# Билеты по теоретической механике

В. Шаршуков

10 января 2022 г.

# Содержание

# 1 Аффинные евклидовы пространства

## 1.1 Аффинные пространства

**Определение 1.1.** *Аффинным пространством* называют множество $E$, связанное с векторным пространством $\overrightarrow{E}$ отображением $f : E \times E \to \overrightarrow{E}$ со свойствами:

1. $(\forall a, b, c \in E)$ $\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \vec{0} \in \overrightarrow{E}\right)$ (*Соотношение Шаля*);
2. $(\forall a \in E)$ $\left(x \mapsto \overrightarrow{ax}\right.$ — биекция на $\left.\overrightarrow{E}\right)$

Элементы множества $E$ называют *точками* аффинного пространства, а элементы множества $\overrightarrow{E}$ — *свободными векторами*.

Из свойств 1,2 можно получить следствия:

3. $(\forall a \in E)$ $\left(\overrightarrow{aa} = \vec{0}\right)$;
4. $(\forall a, b \in E)$ $\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \vec{0}\right)$ (иначе: $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$);
5. $(\forall a \in E)$ $(\forall \vec{h} \in \overrightarrow{E})$ $(\exists! b \in E)$ $\quad \left(\overrightarrow{ab} = \vec{h}\right)$

   (вместо $\overrightarrow{ab} = \vec{h}$ пишут символически: $b = a + \vec{h}$);
6. $(\forall a \in E)$ $(\forall \vec{h}, \vec{k} \in \overrightarrow{E})$ $\quad \left(a + (\vec{h} + \vec{k}) = (a + \vec{h}) + \vec{k}\right)$.

Наряду со свободными векторами векторного пространства $\overrightarrow{E}$ в аффинном пространстве вводят

**Определение 1.2.** Если $a$ — точка аффинного пространства $E$, а $\vec{h}$ — вектор связанного с ним векторного пространства $\overrightarrow{E}$, то пару $(a, \vec{h})$ называют *вектором $\vec{h}$, закреплённым в точке $a$.*

Каждому закреплённому вектору $(a, \vec{h})$ соответствует упорядоченная пара точек $(a, a + \vec{h})$, и каждой упорядоченной паре точек $(a, b)$ соответствует закреплённый вектор $(a, \overrightarrow{ab})$, поэтому закреплённым вектором называют также упорядоченную пару точек аффинного пространства.

**Определение 1.3.** *Прямой, проходящей через точки $A$ и $B$* $(A \neq B)$ аффинного пространства $E$, называют множество точек

$$l(A, B) = \left\{ M \in E \,|\, M = A + t \cdot \overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Множество $l(A, B)$ можно считать упорядоченным, полагая, что точка $B_1 = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ предшествует точке $B_2 = A + t_2 \cdot \overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда $t_1 < t_2$. В этом случае прямую $l(A, B)$ будем считать *направленной*, или *сонаправленной с вектором* $\overrightarrow{AB}$.

**Определение 1.4.** *Размерностью* аффинного пространства $E$ называют размерность связанного с ним векторного пространства $\overrightarrow{E}$.

## 1.2 Аффинные евклидовы пространства

**Определение 1.5.** Аффинное пространство $E$ называется *евклидовым аффинным пространством*, если связанное с ним векторное пространство $\overrightarrow{E}$ евклидово, то есть на $\overrightarrow{E}$ задано

1. скалярное произведение векторов $\vec{p}, \vec{h} \in \overrightarrow{E}$; обозначается как $\vec{p} \cdot \vec{h}$, $(\vec{p}, \vec{h})$ или $\left\langle \vec{p}, \vec{h} \right\rangle$;
2. евклидова норма вектора $\vec{p} \in \overrightarrow{E}$; вводится по формуле $\|\vec{p}\| = \sqrt{\vec{p}\vec{p}}$;

**Определение 1.6.** Аффинное евклидово пространство $E$ называется *метрическим*, если введено отображение $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x, y \in E \quad \rho(x, y) = \|\overrightarrow{yx}\| .$$

В этом случае отображение $\rho$ называют *евклидовым расстоянием*.

Если $\overrightarrow{E}$ — векторное или евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то вместо $E$ используют обозначение $\mathbb{E}^n$.

## 1.3 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 2 Аффинные координаты и преобразования

## 2.1 Аффинные и декартовы системы координат

Пусть $E = \mathbb{E}^n$, тогда вектор $\overrightarrow{OM} \in \vec{E} = \mathbb{R}^n$ можно разложить по базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j, \tag{2.1}$$

или, в другой записи:

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j. \tag{2.2}$$

Пусть $O \in \mathbb{E}^n$, а $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$.

**Определение 2.1.** Упорядоченную последовательность $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называют *репером* пространства $\mathbb{E}^n$; точку $O$ называют *началом* этого репера, а базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — его *базисом*.

**Определение 2.2.** Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ в 2.2 называют *аффинными координатами* точки $M \in \mathbb{E}^n$ относительно выбранного репера с началом $O \in \mathbb{E}^n$ и базисом $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

**Определение 2.3.** *Ориентацией репера* называют ориентацию базиса соответствующего векторного пространства.

**Определение 2.4.** Упорядоченную последовательность $M_0, \ldots, M_n \in \mathbb{E}^n$ линейно-независимых точек называют *базисом* в $\mathbb{E}^n$.

*Замечание* 2.1. Каждому базису $(M_0, \ldots, M_n)$ отвечает его репер

$$(M_0, \overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n})$$

и его *аффинная система координат* — начало координат $M_0$ и упорядоченный набор прямых $(l(M_0, M_1), \ldots, l(M_0, M_n))$, называемых *осями координат*.

**Определение 2.5.** Аффинную систему координат, оси которой взаимно ортогональны, называют *декартовой*.

Пусть $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — репер в пространстве $\mathbb{E}^n$, и пусть даны представления точек $M, N \in \mathbb{E}^n$:

$$\begin{aligned} M &= O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j, \\ N &= O + \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} \\
&= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)\vec{e}_j.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

## 2.2 Аффинные преобразования

Пусть

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \vec{e}_j, \tag{2.5}$$

где

$$O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j. \tag{2.6}$$

Тогда

$$O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \vec{e}_j,$$

откуда следует, что

$$x_j = \tilde{x}_j + a_j, \quad j \in [1:n]. \tag{2.7}$$

Рассмотрим два ортонормальных базиса $(\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)$ и $(\vec{e}''_1, \ldots, \vec{e}''_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Как известно, они связаны равенствами:

$$\vec{e}''_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \vec{e}'_j, \quad j \in [1:n]. \tag{2.8}$$

**Теорема 2.1.** *Матрица $P = (p_{ij})$ в выр. 2.8 ортогональна.*

*Доказательство.* Любое преобразование базисов вида 2.8 должно сохранять длины векторов, то есть

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = P\vec{x} \cdot P\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Так как

$$P\vec{x} \cdot P\vec{x} = \vec{x} \cdot P^T P \vec{x},$$

а $P^T P$ — симметричная матрица, то $P^T P = I$, что и является условием ортогональности. □

Из ортогональности матрицы $P$ следует, что

$$1 = \det I = \det(P^T P) = \det P^T \det P = (\det P)^2,$$

откуда $\det P = \pm 1$. Если элементы матрицы $P$ непрерывно зависят от каких-то параметров, то и $\det P$ также непрерывно зависит от них. Отсюда следует, что при изменении этих параметров величина $\det P$ не меняется.

Выразим теперь связь между координатами точки в различных реперах. Пусть $\vec{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $\vec{x}'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ — разложения вектора $\vec{x}$ по базисам $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ и $(\vec{e}''_1, \dots, \vec{e}''_n)$ соответственно, тогда

$$\vec{x}'' = P\vec{x}', \quad \vec{x}' = P^T\vec{x}''.$$

Пусть теперь

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{e}'_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} x''_j \vec{e}''_j,$$

где

$$O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}'_j.$$

Тогда из равенств

$$\begin{aligned} O + \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{e}'_j &= O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}'_j + \sum_{i=1}^{n} x''_i \vec{e}''_i \\ &= O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}'_j + \sum_{j=1}^{n} \vec{e}'_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x''_i \end{aligned}$$

следует, что

$$x'_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x''_i, \quad j \in [1:n]. \tag{2.9}$$

Аналогично

$$x''_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}(x'_i - a_i), \quad j \in [1:n]. \tag{2.10}$$

## 2.3 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 3 Криволинейные системы координат

## 3.1 Определение

**Определение 3.1.** Открытое связное множество называется *областью.*

**Определение 3.2.** Отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to G \subset \mathbb{R}^n$ называют *гладким отображением класса* $C^r(D)$ при $1 \leqslant r < \infty$, $r = \infty$ или $r = \omega$, если оно дифференцируемо до порядка $r$ включительно, бесконечно дифференцируемо или аналитично соответственно.

**Определение 3.3.** *Криволинейной системой координат* в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называют систему гладких функций

$$\begin{cases} q_1(x) = q_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ q_n(x) = q_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

(здесь $x \in D$, $q_i : D \to \mathbb{R}$, $i \in [1 : n]$), задающих взаимно однозначное отображение области $D$ на некоторую область $G \subset \mathbb{R}^n$

$$q : D \to G,$$

причём якобиан

$$\frac{D(q_1, \ldots, q_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial q_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_n}(x) & \ldots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

отличен от нуля во всех точках области $x \in D$.

*Замечание* 3.1. Отличие от нуля якобиана $J(y)$ при всех $y \in D$ гарантирует, что обратное к $f(y)$ отображение $f^{-1}(x)$ также является гладким.

**Определение 3.4.** Взаимо однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *гомеоморфизмом.*

Таким образом, криволинейная система координат задаётся двумя гладкими взаимно однозначными отображениями $f(y)$ и $f^{-1}(x)$, устанавливающими гомеоморфизм между множествами $D$ и $G$.

**Определение 3.5.** Гладкий гомеоморфизм $f : D \to G$ класса $C^r(D)$ называют *диффеоморфизмом класса* $C^r(D)$, а множества $D$ и $G$ называют *диффеоморфными.*

Итак, криволинейная система координат в области $D \subset \mathbb{R}^n$ является некоторым диффеоморфизмом $f : D \to G \subset \mathbb{R}^n$ с ненулевым якобианом.

## 3.2 Замена координат

Пусть $y \in \mathbb{R}^n$, и в области $D \subset \mathbb{R}^n$ две системы координат $x(y)$ и $z(y)$ заданы отображениями $f : D \to G_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $g : D \to G_2 \subset \mathbb{R}^n$.

**Определение 3.6.** *Заменой координат* $x$ на $z$ называется отображение $\psi : G_1 \to G_2$, задаваемое формулой $\psi = g \circ f^{-1}$.

*Замечание* 3.2. Замена $\psi : G_1 \to G_2$ — диффеоморфизм с ненулевым якобианом, то есть это криволинейная система координат в $G_1 \subset \mathbb{R}^n$.

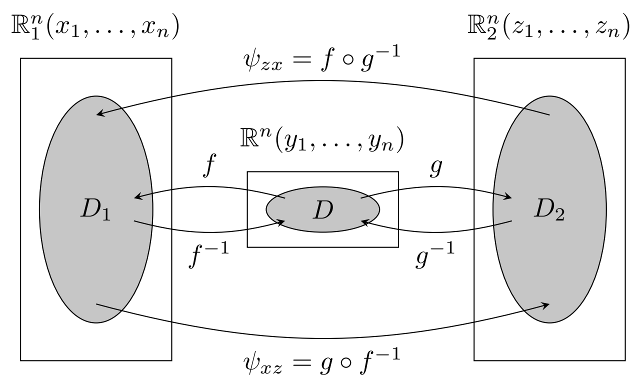


Рис. 3.1

## 3.3 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 4 Локальные базисы криволинейных координат

Криволинейные координаты обозначим $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in Q = \{\vec{q} \,|\, \vec{q} = \vec{q}(\vec{r}), \vec{r} \in D\}$.

## 4.1 Определение

TODO: инфа из учебника

**Определение 4.1.** Пусть $\vec{q_0} = (q_{10}, q_{20}, q_{30}) \in Q$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(\vec{q_0}) = (x_0, y_0, z_0)$, тогда множества

$$(q_{i0}) = \{(x, y, z) \in D \,|\, q_i(x, y, z) = q_{i0}\}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

называют *координатными поверхностями* криволинейной системы координат $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ в точке $(q_{10}, q_{20}, q_{30})$, а множества

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= (q_{20}) \cap (q_{30}) \\ \tilde{q}_2 &= (q_{10}) \cap (q_{30}) \\ \tilde{q}_3 &= (q_{10}) \cap (q_{20}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

— её *координатными линиями* в этой точке.

*Замечание* 4.1. $(q_{10}) \cap (q_{20}) \cap (q_{30}) = \{(x_0, y_0, z_0)\}$.

