

# PEC Curso 20/21

## Procesos de Poisson y desintegración radiactiva

### 1. Introducción y objetivos

Muchos procesos de gran relevancia en distintos ámbitos de la física pueden ser aproximados mediante procesos de Poisson. En esta PEC vamos a estudiar este tipo de procesos. En las secciones 2 y 3 describiremos sus principales propiedades estadísticas. Se recomienda leer esta parte intentando entender los conceptos principales, no es necesario entender los resultados en profundidad. A continuación, en la sección 4, presentaremos un ejemplo de proceso de Poisson, la desintegración radiactiva de un conjunto de radionúclidos, que será el tema central de la PEC.

El trabajo a desarrollar en esta PEC está detalladamente explicado en las secciones 5, 6 y 7, y consta de 3 ejercicios (uno por sección):

1. En la sección 5 trabajaremos con un modelo simple para simular computacionalmente la desintegración radiactiva de un conjunto de radionúclidos de la misma especie (Ejercicio 1).
2. En la sección 6 estudiaremos un modelo para simular computacionalmente una cadena de desintegración (Ejercicio 2).
3. Finalmente, en la sección simularemos con un esquema de desintegración ramificada (Ejercicio 3).

### 2. Distribución de Poisson

La *distribución de probabilidad de Poisson* es observada en una gran cantidad de procesos denominados de *Poisson*. Esta distribución caracteriza una variable aleatoria discreta  $X$  cuyos valores son enteros no negativos  $x = \{0, 1, 2, \dots\}$  y cuya función de probabilidad es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo  $\lambda$  un parámetro dado. Se puede demostrar fácilmente que ese parámetro proporciona el valor esperado (o valor medio) de  $X$ , y también su varianza, esto es:

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

### 3. Procesos de Poisson

Las variables aleatorias con distribución de Poisson se utilizan para representar el número  $X$  de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo concreto de tiempo o en una región fija del espacio. Supongamos por ejemplo, que tenemos un

conjunto de radionúclidos que se desintegran espontáneamente emitiendo radiación (*radiactividad natural*); podemos describir el número de desintegraciones que se observarán en un determinado intervalo de tiempo mediante una variable aleatoria  $X$  con una distribución de Poisson. Imaginemos ahora un haz de fotones de alta energía que inciden perpendicularmente sobre una delgada lámina de material; el número de fotones que atravesarán el material sin interactuar con él, es decir, sin sufrir ningún proceso de “*scattering*” también obedece una distribución de Poisson. De la misma forma se pueden describir estadísticamente procesos tan variados como el número de llamadas telefónicas recibidas en una centralita telefónica durante un periodo de tiempo fijo, el número de máquinas o dispositivos que se estropean en un intervalo de tiempo o el número de errores en una página de un libro. Todos estos fenómenos son ejemplos de *procesos de Poisson*.

Se puede demostrar que si el proceso que genera estas ocurrencias satisface tres condiciones matemáticas específicas, entonces la distribución de la variable aleatoria que describe estas ocurrencias debe ser de Poisson.

*Condición 1.* La primera condición es que el número de ocurrencias en dos intervalos cualesquiera de tiempo (o espacio) disjuntos deben ser independientes entre sí. Por ejemplo, el hecho de que haya muchos fotones que han sufrido algún proceso de dispersión en el primer centímetro de material no afecta para nada la probabilidad de que un fotón superviviente interactúe con el material en el próximo milímetro, la probabilidad de interacción por unidad de longitud es la misma a lo largo de todo el material (siempre que el material sea perfectamente homogéneo, claro está). Por consiguiente, en un proceso de Poisson, el número medio (o número esperado) de ocurrencias por unidad de tiempo o espacio, que denotaremos mediante  $\lambda$ , es constante a lo largo de todo el proceso. Está claro que en el ejemplo de la desintegración de los radionúclidos o en el del haz de fotones atravesando un medio, este número medio de ocurrencias no será constante ya que a medida que pasa el tiempo, o a medida que los fotones profundizan en el material, van quedando menos núcleos inestables o fotones sin interactuar, respectivamente, por lo que el número de medio de desintegraciones o interacciones disminuirá con el tiempo/distancia. Sin embargo, la fracción de radionúclidos que se desintegran por unidad de tiempo y la fracción de fotones que interactúan por unidad de longitud sí que será constante.

*Condición 2.* La segunda condición es que la probabilidad de que tenga lugar una ocurrencia durante cualquier intervalo de tiempo o espacio muy pequeño debe ser aproximadamente proporcional a la longitud de ese intervalo, siendo  $\lambda$  la constante de proporcionalidad. Más formalmente, para cualquier intervalo de tiempo de longitud  $\delta t$  (si se tratase de espacio sería  $\delta x$ ), la probabilidad de que se produzca al menos una ocurrencia en ese intervalo tiene la forma  $\lambda \delta t + o(\delta t)$ , siendo  $o(\delta t)$  una función que tiende a 0, cuando  $\delta t \rightarrow 0$ , más rápidamente que el propio tiempo  $\delta t$ . Expresada matemáticamente, esta condición implica que  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} (o(\delta t) / \delta t) = 0$ . Más adelante analizaremos en detalle cómo se deduce esto.

