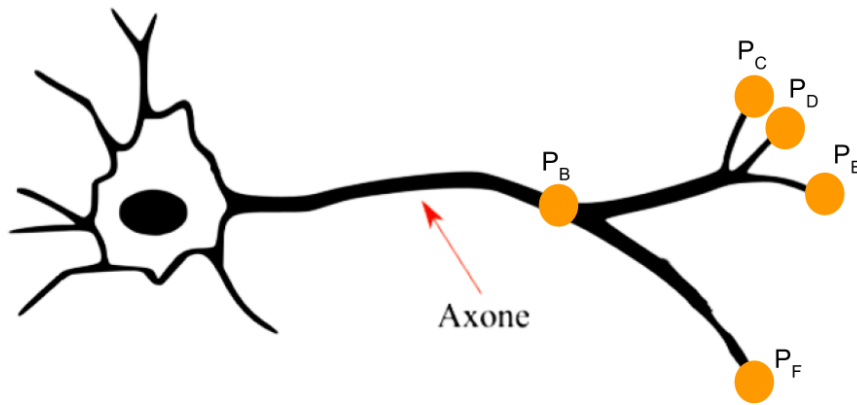


Figure 10:

Mais cette hypothèse est fausse. Rappelons-nous que la circulation du courant électrique à la sortie de l'axone est assurée, en autre, par des ions. Or ces ions ne se répartissent pas de la même manière dans les embranchements selon leurs tailles. De plus, un neurone est fortement connecté à un autre s'il possède de nombreuses synapses en direction de ce neurone. Cela revient donc à considérer un unique gros embranchement en direction de ce neurone, captant donc plus d'ions.

0.9.2 Présentation

Ainsi, une fois le nombre N_i de neurones connectés au neurone i considéré, on associe à chaque neurone un poids de connexion $w_{i,j}$. $w_{i,j}$ représentent la qualité de la connexion du neurone i vers le neurone j . Ainsi, si $w_{i,j}$ existe, $w_{j,i}$ n'existe pas nécessairement et s'il existe, il n'est pas égale à $w_{i,j}$ dans le cas général.

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, R \rrbracket * \llbracket 1, N_i \rrbracket, w_{i,j} \in [0, 1]$
- $\forall i \in \llbracket 1, R \rrbracket, \sum_{j=1}^{N_i} (w_{i,j}) = 1$

Autrement dit, comme le montre la figure 11, le potentiel en sortie de l'axone est $V_i(t)$ et celui en direction du neurone j_1 est $w_{i,j_1} * V_i(t)$