По определению, якобиан криволинейной системы координат отличен от нуля в каждой точке области определения $Q$. Векторы $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ составляют строки матрицы этого якобиана и поэтому не могут быть нулевыми.

**Теорема 4.1.** *Векторы* $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ *являются касательными соответственно к линиям* $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$ *в точке* $\vec{q_0}$.

*Доказательство.* Для наглядности рассмотрим координатную кривую $\tilde{q}_1$. Эта кривая параметризуется переменной $q_i$ в точке $\vec{q_0}$. Положим $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$, тогда производая $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ даст направление касательной к этой кривой в точке $\vec{q_0}$. □

**Определение 4.2.** Совокупность векторов $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3)$, определяемых формулой

$$\vec{\tau}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|}, \quad i = 1, 2, 3$$

называют *локальным базисом* криволинейной системы координат в точке $\vec{q_0}$.

**Определение 4.3.** Если векторы $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$ взаимно ортогональны в точке $\vec{q_0}$, то криволинейная система координат называется *ортогональной* в этой точке.

## 4.2 Условие ортогональности

Так как векторы $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$ ненулевые, то условия ортогональности локального базиса

$$\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j$$

эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j. \tag{4.3}$$

## 4.3 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 5 Коэффициенты Ламе. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

## 5.1 Общие сведения

В качестве пространства будем использовать аффинное евклидово пространство $\mathbb{E}^n$.

**Определение 5.1.** *Положением механической системы в момент* $t_0$ будем называть точку $M^0 \in \mathbb{E}^n$.

**Определение 5.2.** Пусть $J$ — промежуток на $\mathbb{R}$. *Движением* механической системы будем называть дважды непрерывно дифференцируемую функцию $D : J \to \mathbb{E}^n$ времени $t$ такую, что $D(t_0) = M^0$.

**Определение 5.3.** Предположим, что точка этого пространства может быть задана радиус-вектором $\vec{r}$ в какой-либо декартовой системе координат, то есть движение этой точки представлено вектор-функцией $\vec{r} : J \to \mathbb{R}^n$. В этом случае *скоростью* и *ускорением* точки в этом движении называют соответственно вектор-функции $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ и $\vec{v} = \ddot{\vec{r}}$, а *траекторией* точки называют кривую $\{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n \,|\, t \in J\}$.

## 5.2 Коэффициенты Ламе

Так как

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k}, \tag{5.1}$$

то, введя обозначение

$$H_m = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}, \tag{5.2}$$

векторы локального базиса можно представить в виде

$$\vec{\tau}_m = \frac{1}{H_m}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}, \tag{5.3}$$

или, иначе:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = H_m \vec{\tau}_m. \tag{5.4}$$

**Определение 5.4.** Величины $H_m$ (иногда удобнее обозначение $H_{q_m}$) называют *коэффициентами Ламе.*

Выразим направляющие косинусы осей локального базиса криволинейной системы координат $\vec{q}$ относительно осей декартовой системы координат:

$$\cos\angle(\vec{\tau}_m, \vec{i}) = \vec{\tau}_m \cdot \vec{i} = \frac{1}{H_m}\frac{\partial x}{\partial q_m}, \quad \ldots, \quad m = 1, 2, 3. \tag{5.5}$$

**Определение 5.5.** *Движением точки в криволинейных координатах* $\vec{q}$ называют дважды непрерывно дифференцируемую на промежутке $J \subset \mathbb{R}$ вектор-функцию $\vec{q}(t)$.

**Определение 5.6.** Функции $\dot{\vec{q}}$ и $\ddot{\vec{q}}$ называют соответственно *обобщённой скоростью* и *обобщённым ускорением точки в движении* $\vec{q}(t)$.

**Определение 5.7.** Кривую

$$\Gamma = \{\vec{q}(t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in J\}$$

называют *траекторией точки в криволинейных координатах.*

## 5.3 Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

Напишем вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{5.6}$$

тогда по формулам 5.4 получим

$$\vec{v} = H_1\dot{q}_1\vec{\tau}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{\tau}_2 + H_3\dot{q}_3\vec{\tau}_3.$$

Это равенство можно рассматривать как разложение вектора скорости по единичным векторам осей криволинейных координат; для проекций скорости на координатные оси будем иметь

$$v_{q_m} = H_{q_m}\dot{q}_m \quad (m = 1, 2, 3). \tag{5.7}$$

Если криволинейная система ортогональна, то

$$\begin{gathered} v = \sqrt{(H_1\dot{q}_1)^2 + (H_2\dot{q}_2)^2 + (H_3\dot{q}_3)^2}, \\ \cos\angle(\vec{v}, \vec{\tau}_m) = H_m\dot{q}_m v^{-1}, \quad m = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{5.8}$$

## 5.4 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 6 Проекции ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат

Для определения проекций ускорения представим их в виде

$$w_{q_m} = \vec{w} \cdot \vec{\tau}_m = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{1}{H_m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m},$$

откуда

$$H_m w_{q_m} = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}. \tag{6.1}$$

Из выр. 5.6 непосредственно следует

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}. \tag{6.2}$$

Кроме того, по определению полной производной

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \, \partial q_m} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \, \partial q_m} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \, \partial q_m} \dot{q}_3;$$

но это же выражение получим, если возьмём от обеих частей выр. 5.6 частную производную по $q_m$. Действительно, так как $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ зависят только от времени, а не от $q_1$, $q_2$, $q_3$, то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \, \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \, \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \, \partial q_3} \dot{q}_3;$$

таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m}. \tag{6.3}$$

Подставляя значения $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$ по выр. 6.2 и $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$ по выр. 6.3 в равенство 6.1, получим

$$H_m w_{q_m} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m}. \tag{6.4}$$

Замечая, что

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \frac{v^2}{2},$$
$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{v^2}{2},$$

на основании выр. 6.4 получим выражение проекций ускорения на оси криволинейной системы координат:

$$w_{q_m} = \frac{1}{H_m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right), \tag{6.5}$$

где для краткости введено обозначение

$$T = \frac{1}{2}v^2. \tag{6.6}$$

Используя линейный дифференциальный оператор Эйлера-Лагранжа, определяемый формулой

$$E_{q_m}(T) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}, \tag{6.7}$$

окончательно получаем

$$w_{q_m} = \frac{1}{H_{q_m}}E_{q_m}(T). \tag{6.8}$$

## 6.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 7 Натуральный триэдр. Проекции ускорения точки на оси натурального триэдра

## 7.1 Натуральный триэдр траектории

TODO: картинки из книги (страница 184)

Рассмотрим некоторую кривую, не лежащую в одной плоскости (кривую двоякой кривизны). Установим на этой кривой начало $M_0$ и положительное направление отсчёта дуг $\sigma$. Возьмём какую-нибудь текущую точку $M$, положение которой определим либо дугой $\sigma$, либо вектор-радиусом $\vec{r}$ относительно некоторой неподвижной точки $O$. Через точку $M$ проведём касательную к кривой; направление касательной в сторону возрастающих значений $\sigma$ зададим единичным вектором касательной $\vec{\tau}$.

Возьмём на кривой весьма близкую к $M$ точку $M_1$; пусть положение её определяется значением дуги $\sigma + \Delta\sigma$, причём $\Delta\sigma > 0$, то есть $M_1$ лежит за $M$ в сторону положительного отсчёта дуги. Единичный вектор касательной в точке $M_1$ обозначим через $\vec{\tau}_1$. Проведём через $\vec{\tau}$ плоскость $\Pi$, параллельную $\vec{\tau}_1$; чтобы построить её, достаточно перенести $\vec{\tau}_1$ в точку $M$; два вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$, имеющие начало в точке $M$, определяют положение $\Pi$. При изменении положения $M_1$ плоскость $\Pi$ также изменяет своё положение, вращаясь вокруг $\vec{\tau}$; если будем приближать $M_1$ к $M$, уменьшая $\Delta\sigma$ до нуля, то эта плоскость будет приближаться к некоторому предельному положению $\Pi_0$, называемому *соприкасающейся плоскостью.*

В точке $M$ проведём плоскость $N_0$, перпендикулярную к касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью* кривой. Любая прямая, проведённая в этой плоскости через точку $M$, будет перпендикулярна к $\vec{\tau}$, то есть будет *нормальна* кривой; линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей определяет *главную нормаль* кривой. Иными словами, главной нормалью называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпендикулярная к главной нормали, называется *бинормалью* кривой.

**Определение 7.1.** Совокупность трёх взаимно перпендикулярных осей:

1. касательной, направленной в сторону возрастания дуги,
2. главной нормали, направленной в сторону вогнутости кривой, и
3. бинормали, направленной по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось $Oz$ расположена по отношению к осям $Ox$ и $Oy$,

образует так называемый *натуральный триэдр* (естественный трёхгранник) кривой. Единичные векторы этих осей обозначим соответственно через $\vec{\tau}, \vec{n}$ и $\vec{b}$.

Найдём выражения этих трёх единичных векторов натурального триэдра через вектор-радиус точки на кривой, заданный как вектор-функция дуги:

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma). \tag{7.1}$$

Найдём прежде всего $\vec{\tau}$. По определению векторной производной вектор $\frac{d\vec{r}}{d\sigma}$ направлен по касательной к годографу вектора $\vec{r}$ в сторону возрастающих $\sigma$. С другой стороны, численная величина производной равна

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{d\sigma} = 1.$$

Таким образом, векторная производная представляет собой искомый единичный вектор касательной:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma}. \tag{7.2}$$

Для определения единичного вектора главной нормали $\vec{n}$ обратимся к рисунку. Рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ в плоскости $\Pi$. Если точка $M_1$ взята на весьма малом расстоянии $\Delta\sigma$ от точки $M$, то угол $\varepsilon$ между касательными $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ в смежных точках кривой — его называют *углом смежности* — будет также мал и вектор $\Delta\vec{\tau}$ с тем меньшей ошибкой, чем меньше $\Delta\sigma$, можно считать перпендикулярным к $\vec{\tau}$ и, следовательно, параллельным вектору нормали $\vec{n}'$, лежащему с $\Delta\vec{\tau}$ в одной и той же плоскости $\Pi$. По величине $|\Delta\vec{\tau}|$, как основание равнобедренного треугольника с малым углом $\varepsilon$ при вершине и боковыми сторонами, равными единице, будет равен

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2\,|\vec{\tau}|\sin\frac{\varepsilon}{2} \approx 2\cdot 1\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда найдём (с точностью до малых высших порядков)

$$\Delta\vec{\tau} = \varepsilon\vec{n}',$$

или

$$\vec{n}' = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}.$$

Будем приближать $\Delta\sigma$ к нулю, тогда точка $M_1$ будет стремиться к $M$, плоскость $\Pi$ — к соприкасающейся плоскости $\Pi_0$, единичный вектор нормали $\vec{n}'$ — к искомому единичному вектору $\vec{n}$, и мы будем иметь

$$\vec{n} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}.$$

Первый предел равен векторной производной

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\vec{r}}{d\sigma}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2};$$

что же касается второго предела, то заметим, что отношение $\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma}$, определяющее среднюю скорость поворота касательной к кривой при переходе от данной точки к смежной, характеризует *среднюю кривизну* кривой на участке $(\sigma, \sigma+\Delta\sigma)$, а величина

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = K \tag{7.3}$$

определяет *кривизну* кривой в данной точке.

Таким образом, имеем следующее выражение единичного вектора *главной нормали*:

$$\vec{n} = \frac{1}{K}\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{K}\frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}. \tag{7.4}$$

Величину $1/K = \rho$, имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны* кривой в данной точке.

В случае произвольной кривой через данную её точку и две смежные с нею точки можно провести круг, который при стремлении смежных точек к данной рассматриваемой будет стремиться к некоторому предельному кругу, называемому *соприкасающимся кругом* или *кругом кривизны*. Радиус этого круга будет радиусом кривизны кривой, центр круга $C$ (TODO: ссылка на картинку) — *центром кривизны* кривой. Очевидно, круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости, центр кривизны $C$ — на главной нормали со стороны вогнутости кривой.

