

# Билеты по теоретической механике

В. Шаршуков

10 января 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аффинные евклидовы пространства</b>	<b>5</b>
1.1	Аффинные пространства . . . . .	5
1.2	Аффинные евклидовы пространства . . . . .	6
1.3	Список литературы . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Аффинные координаты и преобразования</b>	<b>7</b>
2.1	Аффинные и декартовы системы координат . . . . .	7
2.2	Аффинные преобразования . . . . .	8
2.3	Список литературы . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Криволинейные системы координат</b>	<b>10</b>
3.1	Определение . . . . .	10
3.2	Замена координат . . . . .	10
3.3	Список литературы . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Локальные базисы криволинейных координат</b>	<b>12</b>
4.1	Определение . . . . .	12
4.2	Условие ортогональности . . . . .	13
4.3	Список литературы . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Коэффициенты Ламе. Проекция скорости точки на оси криволинейной системы координат</b>	<b>14</b>
5.1	Общие сведения . . . . .	14
5.2	Коэффициенты Ламе . . . . .	14
5.3	Проекция скорости точки на оси криволинейной системы координат . . . . .	15
5.4	Список литературы . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Проекция ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат</b>	<b>16</b>
6.1	Список литературы . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Натуральный триэдр. Проекция ускорения точки на оси натурального триэдра</b>	<b>18</b>
7.1	Натуральный триэдр траектории . . . . .	18
7.2	Разложение ускорения по осям натурального триэдра траектории . . . . .	20
7.3	Список литературы . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Определение кривизны траектории точки по движению</b>	<b>23</b>
8.1	Кинематический метод . . . . .	23
8.2	Список литературы . . . . .	23

<b>9</b>	<b>Движение точки по прямой и по окружности</b>	<b>24</b>
9.1	Прямолинейное движение . . . . .	24
9.2	Движение по окружности . . . . .	24
9.3	Список литературы . . . . .	26
<b>10</b>	<b>Движение механической системы. Твёрдое тело. Число степеней свободы положения</b>	<b>27</b>
10.1	Движение механической системы . . . . .	27
10.2	Твёрдое тело . . . . .	27
10.3	Число степеней свободы . . . . .	28
10.4	Список литературы . . . . .	29
<b>11</b>	<b>Группа движений аффинного евклидова пространства</b>	<b>30</b>
11.1	Предварительные сведения . . . . .	30
11.2	Группа движений твёрдого тела . . . . .	31
11.3	Подгруппы движений . . . . .	33
11.4	Список литературы . . . . .	33
<b>12</b>	<b>Поступательное движение твёрдого тела</b>	<b>34</b>
12.1	Список литературы . . . . .	35
<b>13</b>	<b>Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси</b>	<b>36</b>
13.1	Определение. Основные понятия . . . . .	36
13.2	Векторные формулы скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси . . . . .	37
13.3	Список литературы . . . . .	38
<b>14</b>	<b>Плоское движение твёрдого тела. Преобразование координат</b>	<b>39</b>
14.1	Список литературы . . . . .	40
<b>15</b>	<b>Две геометрические теоремы о плоском движении</b>	<b>41</b>
15.1	Список литературы . . . . .	42
<b>16</b>	<b>Формула Эйлера. Следствие</b>	<b>43</b>
16.1	Список литературы . . . . .	45
<b>17</b>	<b>Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо</b>	<b>46</b>
17.1	Мгновенный центр скоростей . . . . .	46
17.2	Центроиды . . . . .	47
17.3	Список литературы . . . . .	47
<b>18</b>	<b>Ускорение точек твёрдого тела в плоском движении</b>	<b>48</b>
18.1	Список литературы . . . . .	52
<b>19</b>	<b>Задание движения твёрдого тела через углы Эйлера</b>	<b>53</b>
19.1	Список литературы . . . . .	55

<b>20 Две геометрические теоремы о движении твёрдого тела во- круг неподвижной точки</b>	<b>56</b>
20.1 Список литературы . . . . .	58
<b>21 Проекция угловой скорости тела с неподвижной точкой</b>	<b>59</b>
21.1 Список литературы . . . . .	59
<b>22 Ускорение точек тела с неподвижной точкой</b>	<b>60</b>
22.1 Список литературы . . . . .	61
<b>23 Скорость точек твёрдого тела в общем случае</b>	<b>62</b>
23.1 Список литературы . . . . .	63
<b>24 Ускорение точек твёрдого тела в общем случае</b>	<b>64</b>
24.1 Список литературы . . . . .	64
<b>25 Сложное движение точки, основные понятия</b>	<b>65</b>
25.1 Список литературы . . . . .	67
<b>26 Теорема сложения скоростей в сложном движении точки</b>	<b>68</b>
26.1 Список литературы . . . . .	68
<b>27 Теорема сложения ускорений в сложном движении точки</b>	<b>69</b>
<b>28 Теорема о сложении угловых скоростей твёрдого тела</b>	<b>70</b>
<b>Список литературы</b>	<b>71</b>

# 1 Аффинные евклидовы пространства

## 1.1 Аффинные пространства

**Определение 1.1.** Аффинным пространством называют множество  $E$ , связанное с векторным пространством  $\vec{E}$  отображением  $f : E \times E \rightarrow \vec{E}$  со свойствами:

1.  $(\forall a, b, c \in E) \left( \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \vec{0} \in \vec{E} \right)$  (Соотношение Шаля);
2.  $(\forall a \in E) \left( x \mapsto \overrightarrow{ax} \text{ — биекция на } \vec{E} \right)$

Элементы множества  $E$  называют *точками* аффинного пространства, а элементы множества  $\vec{E}$  — *свободными векторами*.

Из свойств 1,2 можно получить следствия:

3.  $(\forall a \in E) \left( \overrightarrow{aa} = \vec{0} \right)$ ;
4.  $(\forall a, b \in E) \left( \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \vec{0} \right)$  (иначе:  $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$ );
5.  $(\forall a \in E) (\forall \vec{h} \in \vec{E}) (\exists! b \in E) \left( \overrightarrow{ab} = \vec{h} \right)$   
(вместо  $\overrightarrow{ab} = \vec{h}$  пишут символически:  $b = a + \vec{h}$ );
6.  $(\forall a \in E) (\forall \vec{h}, \vec{k} \in \vec{E}) \left( a + (\vec{h} + \vec{k}) = (a + \vec{h}) + \vec{k} \right)$ .

Наряду со свободными векторами векторного пространства  $\vec{E}$  в аффинном пространстве вводят

**Определение 1.2.** Если  $a$  — точка аффинного пространства  $E$ , а  $\vec{h}$  — вектор связанного с ним векторного пространства  $\vec{E}$ , то пару  $(a, \vec{h})$  называют *вектором  $\vec{h}$ , закреплённым в точке  $a$* .

Каждому закреплённому вектору  $(a, \vec{h})$  соответствует упорядоченная пара точек  $(a, a + \vec{h})$ , и каждой упорядоченной паре точек  $(a, b)$  соответствует закреплённый вектор  $(a, \overrightarrow{ab})$ , поэтому закреплённым вектором называют также упорядоченную пару точек аффинного пространства.

**Определение 1.3.** *Прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$  ( $A \neq B$ ) аффинного пространства  $E$ , называют множество точек*

$$l(A, B) = \left\{ M \in E \mid M = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Множество  $l(A, B)$  можно считать упорядоченным, полагая, что точка  $B_1 = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB}$  предшествует точке  $B_2 = A + t_2 \cdot \overrightarrow{AB}$  тогда и только тогда, когда  $t_1 < t_2$ . В этом случае прямую  $l(A, B)$  будем считать *направленной*, или *сонаправленной с вектором  $\overrightarrow{AB}$* .

**Определение 1.4.** *Размерностью* аффинного пространства  $E$  называют размерность связанного с ним векторного пространства  $\vec{E}$ .

## 1.2 Аффинные евклидовы пространства

**Определение 1.5.** Аффинное пространство  $E$  называется *евклидовым аффинным пространством*, если связанное с ним векторное пространство  $\vec{E}$  евклидово, то есть на  $\vec{E}$  задано

1. скалярное произведение векторов  $\vec{p}, \vec{h} \in \vec{E}$ ; обозначается как  $\vec{p} \cdot \vec{h}$ ,  $(\vec{p}, \vec{h})$  или  $\langle \vec{p}, \vec{h} \rangle$ ;
2. евклидова норма вектора  $\vec{p} \in \vec{E}$ ; вводится по формуле  $\|\vec{p}\| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$ ;

**Определение 1.6.** Аффинное евклидово пространство  $E$  называется *метрическим*, если введено отображение  $\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что

$$\forall x, y \in E \quad \rho(x, y) = \|\vec{yx}\|.$$

В этом случае отображение  $\rho$  называют *евклидовым расстоянием*.

Если  $\vec{E}$  — векторное или евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , то вместо  $E$  используют обозначение  $\mathbb{E}^n$ .

## 1.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 2 Аффинные координаты и преобразования

### 2.1 Аффинные и декартовы системы координат

Пусть  $E = \mathbb{E}^n$ , тогда вектор  $\overrightarrow{OM} \in \vec{E} = \mathbb{R}^n$  можно разложить по базису  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (2.1)$$

или, в другой записи:

$$M = O + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j. \quad (2.2)$$

Пусть  $O \in \mathbb{E}^n$ , а  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.1.** Упорядоченную последовательность  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  называют *репером* пространства  $\mathbb{E}^n$ ; точку  $O$  называют *началом* этого репера, а базис  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — его *базисом*.

**Определение 2.2.** Вещественные числа  $x_1, \dots, x_n$  в 2.2 называют *аффинными координатами* точки  $M \in \mathbb{E}^n$  относительно выбранного репера с началом  $O \in \mathbb{E}^n$  и базисом  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ .

**Определение 2.3.** *Ориентацией репера* называют ориентацию базиса соответствующего векторного пространства.

**TODO:** связь между репером, базисом и системой координат.

**Определение 2.4.** Аффинную систему координат, оси которой взаимно ортогональны, называют *декартовой*.

Пусть  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — репер в пространстве  $\mathbb{E}^n$ , и пусть даны представления точек  $M, N \in \mathbb{E}^n$ :

$$\begin{aligned} M &= O + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \\ N &= O + \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} \\ &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \vec{e}_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.2 Аффинные преобразования

Пусть

$$M = O + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = O_1 + \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \vec{e}_j, \quad (2.5)$$

где

$$O_1 = O + \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}_j. \quad (2.6)$$

Тогда

$$O + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = O + \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}_j + \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \vec{e}_j,$$

откуда следует, что

$$x_j = \tilde{x}_j + a_j, \quad j \in [1 : n]. \quad (2.7)$$

Рассмотрим два ортонормальных базиса  $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$  и  $(\vec{e}''_1, \dots, \vec{e}''_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Как известно, они связаны равенствами:

$$\vec{e}''_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{e}'_j, \quad j \in [1 : n]. \quad (2.8)$$

**Теорема 2.1.** Матрица  $P = (p_{ij})$  в [выр. 2.8](#) ортогональна.

*Доказательство.* Любое преобразование базисов вида [2.8](#) должно сохранять длины векторов, то есть

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = P\vec{x} \cdot P\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Так как

$$P\vec{x} \cdot P\vec{x} = \vec{x} \cdot P^T P \vec{x},$$

а  $P^T P$  — симметричная матрица, то  $P^T P = I$ , что и является условием ортогональности.  $\square$

Из ортогональности матрицы  $P$  следует, что

$$1 = \det I = \det(P^T P) = \det P^T \det P = (\det P)^2,$$

откуда  $\det P = \pm 1$ . Если элементы матрицы  $P$  непрерывно зависят от каких-то параметров, то и  $\det P$  также непрерывно зависит от них. Отсюда следует, что при изменении этих параметров величина  $\det P$  не меняется.

Выразим теперь связь между координатами точки в различных реперах. Пусть  $\vec{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  и  $\vec{x}'' = (x''_1, \dots, x''_n)$  — разложения вектора  $\vec{x}$  по базисам  $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$  и  $(\vec{e}''_1, \dots, \vec{e}''_n)$  соответственно, тогда

$$\vec{x}'' = P\vec{x}', \quad \vec{x}' = P^T \vec{x}''.$$



Пусть теперь

$$M = O + \sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}'_j = O_1 + \sum_{j=1}^n x''_j \vec{e}''_j,$$

где

$$O_1 = O + \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}'_j.$$

Тогда из равенств

$$\begin{aligned} O + \sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}'_j &= O + \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}'_j + \sum_{i=1}^n x''_i \vec{e}''_i \\ &= O + \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}'_j + \sum_{j=1}^n \vec{e}'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} x''_i \end{aligned}$$

следует, что

$$x'_j = a_j + \sum_{i=1}^n p_{ij} x''_i, \quad j \in [1 : n]. \quad (2.9)$$

Аналогично

$$x''_j = \sum_{i=1}^n p_{ji} (x'_i - a_i), \quad j \in [1 : n]. \quad (2.10)$$

## 2.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 3 Криволинейные системы координат

### 3.1 Определение

**Определение 3.1.** Открытое связное множество называется *областью*.

**Определение 3.2.** Отображение  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$  называют *гладким отображением класса  $C^r(D)$*  при  $1 \leq r < \infty$ ,  $r = \infty$  или  $r = \omega$ , если оно дифференцируемо до порядка  $r$  включительно, бесконечно дифференцируемо или аналитично соответственно.