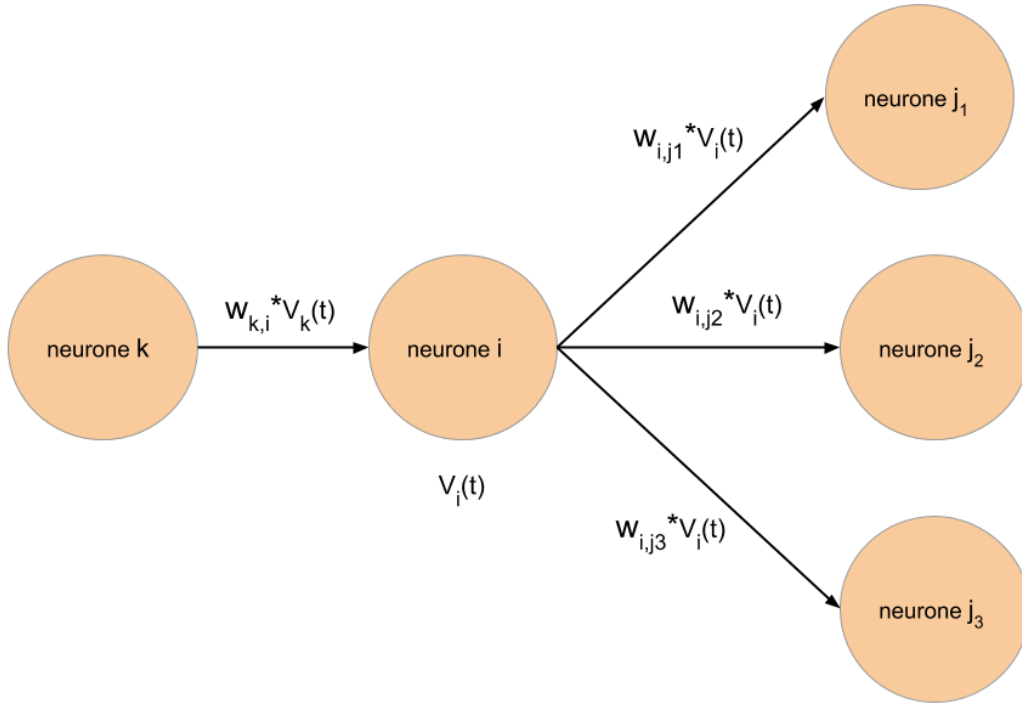


Figure 11:

La modélisation mathématique est la même que la modélisation précédente à la différence de C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & w_{2,1} & w_{3,1} & \dots & w_{R,1} \\ w_{1,2} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & w_{2,3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & w_{R,R-1} \\ w_{1,R} & w_{2,R} & \dots & w_{R-1,R} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

où pour $(i, j) \in \llbracket 1, R \rrbracket^2, i \neq j, w_{i,j}$ est éventuellement nul (absence de connexion).

Les valeurs de la diagonale sont, selon la modélisation utilisée, soit égales à k , soit à $f_d^i(t)$

Ces valeurs $((w_{i,j}))$ sont ici invariantes dans le temps.

0.10 Modélisation tenant compte des potentiels excitateurs et inhibiteurs

0.10.1 Autre défaut de la modélisation 0.7

Jusqu'à présent, le potentiel des entrées de nos neurones (nos dendrites) pouvaient soit prendre des valeurs positives ou négatives de manière arbitraire. En fait, cela dépend de la fonction activatrice choisie (par exemple pour une fonction seuil, toutes les valeurs de sortie auraient été positives ou nulles). Cela ne tient donc pas compte du fait que certains récepteurs des neurones peuvent soit augmenter le potentiel soit le diminuer.

0.10.2 Présentation

Dans cette modélisation, on s'assure tout d'abord que la fonction activatrice donne un résultat positif si le seuil est franchi, et nul sinon. Dans ce cas, il suffit de remplacer de manière arbitraire certain $w_{i,j}$ par $-w_{i,j}$. Dès lors, les poids positifs jouent le rôle de récepteurs excitateurs et les poids négatifs de récepteurs inhibiteurs.

0.11 Modélisation tenant compte de la plasticité synaptique

0.11.1 Défaut des modélisations précédentes

Pour l'instant, aucune de nos modélisation ne tenaient compte de la plasticité synaptique, c'est-à-dire la capacité que possède un neurone à augmenter l'efficacité d'une connexion avec un autre neurone. Il existe deux types de plasticité [2] :

- une à court terme (de quelques secondes à plusieurs minutes)
- une à long terme (de quelques jours à plusieurs mois, ou même indéfiniment)

Nous n'étudierons pas ici la plasticité à long terme car elle prend en compte un trop grand nombre de paramètres. Donc cette modélisation sera difficile à exploiter.

0.11.2 Plasticité à court terme

La plasticité à court terme se traduit par deux phénomènes notables :

- Lorsqu'un neurone est sollicité à plusieurs reprises (lorsqu'il y a des dépolarisations rapprochées dans le temps), alors le nombre de neurorécepteurs émis, pour un même potentiel d'action, par chaque synapse augmente (le calcium Ca^{2+} s'accumulent dans les synapses sans avoir eu le temps d'être évacué).
- Mais lorsque ces sollicitations deviennent trop récurrentes, le nombre de neurorécepteurs émis, pour un même potentiel d'action, diminue (les réserves en neurorécepteurs s'épuisent).

La figure 12 représente ces deux phénomènes (qui ne sont que deux parties d'une même courbe). L'axe des temps sera expliqué ultérieurement.

