

CAPÍTULO I

Experimento aleatorio, Espacio muestral, Suceso

Experimento Aleatorio

Definición: Es una acción o proceso que puede tener distintos resultados posibles, y cuyo resultado no se conoce hasta que no se lleva a cabo.

Ejemplos:

- tirar una moneda
- tirar un dado
- extraer una bolilla de un bolillero
- medir la cantidad de milímetros de lluvia caídos
- elegir un número al azar

Espacio muestral

Definición: Es el conjunto de resultados posibles de un experimento.

Ejemplos:

1) Si el experimento consiste en arrojar un dado y observar el número que sale, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Vemos que el espacio muestral se denota con la letra E.

2) Si el experimento consiste en tomar una lapicera y medirla, el espacio muestral es:

$$E = \{ x / x \in \mathbb{R}^+ \}$$

Vemos que el espacio muestral no tiene por qué ser un conjunto finito. Como en este caso el resultado puede ser cualquier número real positivo, E tiene infinitos elementos.

3) Si el experimento consiste en tomar un libro al azar de la biblioteca y ver con qué letra empieza el título, el espacio muestral es:

$$E = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, \tilde{N}, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z \}$$

Vemos que los resultados posibles del experimento, es decir, los elementos del espacio muestral, no tienen necesariamente por qué ser números. En este caso son letras.

4) Si el experimento consiste en tirar una moneda y ver qué sale, el espacio muestral es:

$$E = \{ \text{cara, ceca} \}$$

Aunque también podríamos haber respondido $E = \{ \text{cara, ceca, canto} \}$ si consideráramos como un resultado posible el caso en que la moneda caiga de canto

Vemos que el conjunto de resultados posibles para un experimento es subjetivo.

Generalmente adecuamos el espacio muestral a lo que consideramos posible o no posible, y a los fines del experimento. Por ejemplo, en este caso una solución posible es definir $E = \{ \text{cara, ceca} \}$ y determinar que si cae de canto, se tira nuevamente.

Esto nos lleva a la siguiente cuestión:

Distintos espacios muestrales de un mismo experimento

Como vimos en el último ejemplo, dado un experimento, no hay un único e inapelable espacio muestral asociado. De hecho el espacio muestral que definimos para un determinado experimento es arbitrario. Hay dos aspectos involucrados en dicha cuestión:

1) ¿Cuáles resultados son posibles y cuáles imposibles?

Eso es lo que ilustramos en el ejemplo anterior.

2) ¿Cómo se escriben los resultados?

Este aspecto, quizás el más trivial, se ve reflejado por ejemplo en el experimento "elegir un mes al azar", cuyo espacio muestral puede ser $E = \{ \text{enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre} \}$ o bien $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$

3) ¿Qué es un resultado?

Supongamos que ya decidimos que los únicos resultados posibles al tirar una moneda son "cara" y "ceca". Ilustraremos los espacios muestrales, para mayor claridad.

- Experimento 1: "tirar una moneda y ver qué sale"

$$E = \{ \text{10 centavos}, \text{cara} \}$$

En palabras: "puede salir cara, o puede salir ceca".

Hay 2 resultados posibles.

- Experimento 2: "tirar dos monedas y ver qué sale"

$$E = \{ \text{10 centavos, 10 centavos}, \text{cara, cara}, \text{10 centavos, cara} \}$$

En palabras: "pueden salir dos caras, dos cecas, o una y una".

Hay 3 resultados posibles.

- Experimento 3: "tirar una moneda de 10 centavos y una de 25 centavos y ver qué sale"

$$E = \{ \text{10 centavos, 25 centavos}, \text{10 centavos, cara}, \text{cara, 25 centavos}, \text{cara, cara} \}$$

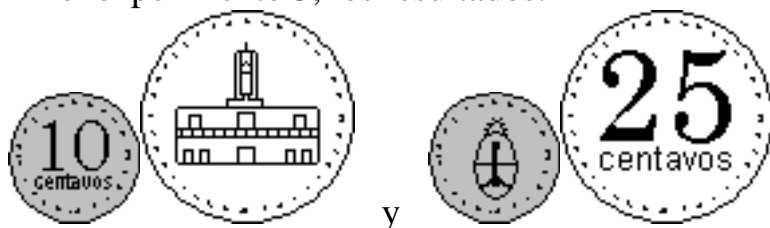
En palabras: "puede salir cara en la de 10 y cara en la de 25, cara en la de 10 y ceca en la de 25, ceca en la de 10 y cara en la de 25, ó ceca en la de 10 y ceca en la de 25".