Введя радиус кривизны $\rho$, получим

$$\vec{n} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \rho\frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}. \tag{7.5}$$

Теперь уже не составляет труда найти и единичный вектор бинормали. Из условия выбора положительного направления на бинормали следует:

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \frac{1}{K}\left(\frac{d\vec{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}\right) = \rho\left(\frac{d\vec{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\sigma^2}\right). \tag{7.6}$$

## 7.2 Разложение ускорения по осям натурального триэдра траектории

Обозначим через $v_\tau$ проекцию вектора скорости на направление касательной к траектории. Очевидно, что $v_\tau$ по абсолютной величине равно численной величине скорости $v$; что же касается знака $v_\tau$, то $v_\tau$ положительно, если направление движения в данный момент совпадает с направлением положительного отсчёта дуг $\sigma$ по траектории, и отрицательно в противоположном случае. Будем иметь

$$\vec{v} = v_\tau\vec{\tau}. \tag{7.7}$$

Если $s$ — пройденный путь, то $d\sigma = ds$, когда $d\sigma > 0$, и $d\sigma = -ds$, если $d\sigma < 0$, поэтому

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \pm\frac{ds}{dt} = \pm v. \tag{7.8}$$

Вектор ускорения есть производная по времени от вектора скорости, поэтому

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau\vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{7.9}$$

Далее, имеем

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt};$$

согласно формулам 7.4 и 7.8 найдём

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{n}v_\tau.$$

Подставив полученное выражение в равенство 7.9, будем иметь

$$\vec{w} = \vec{\tau}\frac{dv_\tau}{dt} + \vec{n}\frac{v^2}{\rho}, \tag{7.10}$$

где $v_\tau^2$ заменено на равное ему $v^2$.

Равенство 7.10 представляет собой *разложение вектора ускорения по осям натурального триэдра.*

Обозначим коэффициенты при единичных векторах $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ в разложении 7.10, то есть проекции ускорения на оси натурального триэдра, соответственно через $w_\tau$, $w_n$ и $w_b$; тогда будем иметь

$$\vec{w} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n} + w_b\vec{b}, \tag{7.11}$$

причём из выр. 7.10 следует, что

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что вектор ускорения перпендикулярен к бинормали, то есть *ускорение лежит в соприкасающейся плоскости.*

Первое слагаемое в разложении 7.11, $w_\tau\vec{\tau}$, даёт *касательную* (тангенциальную) составляющую ускорения, второе, $w_n\vec{n}$, — *нормальную* составляющую ускорения. Иногда для краткости их называют просто касательным и нормальным ускорениями.

Нормальное ускорение всегда совпадает по направлению с главной нормалью, так как $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ — существенно положительная величина. Вспоминая ранее сказанное о направлении $\vec{n}$, видим, что *нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории* (нормальное ускорение иногда ещё называют поэтому *центростремительным*), то есть по главной нормали к траектории в сторону её вогнутости. Отсюда вытекает свойство ускорения: *вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории.*

Итак, *вектор ускорения в криволинейном движении может быть представлен как геометрическая сумма двух ускорений: касательного и нормального.*

Величина ускорения может быть представлена так:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}, \tag{7.12}$$

а направление задано косинусами углов, составляемых им с касательной и главной нормалью к траектории:

$$\cos(\widehat{\vec{w},\vec{\tau}}) = \frac{w_\tau}{w}, \quad \cos(\widehat{\vec{w},\vec{n}}) = \frac{w_n}{w}. \tag{7.13}$$

## 7.3 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 8 Определение кривизны траектории точки по движению

## 8.1 Кинематический метод

Если известны модули скорости $v = v(t)$ и ускорения $w = w(t)$ движения точки, то кривизну траектории можно найти по формулам:

$$\begin{gathered} w_\tau = \dot{v}, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}, \\ K = \frac{w_n}{v^2}, \quad \rho = \frac{1}{K}. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Если движение точки задано тройкой скалярных функций $x(t),\ y(t),\ z(t)$, то

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Если же движение точки задано тройкой ортогональных криволинейных координат — скалярных функций $q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)$, то проекции скорости и ускорения точки выразятся по формулам 5.7 и 6.8 как

$$v_{q_m} = H_{q_m}\dot{q}_m, \quad w_{q_m} = \frac{1}{H_{q_m}}E_{q_m}(T), \quad m = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_{q_1}(t))^2 + (v_{q_2}(t))^2 + (v_{q_3}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(w_{q_1}(t))^2 + (w_{q_2}(t))^2 + (w_{q_3}(t))^2}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

## 8.2 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 9 Движение точки по прямой и по окружности

## 9.1 Прямолинейное движение

**Определение 9.1.** *Прямолинейное движение* — движение точки, траектория которой лежит на прямой.

Начало системы $Oxyz$ поместим на этой прямой, а ось $x$ направим вдоль неё. Тогда получим уравнение траектории:

$$y = 0, \quad z = 0,$$

тогда

$$v^2 = (\dot{x}(t))^2,$$
$$w^2 = (\ddot{x}(t))^2$$

и, как следствие,

$$w_\tau^2 = (\dot{v})^2 = (\ddot{x})^2, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = 0,$$
$$K = 0, \quad \rho = +\infty.$$

**Определение 9.2.** Прямолинейное движение называют *равномерным*, если $v(t) = v_0$, где $v_0$ — постоянная.

Уравнение движения:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0), \quad x(t_0) = x_0.$$

Естественная координата:

$$s = \left| v_0(t - t_0) \right|.$$

**Определение 9.3.** Прямолинейное движение называют *равнопеременным*, если $w(t) = w_0$, где $w_0$ — постоянная.

Уравнение движения:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{w_0}{2}(t - t_0)^2,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v(t_0) = v_0.$$

Естественная координата:

$$s = \left| v_0(t - t_0) + \frac{w_0}{2}(t - t_0)^2 \right|.$$

## 9.2 Движение по окружности

**Определение 9.4.** *Углом поворота между векторами* называется вектор

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} (\arccos(\vec{a}, \vec{b})) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}, & \vec{a} \nparallel \vec{b}; \\ \vec{0}, & \vec{a} \parallel \vec{b}. \end{cases}$$

**Определение 9.5.** *Углом между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется величина

$$\left|\angle(\vec{a},\vec{b})\right| = \arccos(\vec{a},\vec{b}).$$

Когда говорят об угле между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отсчитываемом от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, то имеют в виду угол поворота $\angle(\vec{a},\vec{b})$.

**Определение 9.6.** *Движением по окружности* называют любое движение точки, траектория которого лежит на окружности.

В случае движения по окружности угол смежности $\varepsilon$ равен центральному углу между радиусами, проведёнными в точки касания, а соответствующая дуга равна произведению этого угла на радиус $R$, то есть

$$\Delta\sigma = \varepsilon R, \implies \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \frac{1}{R},$$

поэтому

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \frac{1}{R}, \quad \rho = R.$$

(TODO: решить, куда поместить определения угловой скорости и ускорения, а также скалярные и векторные формулы скорости и ускорнения точек)

**Определение 9.7.** Движение по окружности называют *равномерным вращением*, если $\omega(t) = \omega_0$, где $\omega_0$ — постоянная.

В этом случае

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

**Определение 9.8.** Движение по окружности называют *равнопеременным вращением*, если $\varepsilon = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0$ — постоянная.

В этом случае

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\varepsilon_0}{2}(t - t_0)^2,$$
$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi(t_0)} = \omega(t_0) = \omega_0.$$

Рассмотрим частные случаи движения по окружности:

1. Если тело вращается равномерно, то $\varepsilon(t) = 0$, поэтому
$$w_\tau = 0, \quad w_n = R\omega_0^2.$$
2. Если в некоторый момент времени угловая скорость $\omega$ тела достигает максимального или минимального значения, то $\dot{\omega} = \varepsilon = 0$, поэтому
$$w_\tau = 0, \quad w_n = R\omega_0^2.$$
3. Если в некоторый момент угол поворота достигает максимального или минимального значения, то $\dot{\varphi} = \omega = 0$, поэтому
$$w_\tau = 0, \quad w_n = 0.$$

## 9.3 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 10 Движение механической системы. Твёрдое тело. Число степеней свободы положения

## 10.1 Движение механической системы

Пусть $T$ — некоторое множество индексов $\tau$, которыми помечены все точки механической системы, а $J \subset \mathbb{R}$ — промежуток времени $t$, на котором определено движение механической системы.

Пространством будем считать аффинное евклидово пространство $\mathbb{E}^n$; точку этого пространства $M = (x, y, z) \in \mathbb{E}^n$ будем представлять вектор-радиусом $\vec{r}$ в декартовой системе координат.

**Определение 10.1.** *Положением механической системы в момент времени* $t_0$ будем называть семейство $\mathcal{M} = \{M_\tau\}_{\tau \in T}$ точек в $\mathbb{E}^n$.

**Определение 10.2.** *Движением механической системы* будем называть семейство $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \to \mathbb{E}^n\}_{\tau \in T}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций времени $t$ такое, что

$$\forall \tau \in T \quad D_\tau(t_0) = M_\tau.$$

Ясно, что положением механической системы в любой другой момент времени $t \in J$ будет семейство $\{D_\tau(t)\}_{\tau \in T}$.

**Определение 10.3.** *Перемещением механической системы* за время от $t_1$ до $t_2$ называют семейство векторов $\{\overrightarrow{AB} \mid A = D_\tau(t_1),\ B = D_\tau(t_2)\}_{\tau \in T}$.

## 10.2 Твёрдое тело

**Определение 10.4.** *Классом движений* назовём некоторое множество движений $\mathcal{DM}$.

**Определение 10.5.** *Неизменяемой на классе движений* назовём такую механическую систему, что

$$\forall t \in J \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in T \quad \rho(D_{\tau_1}(t), D_{\tau_2}(t)) = \rho(M_{\tau_1}, M_{\tau_2})$$

для любого движения этого класса.

**Определение 10.6.** Механическую систему назовём *сплошной связной средой на классе движений*, если каждое её положение есть область или замкнутая область в $\mathbb{E}^n$.

**Определение 10.7.** *Твёрдым телом* или *абсолютно твёрдым телом на классе движений* назовём сплошную связную неизменяемую механическую систему на этом классе движений.

## 10.3 Число степеней свободы

Будем говорить, что движение $\mathcal{DM} = \{D_\tau\}_{\tau \in T}$ может быть выражено через систему скалярных функций

$$q_i : J \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

если

$$\begin{array}{ll} \forall \tau \in T & \exists (q_1, \ldots, q_m) \mapsto f_\tau(q_1, \ldots, q_m) \\ \forall t \in J & D_\tau(t) = f_\tau(q_1(t), \ldots, q_m(t)). \end{array} \tag{10.1}$$

**Определение 10.8.** Говорят, что механическая система имеет *$s$ степеней свободы положения на классе движений*, если всякое движение этого класса может быть выражено через некоторую систему скалярных функций

$$q_i : J \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, s$$

и если хотя бы одно движение этого класса не может быть выражено ни через какую систему из меньшего числа скалярных функций.

Если класс движений очевиден из контекста, то говорят просто о *числе $s$ степеней свободы* механической системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из конечного числа $N$ точек. Такая система на классе всех движений в $\mathbb{E}^n$ имеет $s = n \cdot N$ степеней свободы.

Рассмотрим такой подкласс всех движений этой системы, для которых координаты $(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, N$ её точек удовлетворяют уравнениям

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

причём фунции $f_\nu$ аргументов $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ независимы при $t \in J$; будем считать, что ранг матрицы Якоби этих функций равен $m$. В этом случае говорят, что рассматривается механическая система из $N$ точек, *стеснённая $m$ голономными связями.*

**Теорема 10.1.** *Механическая система в $\mathbb{E}^n$ из $N$ точек, стеснённая $m$ голономными связями, имеет*

$$s = n \cdot N - m$$

*степеней свободы.*

*Доказательство.* (TODO: доказать утверждение) □

**Теорема 10.2.** *Для твёрдого тела на классе всех его движений в $\mathbb{E}^n$ число степеней свободы положения равно*

$$s = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

*Доказательство.* (TODO: доказать утверждение (указания можно найти на 37 странице конспекта)) □

**Определение 10.9.** Движение твёрдого тела называют *поступательным*, если у подвижного репера, связанного с этим телом, с течением времени может изменяться только начало.

**Определение 10.10.** Движение твёрдого тела называют *вращением вокруг точки $O$*, если с течением времени не меняются координаты (в неподвижной системе) некоторой точки $O$ этого тела.

(TODO: найти число степеней свободы положения твёрдого тела на этих двух классах движений)

## 10.4 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 11 Группа движений аффинного евклидова пространства

## 11.1 Предварительные сведения

**Определение 11.1.** *Законом композиции на множестве* $X$ называют отображение

$$* : X \times X \to X.$$

Вместо $*(a, b)$ пишут $a * b$.

**Определение 11.2.** Пусть $*$ — закон композиции на $X$. Тогда пару $(X, *)$ называют *алгебраической структурой.*

**Определение 11.3.** Пусть $*$ — закон композиции на $X$. Если

$$\forall a, b, c \in X \quad a * (b * c) = (a * b) * c,$$

то закон композиции $*$ называется *ассоциативным.*

**Определение 11.4.** Алгебраическая структура $(X, *)$ называется *полугруппой*, если закон композиции $*$ ассоциативен.

