Sprawozdanie NUM 1

Agnieszka Rejek

1 Wstęp

Zadano macierze:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{pmatrix}$$

oraz wektory:

$b \equiv (5.40780228, 3.67008677, 3.12306266, 1.11187948, 0.54437218)^T$ i $b' \equiv b + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$.

Zgodnie z treścią zadania NUM 1 dla zadanych macierzy A_1 i A_2 rozwiązano równania $A_i y_i = b$ i $A_i y'_i = b'$ $(i = 1, 2)$. Obliczono wartości $\Delta_i = \|y_i - y'_i\|$, czyli norm euklidesowych różnicy uzyskanych wektorów y_i i y'_i, następnie zinterpretowano otrzymane wyniki.

Program wyliczający rozwiązanie napisano w Pythonie, przy użyciu biblioteki NumPy. Do rozwiązania równań wykorzystano metodę numpy.linalg.solve, a wartości Δ_i wyliczono bezpośrednio ze wzoru na normę euklidesową: $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ (gdzie $x = y_i - y'_i$).

Na tym etapie można poczynić wstępne obserwacje, do których zamierzam odnieść się potem. Macierze A_1 i A_2 są do siebie dosyć podobne. Poza takimi samymi wymiarami, obie macierze są symetryczne, a różnice pomiędzy poszczególnymi współczynnikami mieszczą się w przedziale 0.009919050 a 0.70012854 (te wyniki uzyskano używając metody numpy.subtract). Warto też zaznaczyć oczywisty fakt, że wektor b' różni się od wektora b tylko jednym współczynnikiem i jest to wartość na piątym miejscu po przecinku.

2 Wyniki

Rozwiązania układów równań $Ay_1 = b$ i $Ay_1' = b'$:

$y_1 = (3.28716602, 3.8029998, 0.25146854, -1.57875474, -0.50410395)^T$
$y_1' = (16.74173332, -14.06233583, -2.70495914, -15.57494944, -25.34234556)^T$

Rozwiązania układów równań $Ay_2 = b$ i $Ay_2' = b'$:

$y_2 = (3.18374857, 3.94032033, 0.27419287, -1.47117406, -0.31318674)^T$
$y_2' = (3.18375389, 3.94032237, 0.27419131, -1.47117514, -0.31318814)^T$

$\Delta_1 = 36.35612431941617$
$\Delta_2 = 6.166739465500467 \cdot 10^{-6}$

3 Wnioski

Jeszcze przed obliczeniem wartości Δ_1, widać wyraźnie, że dla pierwszego równania zachodzi bardzo duża różnica w wyniku. Pomiędzy odpowiednimi współczynnikami wektora y_1 a y_1' różnice widać przed przecinkiem, dla wszystkich współczynników są one co najmniej kilkakrotne. Współczynniki niejednokrotnie różnią się też znakiem. Wynik Δ_1 osiąga wysoką wartość. Świadczy to o złym uwarunkowaniu numerycznym równania $Ay_1 = b$, gdzie zmiana na piątym miejscu po przecinku w jednym ze współczynników wektora b powoduje ogromną różnicę rozwiązania.

Podobnej rozbieżności nie zaobserwowano dla drugiego równania, gdzie zmiana współczynnika w wektorze b prowadzi do różnic w rozwiązaniu dla większości współczynników wektorów y_2 i y_2' na dopiero szóstym miejscu po przecinku. Wyliczona norma jest mała.

Jak widać jakkolwiek macierze są podobne, to istnieje duża różnica w uwarunkowaniu równań $A_1y_1 = b$ a $A_2y_2 = b$. Łatwo wyciągnąć wnioski, że poprawne uwarunkowanie zagadnień numerycznych jest konieczne dla uzyskania wiarygodnych wyników. Jeśli zagadnienie jest źle uwarunkowane nawet z pozoru nieznaczące zmiany, które mogą pojawić się na przykład przy przybliżaniu wartości, mogą doprowadzić do dużej różnicy w wyniku.