**Определение 3.3.** Криволинейной системой координат в области  $D \subset \mathbb{R}^n$  называют систему гладких функций  $(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n))$ , задающих взаимно однозначное отображение области  $D$  на некоторую область  $G \subset \mathbb{R}^n$ , причём якобиан

$$J(y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n}(y) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(y) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

отличен от нуля во всех точках области  $D$ .

*Замечание 3.1.* Отличие от нуля якобиана  $J(y)$  при всех  $y \in D$  гарантирует, что обратное к  $f(y)$  отображение  $f^{-1}(x)$  также является гладким.

**Определение 3.4.** Взаимо однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *гомеоморфизмом*.

Таким образом, криволинейная система координат задаётся двумя гладкими взаимно однозначными отображениями  $f(y)$  и  $f^{-1}(x)$ , устанавливающими гомеоморфизм между множествами  $D$  и  $G$ .

**Определение 3.5.** Гладкий гомеоморфизм  $f : D \rightarrow G$  класса  $C^r(D)$  называют *диффеоморфизмом класса  $C^r(D)$* , а множества  $D$  и  $G$  называют *диффеоморфными*.

Итак, криволинейная система координат в области  $D \subset \mathbb{R}^n$  является некоторым диффеоморфизмом  $f : D \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$  с ненулевым якобианом.

### 3.2 Замена координат

Пусть  $y \in \mathbb{R}^n$ , и в области  $D \subset \mathbb{R}^n$  две системы координат  $x(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y))$  и  $z(y) = (z_1(y), \dots, z_n(y))$  заданы отображениями  $f : D \rightarrow G_1 \subset \mathbb{R}^n$  и  $g : D \rightarrow G_2 \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 3.6.** Заменой координат  $x$  на  $z$  называется отображение  $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ , задаваемое формулой  $\psi = g \circ f^{-1}$ .

*Замечание 3.2.* Замена  $\psi : G_1 \rightarrow G_2$  — диффеоморфизм с ненулевым якобианом, то есть это криволинейная система координат в  $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ .

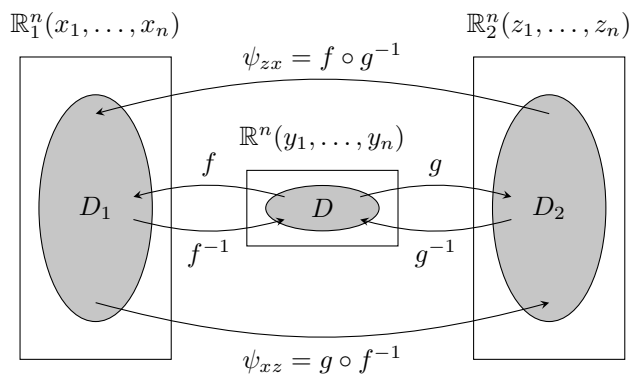


Рис. 3.1

### 3.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 4 Локальные базисы криволинейных координат

Криволинейные координаты обозначим  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in Q = \{\vec{q} \mid \vec{q} = \vec{q}(\vec{r}), \vec{r} \in D\}$ .

### 4.1 Определение

**TODO:** инфа из учебника

**Определение 4.1.** Пусть  $\vec{q}_0 = (q_{10}, q_{20}, q_{30}) \in Q$ ,  $\vec{r}_0 = \vec{r}(\vec{q}_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , тогда множества

$$(q_{i0}) = \{(x, y, z) \in D \mid q_i(x, y, z) = q_{i0}\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

называют *координатными поверхностями* криволинейной системы координат  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  в точке  $(q_{10}, q_{20}, q_{30})$ , а множества

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= (q_{20}) \cap (q_{30}) \\ \tilde{q}_2 &= (q_{10}) \cap (q_{30}) \\ \tilde{q}_3 &= (q_{10}) \cap (q_{20}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

— её *координатными линиями* в этой точке.

**Замечание 4.1.**  $(q_{10}) \cap (q_{20}) \cap (q_{30}) = \{(x_0, y_0, z_0)\}$ .

По определению, якобиан криволинейной системы координат отличен от нуля в каждой точке области определения  $Q$ . Векторы  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$  составляют строки матрицы этого якобиана и поэтому не могут быть нулевыми.

**Теорема 4.1.** Векторы  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$  являются касательными соответственно к линиям  $\tilde{q}_1$ ,  $\tilde{q}_2$ ,  $\tilde{q}_3$  в точке  $\vec{q}_0$ .

*Доказательство.* Для наглядности рассмотрим координатную кривую  $\tilde{q}_1$ . Эта кривая параметризуется переменной  $q_i$  в точке  $\vec{q}_0$ . Положим  $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$ , тогда производная  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$  даст направление касательной к этой кривой в точке  $\vec{q}_0$ .  $\square$

**Определение 4.2.** Совокупность векторов  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3)$ , определяемых формулой

$$\vec{\tau}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|}, \quad i = 1, 2, 3$$

называют *локальным базисом* криволинейной системы координат в точке  $\vec{q}_0$ .

**Определение 4.3.** Если векторы  $\vec{\tau}_1$ ,  $\vec{\tau}_2$ ,  $\vec{\tau}_3$  взаимно ортогональны в точке  $\vec{q}_0$ , то криволинейная система координат называется *ортогональной* в этой точке.

## 4.2 Условие ортогональности

Так как векторы  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$  ненулевые, то условия ортогональности локального базиса

$$\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \quad (4.3)$$

## 4.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 5 Коэффициенты Ламе. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

### 5.1 Общие сведения

В качестве пространства будем использовать аффинное евклидово пространство  $\mathbb{E}^n$ .

**Определение 5.1.** Положением механической системы в момент  $t_0$  будем называть точку  $M^0 \in \mathbb{E}^n$ .

**Определение 5.2.** Пусть  $J$  — промежуток на  $\mathbb{R}$ . Движением механической системы будем называть дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $D : J \rightarrow \mathbb{E}^n$  времени  $t$  такую, что  $D(t_0) = M^0$ .

**Определение 5.3.** Предположим, что точка этого пространства может быть задана радиус-вектором  $\vec{r}$  в какой-либо декартовой системе координат, то есть движение этой точки представлено вектор-функцией  $\vec{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В этом случае *скоростью* и *ускорением* точки в этом движении называют соответственно вектор-функции  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  и  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ , а *траекторией* точки называют кривую  $\{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in J\}$ .

### 5.2 Коэффициенты Ламе

Так как

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m} \vec{k}, \quad (5.1)$$

то, введя обозначение

$$H_m = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_m} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_m} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_m} \right)^2}, \quad (5.2)$$

векторы локального базиса можно представить в виде

$$\vec{\tau}_m = \frac{1}{H_m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}, \quad (5.3)$$

или, иначе:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = H_m \vec{\tau}_m. \quad (5.4)$$

**Определение 5.4.** Величины  $H_m$  (иногда удобнее обозначение  $H_{q_m}$ ) называют *коэффициентами Ламе*.

Выразим направляющие косинусы осей локального базиса криволинейной системы координат  $\vec{q}$  относительно осей декартовой системы координат:

$$\cos \angle(\vec{\tau}_m, \vec{i}) = \vec{\tau}_m \cdot \vec{i} = \frac{1}{H_m} \frac{\partial x}{\partial q_m}, \quad \dots, \quad m = 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

**Определение 5.5.** Движением точки в криволинейных координатах  $\vec{q}$  называют дважды непрерывно дифференцируемую на промежутке  $J \subset \mathbb{R}$  вектор-функцию  $\vec{q}(t)$ .

**Определение 5.6.** Функции  $\dot{\vec{q}}$  и  $\ddot{\vec{q}}$  называют соответственно *обобщённой скоростью* и *обобщённым ускорением точки в движении  $\vec{q}(t)$* .

**Определение 5.7.** Кривую

$$\Gamma = \{\vec{q}(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in J\}$$

называют *траекторией точки в криволинейных координатах*.

### 5.3 Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

Напишем вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (5.6)$$

тогда по формулам 5.4 получим

$$\vec{v} = H_1 \dot{q}_1 \vec{\tau}_1 + H_2 \dot{q}_2 \vec{\tau}_2 + H_3 \dot{q}_3 \vec{\tau}_3.$$

Это равенство можно рассматривать как разложение вектора скорости по единичным векторам осей криволинейных координат; для проекций скорости на координатные оси будем иметь

$$v_{q_m} = H_{q_m} \dot{q}_m \quad (m = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

Если криволинейная система ортогональна, то

$$v = \sqrt{(H_1 \dot{q}_1)^2 + (H_2 \dot{q}_2)^2 + (H_3 \dot{q}_3)^2}, \quad (5.8)$$

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{\tau}_m) = H_m \dot{q}_m v^{-1}, \quad m = 1, 2, 3.$$

### 5.4 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 6 Проекция ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат

Для определения проекций ускорения представим их в виде

$$w_{q_m} = \vec{w} \cdot \vec{\tau}_m = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{1}{H_m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m},$$

откуда

$$H_m w_{q_m} = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}. \quad (6.1)$$

Из [выр. 5.6](#) непосредственно следует

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}. \quad (6.2)$$

Кроме того, по определению полной производной

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_m} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_m} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_m} \dot{q}_3;$$

но это же выражение получим, если возьмём от обеих частей [выр. 5.6](#) частную производную по  $q_m$ . Действительно, так как  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  зависят только от времени, а не от  $q_1, q_2, q_3$ , то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \partial q_3} \dot{q}_3;$$

таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m}. \quad (6.3)$$

Подставляя значения  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$  по [выр. 6.2](#) и  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$  по [выр. 6.3](#) в равенство [6.1](#), получим

$$H_m w_{q_m} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m}. \quad (6.4)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \frac{v^2}{2}, \\ \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m} &= \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{v^2}{2}, \end{aligned}$$

на основании [выр. 6.4](#) получим выражение проекций ускорения на оси криволинейной системы координат:

$$w_{q_m} = \frac{1}{H_m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right), \quad (6.5)$$



где для краткости введено обозначение

$$T = \frac{1}{2}v^2. \quad (6.6)$$

Используя линейный дифференциальный оператор Эйлера-Лагранжа, определяемый формулой

$$E_{q_m}(T) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}, \quad (6.7)$$

окончательно получаем

$$w_{q_m} = \frac{1}{H_{q_m}} E_{q_m}(T). \quad (6.8)$$

## 6.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 7 Натуральный триэдр. Проекция ускорения точки на оси натурального триэдра

### 7.1 Натуральный триэдр траектории

**TODO:** картинки из книги (страница 184)

Рассмотрим некоторую кривую, не лежащую в одной плоскости (кривую двойкой кривизны). Установим на этой кривой начало  $M_0$  и положительное направление отсчёта дуг  $\sigma$ . Возьмём какую-нибудь текущую точку  $M$ , положение которой определим либо дугой  $\sigma$ , либо вектор-радиусом  $\vec{r}$  относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Через точку  $M$  проведём касательную к кривой; направление касательной в сторону возрастающих значений  $\sigma$  зададим единичным вектором касательной  $\vec{\tau}$ .

Возьмём на кривой весьма близкую к  $M$  точку  $M_1$ ; пусть положение её определяется значением дуги  $\sigma + \Delta\sigma$ , причём  $\Delta\sigma > 0$ , то есть  $M_1$  лежит за  $M$  в сторону положительного отсчёта дуги. Единичный вектор касательной в точке  $M_1$  обозначим через  $\vec{\tau}_1$ . Проведём через  $\vec{\tau}$  плоскость  $\Pi$ , параллельную  $\vec{\tau}_1$ ; чтобы построить её, достаточно перенести  $\vec{\tau}_1$  в точку  $M$ ; два вектора  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau}_1$ , имеющие начало в точке  $M$ , определяют положение  $\Pi$ . При изменении положения  $M_1$  плоскость  $\Pi$  также изменяет своё положение, вращаясь вокруг  $\vec{\tau}$ ; если будем приближать  $M_1$  к  $M$ , уменьшая  $\Delta\sigma$  до нуля, то эта плоскость будет приближаться к некоторому предельному положению  $\Pi_0$ , называемому *соприкасающейся плоскостью*.

В точке  $M$  проведём плоскость  $N_0$ , перпендикулярную к касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью* кривой. Любая прямая, проведённая в этой плоскости через точку  $M$ , будет перпендикулярна к  $\vec{\tau}$ , то есть будет *нормальна* кривой; линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей определяет *главную нормаль* кривой. Иными словами, главной нормалью называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпендикулярная к главной нормали, называется *бинормалью* кривой.