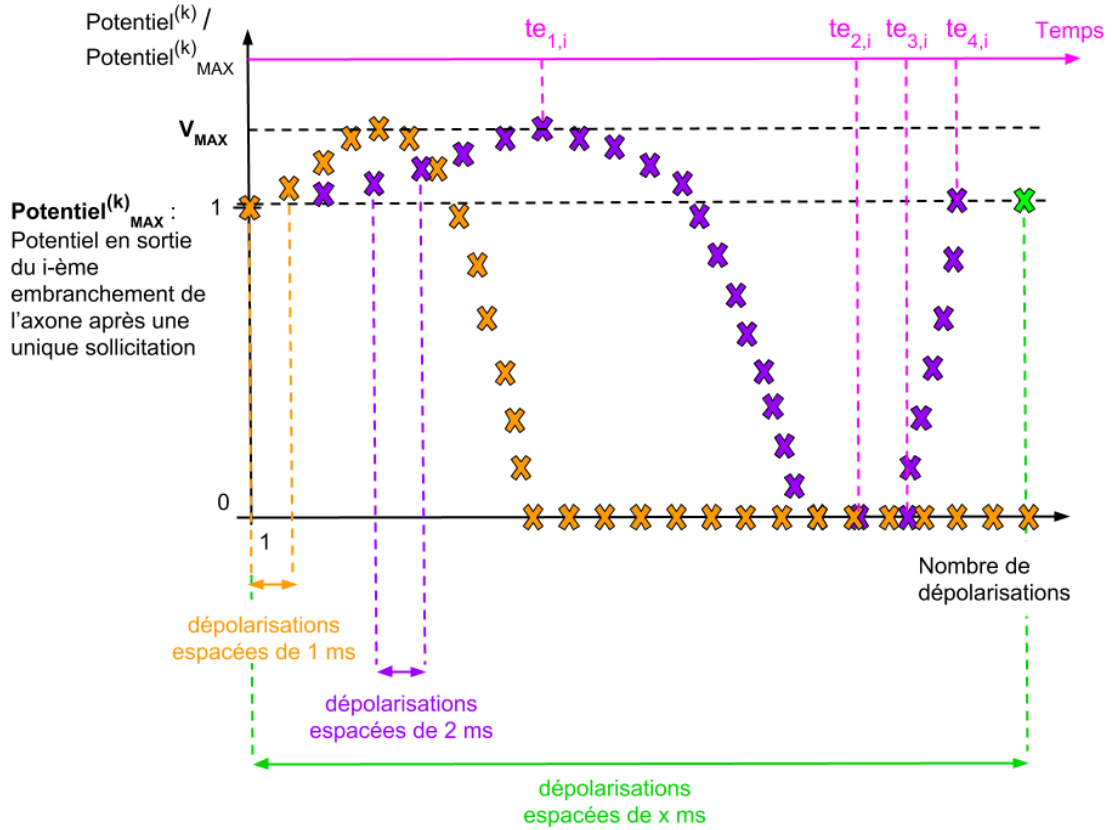


Figure 12: Représentation qualitative de la plasticité à court terme

Plus le temps entre deux dépolarisations est grand, plus les ions Ca^{2+} libérés lors de la première dépolarisation ont eu le temps d'être évacués. Ce faisant, il faut un nombre de dépolarisations successives plus important pour atteindre le maximum permis par le neurone.

Une fois ce maximum atteint, le nombre de vésicules présynaptiques (contenant les neurorécepteurs) commence à diminuer (car elles ont déjà libérées les neurorécepteurs précédemment). Cette décroissance est plus lente lorsque le temps entre deux dépolarisations est grand, car si une dépolarisation induit une perte temporaire de vésicules présynaptiques, l'espacement temporel entre deux dépolarisations permet aussi d'en recycler d'autres, qui seront alors utilisées lors de la prochaine dépolarisation. La perte totale de vésicules présynaptiques est de durée plus courte lorsque le temps entre deux dépolarisations est grand, car pendant ce temps un plus grand nombre de vésicules sont recyclées, donc potentiellement utilisables par la suite. (Courbe violette sur la figure 12)

La remontée vers un potentiel normal est également plus rapide lorsque le temps entre deux dépolarisations est grand pour la même raison.