**Определение 11.5.** Элемент $e \in X$ называется *единичным* или *нейтральным* относительно закона композиции $*$, если

$$\forall x \in X \quad e * x = x * e = x.$$

*Замечание* 11.1. В алгебраической структуре $(X, *)$ не может быть более одного единичного элемента.

**Определение 11.6.** Полугруппу с единицей называют *моноидом.*

**Определение 11.7.** Элемент $a$ моноида $(X, *, e)$ называют *обратимым*, если

$$\exists b \in X : \quad a * b = b * a = e.$$

Для элемента $b$ используют обозначение $a^{-1}$.

**Определение 11.8.** Моноид, все элементы которого обратимы, называют *группой.*

**Определение 11.9.** Закон композиции $*$ называют *коммутативным*, если

$$\forall a, b \in X \quad a * b = b * a.$$

**Определение 11.10.** Группу с коммутативным законом композиции называют *абелевой* (*коммутативной*) группой.

**Определение 11.11.** Подмножество $H$ группы $G$ называется *подгруппой группы* $G$, если:

1. $H$ содержит единичный элемент из $G$:

$$e \in H;$$

2. $H$ содержит композицию любых двух элементов из $H$:

$$\forall a, b \in H \quad a * b \in H;$$

3. $H$ содержит вместе со всяких своим элементом $h$ обратный к нему элемент $h^{-1}$:

$$\forall h \in H \quad h^{-1} \in H.$$

Пусть $s(\Omega)$ — множество всех биективных отображений $f : \Omega \to \Omega$. Введём закон композиции $* : s(\Omega) \times s(\Omega) \to s(\Omega)$ такой, что

$$\forall \varphi, \psi \in s(\Omega) \quad \varphi * \psi = \varphi \circ \psi;$$

тогда $(s(\Omega), *)$ — группа, причём её единицей является тождественное отображение $\mathrm{id}_\Omega : \Omega \to \Omega$ такое, что

$$\forall x \in \Omega \quad \mathrm{id}_\Omega(x) = x.$$

## 11.2 Группа движений твёрдого тела

(TODO: Дальше может быть путаница в терминах. Короче, надо понять, что в его понимании такое "перемещение но вот как я это понимаю. Рассмотрим некоторое движение твёрдого тела $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \to \mathbb{E}^3\}_{\tau \in T}$. Функция $D_\tau$ задаёт перемещение точки $M_\tau$ твёрдого тела. У нас есть формула, по которому мы можем найти коэффициенты $x_j^\tau(t)$, то есть перемещению точки соответствует биекция $D : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, задающаяся этой формулой. В этом случае получается, что каждому движению твёрдого тела соответствует множество таких биекций. Если это всё верно, то надо аккуратно переписать всё в верных терминах.)

Рассмотрим движение $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \to \mathbb{E}^3\}_{\tau \in T}$ механической системы в $\mathbb{E}^3$.

Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — некоторый фиксированный репер в $\mathbb{E}^3$ и пусть

$$M_\tau = D_\tau(t) = O + \sum_{j=1}^{3} x_j^\tau(t)\vec{e}_j, \quad \tau \in T. \tag{11.1}$$

Так как свободное твёрдое тело (твёрдое тело на классе всех движений в $\mathbb{E}^3$) имеет 6 степеней свободы, то функции $x_j^\tau(t)$ могут быть выражены через какие-то 6 скалярных функций $q_1, \ldots, q_6$.

етыре точки $M_0, M_1, M_2, M_3$ твёрдого тела выберем так, чтобы векторы $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3}$ образовывали ортонормированный базис $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда каждая точка $M_\tau$ твёрдого тела определяется своими аффинными координатами в репере $(M_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$:

$$M_\tau = M_0 + \sum_{j=1}^{3} y_j^\tau \vec{i}_j, \tag{11.2}$$

причём координаты $y_j^\tau$ не зависят от времени.

Векторы $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, построенные по движущимся точкам $M_0, M_1, M_2, M_3$, являются функциями времени:

$$\vec{i}_j = \vec{i}_j(t), \quad j = 1, 2, 3.$$

Ортонормированные базисы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $(\vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$ пространства $\mathbb{R}^3$ связаны равенствами

$$\vec{i}_k = \sum_{j=1}^{3} p_{kj}(t)\vec{e}_j, \quad k = 1, 2, 3, \tag{11.3}$$

где матрица $P(t) = (p_{kj}(t))$ ортогональна.

Если $D_{M_0}$ — движение точки $M_0$ и

$$D_{M_0}(t) = O + \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\vec{e}_j,$$

то

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum_{k=1}^{3} p_{kj}(t) y_k^\tau, \quad j = 1, 2, 3. \tag{11.4}$$

Элементы $p_{kj}$ ортогональной матрицы $P$ могут быть выражены через углы Эйлера $\varphi, \psi, \theta$, поэтому формулы 11.4 дают искомое представление для функций $x_j^\tau$ через шесть функций $a_1(t), a_2(t), a_3(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t)$. Это значит, что всякому перемещению соответствует биективное отображение $D : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, определяемое формулами 11.4.

Задавая всевозможные движения (то есть функции $a_1, a_2, a_3, \varphi, \psi, \theta$) и фиксируя всевозможные моменты времени $t \in J$, мы будем получать те или иные перемещения твёрдого тела за время от $t_0$ до $t$ и соответствующие ему биекции $D : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$.

**Теорема 11.1.** *Семейство $D_3$ всех таких биекций является подгруппой группы $s(\mathbb{E}^3)$.*

*Доказательство.* (TODO: указания на странице 44 конспекта) □

**Определение 11.12.** Семейство $D_3$ называют *группой движений* в $\mathbb{E}^3$.

## 11.3 Подгруппы движений

**Определение 11.13.** Если матрица $P(t)$ не зависит от времени, то движение твёрдого тела называют *поступательным*.

Каждому перемещению твёрдого тела за время от $t_0$ до $t$ в некотором поступательном движении соответствует некоторое множество биекций $D : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, определяемых формулами:

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum_{k=1}^{3} p_{kj}^0 y_k^\tau, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $P(t_0) = P^0 = (p_{kj}^0)$.

**Теорема 11.2.** *Множество $D_3^{(n)}$ всех таких биекций*

## 11.4 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 12 Поступательное движение твёрдого тела

Под *поступательным* движением абсолютно твёрдого тела понимают такое его движение, при котором прямая, проведённая через любые две точки тела и жёстко с ним связанная, остаётся во всё время движения *параллельной самой себе.*

Точки *поступательно* движущегося тела могут описывать *любые криволинейные траектории*, но движение тела сохраняет свой *поступательный* характер.

**Теорема 12.1.** *При поступательном движении твёрдого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.*

*Доказательство.* Определим положение любой точки $M$ твёрдого тела вектор-радиусом $\vec{r}'$, проведённым из некоторой точки $O'$, также принадлежащей телу (TODO: ссылка на рисунок). Если движение поступательное, то по определению вектор $\vec{r}'$ остаётся параллельным самому себе. Величина вектора $\vec{r}'$ ($r' = O'M$) не изменяется, так как тело твёрдое. Итак, $\vec{r}'$ является постоянным вектором.

Обозначим через $\vec{r}_0$ вектор-радиус точки $O'$ относительно некоторой неподвижной точки $O$. Равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \tag{12.1}$$

показывает, что траектория точки $M$ получается из траектории точки $O'$ путём параллельного перенесения её на постоянный по величине и направлению вектор. Следовательно, *траектории точек твёрдого тела, движущегося поступательно, представляют собой конгруэнтные кривые*, получающиеся друг из друга путём параллельного переноса.

Дифференцируя обе части формулы 12.1 по времени и замечая, что производная постоянного вектора $\vec{r}'$ равна нулю, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt},$$

или, вспоминая определение вектора скорости,

$$\vec{v} = \vec{v}_0, \tag{12.2}$$

то есть *скорости всех точек твёрдого тела, движущегося поступательно, в любой момент времени друг другу равны как по величине, так и по направлению.*

Дифференцируя обе части 12.2 ещё раз по времени, получаем

$$\vec{w} = \vec{w}_0, \tag{12.3}$$

то есть *ускорения всех точек поступательно движущегося твёрдого тела в любой момент времени одинаковы.* □

## 12.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 13 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

## 13.1 Определение. Основные понятия

Рассмотрим движение твёрдого тела, при котором две точки его остаются неподвижными; такое движение представляет собой вращение тела вокруг проходящей через неподвижные точки прямой, называемой *осью вращения*.

Пусть ось вращения тела совпадает с осью $Oz$. Чтобы определить положение тела, проведём через ось $Oz$ две полуплоскости: подвижную $Q$, твёрдо связанную с вращающимся телом, и неподвижную $P$ (TODO: картинка). Заданием двугранного угла $\varphi$ между этими полуплоскостями положение твёрдого тела вполне определяется.

Движение твёрдого тела, имеющего неподвижную ось вращения, определяется заданием угла $\varphi$ в функции времени:

$$\varphi = f(t). \tag{13.1}$$

Это уравнение называется *уравнением вращения* тела.

Величина, учитывающая быстроту изменения угла поворота со временем, называется *угловой скоростью тела*.

Условимся обозначать абсолютное значение некоторой величины как $a$, а её алгебраическое значение как $\tilde{a}$. Конечно, $|\tilde{a}| = a$. В случае угловой скорости будем использовать соответственно обозначения $\omega$ и $\tilde{\omega}$.

За меру быстроты изменения угла поворота с течением времени примем отношение приращения угла $\Delta\varphi$ к промежутку времени $\Delta t$, в течение которого это приращение произошло. Такое отношение назовём *средней угловой скоростью* за промежуток времени $\Delta t$ и обозначим

$$\tilde{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Желая перейти от средней угловой скорости за некоторый промежуток времени к *истинной угловой скорости в данный момент*, будем стремить интервал времени $\Delta t$ к нулю. По определению производной угловая скорость $\tilde{\omega}$ в данный момент будет равна

$$\tilde{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{\omega}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{13.2}$$

Аналогично вводится понятие *среднего углового ускорения* за промежуток времени $\Delta t$:

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}$$

и *углового ускорения в данный момент*:

$$\tilde{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{\varepsilon}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}}. \tag{13.3}$$

Из формулы 13.2 будет также следовать

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

## 13.2 Векторные формулы скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Введём в рассмотрение *вектор угловой скорости*, который будем обозначать через $\vec{\omega}$.

Величиной вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ является

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \dot{\varphi}.$$

Условимся направлять вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ по оси вращения так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора $\vec{\omega}$, видел вращение тела в положительном направлении, то есть против часовой стрелки при правой системе координат.

Откладывая вектор $\vec{\omega}$ по оси вращения, можно определить вектор линейной скорости $\vec{v}$ любой точки $M$ как векторное произведение вектора угловой скорости на вектор-радиус этой точки относительно любой точки оси вращения (*формула Эйлера*) (TODO: картинка):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{13.4}$$

В самом деле, величина векторного произведения 13.4 равна

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega h,$$

то есть величине скорости; пусть, далее, принята правая система осей, тогда при показанном стрелкой направлении вращения вектор угловой скорости должен быть отложен по оси вращения вверх (TODO: картинка 140). Векторное произведение $\vec{\omega}\times\vec{r}$ перпендикулярно к $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ и направлено так, чтобы, смотря с его конца, видеть поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ на наименьший угол против часовой стрелки; но это и будет направление скорости $\vec{v}$.

Выведем теперь векторную формулу ускорения. Для этого возьмём векторную производную по времени от обеих частей равенства 13.4; будем иметь

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{13.5}$$

Производную по времени от вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ назовём *вектором углового ускорения*. Называя вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ и замечая, что по определению скорости $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, приведём 13.5 к виду

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{13.6}$$

Первое слагаемое, $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, представляет собой *вращательную* составляющую ускорения. Действительно, оно равно по величине

$$w^{(\text{в})} = \varepsilon r \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}) = \varepsilon h,$$

а по направлению совпадает со скоростью $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены, и противоположно скорости, если $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ разнонаправлены.

Второе слагаемое в формуле 13.6 представляет собой *осестремительное* ускорение. Его величина равна

$$w^{(\text{ос})} = \omega v \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega^2 h,$$

так как векторы $\omega$ и $v$ взаимно перпендикулярны, а $v = \omega h$.

Направление векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{v}$ перпендикулярно к оси вращения (вектору $\vec{\omega}$) и скорости $\vec{v}$, то есть идёт по радиусу круга, описываемого точкой, к его центру. Итак, действительно,

$$\vec{w}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{13.7}$$

## 13.3 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 14 Плоское движение твёрдого тела. Преобразование координат

**Определение 14.1.** Движение, при котором все точки твёрдого тела, расположенные в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, во всё время движения остаются в тех же плоскостях, называется *плоским движением.*

Если разбить мысленно тело на плоские сечения, параллельные заданной плоскости, то эти сечения будут оставаться каждое в своей плоскости.