**Определение 7.1.** Совокупность трёх взаимно перпендикулярных осей:

1. касательной, направленной в сторону возрастания дуги,
2. главной нормали, направленной в сторону вогнутости кривой, и
3. бинормали, направленной по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось  $Oz$  расположена по отношению к осям  $Ox$  и  $Oy$ ,

образует так называемый *натуральный триэдр* (естественный трёхгранник) кривой. Единичные векторы этих осей обозначим соответственно через  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$ .

Найдём выражения этих трёх единичных векторов натурального триэдра через вектор-радиус точки на кривой, заданный как вектор-функция дуги:

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma). \quad (7.1)$$

Найдём прежде всего  $\vec{\tau}$ . По определению векторной производной вектор  $\frac{d\vec{r}}{d\sigma}$  направлен по касательной к годографу вектора  $\vec{r}$  в сторону возрастающих  $\sigma$ . С другой стороны, численная величина производной равна

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{d\sigma} = 1.$$

Таким образом, векторная производная представляет собой искомый единичный вектор касательной:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma}. \quad (7.2)$$

Для определения единичного вектора главной нормали  $\vec{n}$  обратимся к рисунку. Рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный векторами  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau}_1$  в плоскости  $\Pi$ . Если точка  $M_1$  взята на весьма малом расстоянии  $\Delta\sigma$  от точки  $M$ , то угол  $\varepsilon$  между касательными  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau}_1$  в смежных точках кривой — его называют *углом смежности* — будет также мал и вектор  $\Delta\vec{\tau}$  с тем меньшей ошибкой, чем меньше  $\Delta\sigma$ , можно считать перпендикулярным к  $\vec{\tau}$  и, следовательно, параллельным вектору нормали  $\vec{n}'$ , лежащему с  $\Delta\vec{\tau}$  в одной и той же плоскости  $\Pi$ . По величине  $|\Delta\vec{\tau}|$ , как основание равнобедренного треугольника с малым углом  $\varepsilon$  при вершине и боковыми сторонами, равными единице, будет равен

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2 |\vec{\tau}| \sin \frac{\varepsilon}{2} \approx 2 \cdot 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда найдём (с точностью до малых высших порядков)

$$\Delta\vec{\tau} = \varepsilon \vec{n}',$$

или

$$\vec{n}' = \frac{1}{\varepsilon} \Delta\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma} \cdot \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}.$$

Будем приближать  $\Delta\sigma$  к нулю, тогда точка  $M_1$  будет стремиться к  $M$ , плоскость  $\Pi$  — к соприкасающейся плоскости  $\Pi_0$ , единичный вектор нормали  $\vec{n}'$  — к искомому единичному вектору  $\vec{n}$ , и мы будем иметь

$$\vec{n} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma} \cdot \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}.$$

Первый предел равен векторной производной

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2};$$

что же касается второго предела, то заметим, что отношение  $\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma}$ , определяющее среднюю скорость поворота касательной к кривой при переходе от данной точки к смежной, характеризует *среднюю кривизну* кривой на участке  $(\sigma, \sigma + \Delta\sigma)$ , а величина

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = K \quad (7.3)$$

определяет *кривизну* кривой в данной точке.

Таким образом, имеем следующее выражение единичного вектора *главной нормали*:

$$\vec{n} = \frac{1}{K} \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{K} \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}. \quad (7.4)$$

Величину  $1/K = \rho$ , имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны* кривой в данной точке.

В случае произвольной кривой через данную её точку и две смежные с нею точки можно провести круг, который при стремлении смежных точек к данной рассматриваемой будет стремиться к некоторому предельному кругу, называемому *соприкасающимся кругом* или *кругом кривизны*. Радиус этого круга будет радиусом кривизны кривой, центр круга  $C$  (**TODO**: ссылка на картинку) — *центром кривизны* кривой. Очевидно, круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости, центр кривизны  $C$  — на главной нормали со стороны вогнутости кривой.

Введя радиус кривизны  $\rho$ , получим

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \rho \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}. \quad (7.5)$$

Теперь уже не составляет труда найти и единичный вектор бинормали. Из условия выбора положительного направления на бинормали следует:

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \frac{1}{K} \left( \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2} \right) = \rho \left( \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2} \right). \quad (7.6)$$

## 7.2 Разложение ускорения по осям натурального триэдра траектории

Обозначим через  $v_\tau$  проекцию вектора скорости на направление касательной к траектории. Очевидно, что  $v_\tau$  по абсолютной величине равно численной величине скорости  $v$ ; что же касается знака  $v_\tau$ , то  $v_\tau$  положительно, если направление движения в данный момент совпадает с направлением положительного отсчёта дуг  $\sigma$  по траектории, и отрицательно в противном случае. Будем иметь

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}. \quad (7.7)$$

Если  $s$  — пройденный путь, то  $d\sigma = ds$ , когда  $d\sigma > 0$ , и  $d\sigma = -ds$ , если  $d\sigma < 0$ , поэтому

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \pm \frac{ds}{dt} = \pm v. \quad (7.8)$$

Вектор ускорения есть производная по времени от вектора скорости, поэтому

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (7.9)$$

Далее, имеем

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt};$$

согласно формулам 7.4 и 7.8 найдём

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{n}v_\tau.$$

Подставив полученное выражение в равенство 7.9, будем иметь

$$\vec{w} = \vec{\tau}\frac{dv_\tau}{dt} + \vec{n}\frac{v^2}{\rho}, \quad (7.10)$$

где  $v_\tau^2$  заменено на равное ему  $v^2$ .

Равенство 7.10 представляет собой *разложение вектора ускорения по осям натурального триэдра*.

Обозначим коэффициенты при единичных векторах  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  в разложении 7.10, то есть проекции ускорения на оси натурального триэдра, соответственно через  $w_\tau$ ,  $w_n$  и  $w_b$ ; тогда будем иметь

$$\vec{w} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n} + w_b\vec{b}, \quad (7.11)$$

причём из вып. 7.10 следует, что

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что вектор ускорения перпендикулярен к бинормали, то есть *ускорение лежит в соприкасающейся плоскости*.

Первое слагаемое в разложении 7.11,  $w_\tau\vec{\tau}$ , даёт *касательную* (тангенциальную) составляющую ускорения, второе,  $w_n\vec{n}$ , — *нормальную* составляющую ускорения. Иногда для краткости их называют просто касательным и нормальным ускорениями.

Нормальное ускорение всегда совпадает по направлению с главной нормалью, так как  $w_n = \frac{v^2}{\rho}$  — существенно положительная величина. Вспоминая ранее сказанное о направлении  $\vec{n}$ , видим, что *нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории* (нормальное ускорение иногда ещё называют поэтому *центростремительным*), то есть по главной нормали к траектории в сторону её вогнутости. Отсюда вытекает свойство ускорения: *вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории*.

Итак, *вектор ускорения в криволинейном движении может быть представлен как геометрическая сумма двух ускорений: касательного и нормального*.

Величина ускорения может быть представлена так:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}, \quad (7.12)$$

а направление задано косинусами углов, составляемых им с касательной и главной нормалью к траектории:

$$\cos(\widehat{\vec{w}, \vec{\tau}}) = \frac{w_\tau}{w}, \quad \cos(\widehat{\vec{w}, \vec{n}}) = \frac{w_n}{w}. \quad (7.13)$$

### 7.3 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 8 Определение кривизны траектории точки по движению

### 8.1 Кинематический метод

Если известны модули скорости  $v = v(t)$  и ускорения  $w = w(t)$  движения точки, то кривизну траектории можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} w_\tau = \dot{v}, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}, \\ K = \frac{w_n}{v^2}, \quad \rho = \frac{1}{K}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Если движение точки задано тройкой скалярных функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , то

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Если же движение точки задано тройкой ортогональных криволинейных координат — скалярных функций  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$ , то проекции скорости и ускорения точки выразятся по формулам 5.7 и 6.8 как

$$v_{q_m} = H_{q_m} \dot{q}_m, \quad w_{q_m} = \frac{1}{H_{q_m}} E_{q_m}(T), \quad m = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_{q_1}(t))^2 + (v_{q_2}(t))^2 + (v_{q_3}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(w_{q_1}(t))^2 + (w_{q_2}(t))^2 + (w_{q_3}(t))^2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

### 8.2 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 9 Движение точки по прямой и по окружности

### 9.1 Прямолинейное движение

**Определение 9.1.** *Прямолинейное движение* — движение точки, траектория которой лежит на прямой.

Начало системы  $Oxyz$  поместим на этой прямой, а ось  $x$  направим вдоль неё. Тогда получим уравнение траектории:

$$y = 0, \quad z = 0,$$

тогда

$$v^2 = (\dot{x}(t))^2, \\ w^2 = (\ddot{x}(t))^2$$

и, как следствие,

$$w_\tau^2 = (\dot{v})^2 = (\ddot{x})^2, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = 0, \\ K = 0, \quad \rho = +\infty.$$

**Определение 9.2.** Прямолинейное движение называют *равномерным*, если  $v(t) = v_0$ , где  $v_0$  — постоянная.

Уравнение движения:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0), \quad x(t_0) = x_0.$$

Естественная координата:

$$s = |v_0(t - t_0)|.$$

**Определение 9.3.** Прямолинейное движение называют *равнопеременным*, если  $w(t) = w_0$ , где  $w_0$  — постоянная.

Уравнение движения:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{w_0}{2}(t - t_0)^2, \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v(t_0) = v_0.$$

Естественная координата:

$$s = \left| v_0(t - t_0) + \frac{w_0}{2}(t - t_0)^2 \right|.$$

### 9.2 Движение по окружности

**Определение 9.4.** *Углом поворота между векторами* называется вектор

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} (\arccos(\vec{a}, \vec{b})) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}, & \vec{a} \nparallel \vec{b}; \\ \vec{0}, & \vec{a} \parallel \vec{b}. \end{cases}$$



**Определение 9.5.** Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется величина

$$|\angle(\vec{a}, \vec{b})| = \arccos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Когда говорят об угле между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , отсчитываемом от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$ , то имеют в виду угол поворота  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Определение 9.6.** Движением по окружности называют любое движение точки, траектория которого лежит на окружности.

В случае движения по окружности угол смежности  $\varepsilon$  равен центральному углу между радиусами, проведёнными в точки касания, а соответствующая дуга равна произведению этого угла на радиус  $R$ , то есть

$$\Delta\sigma = \varepsilon R, \implies \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \frac{1}{R},$$

поэтому

$$K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \frac{1}{R}, \quad \rho = R.$$

(**TODO:** решить, куда поместить определения угловой скорости и ускорения, а также скалярные и векторные формулы скорости и ускорения точек)

**Определение 9.7.** Движение по окружности называют *равномерным вращением*, если  $\omega(t) = \omega_0$ , где  $\omega_0$  — постоянная.

В этом случае

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

**Определение 9.8.** Движение по окружности называют *равнопеременным вращением*, если  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — постоянная.

В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\varepsilon_0}{2}(t - t_0)^2, \\ \varphi(t_0) &= \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega(t_0) = \omega_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи движения по окружности:

1. Если тело вращается равномерно, то  $\varepsilon(t) = 0$ , поэтому

$$w_\tau = 0, \quad w_n = R\omega_0^2.$$

2. Если в некоторый момент времени угловая скорость  $\omega$  тела достигает максимального или минимального значения, то  $\dot{\omega} = \varepsilon = 0$ , поэтому

$$w_\tau = 0, \quad w_n = R\omega_0^2.$$

3. Если в некоторый момент угол поворота достигает максимального или минимального значения, то  $\dot{\varphi} = \omega = 0$ , поэтому

$$w_\tau = 0, \quad w_n = 0.$$

### 9.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 10 Движение механической системы. Твёрдое тело. Число степеней свободы положения

### 10.1 Движение механической системы

Пусть  $T$  — некоторое множество индексов  $\tau$ , которыми помечены все точки механической системы, а  $J \subset \mathbb{R}$  — промежуток времени  $t$ , на котором определено движение механической системы.

Пространством будем считать аффинное евклидово пространство  $\mathbb{E}^n$ ; точку этого пространства  $M = (x, y, z) \in \mathbb{E}^n$  будем представлять вектор-радиусом  $\vec{r}$  в декартовой системе координат.

**Определение 10.1.** *Положением механической системы в момент времени  $t_0$  будем называть семейство  $\mathcal{M} = \{M_\tau\}_{\tau \in T}$  точек в  $\mathbb{E}^n$ .*

**Определение 10.2.** *Движением механической системы будем называть семейство  $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \rightarrow \mathbb{E}^n\}_{\tau \in T}$  дважды непрерывно дифференцируемых функций времени  $t$  такое, что*

$$\forall \tau \in T \quad D_\tau(t_0) = M_\tau.$$

Ясно, что положением механической системы в любой другой момент времени  $t \in J$  будет семейство  $\{D_\tau(t)\}_{\tau \in T}$ .