*Condición 3.* La probabilidad de que haya dos o más ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo muy pequeño debe ser de menor orden que la probabilidad de que haya sólo una ocurrencia. Esta probabilidad de que haya dos o más ocurrencias está dada por el término  $o(\delta t)$  en la condición 2. A medida que el intervalo se hace más pequeño, la probabilidad de dos o más ocurrencias se hará despreciable en comparación con la probabilidad de una ocurrencia. Del mismo modo, la probabilidad de una

ocurrencia en ese intervalo será despreciable en comparación con la probabilidad de no ocurrencia.

Un proceso en el que se verifican las tres condiciones anteriores se denomina proceso de Poisson, y la constante positiva  $\lambda$  es el número esperado de ocurrencias por unidad de medida (unidad de tiempo, unidad de espacio,...).

De las condiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades de los procesos de Poisson:

- El proceso es estacionario sobre el periodo completo de observación. Esto quiere decir que la probabilidad de una ocurrencia en cualquier intervalo debe ser la misma a lo largo del periodo completo, no puede haber intervalos en los que se sepa de antemano que las ocurrencias son más o menos probables. Esta probabilidad está determinada a partir de  $\lambda$ , cantidad que es constante durante el periodo completo de observación.
- Los números de ocurrencias en dos intervalos cualesquiera disjuntos serán independientes.
- El número de ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo fijo de longitud  $t$  tendrá una distribución de Poisson cuya media es  $\lambda t$ . Por ejemplo, supongamos que la tasa media con la que los fotones incidentes interactúan con el material es de  $10^5$  fotones por  $\mu\text{m}$  de profundidad lineal en el material. Eso significa que el número de fotones que habrán colisionado con los electrones del material después de atravesar 1 mm de profundidad tendrá una distribución de Poisson con media  $10^8$  fotones.
- Los procesos de Poisson no tienen memoria. Esto quiere decir que la probabilidad de que se produzca una ocurrencia en un intervalo de tiempo futuro (que un determinado núcleo se desintegre, por ejemplo) es independiente de la cantidad de tiempo que lleva sin ocurrir ese suceso. Por consiguiente, el pasado del proceso es absolutamente irrelevante a la hora de calcular la probabilidad de ocurrencia en el futuro. Esta propiedad de falta de memoria es una consecuencia de la principal característica de los procesos de Poisson: la probabilidad de ocurrencia de un suceso por unidad de tiempo es constante a lo largo de todo el proceso. Aunque esta falta de memoria no se verifica estrictamente en numerosos procesos que han sido frecuentemente aproximados por procesos de Poisson, como es el caso de la duración de un dispositivo (la cantidad de tiempo que tardará una bombilla en fundirse en el futuro dependerá, obviamente, del tiempo que lleva encendida en el pasado), la distribución de Poisson ha sido utilizada con éxito para modelizar y aproximar el comportamiento de este tipo de variables aleatorias. A los procesos que tienen esta propiedad de falta de memoria, como los procesos de Poisson, se les denomina *procesos de Markov* o *procesos markovianos*. En general, un proceso estocástico es *markoviano* cuando la probabilidad de que se dé un estado futuro concreto en un momento dado se puede calcular a partir de sólo el estado presente, sin hacer referencia a estados pasados.

## 4. Desintegración radiactiva

En esta PEC vamos a estudiar el problema de la desintegración radiactiva. Consideremos una fuente compuesta de  $N$  núcleos de una especie radiactiva que se desintegran espontáneamente por radiactividad natural. Este fenómeno satisface las tres condiciones matemáticas enunciadas en el capítulo anterior, por lo que suele ser uno de los ejemplos clásicos de proceso de Poisson. Definamos  $\lambda$  como el número esperado de desintegraciones por unidad de tiempo. Este valor depende, obviamente, del número total de núcleos susceptibles de desintegración, por lo que es más conveniente utilizar el número medio de desintegraciones por núcleo y por unidad de tiempo:  $\lambda_0 \equiv \lambda / N$ . Por lo tanto, el número de desintegraciones  $X$  observadas en un intervalo de tiempo muy pequeño  $dt$  será una variable aleatoria con una distribución de Poisson y media (valor esperado):

$$E(X) = \lambda dt = \lambda_0 N dt \quad (1)$$

A medida que los núcleos se desintegran, el número de núcleos radiactivos susceptibles de desintegración (núcleos activos) disminuye con el tiempo ya que sólo puede haber una desintegración por núcleo, por lo que  $N$  será una función del tiempo,  $N(t)$ . La variación media del número de núcleos activos en el intervalo  $dt$ , definida como  $dN(t)$ , será igual a  $-E(X)$ , y tenemos

$$dN(t) = -E(X) \quad (2)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor esperado dado en (1) obtenemos la *ley de desintegración de las especies radiactivas*

