MűFi - 2023
2. házi feladat
Véges differencia módszer alkalmazása

Reichardt, András

2023. november 28.

1. feladat - Laplace-egyenlet megoldás változó anyagparaméterekkel

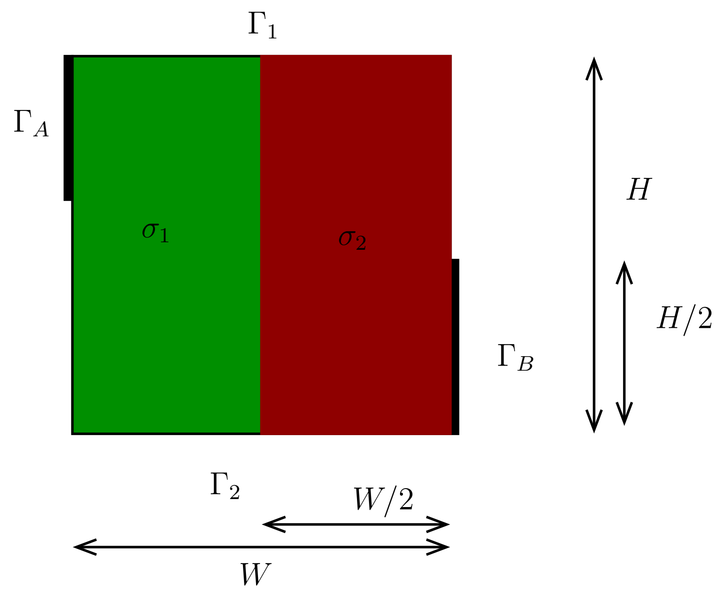
Vizsgáljuk meg az alábbi kétdimenziós homogén, elliptikus problémát!

A probléma differenciálegyenlete

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

ahol σ a térrész vezetőképessége, u az áramlási térhez kapcsolódó potenciál. A vizsgálati tartomány a $(0,W)\times(0,H)$ térrész, amelyet az ábra is mutat.

A Γ_A és Γ_B peremek kívételével mindenhol homogén Neumann peremfeltétel alkalmazható. A Γ_A határon $u=100$ V, míg Γ_B esetén $u=0$. A vezetőképesség értéke a baloldali részen σ_1, a jobboldali térrészen σ_2.



$$\Gamma_1,\Gamma_2:\frac{\partial u}{\partial n}=0;\Gamma_A:u=100;\qquad\Gamma_B:u=0$$

Alkalmazzunk egyenletes felosztást az x- illetve y irányban, azonban $\Delta x=\Delta y$ nem kell hogy teljesüljön.

$$x=\{x_i\},i=1,2,\dots N_x,\qquad y=\{y_j\},j=1,2,\dots N_y$$

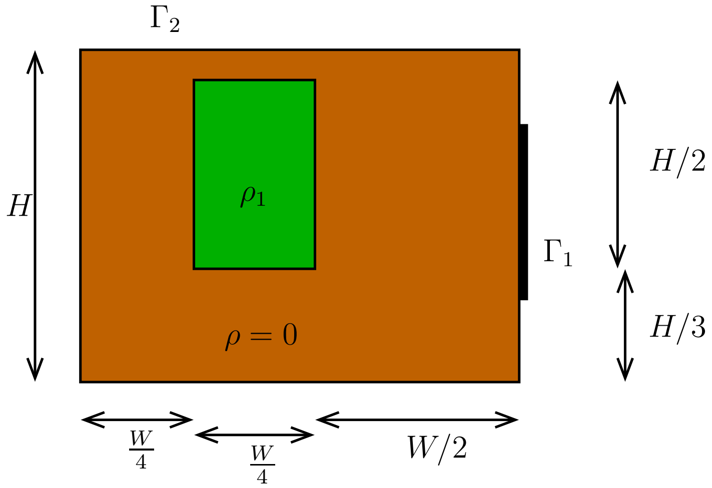
Oldjuk meg az alábbi feladatokat!

1. Írja fel a differenciálegyenlet diszkretizálási sémáját! Kihasználhatjuk az adott irányban meglévő ekvidisztáns jelleget!
2. Állítsa elő az összeállítandó algebrai (lineáris) egyenletet!
3. Készítsünk MATLAB programot (függvényt), amely megoldja a feladatot!