Toutefois, lorsque cet espacement temporel devient trop grand, lors de la seconde dépolarisation, tous les ions Ca^{2+} auront été évacués et toutes les vésicules présynaptiques auront été recyclées. Ce faisant, le potentiel de sortie est le même que lors de la première dépolarisation (courbe verte sur la figure 12)

Lorsque le neurone subit dépolarisation sur dépolarisation au bout d'un certain temps, le potentiel de sortie demeure nul car il n'y a plus assez de vésicules présynaptiques recyclées (l'espacement temporel entre deux dépolarisations étant trop court) (courbe orange sur la figure 12)

Il y a donc deux phénomènes de décroissance à distinguer :

- la décroissance du potentiel de sortie après un grand nombre de dépolarisation (une fois V_{max} atteint).
- la décroissance de la concentration en Ca^{2+} qui s'évacue du synapse au cours du temps, ce qui a pour effet de ramener le potentiel de sortie à la normal (état où la concentration en Ca^{2+} et

le nombre de vésicules présynaptiques est le même que dans une synapses d'un neurone ayant comme potentiel d'entrées celui du repos; c'est-à-dire un neurone qui n'a pas déchargé depuis un certain temps). Cette décroissance se traduit sur la courbe violette de la figure 12 par une diminution du le potentiel de sortie lorsqu'il n'a pas encore atteint V_{max} (ce qui explique que la courbe violette mette plus de temps à atteindre V_{max} que la courbe orange) puis par une augmentation (une courbe dont les dépolarisations serait espacée de 3ms aurait une croissance bien plus forte que celle de la courbe violette où les dépolarisation sont espacée de 2 ms, par exemple).

Remarquons que les courbes de la figure 12 sont purement qualitatives, tout comme l'espacement temporel.

0.11.3 Présentation

Tentons ici de formaliser les phénomènes précédemment décrits.

- A chaque dépolarisation, le potentiel de sortie d'un neurone augmente, temporairement, d'une petite quantité, que nous noterons V_p , proportionnelle au potentiel d'action délivré lors de la dernière dépolarisation. En effet, plus le potentiel libéré lors d'une dépolarisation est grand plus le nombre de canaux calciques ouverts est grand, plus d'ions calcium C_a^{2+} s'accumulent dans la synapses, donc plus le nombre de vésicules libérées lors de la prochaine dépolarisation est grand (car toutes les vésicules présynaptiques ne sont pas évacuées lors d'une seule dépolarisation, donc la concentration en C_a^{2+} diminuera au cours de la dépolarisation mais ne sera pas nul lors de la prochaine dépolarisation si le temps entre les deux est assez court; somme toute le nombre d'ions C_a^{2+} restant après une dépolarisation dépend de l'intensité du potentiel d'action de cette dépolarisation). Ainsi, le potentiel de sortie du neurone i après une seconde dépolarisation consécutive est $V_i(t+1) = V_i(t) + V_p$. Or comme V_p est proportionnel à $V_i(t)$, il existe un coefficient $\delta_i(t)$ tel que $V_p = \delta_i(t) * V_i(t)$. On obtient donc après une seconde dépolarisation consécutive $V_i(t+1) = (1 + \delta_i(t)) * V_i(t)$. En notant $te_{1,i}$ le temps tel que le potentiel du neurone i atteint V_{max} et en remarquant que le potentiel de sortie du neurone i ne peut pas être négatif, on a :

$$\forall t, \delta_i(t) \in \left[-1, \frac{V_{max}}{V_i(te_{1,i}-1)} - 1\right]$$

En fait, la quantité à prendre en compte V_p est la même pour tous les neurones car tous les potentiels d'actions ont la même valeur en sortie de l'axone. Ainsi, il aurait été plus naturel de simplement écrire $V_i(t+1) = V_i(t) + V_p$. Mais avoir $(1 + \delta_i(t)) * V_i(t)$ simplifie les calculs et la compréhension. De plus, cela ne modifie pas le résultat car entre les deux formules il n'y a qu'un facteur $V_i(t)$ à prendre en compte puisque tous les potentiels V_i ont la même valeur après une dépolarisation.