(TODO: картинка (книга, страница 142))

Пусть тело $A$ совершает действие, параллельное плоскости $\Pi$. Проведём мысленно в теле ряд плоскостей $\Pi', \Pi'', \ldots$, параллельных $\Pi$. Тело разобьётся на ряд плоских фигур $S', S'', \ldots$. Все точки, принадлежащие какой-нибудь фигуре, движутся в плоскости фигуры, и, следовательно, фигура в целом движется в своей плоскости. Движение одной такой плоской фигуры вполне определяет движение всего твёрдого тела, так как плоскости, которыми мы разбили твёрдое тело, друг с другом неизменно связаны и не могут двигаться друг по отношению к другу.

Если мы возьмём в какой-нибудь фигуре $S'$ точку $M'$ и восставим в ней перпендикуляр к плоскости фигуры $S'$, то точки $M'$ и $M''$ фигур $S'$ и $S''$, лежащие на этом перпендикуляре, будут иметь одинаковое движение, то есть будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости, одинаковые ускорения.

Таким образом, можно значительно упростить изучение плоского движения твёрдого тела — достаточно изучить движение одной плоской фигуры в её плоскости.

Возьмём две системы осей в плоскости движения фигуры: одну систему $Oxy$ — неподвижную, другую — $O'x'y'$, неизменно связанную с движущейся фигурой (TODO: картинка (книга, страница 228)). Положение точки $M$ фигуры в неподвижной плоскости будем определять вектор-радиусом $\vec{r}$, проведённым из начала $O$ неподвижной системы осей; выбор рассматриваемой точки фигуры определяется указанием вектора $\vec{r}'$, проведённого из начала $O'$ подвижной системы. Вектор-радиус начала $O'$ относительно $O$ обозначим через $\vec{r}_0$. Проекциями вектора $\vec{r}$ на оси $x$ и $y$ будут декартовы координаты $x$ и $y$ в неподвижной системе осей; при движении фигуры координаты $x$ и $y$ изменяются со временем; в противоположность этому проекции вектора $\vec{r}'$ на подвижные оси, то есть декартовы координаты $x'$ и $y'$ точки $M$ в системе подвижных осей, остаются постоянными, как расстояния точек твёрдой фигуры до проведённых на ней прямых.

Всякой точке фигуры соответствует определённая пара чисел $x'$ и $y'$. В частности, точке $O'$, началу подвижной системы, соответствуют значения $x'$ и $y'$, равные нулю; значения координат $x$ и $y$ для этой точки обозначим через $x_0$ и $y_0$ (проекции вектора $\vec{r}_0$).

Чтобы определить положение повдижной системы осей относительно неподвижной, достаточно задать:

1. положение начала $O'$, то есть вектор-радиус $\vec{r}_0$;
2. угол одной из подвижных осей с одной из неподвижных, например угол $\varphi$ оси $x$ с осью $x'$.

(TODO: последнее требует некоторого уточнения)

**Определение 14.2.** Начало $O'$ подвижной системы называется *полюсом*; угол $\varphi$ будет в таком случае *углом поворота* вокруг полюса.

Плоское движение твёрдого тела определяется:

1. уравнениями движения полюса
$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t); \tag{14.1}$$
2. уравнением вращения фигуры вокруг полюса
$$\varphi = \varphi(t). \tag{14.2}$$

Чтобы получить уравнения движения любой точки плоской фигуры, спроектируем на неподвижные оси $x$ и $y$ очевидное геометрическое равенство
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$
Получим
$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= y_0 + y' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Уравнения 14.3 представляют собой уравнения движения точки $M$ или, что то же самое, параметрические уравнения её траектории.

## 14.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 15 Две геометрические теоремы о плоском движении

**Теорема 15.1** (Шаля)**.** *Всякое перемещение плоской фигуры в своей плоскости, а следовательно, и всякое плоское перемещение твёрдого тела можно себе представить как совокупность двух перемещений:*

1. *поступательного перемещения, зависящего от выбора полюса, и*

2. *вращательного перемещения вокруг полюса;*

*угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.*

*Доказательство.* Положение плоской фигуры может быть задано положением двух её точек $O'$ и $M$ или положением отрезка $O'M$ (TODO: рисунок 149, стр. 234)

Пусть фигура $O'M$ переместилась из положения $I$ в положение $II$. Разобьём переход на две части. Сначала переместим фигуру поступательно в положение $I'$, причём все точки её получат перемещения, геометрические равные перемещению $\overrightarrow{O'O_1}$ полюса $O'$, а затем повернём фигуру на $\angle M'O_1M_1$ вокруг оси, проходящей через точку $O_1$ перпендикулярно к плоскости фигуры.

Заметим, что вектор поступательного перемещения зависит от выбора полюса, а угол поворота не зависит от этого выбора. В самом деле, тот же переход из положения $I$ в положение $II$ можно осуществить, приняв за полюс точку $M$ и переместив сначала фигуру в положение $II'$ (TODO: картинка), причём все точки фигуры получат перемещения, геометрически равные $\overrightarrow{MM_1}$ и отличные от $\overrightarrow{O'O_1}$, а затем повернув фигуру на $\angle O''M_1O_1$ вокруг оси, проходящей через $M_1$. Но по свойству поступательного перемещения $\overrightarrow{O''M_1}$ параллелен $\overrightarrow{O'M}$ и точно так же $\overrightarrow{O_1M'}$ параллелен $\overrightarrow{O'M}$. Следовательно, $\overrightarrow{O''M_1}$ и $\overrightarrow{O_1M'}$ параллельны между собой и $\angle O''M_1O = \angle M'O_1M_1$. Вместе с тем поворот вокруг точек $O_1$ и $M_1$ в том и другом случае происходит в одну и ту же сторону. Окончательное положение фигуры не зависит от того, будет ли сначала совершаться поступательное перемещение или поворот. □

Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя произвольность в выборе полюса, осуществить заданное перемещение тела *одним* поворотом, без поступательного перемещения.

На этот вопрос даёт ответ

**Теорема 15.2** (Эйлера)**.** *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в её плоскости может быть осуществлено одним поворотом вокруг некоторого центра.*

*Доказательство.* (TODO: рисунок 151, страница 236)

Пусть фигура переместилась из положения $I$ в положение $II$.

Восставим из середин перемещений точек $A$ и $B$, то есть из середин отрезков $AA'$ и $BB'$, перпендикуляры и найдём пересечение их в точке $C$.

Докажем, что фигура $I$ может быть переведена в положение $II$ поворотом вокруг центра $C$ на $\angle ACA' = \angle BCB'$. В самом деле, треугольники $ABC$ и $A'CB'$ равны между собой, так как $AB = A'B'$ в силу неизменяемости фигуры и $AC = A"C,\ BC = B'C$ по построению. Следовательно,

$$\angle ACB = \angle A'CB';$$

прибавляя к обеим частям этого равенства по одинаковому углу $BCA'$, найдём, что

$$\angle ACA' = \angle BCB'.$$

Повернём теперь фигуру $I$ на угол $ACA'$, тогда $AC$ совместится с $A'C$, $BC$ — с $B'C$, так как углы равны, и $AB$ совместится с $A'B'$, что и доказывает теорему. □

**Определение 15.1.** Точка $C$ называется *центром поворота*.

*Замечание* 15.1. Только что указанное построение не даёт результата в двух случаях:

1. если перпендикуляры, восстановленные из середин перемещений, сливаются в одну линию (TODO: рис 152 стр 236), но в этом случае центр поворота лежит на пересечении продолжений отрезков $AB$ и $A'B'$;

2. если перпендикуляры параллельны между собой, что имеет место при *поступательном* перемещении; этот случай соответствует положению центра поворота в бесконечном удалении.

## 15.1 Список литературы


1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 16 Формула Эйлера. Следствие

(TODO: рис. 149 стр 234)

Теорема 15.1 доказана для любого *конечного* перемещения. Для частного случая *бесконечно малого* перемещения дадим векторную формулу. Для этого обозначим перемещение полюса $O'$ через $\vec{p}_0$, а перемещение точки $M$ через $\vec{p}$; тогда

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \overrightarrow{M'M_1}. \tag{16.1}$$

Здесь $\overrightarrow{M'M_1}$ представляет собой перемещение точки $M$ при повороте фигуры вокруг полюса. Обозначая угол поворота через $\theta$, будем иметь из треугольника $O_1M_1M'$

$$M'M_1 = O_1M' \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}.$$

Принимая поворот бесконечно малым, можно заменить синус его аргументом; тогда величина вектора $\overrightarrow{M'M_1}$ будет равна

$$M'M_1 = O_1M' \cdot \theta = r'\theta.$$

(FIXME: Это определение было где-то ещё...) Чтобы указать направление вектора $\overrightarrow{M'M_1}$, введём в рассмотрение вектор-радиус $\vec{r}'$ точки $M$ относительно полюса и вектор бесконечно малого поворота $\vec{\Theta}$, определив последний следующим образом:

1. величина вектора поворота равна величине угла поворота,
2. вектор $\vec{\Theta}$ перпендикулярен к плоскости перемещения, причём направлен в ту сторону, откуда поворот фигуры виден происходящим в положительном направлении.

Введя вектор $\vec{\Theta}$, можем представить $\overrightarrow{M'M_1}$ в виде

$$\overrightarrow{M'M_1} = \vec{\Theta} \times \vec{r}'.$$

Действительно, это векторное произведение имеет величину

$$\theta r' \sin(\widehat{\vec{\Theta}, \vec{r}'}) = \theta r'$$

и в предельном случае бесконечно малого перемещения направлено так же, как и $\overrightarrow{M'M_1}$ (то есть перпендикулярно к $\vec{r}'$ в сторону поворота фигуры).

Формула 16.1 даёт

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{\Theta} \times \vec{r}'. \tag{16.2}$$

Основываясь на формуле плоского перемещения и определении скорости как предела при $\Delta t \to 0$ отношения бесконечно малого перемещения $\vec{p}$ к промежутку времени $\Delta t$, в течение которого это перемещение произошло:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}}{\Delta t},$$

получим по 16.2

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t} \times \vec{r}' \right). \tag{16.3}$$

Первое слагаемое, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}$, представляет собой скорость полюса:

$$\vec{v}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}. \tag{16.4}$$

Вектор $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}$ назовём вектором *угловой скорости вращения фигуры*:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}. \tag{16.5}$$

Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $\vec{\Theta}$; поэтому вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен к плоскости движения, и если смотреть вдоль него, то вращение фигуры должно представиться происходящим в положительном направлении. Величина $\vec{\omega}$ равна абсолютному значению производной угла поворота $\varphi$ по времени. Действительно, если назвать значения угла $\varphi$ в моменты $t$ и $t + \Delta t$ соответственно через $\varphi$ и $\varphi + \Delta\varphi$, то $\theta = |\Delta\varphi|$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = |\dot{\varphi}|\,.$$

Как и раньше, в тех случаях, когда возможны недоразумения, будем отличать $\omega = |\dot{\varphi}|$ от $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$.

Отметим ещё, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ не изменяется при перемене полюса, так как $\vec{\Theta}$ от выбора полюса не зависит. Это дало право называть $\vec{\omega}$ вектором угловой скорости *фигуры*.

Вернёмся к формуле 16.3. Подставляя вместо

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Theta}}{\Delta t}$$

их значения 16.4 и 16.5, получим *поле скоростей точек в плоском движении фигуры*

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{16.6}$$

(TODO: в конспекте понятие *поле* не встречается, поэтому, по всей видимости, нужно заменить его на что-то другое.)

(TODO: рис. 153 стр 238)

Рассмотрим два частных случая.

1. Поступательное движение: $\omega = 0$; формула 16.6 даёт

$$\vec{v} = \vec{v}_0,$$

   то есть скорости всех точек одинаковы и равны скорости полюса.

2. Вращение вокруг неподвижной оси: $v_0 = 0$; получаем

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

то есть уже известный нам закон распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

(TODO: в книге на этом месте идут рассуждения об абсолютном, относительном и переносном движениях. Как мне кажется, оставлять их тут не надо.)

Дифференцируя по времени уравнение плоского движения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, получим

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt};$$

но первое слагаемое представляет собой скорость полюса и, следовательно,

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{16.7}$$

то есть вращательная скорость вокруг полюса равна производной вектор-радиуса $\vec{r}'$ по времени.

