MűFi-2024
HomeWork 1.
Modeling and solution of ODEs

Reichardt, András

2024. november 11.

Kivonat

This document is a small collection of problems to solve. All problems involve a set of ordinary differential equations. As we learned in lectures, problem should be formulated in ODE form. Numerical solution is made using MATLAB.

Do not forget to write down steps of solution and code used for it.

Problem 1. - Bólya a vízben (Buoy on the water)

Tekintsünk egy bólyát, amely a víz felszínén lebeg. A bólyáról tudjuk, hogy hengerszimmetrikus és ismert a keresztmetszete. A bólya tetejét kissé nyomjuk le a víz felé (vagy emeljük fel a felszín felől)! Írjuk le a mozgást és oldjuk meg a kapott problémát numerikusan!

A bólya keresztmetszetét pontpárokkal írjuk le, amelynek első koordinátája z (a szimmetriatengely), második koordinátája a z-től való távolság, pl. (0,0), (0.1, 0.5), (0.4, 0.3), (1,0)

Diszkusszáljuk a megoldást (pl. a lenyomás mértékétől hogyan függ a periódusidő?) Hogyan változnak eredményeink, ha a durva közelítés helyett polinom-mal közelítjük a bólya alakját?

Vizsgáljuk meg, hogy a bólya sűrűségétől függ-e a periódusidő!

Problem 2. - Lebegő súlyzók

Tekintsük a súlyzószerű úszó testet. Egy zárt henger (R, L paraméterekkel) két végén koncentrált tömegek (nehezékek) vannak elhelyezve (tömegük m és $m < M$). A vízbe helyezve, a henger függőleges helyzetbe helyezkedik el. Írjuk le a rendszer mozgását!

Oldjuk meg numerikusan a feladatot!

A henger nem csak z irányba mozoghat! A folyadék mozgásától tekintsünk el!

Problem 3. - Körben állnak kis rugók ...

Egy (R sugarú) körvonal mentén $n \geq 8$ darab pontszerű gyöngy található (m tömegű). A gyöngyöket a szomszédos gyönggyel rugó köti össze, az első és utolsó gyöngyöt is összekötjük rugóval (periodikus gyöngy-rugó rendszer). A gyöngyök csak a körív mentén mozoghatnak. A rugók hosszát a körív mentén mérjük, nyujtatlan hossza a $2\pi/n$ ívhossznak megfelelő hossz. A tisztán transzlációs megoldásoktól tekintsünk el!

Írjuk le a rendszer mozgását és oldjuk meg arra az esetre, ha az egyik gyöngyöt megpöcköljük (kezdősebességet adunk neki)!

Hogyan változik a rendszer, ha a körív sugarát a 1,5-szeresére változtatjuk, miközben a paraméterek (rugóállandó, nyújtatlan hossz) változatlanok maradnak?

Problem 4. - Labda kétdimenziós modellje

A labda (vagy gumicső) egy modellje során a gumibevonatot rugókkal helyettesítjük, a cső tömegét pedig tömegpontok jelentik. A teljes rendszerben n rugót alkalmazunk, amelyek azonos rugóállandójúak.

Vizsgáljuk meg a labda modelljét, ha az alsó $\pi/6$ nyílásszögű részének azonos, középpont felé mutató sebességet adunk!

Hogyan kell figyelembe venni, hogy a labdán belül található levegő (ideális gáz) nyomása különböyik a külső nyomástól?

Problem 5. - Csatolt ingák

Vizsgáljuk meg a két matematikai inga (hosszú rúdon lévő pontszerű tömegek), amelyeket rugó köt össze! (Ingák hossza azonos ℓ , a tömegek m_1 és m_2, a csatoló rugó rugóállandója k, nyújtatlan hossza $\ell/2$) Meglökve az egyik ingát, hogyan mozog a rendszer? Milyen különbségek adódnak az meglökött tömegeknél? Mutassuk meg fázistérben az ingák mozgását!

Problem 6. - Ingahajó

Az M tömegű hajóban lévő tengelyen egy m tömegű golyó van felfűzve, amely elmozdulhat a tengely mentén, de a végén nem tud róla leesni. A tengely hossza W. A hajót két L hosszú rúd segítségével a plafonhoz rögzítjük. Kezdetben a golyó a tengely közepén található. A súrlódástól tekintsünk el!

Térítsük ki a hajót kissé és oldjuk meg numerikusan a feladatot!

Hogyan változik a rendszer mozgása, ha a súrlódást is figyelembe vesszük?

Problem 7. - Egydimenziós pattogó labdák

Egy L hosszúságú vékony tengelyre N golyó van felfűzve, amelyek súrlódásmentesen mozoghatnak. A golyók egymással tökéletesen rugalmasan ütköznek. A tengely két végén lévő falakról a golyó visszapattan, azonban a pattanás során a mozgási energiájának ε része elvész.

Mutassuk meg a rendszer mozgását, ha az egyik golyót v_0 kezdősebességgel meglökjük!

Problem 8. - N elemű lánckapcsolás

A hálózatelmélet egyik modellje a távvezeték (vagy mikrohullámú technikában tápvonal). A távvezetéket lehetséges modellezni tekercsek és kondenzátorok segítségével, egy létrahálózat formájában (hosszanti ágak tekercsek, a fokok vagy keresztirányú elemek kondenzátorok). A bemeneti oldalon U_0, R_0 paraméterű forrást kapcsolunk a rendszerre $t = 0$-ban. A kimeneten (másik vége a láncnak) egy $R_t = 2\sqrt{L/C}$ értékű ellenállást helyezünk el.

Határozzuk meg a tekercsek áramát és a kondenzátorok feszültségét!

(A kondenzátorol árama

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

módon függ a kondenzátor feszültségétől, a tekercs feszültsége pedig

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

módon függ az áramától!)

Problem 9. - Versengő fajok

Az órán mutatott ragadozó-zsákmány modell (Lotka-Volterra modell) egy továbbfejlesztett változata az alábbi.

Legyen a zsákmány (nyúl) száma $x(t)$, a ragadozó (róka) száma $y(t)$.

Az egymással nem kölcsönhatásban lévő populációk esetében (egy populáció maximalizáló tagot bevezetve) az alábbi egyenletek adódknak :

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot (M - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = m \cdot y \cdot (N - y)$$

ahol k és m a populációnövekedési ráta, M és N a stabil populációt jellemző állandó. Vizsgáljuk meg ezt a rendszert és rajzoljuk fel az $(x, \frac{dx}{dt})$ és az $(y, \frac{dy}{dt})$ fázisportrékat!

A populációk közötti kölcsönhatás esetén populáció csökkentő nyomás kerül a rendszerbe.

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot (M - x) - p \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = m \cdot x \cdot (N - y) - q \cdot x \cdot y$$

Vizsgáljuk meg a rendszer mozgását a közös (x, y) fázistérben! Figyeljünk a kritikus pontokra (4 darab van belőlük)!

(*Megjegyzés* A kritikus pontok : $(0, 0)$, $(M, 0)$, $(0, N)$ és $k \cdot m \neq p \cdot q$ esetén

$$\left(\frac{m \cdot (k \cdot M - p \cdot N)}{k \cdot m - p \cdot q}; \frac{k \cdot (m \cdot N - q \cdot N)}{k \cdot m - p \cdot q}\right)$$