Numerikus értékek : $H=10$, $W=8$, $N_x=20$, $N_y=20$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=2$

2. feladat - Poisson egyenlet megoldása nem ekvidisztáns felosztáns esetén

Tekintsük az alábbi geometriát, amelynek egy téglalap alakú tartományt és egy teljes egészében azon belül található másik téglalap alakú tartományt tartalmaz. A belső téglalapon egyenletes töltéssűrűség helyezkedik el. A térrészben a permittivitás 1. Határozzuk meg az elrendezés esetén a potenciált a teljes tartományon!



Probléma differenciálegyenlete :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\rho$$

A töltéssűrűség értéke a belső téglalp alakú területen $\rho = \rho_1$, azonkívűl $\rho = 0$! A térbeli felosztás során feltételezzük, hogy adott az x- illetve y- értékek adottak :

$$x = \{x_i\}, i = 1, 2, \ldots N_x, \qquad y = \{y_j\}, j = 1, 2, \ldots N_y$$

A Γ_2 határon homogén Neumann-peremfeltételt alkalmazhatunk, a Γ_1 határon a potenciál értéke ismert $\phi = 0$.

1. Írjuk fel a differenciálegyenlet diszkretizálási sémáját! Kihasználhatjuk az adott irányban meglévő ekvidisztáns jelleget!

2. Mutassuk meg az összeállítandó algebrai (lineáris) egyenletet!

3. Készítsünk MATLAB programot (függvényt), amely megoldja a feladatot! Számítsuk ki és ábrázoljuk a Γ_1 határon a térerősség normál irányú összetevőjét !

$$\vec{\mathbf{E}} = -\text{grad}\ \phi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_y\right)$$

Numerikus értékek : $H = 12$, $W = 8$, $N_x = 20$, $N_y = 20$, $\rho_1 = 1$

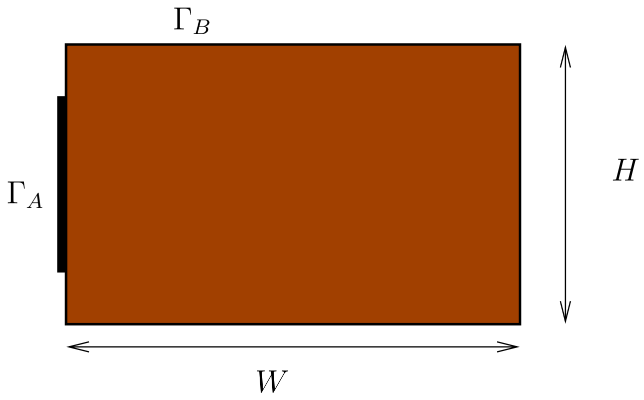
3. feladat - Hővezetési probléma

Az alábbi elrendezésben egy téglalap alakú tartomány található. Ennek a bal oldali részét a kezdeti T_0 hőmérsékletről, pillanatszerű változással T_1 hőmérsékletre emeljük.

A parciális differenciálegyenlet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

ahol T az anyag hőmérsékletét, α az anyag hővezetési együtthatóját jelöli.



A térbeli felosztás :

$$x = \{x_i\} = (i-1) \cdot \frac{W}{N}\ ,\ i = 1, \ldots N+1 \text{ illetve } y = \{y_j\} = (j-1) \cdot \frac{H}{M}\ ,\ j = 1, \ldots M+1$$

Véges differenciák módszerének alkalmazásával oldjuk meg a melegedési feladatokat a $t = 0 \ldots t_{max}$ időtartományra! (Ha a numerikus séma nem stabil, akkor a Δt időfelosztást változtassa meg, hogy stabil legyen!)

1. Írja fel a differenciálegyenletet diszkretizáló kifejezés(eke)t, feltételezve a térbeli ekvidisztáns eloszlást! Alkalmazza az FTCS (Forward Time Centered in Space) közelítést!

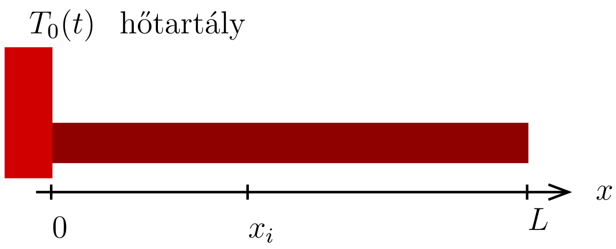
2. Készítsen MATLAB programot, amely az előző pontbeli séma segítségével megoldja az időben változó problémát!