Hay 4 resultados posibles.

¿Cómo se explica que si tanto en el experimento 2 como en el 3 arrojamamos exactamente dos monedas, haya distinta cantidad de resultados posibles?

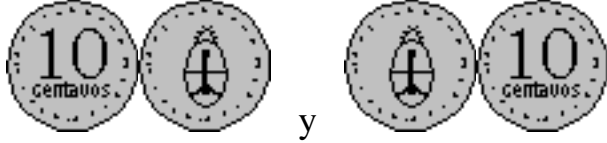
La diferencia está en que en el experimento 2, las monedas son iguales, y en el experimento 3 son distintas.

En el experimento 3, los resultados:



son, obviamente, distintos.

Pero en el experimento 2, como las monedas son iguales, los resultados:



no son **distinguibles**, y entonces SON el mismo resultado ("una y una").

Sin embargo esto también es subjetivo, ya que esos resultados **no-distinguibles**, pueden volverse **distinguibles** si consideramos, por ejemplo, el orden en que se tiran las monedas, y entonces podemos tener los resultados **distinguibles** "salió cara en la primera y ceca en la segunda" y "salió ceca en la primera y cara en la segunda".

En conclusión, al describir el espacio muestral de un experimento, es fundamental tener bien claro cuáles resultados serán **distinguibles**, y cuáles **indistinguibles**.

Suceso

Definición: Es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

1) En el experimento de arrojar un dado y ver qué sale, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Cualquier subconjunto de E es un suceso, por lo tanto ejemplos de sucesos de este experimento pueden ser:

- $\{1\}$
- $\{6\}$
- $\{3, 4\}$
- $\{4, 5, 6\}$
- $\{1, 3, 5\}$
- $\{2, 4, 6\}$

También podemos expresar estos subconjuntos por comprensión:

- "que salga un número par"
- "que salga un número impar"
- "que salga un número mayor que 3"

Y no olvidemos los siguientes subconjuntos:

- $\{\}$

Dicho suceso es conocido como "suceso nulo", "suceso falso" o "**suceso imposible**". Además de la notación $\{\}$ se puede usar la alternativa \emptyset .

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Este subconjunto del espacio muestral es exactamente el espacio muestral (recordemos que un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo).

Dicho suceso es conocido como "suceso verdadero", "suceso forzoso" o "**suceso cierto**".

2) En el experimento de tomar una lapicera y medir su longitud en cm.:

$$E = \{ x / x \in \mathbb{R}^+ \}$$

Ejemplos de sucesos (es decir, subconjuntos de E) pueden ser:

- $\{15\}$
- $\{14.2\}$
- $\{17.33333333...\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^+ / 10 < x < 15\}$

3) Si el suceso A consiste en obtener cara al tirar una moneda, entonces podríamos definir:

- El experimento consiste en tirar una moneda y ver qué sale.
- El espacio muestral es $E = \{\text{cara, ceca}\}$
- El suceso A es $A = \{\text{cara}\}$. Vemos que $A \subset E$. Como dijimos antes, un suceso es un subconjunto del espacio muestral.

Las palabras "suceso" y "evento" se consideran sinónimas. Esto es porque habitualmente, dado un experimento, su espacio muestral E y un suceso A, si se hace el experimento, y el resultado está comprendido en el suceso A, se dice que "ocurrió" A.

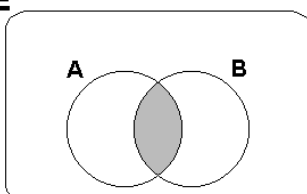
Comentarios sobre los sucesos en su calidad de conjuntos

Como los sucesos son conjuntos, operar con sucesos es operar con conjuntos.

1) Intersección de sucesos

Dados A y B dos sucesos, $A \cap B$ es el suceso que ocurre cuando ocurren simultáneamente A y B. Se puede llamar "A intersección B" o bien "A y B".