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda_0 N(t) \quad (3)$$

Obsérvese que

$$\lambda_0 dt = \frac{|dN(t)|}{N(t)} \quad (4)$$

tiene la forma de una probabilidad, la probabilidad de que cada uno de los  $N(t)$  núcleos radiactivos se desintegre en el intervalo de tiempo  $(t, t + dt)$ . Debe observarse también que esta probabilidad es constante en el tiempo, de acuerdo con la estacionariedad del proceso. La constante  $\lambda_0$  determina, por tanto, la probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo se desintegre y tiene unidades  $s^{-1}$ , y se denomina *constante de desintegración*. Cuanto más inestables sean los núcleos, mayor será  $\lambda_0$ .

La integración de (3) resulta en la siguiente ley de decaimiento exponencial

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t} \quad (5)$$

siendo  $N_0 = N(t = 0)$  el número inicial de núcleos. Se define la actividad de la muestra,  $A$ , como el número de desintegraciones radiactivas por unidad de tiempo

$$A(t) = \lambda_0 N(t) \quad (6)$$

y se mide en Becquerels (Bq):  $1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegración/s}$ .

El inverso de la constante de desintegración,  $\lambda_0^{-1}$ , se denomina vida media  $\tau$  del radionúclido y representa el valor esperado –o valor medio– del tiempo que tardará en desintegrarse. Dado un conjunto grande de núcleos iguales, es fácil ver que después de un tiempo  $\tau$  “sobrevivirán” alrededor de un 37 % de ellos (es decir, se habrán desintegrado el 63 %).

Otro tiempo relacionado y muy utilizado frecuentemente en lugar de  $\lambda_0$  para caracterizar una especie radiactiva, es el tiempo que tardan en desintegrarse la mitad de los núcleos. Este tiempo se denomina *período de semidesintegración*  $T$  y se obtiene a partir de (5) haciendo  $N(t) = N_0 / 2$ :

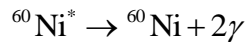
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda_0} \approx \frac{0.69}{\lambda_0} \quad (7)$$

Un ejemplo de desintegración radiactiva natural es la que experimenta el  $^{60}\text{Co}$ , emitiendo radiación gamma que es utilizada frecuentemente en el tratamiento del cáncer. El proceso es el siguiente.

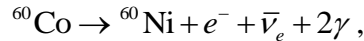
El cobalto  $^{60}\text{Co}$  decae a  $^{60}\text{Ni}^*$  (excitado) mediante la siguiente desintegración beta emitiendo un electrón y un antineutrino:



Posteriormente, el  $^{60}\text{Ni}^*$  excitado decae a su estado nuclear fundamental emitiendo dos fotones gamma:



Esta relajación es mucho más rápida que la desintegración beta anterior, por lo que podemos suponer que la desintegración total ocurre de la forma



con un periodo de semidesintegración  $T$  del  $^{60}\text{Co}$  de 5,27 años, de modo que la constante de desintegración será

$$\lambda_0 = \frac{\ln 2}{T} = 0,13 \text{ año}^{-1}$$

## 5. Modelo y simulación de la desintegración radiactiva de un conjunto de radionúclidos del mismo elemento

Existen muchas formas de simular computacionalmente la desintegración radiactiva de un conjunto discreto de radionúclidos. El modelo que proponemos es el siguiente.

Consideremos que tenemos inicialmente un conjunto  $N_0$  de núcleos de una determinada especie radiactiva con constante de desintegración  $\lambda_0$ . Simularemos este conjunto mediante un *array* en el que cada posición o celda corresponde a un núcleo. Puesto que los núcleos son independientes entre sí, la dimensionalidad del *array* es irrelevante en esta simulación, lo único importante es el número de elementos que contiene; es decir, es lo mismo considerar un vector (dimensión 1) de longitud 1000 que

una matriz (dimensión 2) con  $10 \times 100$  celdas, o un array de dimensión 3 con  $10 \times 10 \times 10$  celdas. Por simplificar la exposición supondremos una lista unidimensional de  $N_0$  elementos. El valor de cada elemento está representado como  $n_i$  (con  $i = 0, \dots, N_0 - 1$ ) e indica el estado del núcleo:

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{si el núcleo que ocupa la posición } i \text{ no se ha desintegrado (activo)} \\ 0 & \text{si el núcleo que ocupa la posición } i \text{ se ha desintegrado} \end{cases}$$

Cada *paso de la simulación* será identificado mediante un contador  $j$ . De este modo  $n_i(j)$  representa el estado del núcleo en la posición  $i$  después del paso  $j$  de simulación. Inicialmente ( $j = 0$ ) todas las celdas del array se encuentran en estado 1:  $n_i(0) = 1 \quad \forall i$ .