**Определение 10.3.** *Перемещением механической системы за время от  $t_1$  до  $t_2$  называют семейство векторов  $\{\overline{AB} \mid A = D_\tau(t_1), B = D_\tau(t_2)\}_{\tau \in T}$ .*

### 10.2 Твёрдое тело

**Определение 10.4.** *Классом движений назовём некоторое множество движений  $\mathcal{DM}$ .*

**Определение 10.5.** *Неизменяемой на классе движений назовём такую механическую систему, что*

$$\forall t \in J \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in T \quad \rho(D_{\tau_1}(t), D_{\tau_2}(t)) = \rho(M_{\tau_1}, M_{\tau_2})$$

для любого движения этого класса.

**Определение 10.6.** *Механическую систему назовём сплошной связной средой на классе движений, если каждое её положение есть область или замкнутая область в  $\mathbb{E}^n$ .*

**Определение 10.7.** *Твёрдым телом или абсолютно твёрдым телом на классе движений назовём сплошную связную неизменяемую механическую систему на этом классе движений.*

### 10.3 Число степеней свободы

Будем говорить, что движение  $\mathcal{DM} = \{D_\tau\}_{\tau \in T}$  может быть выражено через систему скалярных функций

$$q_i : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

если

$$\begin{aligned} \forall \tau \in T \quad & \exists (q_1, \dots, q_m) \mapsto f_\tau(q_1, \dots, q_m) \\ \forall t \in J \quad & D_\tau(t) = f_\tau(q_1(t), \dots, q_m(t)). \end{aligned} \quad (10.1)$$

**Определение 10.8.** Говорят, что механическая система имеет  $s$  степеней свободы положения на классе движений, если всякое движение этого класса может быть выражено через некоторую систему скалярных функций

$$q_i : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, s$$

и если хотя бы одно движение этого класса не может быть выражено ни через какую систему из меньшего числа скалярных функций.

Если класс движений очевиден из контекста, то говорят просто о числе  $s$  степеней свободы механической системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из конечного числа  $N$  точек. Такая система на классе всех движений в  $\mathbb{E}^n$  имеет  $s = n \cdot N$  степеней свободы.

Рассмотрим такой подкласс всех движений этой системы, для которых координаты  $(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ ,  $\nu = 1, \dots, N$  её точек удовлетворяют уравнениям

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

причём функции  $f_\nu$  аргументов  $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$  независимы при  $t \in J$ ; будем считать, что ранг матрицы Якоби этих функций равен  $m$ . В этом случае говорят, что рассматривается механическая система из  $N$  точек, стеснённая  $m$  голономными связями.

**Теорема 10.1.** Механическая система в  $\mathbb{E}^n$  из  $N$  точек, стеснённая  $m$  голономными связями, имеет

$$s = n \cdot N - m$$

степеней свободы.

*Доказательство.* (TODO: доказать утверждение) □

**Теорема 10.2.** Для твёрдого тела на классе всех его движений в  $\mathbb{E}^n$  число степеней свободы положения равно

$$s = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

*Доказательство.* (TODO: доказать утверждение (указания можно найти на 37 странице конспекта)) □

**Определение 10.9.** Движение твёрдого тела называют *поступательным*, если у подвижного репера, связанного с этим телом, с течением времени может изменяться только начало.

**Определение 10.10.** Движение твёрдого тела называют *вращением вокруг точки  $O$* , если с течением времени не меняются координаты (в неподвижной системе) некоторой точки  $O$  этого тела.

(**TODO:** найти число степеней свободы положения твёрдого тела на этих двух классах движений)

## 10.4 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 11 Группа движений аффинного евклидова пространства

### 11.1 Предварительные сведения

**Определение 11.1.** Законом композиции на множестве  $X$  называют отображение

$$* : X \times X \rightarrow X.$$

Вместо  $*(a, b)$  пишут  $a * b$ .

**Определение 11.2.** Пусть  $*$  — закон композиции на  $X$ . Тогда пару  $(X, *)$  называют *алгебраической структурой*.

**Определение 11.3.** Пусть  $*$  — закон композиции на  $X$ . Если

$$\forall a, b, c \in X \quad a * (b * c) = (a * b) * c,$$

то закон композиции  $*$  называется *ассоциативным*.

**Определение 11.4.** Алгебраическая структура  $(X, *)$  называется *полугруппой*, если закон композиции  $*$  ассоциативен.

**Определение 11.5.** Элемент  $e \in X$  называется *единичным* или *нейтральным* относительно закона композиции  $*$ , если

$$\forall x \in X \quad e * x = x * e = x.$$

*Замечание 11.1.* В алгебраической структуре  $(X, *)$  не может быть более одного единичного элемента.

**Определение 11.6.** Полугруппу с единицей называют *моноидом*.

**Определение 11.7.** Элемент  $a$  моноида  $(X, *, e)$  называют *обратимым*, если

$$\exists b \in X : \quad a * b = b * a = e.$$

Для элемента  $b$  используют обозначение  $a^{-1}$ .

**Определение 11.8.** Моноид, все элементы которого обратимы, называют *группой*.

**Определение 11.9.** Закон композиции  $*$  называют *коммутативным*, если

$$\forall a, b \in X \quad a * b = b * a.$$

**Определение 11.10.** Группу с коммутативным законом композиции называют *абелевой* (*коммутативной*) группой.

**Определение 11.11.** Подмножество  $H$  группы  $G$  называется *подгруппой* группы  $G$ , если:

1.  $H$  содержит единичный элемент из  $G$ :

$$e \in H;$$

2.  $H$  содержит композицию любых двух элементов из  $H$ :

$$\forall a, b \in H \quad a * b \in H;$$

3.  $H$  содержит вместе со всяким своим элементом  $h$  обратный к нему элемент  $h^{-1}$ :

$$\forall h \in H \quad h^{-1} \in H.$$

Пусть  $s(\Omega)$  — множество всех биективных отображений  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ . Введём закон композиции  $*$  :  $s(\Omega) \times s(\Omega) \rightarrow s(\Omega)$  такой, что

$$\forall \varphi, \psi \in s(\Omega) \quad \varphi * \psi = \varphi \circ \psi;$$

тогда  $(s(\Omega), *)$  — группа, причём её единицей является тождественное отображение  $\text{id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$  такое, что

$$\forall x \in \Omega \quad \text{id}_\Omega(x) = x.$$

## 11.2 Группа движений твёрдого тела

(TODO: Дальше может быть путаница в терминах. Короче, надо понять, что в его понимании такое "перемещение но вот как я это понимаю. Рассмотрим некоторое движение твёрдого тела  $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \rightarrow \mathbb{E}^3\}_{\tau \in T}$ . Функция  $D_\tau$  задаёт перемещение точки  $M_\tau$  твёрдого тела. У нас есть формула, по которому мы можем найти коэффициенты  $x_j^\tau(t)$ , то есть перемещению точки соответствует биекция  $D : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ , задающаяся этой формулой. В этом случае получается, что каждому движению твёрдого тела соответствует множество таких биекций. Если это всё верно, то надо аккуратно переписать всё в верных терминах.)

Рассмотрим движение  $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \rightarrow \mathbb{E}^3\}_{\tau \in T}$  механической системы в  $\mathbb{E}^3$ .

Пусть  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  — некоторый фиксированный репер в  $\mathbb{E}^3$  и пусть

$$M_\tau = D_\tau(t) = O + \sum_{j=1}^3 x_j^\tau(t) \vec{e}_j, \quad \tau \in T. \quad (11.1)$$

Так как свободное твёрдое тело (твёрдое тело на классе всех движений в  $\mathbb{E}^3$ ) имеет 6 степеней свободы, то функции  $x_j^\tau(t)$  могут быть выражены через какие-то 6 скалярных функций  $q_1, \dots, q_6$ .

четыре точки  $M_0, M_1, M_2, M_3$  твёрдого тела выберем так, чтобы векторы  $\vec{M_0M_1}, \vec{M_0M_2}, \vec{M_0M_3}$  образовывали ортонормированный базис  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

пространства  $\mathbb{R}^3$ . Тогда каждая точка  $M_\tau$  твёрдого тела определяется своими аффинными координатами в репере  $(M_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ :

$$M_\tau = M_0 + \sum_{j=1}^3 y_j^\tau \vec{i}_j, \quad (11.2)$$

причём координаты  $y_j^\tau$  не зависят от времени.

Векторы  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , построенные по движущимся точкам  $M_0, M_1, M_2, M_3$ , являются функциями времени:

$$\vec{i}_j = \vec{i}_j(t), \quad j = 1, 2, 3.$$

Ортонормированные базисы  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  и  $(\vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$  пространства  $\mathbb{R}^3$  связаны равенствами

$$\vec{i}_k = \sum_{j=1}^3 p_{kj}(t) \vec{e}_j, \quad k = 1, 2, 3, \quad (11.3)$$

где матрица  $P(t) = (p_{kj}(t))$  ортогональна.

Если  $D_{M_0}$  — движение точки  $M_0$  и

$$D_{M_0}(t) = O + \sum_{j=1}^3 a_j(t) \vec{e}_j,$$

то

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum_{k=1}^3 p_{kj}(t) y_k^\tau, \quad j = 1, 2, 3. \quad (11.4)$$

Элементы  $p_{kj}$  ортогональной матрицы  $P$  могут быть выражены через углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ , поэтому формулы 11.4 дают искомое представление для функций  $x_j^\tau$  через шесть функций  $a_1(t), a_2(t), a_3(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ . Это значит, что всякому перемещению соответствует биективное отображение  $D : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ , определяемое формулами 11.4.

Задавая всевозможные движения (то есть функции  $a_1, a_2, a_3, \varphi, \psi, \theta$ ) и фиксируя всевозможные моменты времени  $t \in J$ , мы будем получать те или иные перемещения твёрдого тела за время от  $t_0$  до  $t$  и соответствующие ему биекции  $D : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ .

**Теорема 11.1.** Семейство  $D_3$  всех таких биекций является подгруппой группы  $s(\mathbb{E}^3)$ .

*Доказательство.* (TODO: указания на странице 44 конспекта) □

**Определение 11.12.** Семейство  $D_3$  называют группой движений в  $\mathbb{E}^3$ .



### 11.3 Подгруппы движений

**Определение 11.13.** Если матрица  $P(t)$  не зависит от времени, то движение твёрдого тела называют *поступательным*.

Каждому перемещению твёрдого тела за время от  $t_0$  до  $t$  в некотором поступательном движении соответствует некоторое множество биекций  $D : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ , определяемых формулами:

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum_{k=1}^3 p_{kj}^0 y_k^\tau, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $P(t_0) = P^0 = (p_{kj}^0)$ .

**Теорема 11.2.** Множество  $D_3^{(n)}$  всех таких биекций

### 11.4 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 12 Поступательное движение твёрдого тела

Под *поступательным* движением абсолютно твёрдого тела понимают такое его движение, при котором прямая, проведённая через любые две точки тела и жёстко с ним связанная, остаётся во всё время движения *параллельной самой себе*.

Точки *поступательно* движущегося тела могут описывать *любые криволинейные траектории*, но движение тела сохраняет свой *поступательный* характер.

**Теорема 12.1.** *При поступательном движении твёрдого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.*

*Доказательство.* Определим положение любой точки  $M$  твёрдого тела вектор-радиусом  $\vec{r}'$ , проведённым из некоторой точки  $O'$ , также принадлежащей телу (TODO: ссылка на рисунок). Если движение поступательное, то по определению вектор  $\vec{r}'$  остаётся параллельным самому себе. Величина вектора  $\vec{r}'$  ( $r' = O'M$ ) не изменяется, так как тело твёрдое. Итак,  $\vec{r}'$  является постоянным вектором.

Обозначим через  $\vec{r}_0$  вектор-радиус точки  $O'$  относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (12.1)$$

показывает, что траектория точки  $M$  получается из траектории точки  $O'$  путём параллельного перенесения её на постоянный по величине и направлению вектор. Следовательно, *траектории точек твёрдого тела, движущегося поступательно, представляют собой конгруэнтные кривые*, получающиеся друг из друга путём параллельного переноса.

Дифференцируя обе части формулы 12.1 по времени и замечая, что производная постоянного вектора  $\vec{r}'$  равна нулю, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt},$$

или, вспоминая определение вектора скорости,

$$\vec{v} = \vec{v}_0, \quad (12.2)$$

то есть *скорости всех точек твёрдого тела, движущегося поступательно, в любой момент времени друг другу равны как по величине, так и по направлению*.

Дифференцируя обе части 12.2 ещё раз по времени, получаем

$$\vec{w} = \vec{w}_0, \quad (12.3)$$

то есть *ускорения всех точек поступательно движущегося твёрдого тела в любой момент времени одинаковы*.  $\square$

## 12.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 13 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

### 13.1 Определение. Основные понятия

Рассмотрим движение твёрдого тела, при котором две точки его остаются неподвижными; такое движение представляет собой вращение тела вокруг проходящей через неподвижные точки прямой, называемой *осью вращения*.

Пусть ось вращения тела совпадает с осью  $Oz$ . Чтобы определить положение тела, проведём через ось  $Oz$  две полуплоскости: подвижную  $Q$ , твёрдо связанную с вращающимся телом, и неподвижную  $P$  (TODO: картинка). Заданием двугранного угла  $\varphi$  между этими полуплоскостями положение твёрдого тела вполне определяется.