- Cette augmentation du potentiel de sortie, débutant au temps $te_{0,i}$, reste valable jusqu'au temps $te_{1,i}$ tel que $V_i(te_{1,i}) = V_{max}$. Après ce temps, le potentiel de sortie du neurone i décroît lentement après chaque nouvelle dépolarisation jusqu'à être nul au temps $te_{2,i}$ et le restera jusqu'au temps $te_{3,i}$. Après ce temps, le potentiel de sortie du neurone croît de nouveau jusqu'à atteindre son potentiel de sortie normal au temps $te_{4,i}$. Autrement dit, la quantité $(1 + \delta_i(t))$ varie au cours du temps. Cela signifie que $\delta_i(t)$ varie au cours du temps. Ainsi, pour la suite nous devons introduire deux quantités :

- $pas_p > 0$ la quantité que l'on ajoute à $\delta_i(t)$ lorsque $te_{0,i} \leq t < te_{1,i}$ ou $te_{3,i} \leq t < te_{4,i}$
- $pas_m < 0$ (en principe $pas_m = -pas_p$) la quantité que l'on ajoute à $\delta_i(t)$ lorsque $te_{1,i} \leq t < te_{2,i}$
- $pas = 0$ la quantité que l'on ajoute à $\delta_i(t)$ lorsque $te_{2,i} \leq t < te_{3,i}$

Ainsi, après une dépolarisation au temps t :

$$\forall t, \delta_i(t+1) = \begin{cases} \delta_i(t) + pas_p & \text{si } te_{0,i} \leq t+1 < te_{1,i} \text{ ou } te_{3,i} \leq t+1 < te_{4,i} \\ \delta_i(t) + pas_m & \text{si } te_{1,i} \leq t+1 < te_{2,i} \\ -1 & \text{si } te_{2,i} \leq t+1 < te_{3,i} \end{cases}$$

- Il ne nous reste plus qu'à prendre en compte la décroissance du nombre d'ion Ca^{2+} dans la synapse entre deux dépolarisations espacées dans le temps. Ainsi, on pose $pas_{Ca} > 0$ le nombre d'ion calcium Ca^{2+} évacués en 1 milliseconde qui est sensiblement le même pour toutes les synapses. Ce nombre ne dépend pas de l'intensité du potentiel d'action : la synapse ne peut évacuer qu'un nombre fixe d'ions à chaque instant, peu importe le nombre total de ces ions dans la synapse.

Ainsi, en tout temps :

$$\forall t, \delta_i(t+1) = \begin{cases} \delta_i(t) - pas_{Ca} & \text{si } te_{0,i} \leq t+1 < te_{1,i} \text{ ou } te_{3,i} \leq t+1 < te_{4,i} \\ 0 & \text{si } t \geq te_{4,i} \\ \delta_i(t) + pas_{Ca} & \text{sinon} \end{cases}$$

On traduit donc ces équations sous une forme matricielle. Pour ce faire, on pose :

- $$P = \begin{bmatrix} t_{1,1} * pas_1^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{2,1} * pas_2^{(k)} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{R,1} * pas_R^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

où $\begin{cases} t_{i,1} \text{ est le coefficient de la matrice } T_t \text{ comme définie précédemment} \\ pas_R^{(k)} = \begin{cases} pas_p \\ pas_m \end{cases} \text{ selon les cas précédemment mis en avant} \end{cases}$

- $$P_{Ca} = \begin{bmatrix} p_{Ca_{1,1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{Ca_{2,2}} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{Ca_{R,R}} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

où $p_{Ca_{i,i}} = \begin{cases} -pas_{Ca} & \text{si } te_{0,i} \leq t+1 < te_{1,i} \text{ ou } te_{3,i} \leq t+1 < te_{4,i} \\ 0 & \text{si } t \geq te_{4,i} \\ pas_{Ca} & \text{sinon} \end{cases}$

- $$\Delta_t = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_3(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$$

- α_i le coefficient d'indice (i,i) de la matrice $(\Delta + P + pas_{Ca} * S_{Ca})$
- $D_i \in \mathcal{M}_R(\mathbb{R})$ la matrice dont le seul coefficient non nul est d'indice (i,i) $d_{i,i} = 1$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\boxed{V_i(t+1) = f(L_{C,i} * [V_t * [\mathbb{I}_R - (\Delta_t + P + P_{Ca} - \alpha_i * D_i)]) * (T_t + (1 - t_{i,1}) * N_i))} \quad (6)$$