Las reglas de evolución de nuestro modelo son muy sencillas. En cada paso  $j$  de la simulación ( $j = 1, 2, \dots$ ) seleccionaremos aleatoriamente un núcleo entre el conjunto total de  $N_0$  núcleos (activos y desintegrados) y procederemos del siguiente modo, en función de su estado:

1. Si el núcleo seleccionado está en estado 0, eso significa que ya se ha desintegrado y no se ejecuta ninguna acción. La simulación avanza un paso y pasamos al siguiente paso de simulación  $j + 1$ .
2. Si el estado de la celda es 1, el núcleo se desintegrará y su estado pasará a 0, y al igual que antes la simulación avanza un paso y pasamos al siguiente paso de simulación  $j + 1$ .

La simulación concluirá cuando no quede ningún núcleo por desintegrarse. El número total de núcleos activos  $N(j)$  (que no se han desintegrado) después de  $j$  pasos de simulación será:

$$N(j) = \sum_{i=1}^{N_0} n_i(j)$$

con  $N(0) = N_0$ .

Podemos asociar a cada paso  $j$  de la simulación un tiempo  $t_j$  que representará el tiempo de desintegración que ha transcurrido hasta el paso  $j$ , y que inicialmente vale 0:  $t(0) = 0$ . En cada paso de la simulación este tiempo se incrementa en una cantidad  $dt$  denominada *paso temporal*:

$$t_j = t_{j-1} + dt$$

y que en nuestro modelo vale

$$dt = (\lambda_0 N_0)^{-1}$$

De este modo tenemos

$$t_j = jdt = j(\lambda_0 N_0)^{-1}$$

El tiempo estará medido en unidades de  $\lambda_0^{-1}$  (que en nuestro caso serán años). Por lo tanto, podemos hablar indistintamente del número de núcleos activos en el paso de

simulación  $j$ , dado por  $N(j)$ , o por el número de núcleos activos que quedan después de un tiempo  $t_j$ , dado por  $N(t_j)$ .

Es fácil comprobar que nuestro modelo cumple con las principales propiedades de los procesos de Poisson. Por ejemplo, en el paso  $j$  se producirán, en promedio,  $N(j-1)/N_0$  desintegraciones, ya que ésta es la probabilidad de que el núcleo seleccionado en ese paso sea un núcleo activo. Tenemos por tanto que, en promedio,

$$N(j) - N(j-1) = -\frac{N(j-1)}{N_0}$$

Si ahora sustituimos la expresión del paso temporal  $dt = (\lambda_0 N_0)^{-1}$ , obtenemos

$$N(j) - N(j-1) = -\frac{N(j-1)}{N_0} = -\lambda_0 N(j-1)dt$$

que coincide con el valor esperado de la distribución de Poisson del proceso y está de acuerdo con (1) y (2).

Además, también podemos comprobar que en el límite  $N_0 \rightarrow \infty$  recuperamos la ley de desintegración de las especies radiactivas dada en la Ec. (3). En efecto, como acabamos de ver, en el paso  $j+1$  de la simulación el número medio de núcleos decrecerá en una unidad con probabilidad  $N(t_j)/N_0$ , que es la probabilidad de que la celda seleccionada corresponda a un núcleo sin desintegrar. Podemos por tanto escribir que, en promedio,

$$N(t_j + dt) = N(t_j) - \frac{N(t_j)}{N_0}$$

Si ahora sustituimos en esta ecuación la relación  $dt = (\lambda_0 N_0)^{-1}$  obtenemos

$$\frac{N(t_j + dt) - N(t_j)}{dt} = -\lambda_0 N(t_j)$$

que tiende a la ley de desintegración de las especies radiactivas dada en la Ec. (3) en el límite  $N_0 \rightarrow \infty$  ya que entonces  $dt \rightarrow 0$ .