E



Ejemplo:

Se tira un dado, y se definen los sucesos:

A: que salga menos de 4

B: que salga más de 2

Con lo cual queda:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

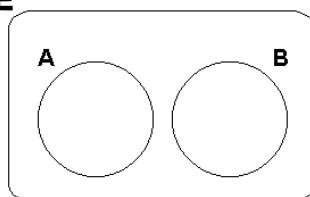
$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

2) Sucesos disjuntos o mutuamente excluyentes

Son los sucesos cuya intersección es nula. Dados los sucesos **A y B**, son disjuntos $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

E



Ejemplo:

Se tira un dado, y se definen los sucesos:

A: que salga 1 ó 2

B: que salga más de 4

Con lo cual queda:

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

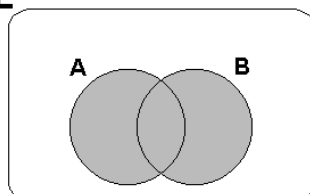
$$A \cap B = \emptyset$$

Como A y B tienen intersección nula, no pueden suceder simultáneamente.

3) Unión de sucesos

Dados A y B dos sucesos, $A \cup B$ es el suceso que ocurre cuando ocurre A, B, o los dos simultáneamente. Se puede llamar "A unión B" o bien "A ó B".

E



Ejemplo:

Se tira un dado, y se definen los sucesos:

A: que salga menos de 4

B: que salga 2 ó 6

Con lo cual queda:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

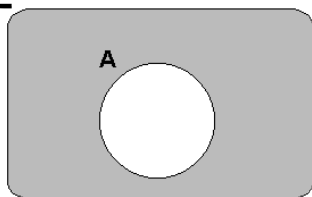
$$B = \{2, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$$

4) Complemento de los sucesos

Dado un suceso A, su "complemento" o "negado" es el suceso que ocurre si y sólo si no ocurre A (y A ocurre si y sólo si no ocurre el complemento de A). El complemento de A se escribe A^c o bien \bar{A} y se llama "complemento de A", "A negado" o bien "no A".

E



Ejemplo:

Si arrojo un dado, y el suceso A es que salga un 4, entonces el suceso A^c es que no salga un 4 o bien que salga 1, 2, 3, 5 ó 6. Expresados como conjuntos quedan:

$$E = \{\text{sale 1, sale 2, sale 3, sale 4, sale 5, sale 6}\}$$

$$A = \{\text{sale 4}\}$$

$$A^c = \{\text{sale 1, sale 2, sale 3, sale 5, sale 6}\}$$

Observamos que:

- Así como A es un subconjunto de E, A^c también es un subconjunto de E.
- $A \cup A^c = E$, es decir, la unión de A y A^c forma E. Esto es lógico: O llueve o no llueve. No hay ninguna otra posibilidad.
- $A \cap A^c = \emptyset$. Un suceso y su complemento son disjuntos, porque no pueden ocurrir al mismo tiempo. No puede "llover" y "no llover" al mismo tiempo.

5) Partición del espacio muestral

Sea el espacio muestral E, y n sucesos A_1, \dots, A_n .

Si se cumple que:

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ "la unión de los sucesos da el espacio muestral"
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ "todos los pares posibles de sucesos tienen intersección nula"

Entonces se dice que A_1, \dots, A_n forman una **partición** de E.

Como ejemplo, volvamos al experimento del dado, y definamos los siguientes sucesos:

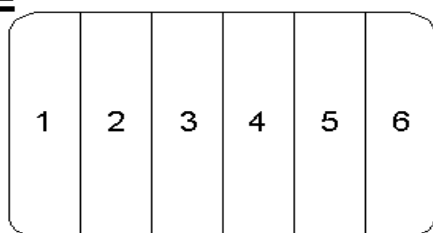
$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{6\}.$$

Veamos que se verifica:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E.$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, \dots, A_5 \cap A_6 = \emptyset.$

Entonces los A_1, \dots, A_6 que definimos forman una partición de E. Gráficamente, lo