0.11.4 Fonctionnement algorithmique

- (1) : Initialiser la matrice C de manière aléatoire telle que les éléments de la diagonale soient égaux à 0
- (2) : Initialiser la matrice V_0
- (3) : Initialiser à 0 la matrice T_0
- (4) : Initialiser à 0 la matrice P_{Ca}
- (5) : Initialiser à 0 la matrice P
- (6) : Initialiser à 0 la matrice Δ_0
- (7) : Calculer la sortie des R neurones du réseau.
On pose $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ les neurones dont la sortie est supérieure au seuil
- (5) : Mettre à jour la valeur du potentiel des R neurones du réseau
- (6) : Remplacer pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ $t_{i,1}$ par $\begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- (7) : Remplacer pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ $c_{i,i}$ par $\begin{cases} \text{la valeur de } f_d^i & \text{selon la formule 4 si } i \in \llbracket 1, R \rrbracket \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \\ f_d^i(0) & \text{sinon} \end{cases}$
- (8) : Pour tout $i \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$:
 - si $(1 - \delta_i(t) - p_{i,i} - p_{Ca_{i,i}}) * V_i(t) \geq V_{max}$, remplacer $\begin{cases} p_{i,i} & \text{par } pas_m \\ p_{Ca_{i,i}} & \text{par } + pas_{Ca} \end{cases}$
 - sinon si $(1 - \delta_i(t) - p_{i,i} - p_{Ca_{i,i}}) * V_i(t) < 0$, remplacer $\begin{cases} p_{i,i} & \text{par } 0 \\ p_{Ca_{i,i}} & \text{par } 0 \\ \delta_i(t) & \text{par } 0 \end{cases}$
 - sinon si $\delta_{i,i} - p_{i,i} - p_{Ca_{i,i}} = 0$, remplacer $\begin{cases} p_{i,i} & \text{par } pas_p \\ p_{Ca_{i,i}} & \text{par } - pas_{Ca} \\ \delta_i(t) & \text{par } 0 \end{cases}$
- (9) : Pour tout $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$, remplacer $\delta_i(t)$ par $\delta_i(t) + p_{i,i} + p_{Ca_{i,i}}$
- (10) : Recommencer à l'étape (7)

0.11.5 Exemple

Reprenons le réseau de la figure 7 que nous redonnons ci-dessous :

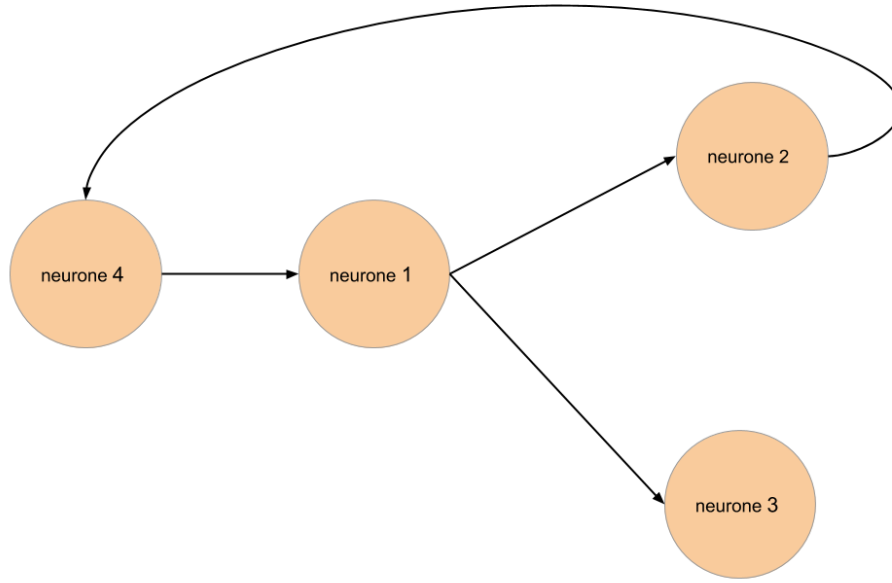


Figure 13:

Supposons qu'au temps $t=0$ ms les neurones 3 et 4 ont déchargés. Alors :