## Ejercicio 1 (2 puntos)

El objetivo de este ejercicio es comprobar que el resultado obtenido en la simulación reproduce el comportamiento predicho por la ley de desintegración de las especies radiactivas, es decir, que la evolución temporal de los núcleos activos sigue la función  $N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t}$ . Para ello partimos de un conjunto inicial de  $N_0$  núcleos y simulamos su desintegración completa utilizando nuestro modelo. Para tener una buena estadística, repetiremos este proceso  $M$  veces, de modo que si  $N_k(j)$  es el número de núcleos activos que quedan después de  $j$  pasos en la simulación  $k$ -ésima, el promedio de este valor sobre todo el conjunto  $M$  de simulaciones será:

$$\langle N(j) \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_k(j)$$

Una vez finalizada la simulación, representaremos gráficamente el valor promedio  $\langle N(j) \rangle_M$  frente al tiempo de simulación  $t_j$ , pero no para todos los pasos de la simulación (que serán muchos), sino cada  $\Delta j$  pasos de simulación, es decir, se deberán representar los valores obtenidos en los pasos  $j = 0, \Delta j, 2\Delta j, 3\Delta j, 4\Delta j, \dots$ . Estos puntos deberán ser representados junto a la solución teórica  $N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t}$ . Los valores de  $N_0$ ,  $\Delta j$  y  $M$ , deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*. Deberemos hacer esto para tres valores distintos de  $M$ : 1, 100 y 10000.

### Valores de los parámetros de la simulación

$$N_0 = 1000$$

$$\lambda_0 = 0,13 \text{ año}^{-1}$$

$$\Delta j = 100$$

$$M = 1, 100, 10000$$

### Presentación de los resultados

Se deberán presentar dos figuras.

**Figura 1.1** Representación gráfica de la evolución temporal del número promedio de núcleos activos obtenida en los tres casos ( $M = 1, 100, 10000$ ), junto a la solución teórica, según este esquema de símbolos:

- Puntos negros:  $\langle N(t_i) \rangle_1$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Puntos rojos:  $\langle N(t_i) \rangle_{100}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Puntos verdes:  $\langle N(t_i) \rangle_{10000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Línea negra continua: solución teórica  $N(t) = N_0 e^{-\lambda_0 t}$ .

El eje X de la gráfica (tiempo) debe ir desde 0 hasta 60 años, y el eje Y (número promedio de núcleos activos) desde 0 hasta 1000.

**Figura 1.2** Lo mismo que antes pero el eje X (tiempo) debe ir desde 40 hasta 60 años, y el eje Y número promedio de núcleos activos) desde 0 hasta 6.

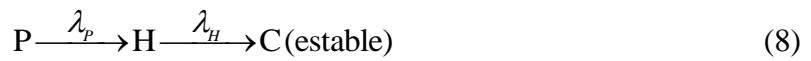
Discutir razonadamente los resultados obtenidos.



## 6. Modelo y simulación de una cadena de desintegración

Acabamos de analizar el mecanismo de desintegración más simple: una especie radiactiva se desintegra en un único paso con constante de desintegración  $\lambda_0$ , dando como resultado una especie estable. Sin embargo, en muchos casos el proceso de desintegración sucede en varias etapas con estados radiactivos intermedios, o incluso pueden existir diferentes rutas de desintegración. A continuación estudiamos ambas posibilidades.

Una *cadena de desintegración* (en inglés *chain decay*) es un proceso de transformación nuclear en el que un radionúclido decae consecutivamente a través de una serie de radionúclidos o estados intermedios hacia un núclido estable. El caso más simple de cadena de desintegración es el decaimiento de un radionúclido (usualmente denominado *padre* P) dando un segundo radionúclido (denominado *hijo* H), el cual decae a un elemento estable C:



En cualquier momento  $t$ , la actividad del padre es  $\lambda_p N_p(t)$  y la actividad del hijo es  $\lambda_H N_H(t)$ , donde  $N_p(t)$  y  $N_H(t)$  son el número de núcleos de cada especie en el tiempo  $t$ . La evolución temporal de estas cantidades está dada por el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{dN_p}{dt} &= -\lambda_p N_p \\ \frac{dN_H}{dt} &= \lambda_p N_p - \lambda_H N_H \end{aligned} \quad (9)$$

con condiciones iniciales  $N_p(0) = N_{p,0}$  y  $N_H(0) = N_{H,0}$ , y cuya solución es:

$$\begin{aligned} N_p(t) &= N_{p,0} e^{-\lambda_p t} \\ N_H(t) &= N_{p,0} \frac{\lambda_p}{\lambda_H - \lambda_p} (e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_H t}) + N_{H,0} e^{-\lambda_H t} \end{aligned} \quad (10)$$

El modelo que vamos a utilizar para simular esta cadena de desintegración es esencialmente igual al anterior, con las siguientes modificaciones.