Формула скорости точки $B$, когда за полюс принята точка $A$, будем обозначать следующим образом:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{AB}. \tag{16.8}$$

**Теорема 16.1.** *Проекции скоростей концов отрезка на направление отрезка равны между собой.*

*Доказательство.* (TODO: рис. 155, стр. 239)

По формуле 16.8 будем иметь, проектируя обе её части на направление отрезка $AB$:

$$\operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_B = \operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_A + \operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_{AB};$$

но вектор $\vec{v}_{AB}$ перпендикулярен к направлению отрезка $AB$, следовательно, $\operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_{AB} = 0$, и окончательно получим

$$\operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_B = \operatorname{proj}_{AB} \vec{v}_A.$$

□

## 16.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 17 Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо

## 17.1 Мгновенный центр скоростей

**Теорема 17.1.** *При всяком непоступательном движении плоской фигуры существует точка фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.*

*Доказательство.* (TODO: рис. 156, стр. 240)

Для доказательства восставим из точки $A$ плоской фигуры перпендикуляр $AN$ к направлению скорости $\vec{v}_A$ так, чтобы угол $\frac{\pi}{2}$ между $\vec{v}_A$ и линией $AN$ был отсчитан в сторону вращения фигуры. Тогда по предыдущему вектор скорости любой точки $M$ на этом перпендикуляре будет равен

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM},$$

а величина скорости

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM.$$

Изменяя расстояние точки $M$ от точки $A$, можно при $\omega \neq 0$ найти такую точку $P$, чтобы $v_{AP} = -v_A$; тогда

$$AP = \frac{v_A}{\omega};$$

при этом будем иметь

$$v_P = v_A - \omega \cdot AP = v_A - \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = 0.$$

□

**Определение 17.1.** Точка $P$ плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей фигуры*.

Скорости точек плоской фигуры можно рассматривать как вращательные скорости их вокруг мгновенного центра скоростей, а сам мгновенный центр скоростей — как мгновенный центр вращения плоской фигуры.

Имея это в виду, при известных направлениях скоростей точек $A$ и $B$, проведём через них прямые $l_A$ и $l_B$, ортогональные векторам скоростей в этих точках. Эти прямые либо пересекаются, либо нет; рассмотрим возможные варианты.

1. Прямые $l_A$ и $l_B$ пересекаются в единственной точке — это и будет центр скоростей $P$.

2. Закреплённые векторы $(A, \vec{v}_A)$ и $(B, \vec{v}_B)$ параллельны, направлены в разные стороны или направлены в одну сторону, но не равны по величине — в этом случае прямые $l_A$ и $l_B$ совпадают; через концы рассматриваемых закреплённых векторов проведём прямую $l$, — точка пересечения этой прямой с прямой $l_A$ и будет центром скоростей $P$.

3. Закреплённые векторы параллельны, направлены в одну сторону и равны по величине — в этом случае движение твёрдого тела поступательное, и для него понятие центра скоростей не определено.

## 17.2 Центроиды

**Определение 17.2.** Траектория мгновенного центра скоростей в плоскости, связанной с движущейся фигурой, образует кривую, называемую *подвижной центроидой*.

**Определение 17.3.** Траектория мгновенного центра скоростей в неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*.

Для вывода уравнений центроид обратимся к формуле 16.6. Проектируя её на неподвижные оси $Ox$ и $Oy$, получим

$$v_x = v_{0x} - \tilde{\omega}(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \tilde{\omega}(x - x_0); \tag{17.1}$$

проекция же на оси подвижной системы $O'x'y'$ даст

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_{0x'} - \tilde{\omega}y' = \phantom{-}v_{0x}\cos\varphi + v_{0y}\sin\varphi - \tilde{\omega}y', \\ v_{y'} &= v_{0y'} + \tilde{\omega}x' = -v_{0x}\sin\varphi + v_{0y}\cos\varphi + \tilde{\omega}x'. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Подставив в правые части 17.1 вместо $x$ и $y$ координаты мгновенного центра скоростей $x_P$ и $y_P$, приравняем левые части нулю, так как скорость той точки фигуры, которая в данный момент времени играет роль мгновенного центра, равна нулю. Будем иметь уравнения

$$v_{0x} - \tilde{\omega}(y_P - y_0) = 0, \quad v_{0y} + \tilde{\omega}(x_P - x_0) = 0,$$

откуда найдём *уравнения неподвижной центроиды*

$$x_P = x_0 - \frac{v_{0y}}{\tilde{\omega}}, \quad y_P = y_0 + \frac{v_{0x}}{\tilde{\omega}}. \tag{17.3}$$

Аналогично по 17.2 найдём *уравнения подвижной центроиды*:

$$\begin{aligned} x'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}}\left(v_{0x}\sin\varphi - v_{0y}\cos\varphi\right), \\ y'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}}\left(v_{0x}\cos\varphi + v_{0y}\sin\varphi\right). \end{aligned} \tag{17.4}$$

**Теорема 17.2** (Пуансо)**.** *При плоском непоступательном движении твёрдого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.*

(TODO: доказательство (книга, стр 249))

## 17.3 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 18 Ускорение точек твёрдого тела в плоском движении

Имеем согласно 16.6

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое

$$\vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}, \tag{18.1}$$

одинаковое для всех точек фигуры и равное ускорению полюса $O'$, называется *поступательным ускорением.*

Второе слагаемое — обозначим его через $\vec{w}^{(\text{в})}$, — равное

$$\vec{w}^{(\text{в})} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}', \tag{18.2}$$

называется *вращательным ускорением.* Здесь вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

представляет собой *вектор углового ускорения.* Вектор $\vec{w}^{(\text{в})}$ перпендикулярен к $\vec{r}'$ и направлен в ту же сторону, что и вращательная скорость $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ точки плоской фигуры вокруг полюса, или в противоположную, сообразно тому, будет ли вращение фигуры ускоренным или замедленным; величина $\vec{w}^{(\text{в})}$ равна

$$w^{(\text{в})} = \varepsilon r' \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}'}) = \varepsilon r'.$$

Третье слагаемое, которое обозначим $\vec{w}^{(\text{ос})}$, равно

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \tag{18.3}$$

Подставив сюда вместо $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ его значение 16.7, получим

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

или, по известной формуле разложения двойного векторного произведения:

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}).$$

Но в плоском движении векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}'$ взаимно перпендикулярны, так что

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}' = 0,$$

кроме того,

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2,$$

следовательно,

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = -\omega^2 \vec{r}'.$$

Эта составляющая ускорения, направленная от рассматриваемой точки к полюсу и равная по величине $\omega^2 r'$, называется *осестремительным ускорением.*

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_0 + \vec{w}^{(\text{в})} + \vec{w}^{(\text{ос})} \\ &= \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}', \end{aligned}$$

то есть ускорение любой точки в плоском движении может быть представлено как геометрическая сумма поступательного ускорения, равного ускорению полюса, вращательного ускорения вокруг полюса и осестремительного ускорения к полюсу.

Составим формулы для *проекций ускорения на неподвижные оси* $x$, $y$. Замечая, что

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

найдём, проектируя обе части равенства 18 на неподвижные оси $x$ и $y$:

$$\begin{aligned} w_x &= \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi}(y - y_0) - \dot{\varphi}^2(x - x_0), \\ w_y &= \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi}(x - x_0) - \dot{\varphi}^2(y - y_0). \end{aligned} \tag{18.4}$$

Аналогично найдём *проекции ускорения на подвижные оси*:

$$\begin{aligned} w_{x'} &= w_{0x'} - \ddot{\varphi} y' - \dot{\varphi}^2 x', \\ w_{y'} &= w_{0y'} + \ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y'. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Условимся в дальнейшем снабжать обозначение ускорения индексом, указывающим точку, ускорение которой рассматривается. Положим

$$\vec{w}_{AB} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{AB} - \omega^2 \vec{r}'_{AB}.$$

Здесь вектор $\vec{w}_{AB}$ есть ускорение точки $B$ по отношению к точке $A$, то есть ускорение по отношению к системе координат, имеющей начало в точке $A$ и движущейся вместе с этой точкой поступательно. Вращательное ускорение вокруг полюса и осестремительное ускорение к полюсу будем обозначать так:

$$\vec{w}_{AB}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{AB}, \quad \vec{w}_{AB}^{(\text{ос})} = -\omega^2 \vec{r}'_{AB}.$$

Формула 18 примет вид

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB} = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}^{(\text{в})} + \vec{w}_{AB}^{(\text{ос})}. \tag{18.6}$$

Замечая, что $\vec{w}_{AB}^{(\text{в})}$ и $\vec{w}_{AB}^{(\text{ос})}$ взаимно перпендикулярны, получим

$$w_{AB} = \vec{r}'_{AB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{18.7}$$

Обозначим через $\pi - \alpha$ тупой угол, образуемый векторами $\vec{r}'_{AB}$ и $\vec{w}_{AB}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\vec{w}_{AB}^{(\text{в})}}{\vec{w}_{AB}^{(\text{ос})}} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\omega^2}. \tag{18.8}$$

**Теорема 18.1.** *В любой момент времени существует точка $Q$ плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю.*

*Доказательство.* (TODO: рис. 172, а,б, стр. 255)

Проведём через какую-нибудь точку $A$ полупрямую $AL$ под углом $\alpha$, определяемым по формуле 18.8, к вектору $\vec{w}_A$, отсчитывая $\alpha$ от $\vec{w}_A$ в сторону вращения фигуры или противоположно ему, сообразно тому, будет ли вращение ускоренным или замедленным. Отложим на $AL$ отрезок

$$r'_{AQ} = AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{18.9}$$

Конец $Q$ этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, согласно формуле 18.7 имеем

$$w_{AQ} = r'_{AQ}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

С другой стороны, по построению вектор $\vec{w}_{AQ}$ противоположен $\vec{w}_A$ по направлению, то есть

$$\vec{w}_{AQ} = -\vec{w}_A.$$

Отсюда на основании 18.6 заключаем, что

$$\vec{w}_Q = 0,$$

то есть $Q$ — мгновенный центр ускорений. □

**Определение 18.1.** Точка $Q$ называется *мгновенным центром ускорений.*

(TODO: рис. 173, стр. 256)

Построение мгновенного центра ускорений требует знания ускорения $\vec{w}_A$ какой-либо точки фигуры и угла $\alpha$. Покажем, как построить мгновенный центр ускорений, имея ускорения двух точек фигуры. Заметим для этого, что, зная $\vec{w}_A$ и $\vec{w}_B$, тем самым можем определить

$$\vec{w}_{AB} = \vec{w}_B - \vec{w}_A,$$

и, следовательно, угол $\alpha$ будет вполне определён. Теперь можем построить луч $AL$, на котором лежит мгновенный центр ускорений $Q$. Нет надобности вычислять положение точки $Q$ по формуле 18.9, так как можно построить её графически, проведя ещё луч $BM$ под углом $\alpha$ к $\vec{w}_B$. Пересечение лучей $AL$ и $BM$ определит точку $Q$.

Имея мгновенный центр ускорений, получаем весьма наглядную картину распределения ускорений в плоской фигуре. Действительно, применяя формулу 18.6 в предположении, что за полюс $A$ принят мгновенный центр ускорений $Q$, и замечая, что по определению $\vec{w}_Q = 0$, получим

$$\vec{w}_B = \vec{w}_{QB} = \vec{w}_{QB}^{(\text{в})} + \vec{w}_{QB}^{(\text{ос})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_{QB} - \omega^2 \vec{r}'_{QB}.$$

Вращательное ускорение $\vec{w}_{QB}^{(\text{в})}$ направлено по перпендикуляру к вектор-радиусу, соединяющему центр ускорений с рассматриваемой точкой, в ту сторону, куда происходит вращение, или в противоположную, смотря по тому, является ли вращение ускоренным или замедленным.

Осестремительное ускорение $\vec{w}_{QB}^{(\text{ос})}$ направлено всегда от точки к мгновенному центру ускорений.

(TODO: рис. 174, стр. 257)

По величине они равны

$$w_{QB}^{(\text{в})} = w_B^{(\text{в})} = \varepsilon r'_{QB},$$
$$w_{QB}^{(\text{ос})} = w_B^{(\text{ос})} = \omega^2 r'_{QB}.$$

Их геометрическая сумма $\vec{w}_B$ по величине равна

$$w_B = r'_{QB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Таким образом, полное ускорение любой точки фигуры по величине пропорционально её расстоянию от мгновенного центра ускорений и направлено под одинаковым для всех точек фигуры углом к вектор-радиусу, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром ускорений.