E



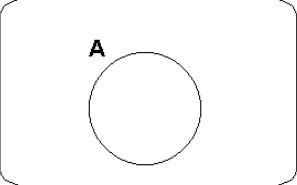
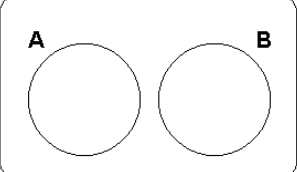
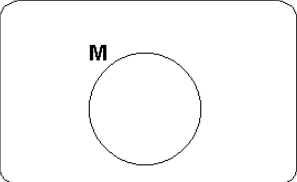
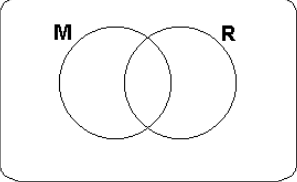
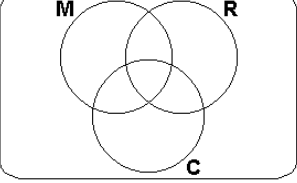
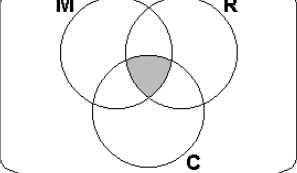
podemos ver así:

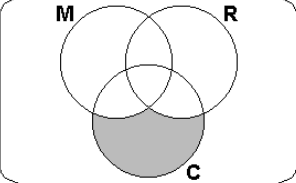
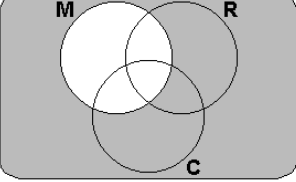
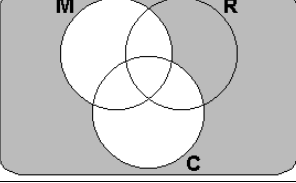
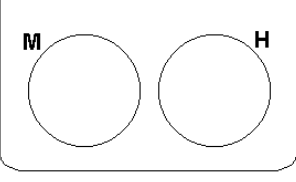
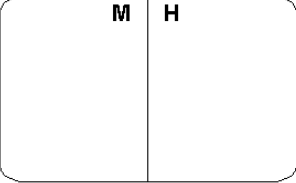
Hagamos la observación de que un suceso y su complemento siempre forman una partición del espacio muestral, puesto que como vimos antes:

- $A \cup A^c = E$
- $A \cap A^c = \emptyset$

El concepto de partición del espacio muestral nos será útil más adelante al estudiar la probabilidad total.

Como repaso, veamos algunos ejemplos gráficos:

| | |
|---|--|
| <p>E</p>  | <p>E es el conjunto con todos los resultados posibles del experimento, y el suceso A es un subconjunto de E, porque es un conjunto de determinados resultados. Este gráfico, por ejemplo, puede estar asociado al experimento "elegir una fecha al azar" y el suceso A puede ser "el día es jueves".</p> |
| <p>E</p>  | <p>Al gráfico anterior le agregamos el suceso B: "la moneda es de 25 centavos". Vemos que en este ejemplo, los sucesos A y B no tienen intersección, o bien "tienen intersección nula". Es decir, son disjuntos (recordemos que A, B sucesos disjuntos $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$).</p> |
| <p>E</p>  | <p>Cambiamos el experimento: "elegir una persona al azar". El suceso M es: "que la persona sea mujer".</p> |
| <p>E</p>  | <p>Al gráfico anterior le agregamos el suceso R: "que la persona sea rubia". Vemos que E queda dividido en 4 regiones: las mujeres no rubias, las mujeres rubias, los hombres rubios y los hombres no rubios.</p> |
| <p>E</p>  | <p>Si agregamos un tercer suceso: C = "que la persona tenga ojos claros". El espacio muestral queda dividido en 8 regiones.</p> |
| <p>E</p>  | <p>"Mujeres rubias de ojos claros" $M \cap R \cap C$</p> |

| | |
|---|---|
| <p>E</p>  | <p>"Hombres no-rubios de ojos claros"</p> $\overline{M} \cap \overline{R} \cap C$ |
| <p>E</p>  | <p>"Hombres"</p> \overline{M} |
| <p>E</p>  | <p>"Hombres de ojos oscuros"</p> $\overline{M} \cap \overline{C}$ |
| <p>E</p>  | <p>Si el suceso H es "la persona es hombre", entonces ese gráfico es incorrecto, a menos que sea posible no ser mujer y no ser hombre al mismo tiempo.</p> <p>Si $H = \overline{M}$, entonces $M \cup H = M \cup \overline{M}$, y como vimos antes:</p> $M \cup \overline{M} = \emptyset$ |
| <p>E</p>  | <p>Esta es la forma correcta de hacer el gráfico anterior. Para los sucesos que forman una partición, este gráfico es correcto y el anterior no. Como vimos antes, un suceso y su complemento siempre son una partición de E. En este ejemplo:</p> $M \cup H = E ; M \cap H = \emptyset$ |