De nuevo consideraremos un array unidimensional de  $N_0$  elementos. El valor de cada elemento del array está representado como  $n_i$  (con  $i=0, \dots, N_0-1$ ) e indica el estado del núcleo:

$$n_i = \begin{cases} 2 & \text{si es un núcleo padre} \\ 1 & \text{si es un núcleo hijo} \\ 0 & \text{si es un núcleo estable (desintegrado)} \end{cases}$$

Al igual que antes, en cada paso  $j$  de la simulación ( $j=1, 2, \dots$ ) seleccionaremos aleatoriamente uno de los  $N_0$  núcleos y procederemos del siguiente modo en función del estado de esa celda:

1. Si el núcleo seleccionado está en estado 2 (núcleo padre), entonces se desintegrará dando un núcleo hijo con probabilidad  $p_p = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \lambda_H}$ . Para simular esto generaremos un número aleatorio  $U$  uniformemente distribuido en el intervalo  $[0,1)$ .

- Si  $U < p_p$  entonces el estado de la celda pasará de 2 a 1. El número de núcleos padre decrecerá en una unidad,  $N_p(j) = N_p(j-1) - 1$ , mientras que el número de núcleos hijo aumentará en una unidad  $N_H(j) = N_H(j-1) + 1$ . Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .
- Si  $U \geq p_p$  entonces el núcleo padre no se desintegrará y seguirá en su estado inicial 2. Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .

2. Si el núcleo seleccionado está en estado 1 (núcleo hijo), entonces se desintegrará dando un núcleo estable con probabilidad  $p_H = \frac{\lambda_H}{\lambda_p + \lambda_H}$ . De nuevo simularemos esto generando un número aleatorio  $U$  uniformemente distribuido en el intervalo  $[0,1)$ .

- Si  $U < p_H$  entonces el estado de la celda pasará de 1 a 0. El número de núcleos hijo decrecerá en una unidad  $N_H(j) = N_H(j-1) - 1$ . Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .
- Si  $U \geq p_H$  entonces el núcleo hijo no se desintegrará y seguirá en su estado inicial 1. Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .

3. Si el núcleo seleccionado está en estado 0, entonces no ocurrirá nada ya que se trata de un núcleo estable. Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .

Al igual que en el esquema de simulación anterior, podemos asociar a cada paso de la simulación un tiempo  $t_j$  que se incrementa con un paso temporal  $dt$

$$t_j = t_{j-1} + dt$$

Este paso temporal ahora vale

$$dt = \left[ (\lambda_p + \lambda_H) N_0 \right]^{-1}$$

Evidentemente, para cada paso  $j$  y por tanto para cada tiempo  $t_j$ , el número de núcleos padre  $N_p(t_j)$  y el número de núcleos hijo  $N_H(t_j)$  estarán dados por el número de celdas del array en estado 2 y en estado 1, respectivamente.

## Ejercicio 2 (4 puntos)

### Ejercicio 2.1 (1 punto)

Demostrar matemáticamente (de modo análogo a como hicimos en el modelo anterior) que en el límite  $N_0 \rightarrow \infty$  la evolución temporal de nuestro modelo está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado en la Ec. (9).

### Ejercicio 2.2 (2 puntos)

Comprobar que el resultado obtenido en la simulación de nuestro modelo reproduce las soluciones dadas en la Ec. (10). Para ello utilizaremos un array de  $N_0$  núcleos. Inicialmente tendremos  $N_{p,0}$  núcleos padre y  $N_{H,0}$  núcleos hijo, de modo que  $N_{p,0} + N_{H,0} = N_0$ , y simulamos su desintegración completa utilizando nuestro modelo. De nuevo, para tener una buena estadística repetiremos este proceso  $M$  veces y promediaremos sobre los resultados obtenidos. Por ejemplo, si  $N_{p,k}(j)$  es el número de núcleos padre que quedan después de  $j$  pasos en la simulación  $k$ -ésima, el promedio de este valor sobre todo el conjunto  $M$  de simulaciones será:

$$\langle N_p(j) \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_{p,k}(j)$$

Lo mismo se aplica a los núcleos hijo.

Una vez finalizada la simulación, representaremos gráficamente en una misma figura los valores promedio  $\langle N_p(j) \rangle_M$  y  $\langle N_H(j) \rangle_M$  frente al tiempo de simulación  $t_j$ , tomando los valores obtenidos cada  $\Delta j$  pasos de simulación, es decir, se deberán representar los valores obtenidos en los pasos  $j=0, \Delta j, 2\Delta j, 3\Delta j, 4\Delta j, \dots$ . Los valores de  $N_0$ ,  $N_{p,0}$ ,  $N_{H,0}$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_H$ ,  $\Delta j$  y  $M$ , deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*.

#### Valores de los parámetros de la simulación

$N_0 = 1000$	$N_{p,0} = 1000$	$N_{H,0} = 0$
$\lambda_p = 0,1 \text{ año}^{-1}$	$\lambda_H = 0,3 \text{ año}^{-1}$	
$\Delta j = 1000$	$M = 1000$	

#### Presentación de los resultados

Se deberá presentar una única figura en la que se represente gráficamente la evolución temporal del número promedio de núcleos padre y del número promedio de núcleos hijo, junto a las soluciones teóricas dadas en la Ec. (10), según este esquema de símbolos:

- Puntos negros:  $\langle N_p(t_i) \rangle_{1000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Puntos rojos:  $\langle N_H(t_i) \rangle_{1000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Línea negra continua: solución teórica  $N_p(t)$  de la Ec. (10).
- Línea roja continua: solución teórica  $N_H(t)$  de la Ec. (10).