Не следует смешивать вращательное ускорение $\vec{w}_B^{(\text{в})}$ с касательной составляющей ускорения, а осестремительное ускорение $\vec{w}_B^{(\text{ос})}$ — с нормальной составляющей. В самом деле, касательное $\vec{w}_\tau$ и нормальное $\vec{w}_n$ ускорения направлены по касательной и главной нормали к *траектории*, то есть по перпендикуляру к вектор-радиусу $\vec{r}'_{PB}$, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром скоростей $P$, и вдоль этого вектор-радиуса, в то время как $\vec{w}_B^{(\text{в})}$ и $\vec{w}_B^{(\text{ос})}$ направлены перпендикулярно и вдоль вектор-радиуса $\vec{r}'_{QB}$. (TODO: рис. 175 стр 257)

Легко получить вектор-радиусы $\vec{r}_Q$ и $\vec{r}'_Q$ центра ускорения в неподвижной и подвижной системах координат; для этого решим векторное уравнение

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q - \omega^2 \vec{r}'_Q = 0. \tag{18.10}$$

С этой целью умножим его векторно на $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q - \omega^2 \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q\right) = 0$$

и раскроем двойное векторное произведение; тогда получим

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon}\left(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q\right) - \vec{r}'_Q \left(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}\right) - \omega^2 \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q\right) = 0.$$

Заметим, что в плоском движении $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q = 0$; далее, из 18.10 следует, что

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_Q = \omega^2 \vec{r}'_Q - \vec{w}_0.$$

Окончательно получаем

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 - (\varepsilon^2 + \omega^4)\vec{r}'_Q + \omega^2 \vec{w}_0 = 0,$$

или, разрешая уравнение относительно $\vec{r}'_Q$,

$$\begin{aligned} \vec{r}'_Q &= \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \omega^2 \vec{w}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ \vec{r}_Q &= \vec{r}_0 + \vec{r}'_Q = \vec{r}_0 + \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{w}_0 + \omega^2 \vec{w}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned}$$

Проектируя первое равенство на подвижные оси координат $x'$, $y'$, а второе — на неподвижные оси $x$, $y$, получим формулы координат мгновенного центра ускорений $Q$:

1. в *подвижной* системе осей

$$\begin{aligned} x'_Q &= \frac{\omega^2 w_{0x'} - \ddot{\varphi} w_{0y'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \\ y'_Q &= \frac{\omega^2 w_{0y'} + \ddot{\varphi} w_{0x'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}; \end{aligned} \tag{18.11}$$

2. в *неподвижной* системе осей

$$\begin{aligned} x_Q &= x_0 + \frac{\omega^2 w_{0x} - \ddot{\varphi} w_{0y}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \\ y_Q &= y_0 + \frac{\omega^2 w_{0y} + \ddot{\varphi} w_{0x}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}. \end{aligned} \tag{18.12}$$

## 18.1 Список литературы


1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 19 Задание движения твёрдого тела через углы Эйлера

(TODO: рис. 180 стр. 263)

Соединим жёстко с вращающимся телом подвижную систему координат $Ox'y'z'$ и будем рассматривать вращение этой системы по отношению к неподвижной системе $Oxyz$. Введём таблицу косинусов углов между осями координат:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $\alpha_{11}$ | $\alpha_{12}$ | $\alpha_{13}$ |
| $y'$ | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ | $\alpha_{23}$ |
| $z'$ | $\alpha_{31}$ | $\alpha_{32}$ | $\alpha_{33}$ |

Связь между координатами точки $M$ в подвижной и неподвижной системах:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{19.1}$$

Отметим линию $ON$ пересечения плоскостей $xOy$ и $x'Oy'$ и назовём её *линией узлов*. Выберём на этой линии положительное направление $ON$ так, чтобы, смотря с него, видеть вращение оси $Oz$ к оси $Oz'$ на наименьший угол в положительном направлении (то есть в правой системе осей — против часовой стрелки); легко видеть, плоскость $zOz'$ перпендикулярна к оси $ON$.

Первый эйлеров угол — угол *прецессии* $\psi$ — образован в плоскости $xOy$ линией узлов с неподвижной осью $Ox$; отсчитывается угол $\psi$ в положительном направлении (по часовой стрелке) от оси $Ox$ к оси $ON$, если смотреть с оси $Oz$.

Второй угол — угол *нутации* $\theta$ — расположен в плоскости $zOz'$ и отсчитывается от оси $Oz$ к оси $Oz'$ в положительном направлении (против часовой стрелки), если смотреть с положительного направления оси $ON$.

Третий угол — угол *ротации*, или угол *чистого вращения* $\varphi$ — расположен в плоскости $x'Oy'$, причём отсчитывается от линии узлов $ON$ до оси $Ox'$ в положительном направлении.

(TODO: рис. 181 стр 264)

Для установления зависимостей между косинусами углов осей координат и эйлеровыми углами применим следующий приём. Введём, кроме единичных векторов осей координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, ещё единичные векторы следующих осей:

- $\vec{n}$ — линии узлов $ON$;
- $\vec{n}_1$ — оси $ON_1$, перпендикулярной к оси $ON$ и лежащей в плоскости $xOy$;

- $\vec{n}_1'$ — оси $ON_1'$, перпендикулярной к оси $ON$ и лежащей в плоскости $x'Oy'$.

Направление оси $ON_1$ выберем так, чтобы оси $ONN_1z$ образовали триэдр, сонаправленный (то есть правый) с системой осей $Oxyz$; направление оси $ON_1'$ выберем так, чтобы оси $ONN_1'z'$ образовали сонаправленный триэдр с системой $Ox'y'z'$, а следовательно, и с системой $Oxyz$. Легко видеть, что угол между осями $ON_1'$ и $ON_1$ представляет собой линейный угол двугранного угла между плоскостями $x'Oy'$ и $xOy$, то есть угол $\theta$ (TODO: не помню, есть ли в билетах определение линейного угла двугранного угла...). Тогда, замечая ещё, что единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ легко могут быть выражены через единичные векторы $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_1'$ в форме зависимостей, получаемых из разложения одних единичных векторов по другим:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{n}\cos\psi - \vec{n}_1\sin\psi, \\ \vec{j} &= \vec{n}\cos\varphi + \vec{n}_1'\sin\varphi, \\ \vec{i} &= \vec{n}\sin\psi + \vec{n}_1\cos\psi, \\ \vec{i} &= -\vec{n}\sin\varphi + \vec{n}_1'\cos\varphi, \end{aligned} \tag{19.2}$$

найдём

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \vec{i}\cdot\vec{i}' \\ &= (\vec{n}\cos\psi - \vec{n}_1\sin\psi)\cdot(\vec{n}\cos\varphi + \vec{n}_1'\sin\varphi) \\ &= (\vec{n}\cdot\vec{n})\cos\psi\cos\varphi + (\vec{n}\cdot\vec{n}_1')\cos\psi\sin\varphi - \\ &\quad - (\vec{n}_1\cdot\vec{n})\sin\psi\cos\varphi - (\vec{n}_1\cdot\vec{n}_1')\sin\psi\sin\varphi. \end{aligned}$$

Имеем

$$\vec{n}\cdot\vec{n} = 1, \quad \vec{n}\cdot\vec{n}_1' = 0, \quad \vec{n}_1\cdot\vec{n} = 0, \quad \vec{n}_1\cdot\vec{n}_1' = \cos\theta,$$

откуда

$$\alpha_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

Аналогично получим остальные косинусы.

Выделим полученную группу формул:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\widehat{x, x'}) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ \alpha_{21} &= \cos(\widehat{x, y'}) = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ \alpha_{31} &= \cos(\widehat{x, z'}) = \sin\psi\sin\theta, \\ \alpha_{12} &= \cos(\widehat{y, x'}) = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ \alpha_{22} &= \cos(\widehat{y, y'}) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ \alpha_{32} &= \cos(\widehat{y, z'}) = -\cos\psi\sin\theta, \\ \alpha_{13} &= \cos(\widehat{z, x'}) = \sin\varphi\sin\theta, \\ \alpha_{23} &= \cos(\widehat{z, y'}) = \cos\varphi\sin\theta, \\ \alpha_{33} &= \cos(\widehat{z, z'}) = \cos\theta. \end{aligned} \tag{19.3}$$

**Теорема 19.1.** *Пусть*

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Тогда*

$$P = P_2(\psi)P_1(\theta)P_2(\varphi). \tag{19.4}$$

*Доказательство.* Равенство проверяется перемножением матриц.

Можно также доказать, используя геометрический смысл преобразований (поворот).

(TODO: доказать поворотами?) □

## 19.1 Список литературы


1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

## 20 Две геометрические теоремы о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки

**Определение 20.1.** Перемещение твёрдого тела такое, что начальное и конечное положения кажддой его точки совпадают, называют *нулевым*.

**Теорема 20.1** (Эйлера-Даламбера)**.** *Для любого ненулевого перемещения* $\Pi$ *твёрдого тела вокруг неподвижной точки существует единственная прямая* $l$ *такая, что перемещение* $\Pi$ *можно представить как перемещение в результате поворота этого тела вокруг этой оси на некоторый угол* $\alpha$.

*Доказательство.* Пусть $O$ — неподвижная точка тела. Будем считать, что в начальном положении подвижный и неподвижный реперы $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ совпадают. Пусть $(x_1', y_1', z_1')$ и $(x_2', y_2', z_2')$ — координаты в неподвижном репере произвольной точки $M$ твёрдого тела (пространства, связанного с этим телом) в его начальном и конечном положениях соответственно, а $(x, y, z)$ — координаты этой точки в подвижном репере. Используя формулы 19.1, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $I$ — единичная матрица, $P$ — ортогональная, $\det P = 1$ и $P \neq I$.

Необходимо показать, что множество точек $M \sim (x, y, z)$, удовлетворяющих равенству $(x_1', y_1', z_1') = (x_2', y_2', z_2')$, то есть равенству

$$(P - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

суть множество всех точек некоторой прямой, проходящей через $(0, 0, 0)$.

Эту задачу можно переформулировать так: мы должны доказать, что среди собственных значений $\lambda$ матрицы $P$ есть значение $\lambda_1 = 1$, и ему соответствует одномерное подпространство собственных векторов. Чтобы сделать это, мы покажем, что $\lambda_1 = 1$ является корнем характеристического полинома $d(\lambda) = \det (P - \lambda I)$ и что кратность этого корня равна единице.

Действительно, из цепочки равенств

$$\begin{aligned} d(1) &= \det(P - I) \\ &= \det(P^T - I^T) \\ &= \det(P^{-1} - I) \\ &= \det(P \cdot (P^{-1} - I)) \\ &= \det(I - P) \\ &= \det(-(P - I)) \\ &= (-1)^3 \det(P - I) \\ &= -d(1) \end{aligned}$$

следует, что величина $\lambda_1 = 1$ является корнем полинома $d(\lambda)$.

(TODO: доказать, что кратность $\lambda_1 = 1$ равна единице) □

**Определение 20.2.** Прямую $l$ называют *осью вращения.*

Пусть $M$ — произвольная точка твёрдого тела, движущегося вокруг неподвижной точки $O$, а $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t + \Delta t)$ — вектор-радиусы этой точки в моменты времени $t$ и $t + \Delta t$. Вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

соответствует перемещению точки $M$ за время от $t$ до $t+\Delta t$. В соответствии с теоремой 20.1, его можно вычислить как перемещение при вращении вокруг некоторой оси на угол $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ (этот вектор направлен вдоль упомянутой оси согласно определению угла поворота). Определяя скорость $\vec{v}$ как предел при $\Delta t \to 0$ отношения малого перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени $\Delta t$, найдём

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t} \times \vec{r} \right) = \left( \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t} \right) \times \vec{r}.$$

Вводя *вектор мгновенной угловой скорости*

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t},$$

получим

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

**Определение 20.3.** Прямую, проходящую через точку $O$ и параллельную вектору мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$, называют *мгновенной осью вращения твёрдого тела в момент времени $t$.*

**Теорема 20.2.** *Угловую скорость твёрдого тела с неподвижной точкой можно вычислить по формуле*

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{k}'. \tag{20.1}$$

*Доказательство.* (TODO: доказать (в книге есть)) □

**Определение 20.4.** Геометрическое место точек мгновенных осей вращения в неподвижном и подвижном реперах называют соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидом.*

**Теорема 20.3** (Пуансо)**.** *При движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.*

*Доказательство.* (TODO: доказать (в книге есть)) □

## 20.1 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 21 Проекции угловой скорости тела с неподвижной точкой

Проектируя равенство 20.1 на неподвижные оси $Oxyz$, найдём

$$\begin{aligned} \omega_x &= \phantom{-}\dot\varphi \sin\psi \sin\theta + \dot\theta \cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot\varphi \cos\psi \sin\theta + \dot\theta \sin\psi, \\ \omega_z &= \phantom{-}\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi. \end{aligned} \tag{21.1}$$

Аналогично получим и проекции угловой скорости на *подвижные* оси, проектируя равенство 20.1 на оси координат $Ox'y'z'$, связанные с движущимся телом:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_{y'} &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_{z'} &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \tag{21.2}$$

## 21.1 Список литературы

1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 22 Ускорение точек тела с неподвижной точкой

Дифференцируя формулу Эйлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, получаем

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{22.1}$$

Производная по времени от вектора угловой скорости определяет вектор *углового ускорения*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{22.2}$$

По величине и направлению этот вектор совпадает со *скоростью движения конца вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости по его годографу.*

Замечая, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

получим

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \end{aligned} \tag{22.3}$$

(TODO: рис. 190 стр 277)

Первое слагаемое

$$\vec{w}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{22.4}$$

представляет собой *вращательное ускорение*; это — вектор, перпендикулярный к плоскости, проходящей через вектор углового ускорения и вектор-радиус взятой точки тела. В отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, вектор углового ускорения не лежит на той же прямой, что и вектор угловой скорости, а направлен по некоторой прямой, проходящей через неподвижную точку; эту прямую будем называть *осью углового ускорения.*

Эта ось параллельна скорости конца вектора $\vec{\omega}$. Поэтому здесь вектор вращательного ускорения перпендикулярен не радиусу вращения $h$, а отрезку $h'$, представляющему собой кратчайшее расстояние от точки $M$ до оси углового ускорения. По величине вращательное ускорение равно

$$w^{(\text{в})} = \varepsilon h'. \tag{22.5}$$

Второе слагаемое

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

определяет *осестремительное ускорение.* Оно направлено перпендикулярно к плоскости, содержащей $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$, то есть по кратчайшему расстоянию между точкой $M$ и мгновенной осью, причём всегда в ту сторону, откуда вращение $\vec{\omega}$ к $\vec{v}$ на наименьший угол видно положительным. По величине осестремительное ускорение равно

$$w^{(\text{ос})} = \omega v \sin\frac{\pi}{2} = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h. \tag{22.6}$$

Таким образом, ускорение точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, складывается геометрически из вращательной и осестремительной составляющих.