3. Mutassa be az alsó határon mérhető hőmérsékelet időbeli változását!

Numerikus értékek : $H = 12$, $W = 8$, $N = 25$, $M = 20$, $\alpha = 0{,}1$, $\delta = 0{,}01$, $t_{max} = 5$

4. feladat - Hővezetési feladat, nem-ekvidisztáns felosztással

Az L hosszúságú fémrúd egy nagy méretű (hő)tartályhoz ér az $x = 0$ helyen. Határozzuk meg a rúd mentén a hőmérséklet eloszlásának időbeli változását, ha a tartály hőmérsékletét egy tetszőleges T_1 hőmérsékletre változtatjuk (növeljük)!



Diff. egyenlet :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Peremfeltételek :

$$T(x = 0) = T_0(t) \qquad\qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

A térbeli felosztást vegyük ismertnek, azaz

$$x = \{x_i\}\ ,\ i = 1, \ldots N$$

Véges differenciák módszerének alkalmazásával oldja meg az alábbi feladatokat a $t = 0 \ldots t_{max}$ időtartományra! (Ha a numerikus séma nem stabil, akkor a Δt időfelosztást változtassa meg, hogy stabil legyen!)

1. Írja fel a differenciálegyenletet diszkretizáló kifejezés(eke)t, feltételezve a térbeli ekvidisztáns eloszlást! Alkalmazza az implicit BTCS (Backward Time Centered in Space) közelítést!

2. Készítsen MATLAB programot, amely az előző pontbeli séma segítségével megoldja az időben változó problémát!

3. Rajzolja fel a rúd mentén mérhető hőmérsékelet időbeli változását!

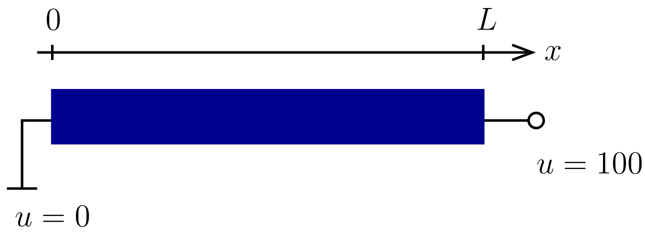
Numerikus értékek : $L = 5$, $N = 20$, $\alpha = 0{,}1$, $t_{max} = 5$, $\delta t = 0{,}01$.

5. feladat - Térerősségfüggő anyagparaméter

Az anyagparaméterek (pl. vezetőképesség) sok esetben nem tekinthetőek állandónak, hanem a térerősség függvényében írhatóak fel. Ennek egy példája látható az alsó ábrán.

Ilyen esetben a megoldás csak iteratív módon oldható meg. Az előző megoldást alkalmazva számíthatjuk ki a következő (közelítő) megoldást.

Ebben a feladatban egy feszültség alatt lévő vezető rúd mentén határozzuk meg a potenciál értékét! Ehhez használjunk tetszőleges térváltozó szerinti felosztást, amely nem ekvidisztáns.



A differenciálegyenlet a potenciálra vonatkozó, Laplace-egyenlet, változó értékű vezetőképességgel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(E)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

A peremfeltételek :

$$x = L : \varphi = 100 \qquad x = 0 : \varphi = 0$$

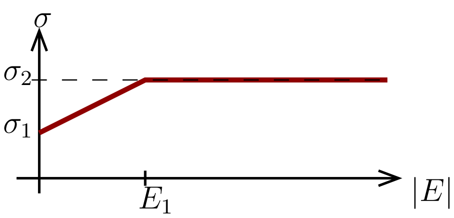
Az elektromos térerősség számítása :

$$E = -\text{grad}\ \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Térbeli felosztás :

$$x = \{\ x_i\ \}\ ,\ i = 1 \ldots N$$

A vezetőképesség elektromos térerősség függését az alábbi ábra mutatja :



Véges differencia módszer alkalmazásával oldjuk meg az alábbi feladatokat!

1. Írja fel a differenciálegyenletet diszkretizáló kifejezés(eke)t, feltételezve hogy a térbeli felosztás nemekvidisztáns (tetszőleges)! Ennek felhasználásával készítsen MATLAB függvényt, amely kiszámítja az előző lépés eredményének ($\varphi^{(k)}$) felhasználásával az iteráció következő lépésének eredményét ($\varphi^{(k+1)}$-et)!

2. Készítsen MATLAB programot, amely az előző pontbeli függvény alkalmazásával, iteratív módon meghatározza a potenciál eloszlást! Az első közelítést $E = 0$ alapján kell elkészíteni ($\sigma = \sigma_1$ mindenhol)!

3. Hasonlítsa össze a kezdeti potenciál eloszlást és az iteratív megoldás végén kapott megoldást!

Numerikus értékek : $L = 10$, $E_1 =$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $N = 40$