El eje X de la gráfica (tiempo) debe ir desde 0 hasta 60 años, y el eje Y (número promedio de núcleos) desde 0 hasta 1000.

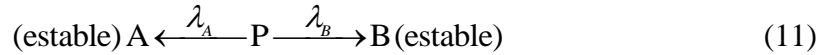
### Ejercicio 2.3 (1 punto)

Lo mismo que en el ejercicio 2.2 pero utilizando los siguientes valores para la simulación:

Valores de los parámetros de la simulación		
$N_0 = 1000$	$N_{P,0} = 600$	$N_{H,0} = 400$
$\lambda_p = 0,3 \text{ año}^{-1}$	$\lambda_H = 0,05 \text{ año}^{-1}$	
$\Delta j = 1000$	$M = 1000$	

## 7. Modelo y simulación de un esquema de desintegración ramificada

Otra forma compleja de decaimiento radiactivo es la que contempla la posibilidad de que existan diferentes rutas de desintegración para la misma especie radiactiva. Es lo que se denomina *desintegración ramificada* (del inglés *branching decay*). En el siguiente esquema se muestra la desintegración ramificada más simple:



La constante de la desintegración de P dando A es  $\lambda_A$ , mientras que la constante de desintegración de la ruta alternativa (P dando B) es  $\lambda_B$ . La constante de desintegración total de la especie radiactiva P es la suma de las constantes parciales de desintegración:

$$\lambda_P = \lambda_A + \lambda_B \quad (12)$$

ya que, por definición, la vida media de una sustancia está relacionada con su tasa total de desaparición, independientemente del mecanismo (o los mecanismos) en cuestión.

La evolución temporal del número de los diferentes núclidos está descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dN_P}{dt} &= -(\lambda_A + \lambda_B) N_P \\ \frac{dN_A}{dt} &= \lambda_A N_P \\ \frac{dN_B}{dt} &= \lambda_B N_P \end{aligned} \quad (13)$$

y su solución cuando  $N_{A,0} = N_{B,0} = 0$  (es decir, cuando todos los núcleos iniciales son P) es:

$$\begin{aligned} N_P(t) &= N_{P,0} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} \\ N_A(t) &= N_{P,0} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}) \\ N_B(t) &= N_{P,0} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}) \end{aligned} \quad (14)$$

Un ejemplo de desintegración ramificada es la que experimenta el  $^{40}\text{K}$ , el cual sufre el 89% de las veces una desintegración  $\beta^-$  dando  $^{40}\text{Ca}$ , mientras que en el 11% restante se transforma a  $^{40}\text{Ar}$  mediante la captura de un electrón:

$$0,89 = \frac{\lambda_{^{40}\text{Ca}}}{(\lambda_{^{40}\text{Ca}} + \lambda_{^{40}\text{Ar}})}, \quad 0,11 = \frac{\lambda_{^{40}\text{Ar}}}{(\lambda_{^{40}\text{Ca}} + \lambda_{^{40}\text{Ar}})}$$

A continuación presentamos el modelo que vamos a utilizar para simular el esquema de desintegración ramificada, que de nuevo es muy parecido a los anteriores.

Consideraremos un array unidimensional de  $N_0$  elementos. El valor de cada elemento del array está representado como  $n_i$  (con  $i=0, \dots, N_0-1$ ) e indica el estado del núcleo:

$$n_i = \begin{cases} 2 & \text{si es un núcleo P} \\ 1 & \text{si es un núcleo A (estable)} \\ 0 & \text{si es un núcleo B (estable)} \end{cases}$$

Como antes, en cada paso  $j$  de la simulación ( $j=1, 2, \dots$ ) seleccionaremos aleatoriamente uno de los  $N_0$  núcleos y procederemos del siguiente modo en función del estado de esa celda:

1. Si el núcleo seleccionado está en estado 2 (núcleo P), entonces se desintegrará generando un núcleo A con probabilidad  $p_A = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$ , o se desintegrará dando B con probabilidad  $p_B = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$ . Obsérvese que  $p_A + p_B = 1$ , es decir, siempre se desintegrará. Para simular esto generaremos un número aleatorio  $U$  uniformemente distribuido en el intervalo  $[0,1)$ .