## 22.1 Список литературы


1. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 23 Скорость точек твёрдого тела в общем случае

Пусть $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ — репер, жёстко связанный с твёрдым телом (подвижный репер), а $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — неподвижный репер. Тогда если $(x_0, y_0, z_0)$ — координаты точки $O'$ в неподвижном репере, то связь между координатами произвольной точки $M$ тела в неподвижном и подвижном реперах следующая:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{23.1}$$

Как видим, перемещение $\Delta\vec{r}$ точки $M$ складывается из перемещения $\Delta\vec{r}_{O'}$ точки $O'$ и вращательного перемещения $\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'})$ точки $M$ при повороте тела вокруг $O'$, то есть

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_{O'} + \Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}), \tag{23.2}$$

где

$$\Delta\vec{r}_{O'} = \vec{v}_{O'}\Delta t + \vec{o}(\Delta t) \text{ при } \Delta t \to 0$$

и

$$\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}) = \overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Разделив равенство 23.2 на $\Delta t$ и перейдя при $\Delta t \to 0$ к пределу, получим:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}). \tag{23.3}$$

Здесь

$$\vec{\omega}_{O'} = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}}}{\Delta t} \right)$$

означает мгновенную угловую скорость вращения тела вокруг точки $O'$, а $\vec{v}$ и $\vec{v}_{O'}$ — скорости точек $M$ и $O'$.

**Теорема 23.1.** *Вектор $\vec{\omega}_{O'}$ не зависит от выбора полюса $O'$.*

*Доказательство.* Пусть $B$ — другой полюс, тогда

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B),$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}),$$

откуда получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B). \tag{23.4}$$

Вычитая из равенства 23.3 равенство 23.4, получаем

$$\vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0},$$

то есть

$$(\vec{\omega}_{O'} - \vec{\omega}_B) \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0}.$$

Так как это равенство истинно для любого $\vec{r}$, то $\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_B$. $\square$

Согласно теореме 23.1 вектор $\vec{\omega}_{O'}$ можно обозначить просто $\vec{\omega}$ — это *угловая скорость твёрдого тела* в общем случае. Формула 23.3 запишется в следующем виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}). \tag{23.5}$$

Эту формулу называют *формулой Эйлера в общем случае.*

**Следствие 23.1.1.** *Проекции скоростей любых двух различных точек абсолютно твёрдого тела на направление соединяющего их отрезка равны между собой.*

## 23.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 24 Ускорение точек твёрдого тела в общем случае

(TODO: процесс дифференцирования)

Дифференцируя формулу Эйлера 23.5, получим

$$\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})). \qquad (24.1)$$

Первое слагаемое, $\vec{w}_{O'}$, определяет *поступательное ускорение*, равное ускорению полюса, а второе

$$\vec{w}^{(\text{в})} = \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$$

и третье

$$\vec{w}^{(\text{ос})} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}))$$

определяют *вращательную* и *осестремительную* составляющие ускорения вращения тела вокруг полюса. Численные величины уже были исследованы и выражаются формулами 22.5 и 22.6.

## 24.1 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*
2. Л.Г. Лойцянский, *Курс теоретической механики*

# 25 Сложное движение точки, основные понятия

Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ — неподвижный и подвижный реперы. Эти реперы и связанные с ними подвижное и неподвижное пространства называют также *абсолютным* и *относительным* соответственно.

**Определение 25.1.** Движение, скорость и ускорение точки $M$ относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *абсолютным.*

**Определение 25.2.** Движение, скорость и ускорение точки $M$ относительно подвижного (относительного) репера называют *относительным.*

**Определение 25.3.** В момент $t$ точка $M$ совпадает с точкой $M'$ подвижного пространства. Движение, скорость и ускорение точки $M'$ в момент времени $t$ относительно абсолютного репера называют *переносными* для точки $M$ в этот момент.

Будем использовать следующие обозначения:

- $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ — абсолютный вектор-радиус;
- $\vec{v}$ — абсолютная скорость;
- $\vec{w}$ — абсолютное ускорение;
- $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'M}$ — относительный вектор-радиус;
- $\vec{v}_r$ — относительная скорость;
- $\vec{w}_r$ — относительное ускорение;
- $\vec{v}_e$ — переносная скорость;
- $\vec{w}_e$ — переносное ускорение;
- $\vec{\omega}$ — угловая скорость подвижного репера относительно неподвижного

Пусть $\vec{C}$ — вектор-функция аргумента $t$, причём

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}. \tag{25.1}$$

Тогда

$$\dot{\vec{C}} = \dot{C}_x\vec{i} + \dot{C}_y\vec{j} + \dot{C}_z\vec{k} + C_x\dot{\vec{i}} + C_y\dot{\vec{j}} + C_z\dot{\vec{k}}. \tag{25.2}$$

Производные $\dot{\vec{i}}$, $\dot{\vec{j}}$, $\dot{\vec{k}}$ зависят от пространства, в котором они рассматриваются. В частности, в подвижном пространстве они равны нулю.

**Теорема 25.1** (Формулы Пуассона)**.** *Пусть подвижный репер* $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, *жёстко связанный с твёрдым телом, движется относительно неподвижного репера* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *с угловой скоростью* $\vec{\omega}$. *Тогда производные подвижных ортов в неподвижном репере вычисляются по формулам:*

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}}' &= \vec{\omega} \times \vec{i}', \\ \dot{\vec{j}}' &= \vec{\omega} \times \vec{j}', \\ \dot{\vec{k}}' &= \vec{\omega} \times \vec{k}'. \end{aligned} \tag{25.3}$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу; остальные доказываются аналогично. Введём обозначения

$$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'}, \quad \vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'}, \quad \vec{r}_{O_{i'}} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}, \quad \vec{v}_{O_{i'}} = \dot{\vec{r}}_{O_{i'}}.$$

Дифференцированием равенства $\vec{r}_{O_{i'}} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}'$ получаем

$$\vec{v}_{O_{i'}} = \vec{v}_{O'} + \dot{\vec{i}}'.$$

По формуле Эйлера имеем

$$\vec{v}_{O_{i'}} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_{i'}} - \vec{r}_{O'}) = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{i}',$$

следовательно,

$$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}',$$

что и требовалось доказать. □

**Определение 25.4.** Производную вектор-функции $\vec{C}$ в подвижном репере $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ называют *относительной производной вектор-функции* $\vec{C}$ и обозначают $\frac{d'\vec{C}}{dt}$.

**Определение 25.5.** Производную вектор-функции $\vec{C}$ в неподвижном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называют *абсолютной производной вектор-функции* $\vec{C}$ и обозначают $\frac{d\vec{C}}{dt}$.

**Теорема 25.2** (Формула относительной производной)**.** *Относительная и абсолютная производные вектор-функции связаны равенством:*

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C}. \tag{25.4}$$

*Доказательство.* Формулу 25.2 перепишем в новых обозначениях:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d'\vec{C}}{dt} + C_x \frac{d\vec{i}}{dt} + C_y \frac{d\vec{j}}{dt} + C_z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Используя формулы Пуассона 25.3, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{C}}{dt} &= \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \left( C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k} \right) \\ &= \frac{d'\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C}. \end{aligned}$$

□

## 25.1 Список литературы


1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 26 Теорема сложения скоростей в сложном движении точки

**Теорема 26.1** (Формула сложения скоростей)**.** *Абсолютная, переносная и относительная скорости движения точки связаны равенством*

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \tag{26.1}$$

*Доказательство.* Так как $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, то, применяя формулу относительной производной 25.4, получаем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \frac{d'\vec{r}}{dt}.$$

По формуле Эйлера скорость той точки $M'$ подвижного пространства, с которой в данный момент $t$ совпадает движущаяся точка $M$, равна

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Учитывая, что $\frac{d'\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r$, получаем требуемое равенство. □

## 26.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 27 Теорема сложения ускорений в сложном движении точки

**Определение 27.1.** Вектор

$$\overrightarrow{w}_c = 2\overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r$$

называют *ускорением Кориолиса* (*вращательным ускорением*) точки в её сложном движении.

**Теорема 27.1** (Формула Кориолиса сложения ускорений)**.** *Абсолютное, переносное, относительное и вращательное ускорения в сложном движении точки связаны равенством*

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}_e + \overrightarrow{w}_r + \overrightarrow{w}_c. \tag{27.1}$$

*Доказательство.* Дифференцируя формулу сложения скоростей 26.1, получаем

$$\overrightarrow{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \tag{27.2}$$

Из формулы относительной производной 25.4 следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_r}{dt} &= \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r \\ &= \overrightarrow{w}_r + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r.\end{aligned}$$

Пусть $\vec{\varepsilon} = \frac{d\overrightarrow{w}}{dt}$ — угловое ускорение подвижного репера. По формуле Эйлера

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \overrightarrow{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

поэтому, используя формулу $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_e}{dt} &= \overrightarrow{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) + \overrightarrow{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_0) \\ &= \overrightarrow{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) + \overrightarrow{\omega} \times (\vec{v}_e - \vec{v}_0) + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r.\end{aligned}$$

Из формулы 24.1 следует, что

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \overrightarrow{w}_e + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r.$$

Подставляя полученные равенства в формулу 27.2, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} \\ &= \overrightarrow{w}_e + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r + \overrightarrow{w}_r + \overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r \\ &= \overrightarrow{w}_e + \overrightarrow{w}_r + 2\overrightarrow{\omega} \times \vec{v}_r \\ &= \overrightarrow{w}_e + \overrightarrow{w}_r + \overrightarrow{w}_c.\end{aligned}$$

□

## 27.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

# 28 Теорема о сложении угловых скоростей твёрдого тела

Рассмотрим $n+1$ репер $(O, \vec{i}_p, \vec{j}_p, \vec{k}_p)$, $p \in [1 : n+1]$ с центром в неподвижной точке $O$ твёрдого тела, и предположим, что первый и последний реперы совпадают соответственно с неподвижным и подвижным реперами $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$; подвижный репер жёстко связан с движущимся твёрдым телом.

Пусть для всех $p \in [1 : n]$ репер $(O, \vec{i}_{p+1}, \vec{j}_{p+1}, \vec{k}_{p+1})$ движется относительно репера $(O, \vec{i}_p, \vec{j}_p, \vec{k}_p)$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_p$. В этом случае говорят, что твёрдое тело совершает одновременное вращение с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$ вокруг осей $\vec{\omega}_1/\omega_1, \ldots, \vec{\omega}_n/\omega_n$.

Угловую скорость твёрдого тела (то есть угловую скорость подвижного репера относительно неподвижного) обозначим $\vec{\omega}$.

**Теорема 28.1** (Формула сложения угловых скоростей)**.** *Если твёрдое тело совершает одновременное вращение вокруг неподвижной точки с угловыми скоростями* $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$*, то его угловая скорость вычисляется по формуле*

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \cdots + \vec{\omega}_n. \tag{28.1}$$

*Доказательство.* (TODO: доказать) □

## 28.1 Список литературы

1. Л.К. Бабаджанянц, *Классическая механика*

## Список литературы


[1] А.И. Лурье Л.Г. Лойцянский. *Курс теоретической механики.* Т. 1. М.: Наука, 1982.

[2] Ю.Ю. Пупышева Л.К. Бабаджанянц Ю.А. Пупышев. *Классическая механика.* 2013. URL: http://pm-pu.ru/stuff/adus/books/babadzhanyants_mehanika.pdf.