

Sprawozdanie NUM 2

Agnieszka Rejek

1 Wstęp

1.1

Dla $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ ($N = 100$) zadano równanie liniowe $y = A^{-1}x$. A jest macierzą wstęgową o szerokości pasma 4. Zgodnie z poleceniem został zaimplementowany algorytm wyliczający rozwiązanie, z uwzględnieniem struktury macierzy A , obliczono także jej wyznacznik.

Program realizujący zadanie został napisany w języku Python, sprawdzenie uzyskanych wyników wykonano przy użyciu bibliotek SciPy i NumPy (zawarte w kodzie).

1.2 Metoda

W rozwiązywaniu zadania wykorzystano kolejno faktoryzację LU korzystając z algorytmu Doolittle’a, a następnie forwardsubstitution i backsubstitution do obliczenia równań:

$$Lb = x \tag{1}$$

$$Ub = y \tag{2}$$

Przy wyliczonej faktoryzacji LU łatwo został też obliczony wyznacznik macierzy A .

Szczególną zaletą wykorzystania faktoryzacji LU jest w tym przypadku fakt, że możemy dopasować algorytm Doolittle’a do budowy macierzy i znacząco uprościć obliczenia. Przytoczę tutaj omówione na zajęciach wzory, które zostały zaimplementowane w programie.

1.3 Wzory

Ogólne wzory na wyliczanie współczynników macierzy L i U (algorytm Doolittle’a):

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k < j} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}} \tag{3}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k < i} (l_{ik} u_{kj}) \quad (4)$$

Z budowy macierzy A wynika, że niezerowymi elementami macierzy A będą jedynie elementy l_{ii} i $l_{i+1,i}$, a macierzy U : u_{ii} , $u_{i,i+1}$ i $u_{i,i+2}$. Odpowiednio upraszczamy wzory (3) i (4) ($i = 2, \dots, N$):

$$u_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i} \quad (5)$$

$$l_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i}}{u_{ii}} \quad (6)$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} - l_{i,i-1} u_{i-1,i+1} \quad (7)$$

$$u_{i,i+2} = a_{i,i+2} \quad (8)$$

Wykorzystamy także wzór na współczynnik macierzy, korzystający z jej faktoryzacji LU , uwzględniając, że dla macierzy L wyznacznik $\det L = 1$ ponieważ na jej diagonalu znajdują się same jedynki.

$$\det A = \det L \cdot \det U = \det U \quad (9)$$

Macierz U jest macierzą trójkątną. Wyznacznik wyliczymy ze wzoru:

$$\det U = \prod_{i=1}^{100} u_{ii} \quad (10)$$

2 Opis programu

2.1

Zgodnie ze wskazówkami z zajęć program napisano tak, aby rozsądnie dysponować pamięcią. Poszczególne pasma macierzy są przechowywane w postaci list. Mowa tutaj o pasmie $a_{i,i+1}$ i $a_{i,i+2}$, ponieważ pasma a_{ii} i $a_{i+1,i}$ miały stałe wartości, dlatego występują w programie w postaci zmiennych. Wyniki faktoryzacji, są zapisane tak samo- pasmami w odpowiednich listach.

Wyniki sprawdzono obliczając rozwiązanie równania $y = A^{-1}x$ bezpośrednio metodą `numpy.linalg.solve`, tak samo wyznacznik został policzony metodą `numpy.linalg.det`. Biblioteka SciPy posłużyła do zaimplementowania macierzy wstęgowej.

Program drukuje oba wektory ("mój" i z NumPy), ich różnicę, a także wyznaczniki obu wektorów (i także ich różnicę).

[illegible]

```
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
[ 0.00000000e+00]
```