Движение твёрдого тела, имеющего неподвижную ось вращения, определяется заданием угла  $\varphi$  в функции времени:

$$\varphi = f(t). \quad (13.1)$$

Это уравнение называется *уравнением вращения* тела.

Величина, учитывающая быстроту изменения угла поворота со временем, называется *угловой скоростью* тела.

Условимся обозначать абсолютное значение некоторой величины как  $a$ , а её алгебраическое значение как  $\tilde{a}$ . Конечно,  $|\tilde{a}| = a$ . В случае угловой скорости будем использовать соответственно обозначения  $\omega$  и  $\tilde{\omega}$ .

За меру быстроты изменения угла поворота с течением времени примем отношение приращения угла  $\Delta\varphi$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это приращение произошло. Такое отношение назовём *средней угловой скоростью* за промежуток времени  $\Delta t$  и обозначим

$$\tilde{\omega}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Желая перейти от средней угловой скорости за некоторый промежуток времени к *истинной угловой скорости в данный момент*, будем стремиться интервал времени  $\Delta t$  к нулю. По определению производной угловая скорость  $\tilde{\omega}$  в данный момент будет равна

$$\tilde{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\omega}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (13.2)$$

Аналогично вводится понятие *среднего углового ускорения* за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}$$

и *углового ускорения в данный момент*:

$$\tilde{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}}. \quad (13.3)$$

Из формулы 13.2 будет также следовать

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

### 13.2 Векторные формулы скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Введём в рассмотрение *вектор угловой скорости*, который будем обозначать через  $\vec{\omega}$ .

Величиной вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  является

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \dot{\varphi}.$$

Условимся направлять вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  по оси вращения так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора  $\vec{\omega}$ , видел вращение тела в положительном направлении, то есть против часовой стрелки при правой системе координат.

Откладывая вектор  $\vec{\omega}$  по оси вращения, можно определить вектор линейной скорости  $\vec{v}$  любой точки  $M$  как векторное произведение вектора угловой скорости на вектор-радиус этой точки относительно любой точки оси вращения (*формула Эйлера*) (TODO: картинка):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (13.4)$$

В самом деле, величина векторного произведения 13.4 равна

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega h,$$

то есть величине скорости; пусть, далее, принята правая система осей, тогда при показанном стрелкой направлении вращения вектор угловой скорости должен быть отложен по оси вращения вверх (TODO: картинка 140). Векторное произведение  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  перпендикулярно к  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$  и направлено так, чтобы, смотря с его конца, видеть поворот от  $\vec{\omega}$  к  $\vec{r}$  на наименьший угол против часовой стрелки; но это и будет направление скорости  $\vec{v}$ .

Выведем теперь векторную формулу ускорения. Для этого возьмём векторную производную по времени от обеих частей равенства 13.4; будем иметь

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (13.5)$$

Производную по времени от вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  назовём *вектором углового ускорения*. Называя вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  и замечая, что по определению скорости  $\vec{r}' = \vec{v}$ , приведём 13.5 к виду

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (13.6)$$

Первое слагаемое,  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ , представляет собой *вращательную* составляющую ускорения. Действительно, оно равно по величине

$$w^{(\text{в})} = \varepsilon r \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}) = \varepsilon h,$$

а по направлению совпадает со скоростью  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , если векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлены, и противоположно скорости, если  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  разнонаправлены.

Второе слагаемое в формуле 13.6 представляет собой *осестремительное* ускорение. Его величина равна

$$w^{(\text{ос})} = \omega v \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega^2 h,$$

так как векторы  $\omega$  и  $v$  взаимно перпендикулярны, а  $v = \omega h$ .

Направление векторного произведения  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  перпендикулярно к оси вращения (вектору  $\vec{\omega}$ ) и скорости  $\vec{v}$ , то есть идёт по радиусу круга, описываемого точкой, к его центру. Итак, действительно,

$$\vec{w}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (13.7)$$

### 13.3 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 14 Плоское движение твёрдого тела. Преобразование координат

**Определение 14.1.** Движение, при котором все точки твёрдого тела, расположенные в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, во всё время движения остаются в тех же плоскостях, называется *плоским движением*.

Если разбить мысленно тело на плоские сечения, параллельные заданной плоскости, то эти сечения будут оставаться каждое в своей плоскости. (TODO: картинка (книга, страница 142))

Пусть тело  $A$  совершает действие, параллельное плоскости  $\Pi$ . Проведём мысленно в теле ряд плоскостей  $\Pi', \Pi'', \dots$ , параллельных  $\Pi$ . Тело разобьётся на ряд плоских фигур  $S', S'', \dots$ . Все точки, принадлежащие какой-нибудь фигуре, движутся в плоскости фигуры, и, следовательно, фигура в целом движется в своей плоскости. Движение одной такой плоской фигуры вполне определяет движение всего твёрдого тела, так как плоскости, которыми мы разбили твёрдое тело, друг с другом неизменно связаны и не могут двигаться друг по отношению к другу.

Если мы возьмём в какой-нибудь фигуре  $S'$  точку  $M'$  и восставим в ней перпендикуляр к плоскости фигуры  $S'$ , то точки  $M'$  и  $M''$  фигур  $S'$  и  $S''$ , лежащие на этом перпендикуляре, будут иметь одинаковое движение, то есть будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости, одинаковые ускорения.

Таким образом, можно значительно упростить изучение плоского движения твёрдого тела — достаточно изучить движение одной плоской фигуры в её плоскости.

Возьмём две системы осей в плоскости движения фигуры: одну систему  $Oxy$  — неподвижную, другую —  $O'x'y'$ , неизменно связанную с движущейся фигурой (TODO: картинка (книга, страница 228)). Положение точки  $M$  фигуры в неподвижной плоскости будем определять вектор-радиусом  $\vec{r}$ , проведённым из начала  $O$  неподвижной системы осей; выбор рассматриваемой точки фигуры определяется указанием вектора  $\vec{r}'$ , проведённого из начала  $O'$  подвижной системы. Вектор-радиус начала  $O'$  относительно  $O$  обозначим через  $\vec{r}_0$ . Проекциями вектора  $\vec{r}$  на оси  $x$  и  $y$  будут декартовы координаты  $x$  и  $y$  в неподвижной системе осей; при движении фигуры координаты  $x$  и  $y$  изменяются со временем; в противоположность этому проекции вектора  $\vec{r}'$  на подвижные оси, то есть декартовы координаты  $x'$  и  $y'$  точки  $M$  в системе подвижных осей, остаются постоянными, как расстояния точек твёрдой фигуры до проведённых на ней прямых.

Всякой точке фигуры соответствует определённая пара чисел  $x'$  и  $y'$ . В частности, точке  $O'$ , началу подвижной системы, соответствуют значения  $x'$  и  $y'$ , равные нулю; значения координат  $x$  и  $y$  для этой точки обозначим через  $x_0$  и  $y_0$  (проекции вектора  $\vec{r}_0$ ).

Чтобы определить положение подвижной системы осей относительно неподвижной, достаточно задать:

1. положение начала  $O'$ , то есть вектор-радиус  $\vec{r}_0$ ;
2. угол одной из подвижных осей с одной из неподвижных, например угол  $\varphi$  оси  $x$  с осью  $x'$ .

(**TODO:** последнее требует некоторого уточнения)

**Определение 14.2.** Начало  $O'$  подвижной системы называется *полосом*; угол  $\varphi$  будет в таком случае *углом поворота* вокруг полюса.

Плоское движение твёрдого тела определяется:

1. уравнениями движения полюса

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t); \quad (14.1)$$

2. уравнением вращения фигуры вокруг полюса

$$\varphi = \varphi(t). \quad (14.2)$$

Чтобы получить уравнения движения любой точки плоской фигуры, спроектируем на неподвижные оси  $x$  и  $y$  очевидное геометрическое равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Получим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= y_0 + y' \sin \varphi + x' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Уравнения 14.3 представляют собой уравнения движения точки  $M$  или, что то же самое, параметрические уравнения её траектории.

## 14.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*



## 15 Две геометрические теоремы о плоском движении

**Теорема 15.1** (Шаля). *Всякое перемещение плоской фигуры в своей плоскости, а следовательно, и всякое плоское перемещение твёрдого тела можно себе представить как совокупность двух перемещений:*

1. поступательного перемещения, зависящего от выбора полюса, и
2. вращательного перемещения вокруг полюса;

*угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.*

*Доказательство.* Положение плоской фигуры может быть задано положением двух её точек  $O'$  и  $M$  или положением отрезка  $O'M$  (TODO: рисунок 149, стр. 234)

Пусть фигура  $O'M$  переместилась из положения  $I$  в положение  $II$ . Разобьём переход на две части. Сначала переместим фигуру поступательно в положение  $I'$ , причём все точки её получают перемещения, геометрически равные перемещению  $\overrightarrow{O'O_1}$  полюса  $O'$ , а затем повернём фигуру на  $\angle M'O_1M_1$  вокруг оси, проходящей через точку  $O_1$  перпендикулярно к плоскости фигуры.

Заметим, что вектор поступательного перемещения зависит от выбора полюса, а угол поворота не зависит от этого выбора. В самом деле, тот же переход из положения  $I$  в положение  $II$  можно осуществить, приняв за полюс точку  $M$  и переместив сначала фигуру в положение  $II'$  (TODO: картинка), причём все точки фигуры получают перемещения, геометрически равные  $\overrightarrow{MM_1}$  и отличные от  $\overrightarrow{O'O_1}$ , а затем повернув фигуру на  $\angle O''M_1O_1$  вокруг оси, проходящей через  $M_1$ . Но по свойству поступательного перемещения  $\overrightarrow{O''M_1}$  параллелен  $\overrightarrow{O'M}$  и точно так же  $\overrightarrow{O_1M'}$  параллелен  $\overrightarrow{O'M}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{O''M_1}$  и  $\overrightarrow{O_1M'}$  параллельны между собой и  $\angle O''M_1O = \angle M'O_1M_1$ . Вместе с тем поворот вокруг точек  $O_1$  и  $M_1$  в том и другом случае происходит в одну и ту же сторону. Окончательное положение фигуры не зависит от того, будет ли сначала совершаться поступательное перемещение или поворот.  $\square$

Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя произвольность в выборе полюса, осуществить заданное перемещение тела *одним* поворотом, без поступательного перемещения.

На этот вопрос даёт ответ

**Теорема 15.2** (Эйлера). *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в её плоскости может быть осуществлено одним поворотом вокруг некоторого центра.*

*Доказательство.* (TODO: рисунок 151, страница 236)

Пусть фигура переместилась из положения  $I$  в положение  $II$ .

Восставим из середин перемещений точек  $A$  и  $B$ , то есть из середин отрезков  $AA'$  и  $BB'$ , перпендикуляры и найдём пересечение их в точке  $C$ .

Докажем, что фигура  $I$  может быть переведена в положение  $II$  поворотом вокруг центра  $C$  на  $\angle ACA' = \angle BCB'$ . В самом деле, треугольники  $ABC$  и  $A'CB'$  равны между собой, так как  $AB = A'B'$  в силу неизменяемости фигуры и  $AC = A''C$ ,  $BC = B'C$  по построению. Следовательно,

$$\angle ACB = \angle A'CB';$$

прибавляя к обеим частям этого равенства по одинаковому углу  $BCA'$ , найдём, что

$$\angle ACA' = \angle BCB'.$$

Повернём теперь фигуру  $I$  на угол  $ACA'$ , тогда  $AC$  совместится с  $A'C$ ,  $BC$  — с  $B'C$ , так как углы равны, и  $AB$  совместится с  $A'B'$ , что и доказывает теорему.  $\square$

**Определение 15.1.** Точка  $C$  называется *центром поворота*.

*Замечание 15.1.* Только что указанное построение не даёт результата в двух случаях:

1. если перпендикуляры, восстановленные из середин перемещений, сливаются в одну линию (**TODO:** рис 152 стр 236), но в этом случае центр поворота лежит на пересечении продолжений отрезков  $AB$  и  $A'B'$ ;
2. если перпендикуляры параллельны между собой, что имеет место при *поступательном* перемещении; этот случай соответствует положению центра поворота в бесконечном удалении.

## 15.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 16 Формула Эйлера. Следствие

(TODO: рис. 149 стр 234)

Теорема 15.1 доказана для любого *конечного* перемещения. Для частного случая *бесконечно малого* перемещения дадим векторную формулу. Для этого обозначим перемещение полюса  $O'$  через  $\vec{p}_0$ , а перемещение точки  $M$  через  $\vec{p}$ ; тогда

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \overrightarrow{M'M_1}. \quad (16.1)$$

Здесь  $\overrightarrow{M'M_1}$  представляет собой перемещение точки  $M$  при повороте фигуры вокруг полюса. Обозначая угол поворота через  $\theta$ , будем иметь из треугольника  $O_1M_1M'$

$$M'M_1 = O_1M' \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Принимая поворот бесконечно малым, можно заменить синус его аргументом; тогда величина вектора  $\overrightarrow{M'M_1}$  будет равна

$$M'M_1 = O_1M' \cdot \theta = r'\theta.$$

(FIXME: Это определение было где-то ещё...) Чтобы указать направление вектора  $\overrightarrow{M'M_1}$ , введём в рассмотрение вектор-радиус  $\vec{r}'$  точки  $M$  относительно полюса и вектор бесконечно малого поворота  $\vec{\Theta}$ , определив последний следующим образом:

1. величина вектора поворота равна величине угла поворота,
2. вектор  $\vec{\Theta}$  перпендикулярен к плоскости перемещения, причём направлен в ту сторону, откуда поворот фигуры виден происходящим в положительном направлении.