Problemas típicos

1) Si el suceso A es obtener un 3 al arrojar un dado, describa:

- el experimento
- el espacio muestral de dicho experimento
- el suceso A

Resolución:

- El experimento consiste en arrojar un dado.
- El espacio muestral de dicho experimento es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- El suceso A es: $A = \{3\}$

Observamos que, como todo suceso, A es un subconjunto de E.

2) Si el suceso A consiste en que un número real elegido al azar entre 2 y 3 sea mayor que 2.8, describa lo mismo que se pidió en el ejercicio 1.

Resolución:

- El experimento consiste en elegir un número real al azar entre 2 y 3.
- El espacio muestral de dicho experimento es:

$$E = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$$

- El suceso A es: $A = \{x \in E / x > 2.8\}$

3) Dados los experimentos descritos en 1 y 2, proponga otros sucesos para cada uno.

Resolución

- 1) Otros sucesos pueden ser: "se obtiene 6", "se obtiene menos de 4", "se obtiene más de 2", "se obtiene 3 ó 6", "no se obtiene 4", etc.
- 2) Otros sucesos pueden ser: "sale menor a 2.4", "sale entre 2.6 y 2.7", "sale exactamente 2.71", etc.

4) Describa el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

- a) se tira una moneda
- b) se tiran 3 monedas iguales
- c) se tiran 3 monedas distintas
- d) se tiran 2 dados iguales
- e) se tiran 2 dados distintos
- f) se eligen 2 colores primarios
- g) en una caja hay 4 bolitas negras y 1 bolita blanca. Se van sacando bolitas (sin reposición) hasta que aparezca una blanca.
- h) se coloca una pieza en un casillero al azar de un tablero de ajedrez.

Resolución:

a) $E = \{\text{cara, ceca}\}$

b) $E = \{3 \text{ caras, } 2 \text{ caras y } 1 \text{ ceca, } 1 \text{ cara y } 2 \text{ cecas, } 3 \text{ cecas}\}$

c) Si a las 2 monedas las llamamos X, Y y Z, y anotamos los resultados como $n_x n_y n_z$ donde n_i vale "a" si en la moneda i sale cara y "e" si en la moneda i sale ceca, queda:

$E = \{aaa, aae, aea, aee, eaa, eae, eea, eee\}$

Vemos que "distinguiendo" las monedas, obtenemos 8 resultados posibles, mientras que si no las distinguimos obtenemos 4 resultados posibles.

d) $E = \{2 \text{ unos}, 1 \text{ uno y } 1 \text{ dos}, 1 \text{ uno y } 1 \text{ tres}, 1 \text{ uno y } 1 \text{ cuatro}, 1 \text{ uno y } 1 \text{ cinco}, 1 \text{ uno y } 1 \text{ seis}, 2 \text{ dos}, 1 \text{ dos y } 1 \text{ tres}, 1 \text{ dos y } 1 \text{ cuatro}, 1 \text{ dos y } 1 \text{ cinco}, 1 \text{ dos y } 1 \text{ seis}, 2 \text{ tres}, 1 \text{ tres y } 1 \text{ cuatro}, 1 \text{ tres y } 1 \text{ cinco}, 1 \text{ tres y } 1 \text{ seis}, 2 \text{ cuatros}, 1 \text{ cuatro y } 1 \text{ cinco}, 1 \text{ cuatro y } 1 \text{ seis}, 2 \text{ cincos}, 1 \text{ cinco y } 1 \text{ seis}, 2 \text{ seis}\}$

e) Si a los 2 dados los llamamos X e Y, y anotamos los resultados como $n_x n_y$ donde n_x vale el número que sale en el dado X y n_y vale el número que sale en el dado Y, queda:
 $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

Vemos otra vez que "distinguiendo" los dados, obtenemos 36 resultados posibles, mientras que si no los distinguimos obtenemos 21 resultados posibles.

f) Los colores primarios son el amarillo, el azul y el rojo.

