Sprawozdanie NUM 2

Agnieszka Rejek

1 Wstęp

1.1

Dla $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ (N = 100) zadano równanie liniowe $y = A^{-1}x$. A jest macierzą wstęgową o szerokości pasma 4. Zgodnie z poleceniem został zaimplementowany algorytm wyliczający rozwiązanie, z uwzględnieniem struktury macierzy A, obliczono także jej wyznacznik.

Program realizujący zadanie został napisany w języku Python, sprawdzenie uzyskanych wyników wykonano przy użyciu bibliotek SciPy i NumPy (zawarte w kodzie).

1.2 Metoda

W rozwiązaniu zadania wykorzystano kolejno faktoryzację LU korzystając z algorytmu Doolittle'a, a następnie forwardsubstitution i backsubstitution do obliczenia równań:

$$Lb = x \tag{1}$$

$$Ub = y (2)$$

Przy wyliczonej faktoryzacji LU łatwo został też obliczony wyznacznik macierzy A.

Szczególną zaletą wykorzystania faktoryzacji LU jest w tym przypadku fakt, że możemy dopasować algorytm Doolittle'a do budowy macierzy i znacząco uprościć obliczenia. Przytoczę tutaj omówione na zajęciach wzory, które zostały zaimplementowane w programie.

1.3 Wzory

Ogólne wzory na wyliczanie współczynników macierzy L i U (algorytm Doolittle'a):

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k < j} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}} \tag{3}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k < i} (l_{ik} u_{kj}) \tag{4}$$

Z budowy macierzy A wynika, że niezerowymi elementami macierzy A będą jedynie elementy l_{ii} i $l_{i+1,i}$, a macierzy U: u_{ii} , $u_{i,i+1}$ i $u_{i,i+2}$. Odpowiednio upraszczamy wzory (3) i (4) (i = 2, ..., N):

$$u_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i} (5)$$

$$l_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i}}{u_{ii}} \tag{6}$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} - l_{i,i-1} u_{i-1,i+1}$$

$$\tag{7}$$

$$u_{i,i+2} = a_{i,i+2} (8)$$

Wykorzystamy także wzór na współczynnik macierzy, korzystający z jej faktoryzacji LU, uwzględniając, że dla macierzy L wyznacznik detL=1 ponieważ na jej diagonali znajdują się same jedynki.

$$det A = det L \cdot det U = det U \tag{9}$$

Macierz U jest macierzą trójkątną. Wyznacznik wyliczymy ze wzoru:

$$detU = \prod_{i=1}^{100} u_{ii} \tag{10}$$

2 Opis programu

2.1

Zgodnie ze wskazówkami z zajęć program napisano tak, aby rozsądnie dysponować pamięcią. Poszczególne pasma macierzy są przechowywane w postaci list. Mowa tutaj o pasmie $a_{i,i+1}$ i $a_{i,i+2}$, ponieważ pasma a_{ii} i $a_{i+1,i}$ miały stałe wartości, dlatego występują w programie w postaci zmiennych. Wyniki faktoryzacji, są zapisane tak samo- pasmami w odpowiednich listach.

Wyniki sprawdzono obliczając rozwiązanie równania $y = A^{-1}x$ bezpośrednio metodą numpy.linalg.solve, tak samo wyznacznik został policzony metodą numpy.linalg.det. Biblioteka SciPy posłużyła do zaimplementowania macierzy wstęgowej.

Program drukuje oba wektory ("mój" i z NumPy), ich różnicę, a także wyznaczniki obu wektorów (i także ich różnicę).

3 Wyniki

3.1

Po zlokalizowaniu błędów i ich likwidacji różnica pomiędzy wektorami jest znikoma. Została przedstawiona poniżej. W większości współczynników nie wykryto różnicy, na tych na których występuje, największy wynik to 1.42108547e-14. Współczynnik wektora wyliczonego przez NumPy wynosił 78240161.0095941, a przez mój program 78240161.00959387. Różnica: 2.2351741790771484e-07.

3.2 Różnica wektorów

- [[4.85722573e-17]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [4.44089210e-16]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001
- 0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [-1.77635684e-15]
- [1.77635684e-15]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00] 0.0000000e+001
- [0.0000000e+00]
- [-3.55271368e-15]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00] 3.55271368e-15]
- [-3.55271368e-15]
- [0.0000000e+00] [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 3.55271368e-15]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]

- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.00000000e+001
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [-7.10542736e-15]
- 7.10542736e-15]
- [-7.10542736e-15]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00] 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00] 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [-7.10542736e-15]
- 0.0000000e+001 7.10542736e-15]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001 0.0000000e+001
- 0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [-1.42108547e-14]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001
- 0.0000000e+001
- 0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]
- 0.0000000e+00]
- 0.0000000e+001 [0.0000000e+00]
- [0.0000000e+00]

- [0.0000000e+00] [0.00000000e+00] [0.0000000e+00] [0.0000000e+00]

- [0.00000000e+00] [0.00000000e+00]

- [0.0000000e+00] [0.00000000e+00] [0.00000000e+00]