Введя вектор  $\vec{\Theta}$ , можем представить  $\overrightarrow{M'M_1}$  в виде

$$\overrightarrow{M'M_1} = \vec{\Theta} \times \vec{r}'.$$

Действительно, это векторное произведение имеет величину

$$\theta r' \sin(\widehat{\vec{\Theta}, \vec{r}'} ) = \theta r'$$

и в предельном случае бесконечно малого перемещения направлено так же, как и  $\overrightarrow{M'M_1}$  (то есть перпендикулярно к  $\vec{r}'$  в сторону поворота фигуры).

Формула 16.1 даёт

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{\Theta} \times \vec{r}'. \quad (16.2)$$

Основываясь на формуле плоского перемещения и определении скорости как предела при  $\Delta t \rightarrow 0$  отношения бесконечно малого перемещения  $\vec{p}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это перемещение произошло:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}}{\Delta t},$$

получим по 16.2

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t} \times \vec{r}' \right). \quad (16.3)$$

Первое слагаемое,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}$ , представляет собой скорость полюса:

$$\vec{v}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}. \quad (16.4)$$

Вектор  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}$  назовём вектором *угловой скорости вращения фигуры*:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}. \quad (16.5)$$

Направление  $\vec{\omega}$  совпадает с направлением  $\vec{\Theta}$ ; поэтому вектор  $\vec{\omega}$  перпендикулярен к плоскости движения, и если смотреть вдоль него, то вращение фигуры должно представиться происходящим в положительном направлении. Величина  $\vec{\omega}$  равна абсолютному значению производной угла поворота  $\varphi$  по времени. Действительно, если назвать значения угла  $\varphi$  в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно через  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$ , то  $\theta = |\Delta\varphi|$  и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = |\dot{\varphi}|.$$

Как и раньше, в тех случаях, когда возможны недоразумения, будем отличать  $\omega = |\dot{\varphi}|$  от  $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ .

Отметим ещё, что вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  не изменяется при перемещении полюса, так как  $\vec{\Theta}$  от выбора полюса не зависит. Это дало право называть  $\vec{\omega}$  вектором угловой скорости *фигуры*.

Вернёмся к формуле 16.3. Подставляя вместо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}$$

их значения 16.4 и 16.5, получим *поле скоростей точек в плоском движении фигуры*

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (16.6)$$

(**TODO:** в конспекте понятие *поле* не встречается, поэтому, по всей видимости, нужно заменить его на что-то другое.)

(**TODO:** рис. 153 стр 238)

Рассмотрим два частных случая.

1. Поступательное движение:  $\omega = 0$ ; формула 16.6 даёт

$$\vec{v} = \vec{v}_0,$$

то есть скорости всех точек одинаковы и равны скорости полюса.

2. Вращение вокруг неподвижной оси:  $v_0 = 0$ ; получаем

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

то есть уже известный нам закон распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

(**TODO:** в книге на этом месте идут рассуждения об абсолютном, относительном и переносном движениях. Как мне кажется, оставлять их тут не надо.)

Дифференцируя по времени уравнение плоского движения  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ , получим

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt};$$

но первое слагаемое представляет собой скорость полюса и, следовательно,

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (16.7)$$

то есть вращательная скорость вокруг полюса равна производной вектора радиуса  $\vec{r}'$  по времени.

Формула скорости точки  $B$ , когда за полюс принята точка  $A$ , будем обозначать следующим образом:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{AB}. \quad (16.8)$$

**Теорема 16.1.** *Проекции скоростей концов отрезка на направление отрезка равны между собой.*

*Доказательство.* (**TODO:** рис. 155, стр. 239)

По формуле 16.8 будем иметь, проектируя обе её части на направление отрезка  $AB$ :

$$\text{proj}_{AB} \vec{v}_B = \text{proj}_{AB} \vec{v}_A + \text{proj}_{AB} \vec{v}_{AB};$$

но вектор  $\vec{v}_{AB}$  перпендикулярен к направлению отрезка  $AB$ , следовательно,  $\text{proj}_{AB} \vec{v}_{AB} = 0$ , и окончательно получим

$$\text{proj}_{AB} \vec{v}_B = \text{proj}_{AB} \vec{v}_A.$$

□

## 16.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 17 Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо

### 17.1 Мгновенный центр скоростей

**Теорема 17.1.** При всяком непоступательном движении плоской фигуры существует точка фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

*Доказательство.* (TODO: рис. 156, стр. 240)

Для доказательства восставим из точки  $A$  плоской фигуры перпендикуляр  $AN$  к направлению скорости  $\vec{v}_A$  так, чтобы угол  $\frac{\pi}{2}$  между  $\vec{v}_A$  и линией  $AN$  был отсчитан в сторону вращения фигуры. Тогда по предыдущему вектор скорости любой точки  $M$  на этом перпендикуляре будет равен

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM},$$

а величина скорости

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM.$$

Изменяя расстояние точки  $M$  от точки  $A$ , можно при  $\omega \neq 0$  найти такую точку  $P$ , чтобы  $v_{AP} = -v_A$ ; тогда

$$AP = \frac{v_A}{\omega};$$

при этом будем иметь

$$v_P = v_A - \omega \cdot AP = v_A - \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = 0.$$

□

**Определение 17.1.** Точка  $P$  плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей* фигуры.

Скорости точек плоской фигуры можно рассматривать как вращательные скорости их вокруг мгновенного центра скоростей, а сам мгновенный центр скоростей — как мгновенный центр вращения плоской фигуры.

Имея это в виду, при известных направлениях скоростей точек  $A$  и  $B$ , проведём через них прямые  $l_A$  и  $l_B$ , ортогональные векторам скоростей в этих точках. Эти прямые либо пересекаются, либо нет; рассмотрим возможные варианты.

1. Прямые  $l_A$  и  $l_B$  пересекаются в единственной точке — это и будет центр скоростей  $P$ .
2. Закреплённые векторы  $(A, \vec{v}_A)$  и  $(B, \vec{v}_B)$  параллельны, направлены в разные стороны или направлены в одну сторону, но не равны по величине — в этом случае прямые  $l_A$  и  $l_B$  совпадают; через концы рассматриваемых закреплённых векторов проведём прямую  $l$ , — точка пересечения этой прямой с прямой  $l_A$  и будет центром скоростей  $P$ .

3. Закреплённые векторы параллельны, направлены в одну сторону и равны по величине — в этом случае движение твёрдого тела поступательное, и для него понятие центра скоростей не определено.

## 17.2 Центроиды

**Определение 17.2.** Траектория мгновенного центра скоростей в плоскости, связанной с движущейся фигурой, образует кривую, называемую *подвижной центроидой*.

**Определение 17.3.** Траектория мгновенного центра скоростей в неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*.

Для вывода уравнений центроид обратимся к формуле 16.6. Проектируя её на неподвижные оси  $Ox$  и  $Oy$ , получим

$$v_x = v_{0x} - \tilde{\omega}(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \tilde{\omega}(x - x_0); \quad (17.1)$$

проекция же на оси подвижной системы  $O'x'y'$  даст

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_{0x'} - \tilde{\omega}y' = v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi - \tilde{\omega}y', \\ v_{y'} &= v_{0y'} + \tilde{\omega}x' = -v_{0x} \sin \varphi + v_{0y} \cos \varphi + \tilde{\omega}x'. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Подставив в правые части 17.1 вместо  $x$  и  $y$  координаты мгновенного центра скоростей  $x_P$  и  $y_P$ , приравняем левые части нулю, так как скорость той точки фигуры, которая в данный момент времени играет роль мгновенного центра, равна нулю. Будем иметь уравнения

$$v_{0x} - \tilde{\omega}(y_P - y_0) = 0, \quad v_{0y} + \tilde{\omega}(x_P - x_0) = 0,$$

откуда найдём уравнения неподвижной центроиды

$$x_P = x_0 - \frac{v_{0y}}{\tilde{\omega}}, \quad y_P = y_0 + \frac{v_{0x}}{\tilde{\omega}}. \quad (17.3)$$

Аналогично по 17.2 найдём уравнения подвижной центроиды:

$$\begin{aligned} x'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}} (v_{0x} \sin \varphi - v_{0y} \cos \varphi), \\ y'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}} (v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (17.4)$$

**Теорема 17.2 (Пуансо).** При плоском непоступательном движении твёрдого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.

(TODO: доказательство (книга, стр 249))

## 17.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 18 Ускорение точек твёрдого тела в плоском движении

Имеем согласно 16.6

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое

$$\vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}, \quad (18.1)$$

одинаковое для всех точек фигуры и равное ускорению полюса  $O'$ , называется *поступательным ускорением*.

Второе слагаемое — обозначим его через  $\vec{w}^{(в)}$ , — равное

$$\vec{w}^{(в)} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}', \quad (18.2)$$

называется *вращательным ускорением*. Здесь вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

представляет собой *вектор углового ускорения*. Вектор  $\vec{w}^{(в)}$  перпендикулярен к  $\vec{r}'$  и направлен в ту же сторону, что и вращательная скорость  $\vec{\omega} \times \vec{r}'$  точки плоской фигуры вокруг полюса, или в противоположную, сообразно тому, будет ли вращение фигуры ускоренным или замедленным; величина  $\vec{w}^{(в)}$  равна

$$w^{(в)} = \varepsilon r' \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}'}) = \varepsilon r'.$$

Третье слагаемое, которое обозначим  $\vec{w}^{(ос)}$ , равно

$$\vec{w}^{(ос)} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (18.3)$$

Подставив сюда вместо  $\frac{d\vec{r}'}{dt}$  его значение 16.7, получим

$$\vec{w}^{(ос)} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

или, по известной формуле разложения двойного векторного произведения:

$$\vec{w}^{(ос)} = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}).$$



Но в плоском движении векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}'$  взаимно перпендикулярны, так что

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}' = 0,$$

кроме того,

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2,$$

следовательно,

$$\vec{w}^{(\text{oc})} = -\omega^2 \vec{r}'.$$

Эта составляющая ускорения, направленная от рассматриваемой точки к полюсу и равная по величине  $\omega^2 r'$ , называется *осеостремительным ускорением*.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_0 + \vec{w}^{(\text{в})} + \vec{w}^{(\text{oc})} \\ &= \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}', \end{aligned}$$

то есть ускорение любой точки в плоском движении может быть представлено как геометрическая сумма поступательного ускорения, равного ускорению полюса, вращательного ускорения вокруг полюса и осеостремительного ускорения к полюсу.

Составим формулы для *проекций ускорения на неподвижные оси  $x$ ,  $y$* . Замечая, что

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

найдем, проектируя обе части равенства 18 на неподвижные оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} w_x &= \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi}(y - y_0) - \dot{\varphi}^2(x - x_0), \\ w_y &= \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi}(x - x_0) - \dot{\varphi}^2(y - y_0). \end{aligned} \tag{18.4}$$

Аналогично найдем *проекции ускорения на подвижные оси*:

$$\begin{aligned} w_{x'} &= w_{0x'} - \ddot{\varphi}y' - \dot{\varphi}^2x', \\ w_{y'} &= w_{0y'} + \ddot{\varphi}x' - \dot{\varphi}^2y'. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Условимся в дальнейшем снабжать обозначение ускорения индексом, указывающим точку, ускорение которой рассматривается. Положим

$$\vec{w}_{AB} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{AB} - \omega^2 \vec{r}'_{AB}.$$

Здесь вектор  $\vec{w}_{AB}$  есть ускорение точки  $B$  по отношению к точке  $A$ , то есть ускорение по отношению к системе координат, имеющей начало в точке  $A$  и движущейся вместе с этой точкой поступательно. Вращательное ускорение вокруг полюса и осеостремительное ускорение к полюсу будем обозначать так:

$$\vec{w}_{AB}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{AB}, \quad \vec{w}_{AB}^{(\text{oc})} = -\omega^2 \vec{r}'_{AB}.$$

Формула 18 примет вид

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB} = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}^{(\text{в})} + \vec{w}_{AB}^{(\text{oc})}. \tag{18.6}$$

Замечая, что  $\vec{w}_{AB}^{(в)}$  и  $\vec{w}_{AB}^{(ос)}$  взаимно перпендикулярны, получим

$$w_{AB} = \vec{r}'_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (18.7)$$

Обозначим через  $\pi - \alpha$  тупой угол, образуемый векторами  $\vec{r}'_{AB}$  и  $\vec{w}_{AB}$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\vec{w}_{AB}^{(в)}}{\vec{w}_{AB}^{(ос)}} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\omega^2}. \quad (18.8)$$