- Si  $U < p_A$  entonces el estado de la celda pasará de 2 a 1. El número de núcleos P decrecerá en una unidad,  $N_P(j) = N_P(j-1) - 1$ , mientras que el número de núcleos A aumentará en una unidad,  $N_A(j) = N_A(j-1) + 1$ . Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .
- Si  $U \geq p_A$  entonces el estado de la celda pasará de 2 a 0. El número de núcleos P decrecerá en una unidad,  $N_P(j) = N_P(j-1) - 1$ , mientras que el número de núcleos B aumentará en una unidad,  $N_B(j) = N_B(j-1) + 1$ . Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .

2. Si el núcleo seleccionado está en estado 1 (núcleo A) o estado 0 (núcleo B), entonces no ocurrirá nada ya que se tratan de un núcleos estables. Pasaremos al siguiente paso de simulación  $j+1$ .

Después de cada paso de simulación el tiempo  $t_j$  se incrementa una cantidad  $dt$  que vale

$$dt = \left[ (\lambda_A + \lambda_B) N_0 \right]^{-1}$$

### Ejercicio 3 (4 puntos)

#### Ejercicio 3.1 (1 punto)

Demostrar matemáticamente que en el límite  $N_0 \rightarrow \infty$  la evolución temporal de nuestro modelo está dada por el sistema de ecuaciones (13).

#### Ejercicio 3.2 (2 puntos)

Comprobar que el resultado obtenido en la simulación de nuestro modelo reproduce las soluciones dadas en la Ec. (14). Para ello utilizaremos un array de  $N_0$  núcleos. Inicialmente todos los núcleos son de tipo P,  $N_{P,0} = N_0$ , y simulamos su desintegración completa utilizando nuestro modelo. De nuevo, para tener una buena estadística repetiremos este proceso  $M$  veces y promediaremos sobre los resultados obtenidos.

Una vez finalizada la simulación, representaremos gráficamente en una misma figura los valores promedio  $\langle N_P(j) \rangle_M$ ,  $\langle N_A(j) \rangle_M$  y  $\langle N_B(j) \rangle_M$  frente al tiempo de simulación  $t_j$ , tomando los valores obtenidos cada  $\Delta j$  pasos de simulación. Los valores de  $N_0$ ,  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\Delta j$  y  $M$ , deberán ser introducidos por línea de comandos como argumentos de la función *main*.

#### Valores de los parámetros de la simulación

$$N_0 = 1000$$

$$\lambda_A = 0,1 \text{ año}^{-1}$$

$$\lambda_B = 0,3 \text{ año}^{-1}$$

$$\Delta j = 500$$

$$M = 1000$$

#### Presentación de los resultados

Se deberá presentar una única figura en la que se represente gráficamente la evolución temporal del número promedio de núcleos P, de núcleos A y de núcleos B, junto a las soluciones teóricas dadas en la Ec. (14), según este esquema de símbolos:

- Puntos negros:  $\langle N_P(t_i) \rangle_{1000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Puntos rojos:  $\langle N_A(t_i) \rangle_{1000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Puntos verdes:  $\langle N_B(t_i) \rangle_{1000}$  frente a  $t_i$ , donde  $t_i = i \Delta j dt$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Línea negra continua: solución teórica  $N_P(t)$  de la Ec. (14).
- Línea roja continua: solución teórica  $N_A(t)$  de la Ec. (14).
- Línea verde continua: solución teórica  $N_B(t)$  de la Ec. (14).

El eje X de la gráfica (tiempo) debe ir desde 0 hasta 40 años, y el eje Y (número promedio de núcleos) desde 0 hasta 1000.

### Ejercicio 3.3 (1 punto)

En el modelo anterior se ha considerado que inicialmente todos los núcleos eran del tipo P. El objetivo de este ejercicio es modificar el modelo anterior para que contemple la posibilidad de que en el conjunto inicial de  $N_0$  núcleos, haya también núcleos estables del tipo A y B, es decir, que  $N_{A,0} \neq 0$  y  $N_{B,0} \neq 0$ , de modo que  $N_{P,0} + N_{A,0} + N_{B,0} = N_0$ .

- Las soluciones teóricas no coincidirán con las expresadas en la Ec. (14) ya que ese caso era válido para  $N_{A,0} = N_{B,0} = 0$  y  $N_{P,0} = N_0$ . Deducir las nuevas soluciones teóricas para este caso.
- Mostrar gráficamente el resultado de la siguiente simulación siguiendo las mismas pautas que en el ejercicio 3.2.

#### Valores de los parámetros de la simulación

$$N_0 = 1000$$

$$N_{P,0} = 500$$

$$N_{A,0} = 300$$

$$N_{B,0} = 200$$

$$\lambda_A = 0,1 \text{ año}^{-1}$$

$$\lambda_B = 0,3 \text{ año}^{-1}$$

$$\Delta j = 500$$

$$M = 1000$$