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_1(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4(0) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{Ca} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On choisit à l'instant $t=1$ ms de calculer la sortie du neurone 1.
 Calculons tout d'abord les valeurs $\delta_i(t=1)$

Partie IV

Résultats exploitables

0.12 Tracé de l'activité électrique neurone par neurone

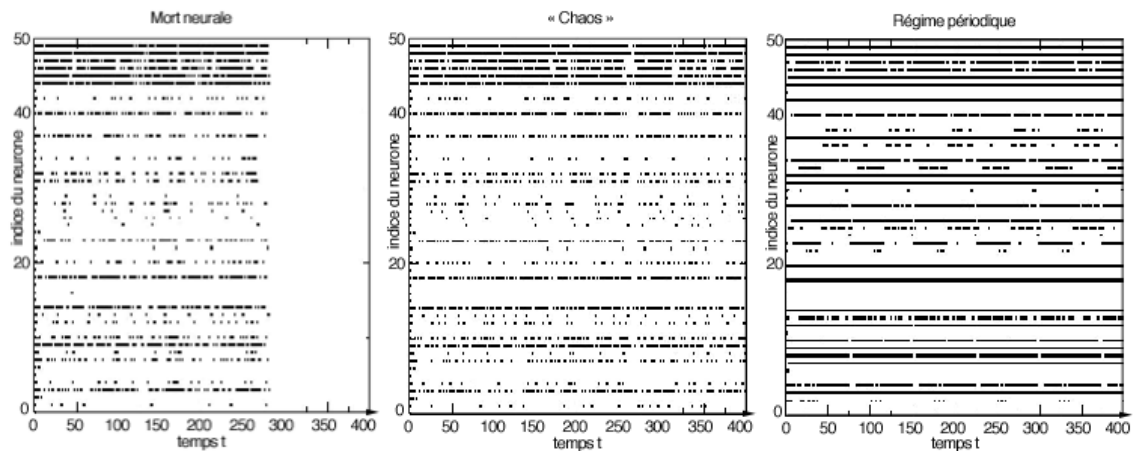


Figure 14: voir référence [4] pour ces figures

Comme le montre la figure 14, chaque ligne horizontale représente l'activité d'un neurone en fonction du temps (les points noirs correspondant au moment de la dépolarisation des neurones). Ces figures sont très semblables à celles d'encéphalogrammes, desquelles on peut observer des modifications de l'activité cérébrale lors de l'apparition de perturbations (substances psychoactives).

0.13 Tracé de l'activité du réseau

On se propose ici pour tout instant t de calculer le potentiel de tous les neurones en activités. On obtient alors une courbe de l'évolution du potentiel du réseau en fonction du temps; courbes similaires à celles obtenues lors d'une IRM permettant d'observer l'activité cérébrale, bien que l'IRM ne représente pas directement l'activité électrique des neurones.