**Теорема 18.1.** *В любой момент времени существует точка  $Q$  плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю.*

*Доказательство.* (TODO: рис. 172, а,б, стр. 255)

Проведём через какую-нибудь точку  $A$  полупрямую  $AL$  под углом  $\alpha$ , определяемым по формуле 18.8, к вектору  $\vec{w}_A$ , отсчитывая  $\alpha$  от  $\vec{w}_A$  в сторону вращения фигуры или противоположно ему, сообразно тому, будет ли вращение ускоренным или замедленным. Отложим на  $AL$  отрезок

$$r'_{AQ} = AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (18.9)$$

Конец  $Q$  этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, согласно формуле 18.7 имеем

$$w_{AQ} = r'_{AQ} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

С другой стороны, по построению вектор  $\vec{w}_{AQ}$  противоположен  $\vec{w}_A$  по направлению, то есть

$$\vec{w}_{AQ} = -\vec{w}_A.$$

Отсюда на основании 18.6 заключаем, что

$$\vec{w}_Q = 0,$$

то есть  $Q$  — мгновенный центр ускорений. □

**Определение 18.1.** Точка  $Q$  называется *мгновенным центром ускорений*.

(TODO: рис. 173, стр. 256)

Построение мгновенного центра ускорений требует знания ускорения  $\vec{w}_A$  какой-либо точки фигуры и угла  $\alpha$ . Покажем, как построить мгновенный центр ускорений, имея ускорения двух точек фигуры. Заметим для этого, что, зная  $\vec{w}_A$  и  $\vec{w}_B$ , тем самым можем определить

$$\vec{w}_{AB} = \vec{w}_B - \vec{w}_A,$$

и, следовательно, угол  $\alpha$  будет вполне определён. Теперь можем построить луч  $AL$ , на котором лежит мгновенный центр ускорений  $Q$ . Нет надобности вычислять положение точки  $Q$  по формуле 18.9, так как можно построить

её графически, проведя ещё луч  $BM$  под углом  $\alpha$  к  $\vec{w}_B$ . Пересечение лучей  $AL$  и  $BM$  определит точку  $Q$ .

Имея мгновенный центр ускорений, получаем весьма наглядную картину распределения ускорений в плоской фигуре. Действительно, применяя формулу 18.6 в предположении, что за полюс  $A$  принят мгновенный центр ускорений  $Q$ , и замечая, что по определению  $\vec{w}_Q = 0$ , получим

$$\vec{w}_B = \vec{w}_{QB} = \vec{w}_{QB}^{(B)} + \vec{w}_{QB}^{(oc)} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{QB} - \omega^2 \vec{r}'_{QB}.$$

Вращательное ускорение  $\vec{w}_{QB}^{(B)}$  направлено по перпендикуляру к вектору радиуса, соединяющему центр ускорений с рассматриваемой точкой, в ту сторону, куда происходит вращение, или в противоположную, смотря по тому, является ли вращение ускоренным или замедленным.

Осестремительное ускорение  $\vec{w}_{QB}^{(oc)}$  направлено всегда от точки к мгновенному центру ускорений.

(TODO: рис. 174, стр. 257)

По величине они равны

$$\begin{aligned} w_{QB}^{(B)} &= w_B^{(B)} = \varepsilon r'_{QB}, \\ w_{QB}^{(oc)} &= w_B^{(oc)} = \omega^2 r'_{QB}. \end{aligned}$$

Их геометрическая сумма  $\vec{w}_B$  по величине равна

$$w_B = r'_{QB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Таким образом, полное ускорение любой точки фигуры по величине пропорционально её расстоянию от мгновенного центра ускорений и направлено под одинаковым для всех точек фигуры углом к вектору радиуса, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром ускорений.

Не следует смешивать вращательное ускорение  $\vec{w}_B^{(B)}$  с касательной составляющей ускорения, а осестремительное ускорение  $\vec{w}_B^{(oc)}$  — с нормальной составляющей. В самом деле, касательное  $\vec{w}_\tau$  и нормальное  $\vec{w}_n$  ускорения направлены по касательной и главной нормали к *траектории*, то есть по перпендикуляру к вектору радиуса  $\vec{r}'_{PB}$ , соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром скоростей  $P$ , и вдоль этого вектора радиуса, в то время как  $\vec{w}_B^{(B)}$  и  $\vec{w}_B^{(oc)}$  направлены перпендикулярно и вдоль вектора радиуса  $\vec{r}'_{QB}$ . (TODO: рис. 175 стр 257)

Легко получить вектор-радиусы  $\vec{r}'_Q$  и  $\vec{r}'_Q$  центра ускорения в неподвижной и подвижной системах координат; для этого решим векторное уравнение

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q - \omega^2 \vec{r}'_Q = 0. \quad (18.10)$$

С этой целью умножим его векторно на  $\vec{\varepsilon}$ :

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q - \omega^2 (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q) = 0$$

и раскроем двойное векторное произведение; тогда получим

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q) - \vec{r}'_Q (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}) - \omega^2 (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q) = 0.$$

Заметим, что в плоском движении  $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q = 0$ ; далее, из 18.10 следует, что

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q = \omega^2 \vec{r}'_Q - \vec{w}_0.$$

Окончательно получаем

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 - (\varepsilon^2 + \omega^4) \vec{r}'_Q + \omega^2 \vec{w}_0 = 0,$$

или, разрешая уравнение относительно  $\vec{r}'_Q$ ,

$$\begin{aligned} \vec{r}'_Q &= \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \omega^2 \vec{w}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ \vec{r}_Q &= \vec{r}_0 + \vec{r}'_Q = \vec{r}_0 + \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \omega^2 \vec{w}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned}$$

Проектируя первое равенство на подвижные оси координат  $x'$ ,  $y'$ , а второе — на неподвижные оси  $x$ ,  $y$ , получим формулы координат мгновенного центра ускорений  $Q$ :

1. в *подвижной* системе осей

$$\begin{aligned} x'_Q &= \frac{\omega^2 w_{0x'} - \ddot{\varphi} w_{0y'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \\ y'_Q &= \frac{\omega^2 w_{0y'} + \ddot{\varphi} w_{0x'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}; \end{aligned} \tag{18.11}$$

2. в *неподвижной* системе осей

$$\begin{aligned} x_Q &= x_0 + \frac{\omega^2 w_{0x} - \ddot{\varphi} w_{0y}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \\ y_Q &= y_0 + \frac{\omega^2 w_{0y} + \ddot{\varphi} w_{0x}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}. \end{aligned} \tag{18.12}$$

## 18.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 19 Задание движения твёрдого тела через углы Эйлера

(TODO: рис. 180 стр. 263)

Соединим жёстко с вращающимся телом подвижную систему координат  $Ox'y'z'$  и будем рассматривать вращение этой системы по отношению к неподвижной системе  $Oxyz$ . Введём таблицу косинусов углов между осями координат:

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$y'$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$z'$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Связь между координатами точки  $M$  в подвижной и неподвижной системах:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (19.1)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Отметим линию  $ON$  пересечения плоскостей  $xOy$  и  $x'Oy'$  и назовём её *линией узлов*. Выберём на этой линии положительное направление  $ON$  так, чтобы, смотря с него, видеть вращение оси  $Oz$  к оси  $Oz'$  на наименьший угол в положительном направлении (то есть в правой системе осей — против часовой стрелки); легко видеть, плоскость  $zOz'$  перпендикулярна к оси  $ON$ .

Первый эйлеров угол — угол *прецессии*  $\psi$  — образован в плоскости  $xOy$  линией узлов с неподвижной осью  $Ox$ ; отсчитывается угол  $\psi$  в положительном направлении (по часовой стрелке) от оси  $Ox$  к оси  $ON$ , если смотреть с оси  $Oz$ .

Второй угол — угол *нутаии*  $\theta$  — расположен в плоскости  $zOz'$  и отсчитывается от оси  $Oz$  к оси  $Oz'$  в положительном направлении (против часовой стрелки), если смотреть с положительного направления оси  $ON$ .

Третий угол — угол *ротации*, или угол *чистого вращения*  $\varphi$  — расположен в плоскости  $x'Oy'$ , причём отсчитывается от линии узлов  $ON$  до оси  $Ox'$  в положительном направлении.

(TODO: рис. 181 стр 264)

Для установления зависимостей между косинусами углов осей координат и эйлеровыми углами применим следующий приём. Введём, кроме единичных векторов осей координат  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ , ещё единичные векторы следующих осей:

- $\vec{n}$  — линии узлов  $ON$ ;
- $\vec{n}_1$  — оси  $ON_1$ , перпендикулярной к оси  $ON$  и лежащей в плоскости  $xOy$ ;

- $\vec{n}'_1$  — оси  $ON'_1$ , перпендикулярной к оси  $ON$  и лежащей в плоскости  $x'Oy'$ .

Направление оси  $ON_1$  выберем так, чтобы оси  $ONN_1z$  образовали триэдр, сонаправленный (то есть правый) с системой осей  $Oxyz$ ; направление оси  $ON'_1$  выберем так, чтобы оси  $ONN'_1z'$  образовали сонаправленный триэдр с системой  $Ox'y'z'$ , а следовательно, и с системой  $Oxyz$ . Легко видеть, что угол между осями  $ON'_1$  и  $ON_1$  представляет собой линейный угол двугранного угла между плоскостями  $x'Oy'$  и  $xOy$ , то есть угол  $\theta$  (TODO: не помню, есть ли в билетах определение линейного угла двугранного угла...). Тогда, замечая ещё, что единичные векторы  $\vec{i}, \vec{j}$  и  $\vec{i}', \vec{j}'$  легко могут быть выражены через единичные векторы  $\vec{n}, \vec{n}_1$  и  $\vec{n}'_1$  в форме зависимостей, получаемых из разложения одних единичных векторов по другим:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi, \\ \vec{j} &= \vec{n} \cos \varphi + \vec{n}'_1 \sin \varphi, \\ \vec{i} &= \vec{n} \sin \psi + \vec{n}_1 \cos \psi, \\ \vec{i}' &= -\vec{n} \sin \varphi + \vec{n}'_1 \cos \varphi,\end{aligned}\tag{19.2}$$

найдём

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \vec{i} \cdot \vec{i}' \\ &= (\vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi) \cdot (\vec{n} \cos \varphi + \vec{n}'_1 \sin \varphi) \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{n}) \cos \psi \cos \varphi + (\vec{n} \cdot \vec{n}'_1) \cos \psi \sin \varphi - \\ &\quad - (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) \sin \psi \cos \varphi - (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}'_1) \sin \psi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Имеем

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{n}'_1 = 0, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}'_1 = \cos \theta,$$

откуда

$$\alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Аналогично получим остальные косинусы.

Выделим полученную группу формул:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \cos(\widehat{x, x'}) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{21} &= \cos(\widehat{x, y'}) = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{31} &= \cos(\widehat{x, z'}) = \sin \psi \sin \theta, \\ \alpha_{12} &= \cos(\widehat{y, x'}) = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{22} &= \cos(\widehat{y, y'}) = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_{32} &= \cos(\widehat{y, z'}) = -\cos \psi \sin \theta, \\ \alpha_{13} &= \cos(\widehat{z, x'}) = \sin \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{23} &= \cos(\widehat{z, y'}) = \cos \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{33} &= \cos(\widehat{z, z'}) = \cos \theta.\end{aligned}\tag{19.3}$$

**Теорема 19.1.** Пусть

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$P = P_2(\psi)P_1(\theta)P_2(\varphi). \quad (19.4)$$

*Доказательство.* Равенство проверяется перемножением матриц.

Можно также доказать, используя геометрический смысл преобразований (поворот).

(**TODO:** доказать поворотами?)

□

## 19.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 20 Две геометрические теоремы о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки

**Определение 20.1.** Перемещение твёрдого тела такое, что начальное и конечное положения каждой его точки совпадают, называют *нулевым*.

**Теорема 20.1** (Эйлера-Даламбера). *Для любого ненулевого перемещения  $\Pi$  твёрдого тела вокруг неподвижной точки существует единственная прямая  $l$  такая, что перемещение  $\Pi$  можно представить как перемещение в результате поворота этого тела вокруг этой оси на некоторый угол  $\alpha$ .*

*Доказательство.* Пусть  $O$  — неподвижная точка тела. Будем считать, что в начальном положении подвижный и неподвижный реперы  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  и  $(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$  совпадают. Пусть  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  и  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  — координаты в неподвижном репере произвольной точки  $M$  твёрдого тела (пространства, связанного с этим телом) в его начальном и конечном положениях соответственно, а  $(x, y, z)$  — координаты этой точки в подвижном репере. Используя формулы 19.1, получаем

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $I$  — единичная матрица,  $P$  — ортогональная,  $\det P = 1$  и  $P \neq I$ .

Необходимо показать, что множество точек  $M \sim (x, y, z)$ , удовлетворяющих равенству  $(x'_1, y'_1, z'_1) = (x'_2, y'_2, z'_2)$ , то есть равенству

$$(P - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

суть множество всех точек некоторой прямой, проходящей через  $(0, 0, 0)$ .