$E = \{\text{amarillo y azul}, \text{amarillo y rojo}, \text{azul y rojo}\}$

g) Hay 2 formas de escribir el espacio muestral de este experimento.

Podemos anotar las extracciones, con lo cual los resultados posibles son:

$E = \{B, NB, NNB, NNNB, NNNNB\}$

También podemos hacer referencia al número del intento en el cual se logró sacar la blanca. Los resultados posibles son:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Sin duda la segunda forma es mucho más ventajosa si queremos procesar información.

h) El tablero de ajedrez tiene 8 filas (1-8) y 8 columnas (A-H). En este caso el espacio muestral puede ser las distintas "coordenadas" en las que se puede poner la ficha, con lo cual:

$E = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8\}$

o bien:

$E = \{(x,y) \text{ donde } x \in \{A, B, C, E, D, F, G, H\} ; y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \}$

5) Un experimento consiste en lanzar un dado. Se definen 3 sucesos:

A: sale menos de 3

B: sale más de 3

C: sale 2, 4, ó 6.

Describe los siguientes sucesos:

a) $E, A, B, C, A^c, B^c, C^c, A \cup B, A \cap B, B \cup C, B \cap C, A \cup B^c$.

b) **Ocorre solamente A.**

c) **Ocorre B, y no ocorre C.**

d) **Ocorre alguno de los tres**

e) **Ocurren los tres simultáneamente**

f) **Ocorre solamente uno de los tres**

g) **No ocurre ninguno de los tres**

h) **Ocorre a lo sumo uno de los tres**

Resolución:

a) Nos abstraemos del hecho de que sale un número y nos quedamos directamente con los valores:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 6\}$$

$$A^c = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$B^c = \{1, 2, 3\}$$

$$C^c = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$B \cap C = \{4, 6\}$$

$$A \cup B^c = \{1, 2, 3\}$$

b) "Ocorre solamente A" significa "A y noB y noC", es decir:

$$A \cap B^c \cap C^c = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1\}$$

Lo cual significa que si sale 1, ocurre A y solamente A.

c) "Ocorre B y no ocorre C" significa "B y noC", es decir:

$$B \cap C^c = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}$$

Lo cual significa que si sale 5, ocurre B y no ocorre C (Y no importa si A ocurre o no).

d) "Alguno de los tres" significa "A ó B ó C", es decir:

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

Lo cual significa que si sale 1, 2, 4, 5 ó 6, eso garantiza que esté ocurriendo al menos uno de los tres sucesos A, B, C.

e) "Los tres simultáneamente" significa "A y B y C", es decir:

$$A \cap B \cap C = \{1, 2\} \cap \{4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$$

Lo cual significa que no existe ningún número que si sale, ocurren A y B y C al mismo tiempo.

f) "Solamente uno de los 3" significa "A o bien B o bien C" (con o excluyente), lo cual es equivalente a: (A y noB y noC) o (B y noA y noC) o (C y noA y noB), es decir:

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) = (\{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\}^c \cap \{1, 3, 5\}^c) \cup (\{4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\}^c \cap \{1, 3, 5\}^c) \cup (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\}^c \cap \{1, 2, 3\}^c) = \{1\} \cup \{5\} \cup \emptyset = \{1, 5\}$$

Lo cual significa que si sale 1 ó sale 5, está ocurriendo uno (y solo uno) de los 3 sucesos.

g) "Ninguno de los tres" significa noA, noB y noC, es decir:

$$(A^c \cap B^c \cap C^c) = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3\}^c \cap \{1, 3, 5\}^c = \{3\}$$

Lo cual significa que si sale 3, no está ocurriendo ninguno de los 3 sucesos.

h) "A lo sumo uno de los tres" significa "o ninguno, o uno", y eso es equivalente a "(no ocurre ninguno) ó (ocurre solamente uno). Usando los resultados obtenidos en f y g, queda:

$$\{3\} \cup \{1, 5\} = \{1, 3, 5\}$$

Lo cual significa que si sale 1, 3 ó 5, no ocurre ninguno, o a lo sumo ocurre uno.