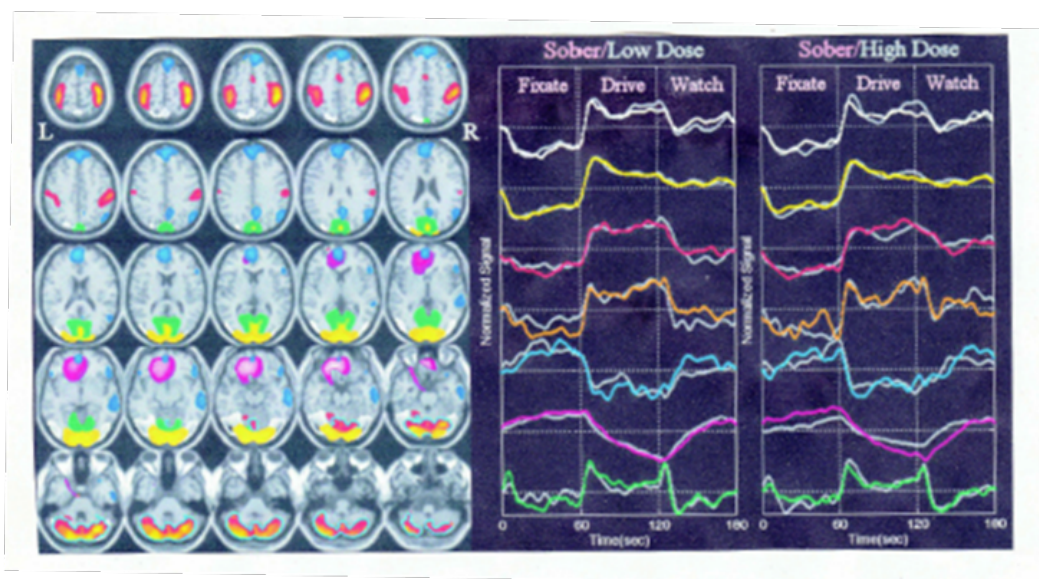


Figure 15: IRM représentant l'activité cérébrale

Partie V

Utilisation de la matrice C , matrice des relations du réseau neuronal

0.14 Initialisation de la matrice C

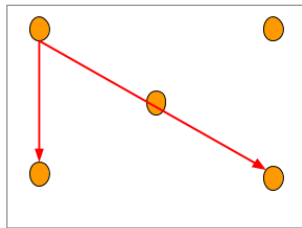
Nous étudierons nos modélisations pour 3 types d'initialisations :

- une initialisation aléatoire des liens entre neurones
- une initialisation tenant compte de la proximité spatiale des neurones. Dans ce cas, la matrice C joue le rôle de carte neuronale sur laquelle un neurone ne peut se lier qu'avec ses voisins (bien que dans la réalité deux neurones très espacés peuvent être en contact)
- une initialisation tenant compte de la spatialisation d'un réseau neuronal réelle (en l'occurrence celui du *Caenorhabditis elegans* [6])

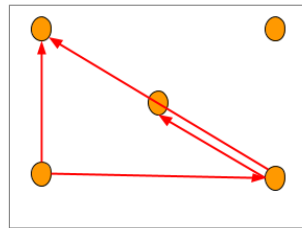
0.15 Représentation graphique des modélisations

La matrice C comme définit précédemment permet de rendre compte d'une organisation spatiale si on la considère comme une carte du réseau neuronal. Dès lors, en partant de la stimulation d'un neurone, on peut observer graphiquement l'évolution du réseau :

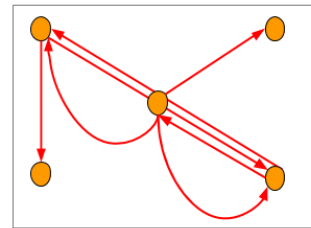
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Dépolarisation du neurone 1 au temps t_0



temps t_0+1



temps t_0+2

Références

- [1] 3ème partie : La communication intercellulaire le système nerveux. http://mas.stephanie.free.fr/cours_systeme_nerveux.htm. [En ligne, accès 02-2018].
- [2] Neurosciences/la plasticité synaptique. https://fr.wikibooks.org/wiki/Neurosciences/La_plasticite%CC%89_synaptique, 12 2017. [En ligne, accès 02-2018].
- [3] B. M. Abdelhak. Les réseaux de neurones à réservoir en traitement d'images. <http://slideplayer.fr/slide/3678912/>, 12 2004. [En ligne, accès 02-2018].
- [4] B. Cessac. Le cerveau est-il un bon modèle de réseau de neurones ? https://interstices.info/jcms/c_31668/le-cerveau-est-il-un-bon-modele-de-reseau-de-neurones, 11 2007. [En ligne, accès 02-2018].
- [5] M. P. A. C. d'Azur. Les neurones et synapses. http://www.museum-marseille.org/marseille_cerveau_synapse.htm, 12 2004. [En ligne, accès 02-2018].
- [6] J.Leskovec. C. elegans frontal neural network. <https://snap.stanford.edu/data/C-elegans-frontal.html>. [En ligne, accès 02-2018].
- [7] P. Sauleau. Fonctionnement cellulaire du système nerveux. <https://sites.google.com/site/aphysionado/home/cellsnv>. [En ligne, accès 02-2018].
- [8] science.ch. Réseaux de neurones formels. <http://informatique.coursgratuits.net/methodes-numeriques/reseaux-de-neurones-formels.php>. [En ligne, accès 02-2018].