Эту задачу можно переформулировать так: мы должны доказать, что среди собственных значений  $\lambda$  матрицы  $P$  есть значение  $\lambda_1 = 1$ , и ему соответствует одномерное подпространство собственных векторов. Чтобы сделать это, мы покажем, что  $\lambda_1 = 1$  является корнем характеристического полинома  $d(\lambda) = \det(P - \lambda I)$  и что кратность этого корня равна единице.



Действительно, из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
d(1) &= \det(P - I) \\
&= \det(P^T - I^T) \\
&= \det(P^{-1} - I) \\
&= \det(P \cdot (P^{-1} - I)) \\
&= \det(I - P) \\
&= \det(-(P - I)) \\
&= (-1)^3 \det(P - I) \\
&= -d(1)
\end{aligned}$$

следует, что величина  $\lambda_1 = 1$  является корнем полинома  $d(\lambda)$ .

(**TODO:** доказать, что кратность  $\lambda_1 = 1$  равна единице)

□

**Определение 20.2.** Прямую  $l$  называют *осью вращения*.

Пусть  $M$  — произвольная точка твёрдого тела, движущегося вокруг неподвижной точки  $O$ , а  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{r}(t + \Delta t)$  — вектор-радиусы этой точки в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ . Вектор

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

соответствует перемещению точки  $M$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ . В соответствии с теоремой 20.1, его можно вычислить как перемещение при вращении вокруг некоторой оси на угол  $\overrightarrow{\Delta \varphi}$  (этот вектор направлен вдоль упомянутой оси согласно определению угла поворота). Определяя скорость  $\vec{v}$  как предел при  $\Delta t \rightarrow 0$  отношения малого перемещения  $\Delta \vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , найдём

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overrightarrow{\Delta \varphi}}{\Delta t} \times \vec{r} \right) = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \varphi}}{\Delta t} \right) \times \vec{r}.$$

Вводя вектор мгновенной угловой скорости

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \varphi}}{\Delta t},$$

получим

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

**Определение 20.3.** Прямую, проходящую через точку  $O$  и параллельную вектору мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$ , называют *мгновенной осью вращения твёрдого тела в момент времени  $t$* .

**Теорема 20.2.** Угловую скорость твёрдого тела с неподвижной точкой можно вычислить по формуле

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{k}'. \quad (20.1)$$

*Доказательство.* (TODO: доказать (в книге есть))

□

**Определение 20.4.** Геометрическое место точек мгновенных осей вращения в неподвижном и подвижном реперах называют соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидом*.

**Теорема 20.3** (Пуансо). *При движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.*

*Доказательство.* (TODO: доказать (в книге есть))

□

## 20.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 21 Проекция угловой скорости тела с неподвижной точкой

Проектируя равенство 20.1 на неподвижные оси  $Oxyz$ , найдём

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{21.1}$$

Аналогично получим и проекции угловой скорости на *подвижные* оси, проектируя равенство 20.1 на оси координат  $Ox'y'z'$ , связанные с движущимся телом:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{21.2}$$

### 21.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 22 Ускорение точек тела с неподвижной точкой

Дифференцируя формулу Эйлера  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , получаем

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (22.1)$$

Производная по времени от вектора угловой скорости определяет вектор *углового ускорения*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (22.2)$$

По величине и направлению этот вектор совпадает со *скоростью движения конца вектора  $\vec{\omega}$  угловой скорости по его годографу*.

Замечая, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

получим

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \end{aligned} \quad (22.3)$$

(TODO: рис. 190 стр 277)

Первое слагаемое

$$\vec{w}^{(в)} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (22.4)$$

представляет собой *вращательное ускорение*; это — вектор, перпендикулярный к плоскости, проходящей через вектор углового ускорения и вектор-радиус взятой точки тела. В отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, вектор углового ускорения не лежит на той же прямой, что и вектор угловой скорости, а направлен по некоторой прямой, проходящей через неподвижную точку; эту прямую будем называть *осью углового ускорения*.

Эта ось параллельна скорости конца вектора  $\vec{\omega}$ . Поэтому здесь вектор вращательного ускорения перпендикулярен не радиусу вращения  $h$ , а отрезку  $h'$ , представляющему собой кратчайшее расстояние от точки  $M$  до оси углового ускорения. По величине вращательное ускорение равно

$$w^{(в)} = \varepsilon h'. \quad (22.5)$$

Второе слагаемое

$$\vec{w}^{(ос)} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

определяет *осеостремительное ускорение*. Оно направлено перпендикулярно к плоскости, содержащей  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$ , то есть по кратчайшему расстоянию между точкой  $M$  и мгновенной осью, причём всегда в ту сторону, откуда вращение  $\vec{\omega}$  к  $\vec{v}$  на наименьший угол видно положительным. По величине осеостремительное ускорение равно

$$w^{(ос)} = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h. \quad (22.6)$$

Таким образом, ускорение точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, складывается геометрически из вращательной и осесремительной составляющих.

## 22.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 23 Скорость точек твёрдого тела в общем случае

Пусть  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  — репер, жёстко связанный с твёрдым телом (подвижный репер), а  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  — неподвижный репер. Тогда если  $(x_0, y_0, z_0)$  — координаты точки  $O'$  в неподвижном репере, то связь между координатами произвольной точки  $M$  тела в неподвижном и подвижном реперах следующая:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (23.1)$$

Как видим, перемещение  $\Delta \vec{r}$  точки  $M$  складывается из перемещения  $\Delta \vec{r}_{O'}$  точки  $O'$  и вращательного перемещения  $\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'})$  точки  $M$  при повороте тела вокруг  $O'$ , то есть

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_{O'} + \Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}), \quad (23.2)$$

где

$$\Delta \vec{r}_{O'} = \vec{v}_{O'} \Delta t + \vec{o}(\Delta t) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0$$

и

$$\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}) = \overrightarrow{\Delta \varphi_{O'}} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Разделив равенство 23.2 на  $\Delta t$  и перейдя при  $\Delta t \rightarrow 0$  к пределу, получим:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}). \quad (23.3)$$

Здесь

$$\vec{\omega}_{O'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\overrightarrow{\Delta \varphi_{O'}}}{\Delta t} \right)$$

означает мгновенную угловую скорость вращения тела вокруг точки  $O'$ , а  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_{O'}$  — скорости точек  $M$  и  $O'$ .

**Теорема 23.1.** Вектор  $\vec{\omega}_{O'}$  не зависит от выбора полюса  $O'$ .

*Доказательство.* Пусть  $B$  — другой полюс, тогда

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B), \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B). \quad (23.4)$$

Вычитая из равенства 23.3 равенство 23.4, получаем

$$\vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0},$$

то есть

$$(\vec{\omega}_{O'} - \vec{\omega}_B) \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0}.$$

Так как это равенство истинно для любого  $\vec{r}$ , то  $\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_B$ .  $\square$

Согласно теореме 23.1 вектор  $\vec{\omega}_{O'}$  можно обозначить просто  $\vec{\omega}$  — это *угловая скорость твёрдого тела* в общем случае. Формула 23.3 запишется в следующем виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}). \quad (23.5)$$

Эту формулу называют *формулой Эйлера в общем случае*.

**Следствие 23.1.1.** *Проекции скоростей любых двух различных точек абсолютно твёрдого тела на направление соединяющего их отрезка равны между собой.*

## 23.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 24 Ускорение точек твёрдого тела в общем случае

(TODO: процесс дифференцирования)

Дифференцируя формулу Эйлера 23.5, получим

$$\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})). \quad (24.1)$$

Первое слагаемое,  $\vec{w}_{O'}$ , определяет *поступательное ускорение*, равное ускорению полюса, а второе

$$\vec{w}^{(в)} = \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$$

и третье

$$\vec{w}^{(ос)} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}))$$

определяют *вращательную* и *осеостремительную* составляющие ускорения вращения тела вокруг полюса. Численные величины уже были исследованы и выражаются формулами 22.5 и 22.6.

### 24.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*



## 25 Сложное движение точки, основные понятия

Пусть  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  и  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  — неподвижный и подвижный реперы. Эти реперы и связанные с ними подвижное и неподвижное пространства называют также *абсолютным* и *относительным* соответственно.

**Определение 25.1.** Движение, скорость и ускорение точки  $M$  относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *абсолютным*.

**Определение 25.2.** Движение, скорость и ускорение точки  $M$  относительно подвижного (относительного) репера называют *относительным*.

**Определение 25.3.** В момент  $t$  точка  $M$  совпадает с точкой  $M'$  подвижного пространства. Движение, скорость и ускорение точки  $M'$  в момент времени  $t$  относительно абсолютного репера называют *переносными* для точки  $M$  в этот момент.

Будем использовать следующие обозначения:

- $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  — абсолютный вектор-радиус;
- $\vec{v}$  — абсолютная скорость;
- $\vec{w}$  — абсолютное ускорение;
- $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'M}$  — относительный вектор-радиус;
- $\vec{v}_r$  — относительная скорость;
- $\vec{w}_r$  — относительное ускорение;
- $\vec{v}_e$  — переносная скорость;
- $\vec{w}_e$  — переносное ускорение;
- $\vec{\omega}$  — угловая скорость подвижного репера относительно неподвижного

Пусть  $\vec{C}$  — вектор-функция аргумента  $t$ , причём

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}. \quad (25.1)$$

Тогда

$$\dot{\vec{C}} = \dot{C}_x \vec{i} + \dot{C}_y \vec{j} + \dot{C}_z \vec{k} + C_x \dot{\vec{i}} + C_y \dot{\vec{j}} + C_z \dot{\vec{k}}. \quad (25.2)$$

Производные  $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$  зависят от пространства, в котором они рассматриваются. В частности, в подвижном пространстве они равны нулю.

**Теорема 25.1** (Формулы Пуассона). Пусть подвижный репер  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ , жёстко связанный с твёрдым телом, движется относительно неподвижного репера  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Тогда производные подвижных ортов в неподвижном репере вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{i}}' &= \vec{\omega} \times \vec{i}', \\ \dot{\vec{j}}' &= \vec{\omega} \times \vec{j}', \\ \dot{\vec{k}}' &= \vec{\omega} \times \vec{k}'.\end{aligned}\tag{25.3}$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу; остальные доказываются аналогично. Введём обозначения

$$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'}, \quad \vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'}, \quad \vec{r}_{O_{i'}} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}', \quad \vec{v}_{O_{i'}} = \dot{\vec{r}}_{O_{i'}}.$$

Дифференцированием равенства  $\vec{r}_{O_{i'}} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}'$  получаем

$$\vec{v}_{O_{i'}} = \vec{v}_{O'} + \dot{\vec{i}}'.$$

По формуле Эйлера имеем

$$\vec{v}_{O_{i'}} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_{i'}} - \vec{r}_{O'}) = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{i}',$$

следовательно,

$$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}',$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Определение 25.4.** Производную вектор-функции  $\vec{C}$  в подвижном репере  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  называют *относительной производной вектор-функции  $\vec{C}$*  и обозначают  $\frac{d'\vec{C}}{dt}$ .

**Определение 25.5.** Производную вектор-функции  $\vec{C}$  в неподвижном репере  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  называют *абсолютной производной вектор-функции  $\vec{C}$*  и обозначают  $\frac{d\vec{C}}{dt}$ .

**Теорема 25.2** (Формула относительной производной). Относительная и абсолютная производные вектор-функции связаны равенством:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C}.\tag{25.4}$$

*Доказательство.* Формулу 25.2 перепишем в новых обозначениях:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d'\vec{C}}{dt} + C_x \frac{d\vec{i}}{dt} + C_y \frac{d\vec{j}}{dt} + C_z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Используя формулы Пуассона 25.3, получим

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{C}}{dt} &= \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times (C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}) \\ &= \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C}.\end{aligned}$$

$\square$

## 25.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## 26 Теорема сложения скоростей в сложном движении точки

**Теорема 26.1** (Формула сложения скоростей). *Абсолютная, переносная и относительная скорости движения точки связаны равенством*

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (26.1)$$

*Доказательство.* Так как  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ , то, применяя формулу относительной производной 25.4, получаем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \frac{d'\vec{r}}{dt}.$$

По формуле Эйлера скорость той точки  $M'$  подвижного пространства, с которой в данный момент  $t$  совпадает движущаяся точка  $M$ , равна

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Учитывая, что  $\frac{d'\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r$ , получаем требуемое равенство.  $\square$

### 26.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## **27 Теорема сложения ускорений в сложном движении точки**

## 28 Теорема о сложении угловых скоростей твёрдого тела

## Список литературы

- [1] А.И. Лурье Л.Г. Лойцянский. *Курс теоретической механики*. Т. 1. М.: Наука, 1982.
- [2] Ю.Ю. Пупышева Л.К. Бабаджанянц Ю.А. Пупышев. *Классическая механика*. 2013. URL: [http://pm-pu.ru/stuff/adus/books/babadzhanyants\\_mehanika.pdf](http://pm-pu.ru/stuff/adus/books/babadzhanyants_mehanika.pdf).