Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Metody numeryczne

Projekt 1

Metoda Simpsona

Arkadiusz Kniaź

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
15 grudnia 2021

Spis treści

1 Opis matematyczny

1.1 Polecenie

Metoda Simpsona obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b w_n(x)dx$, gdzie w_n jest wielomianem reprezentowanym w bazie wielomianów Czebyszewa II-ego rodzaju:

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k U_k(x).$$

Uwaga. Nie należy sprowadzać wielomianu w_n do postaci naturalnej! Do obliczania wartości wielomianu w_n należy wykorzystać związek rekurencyjny spełniany przez wielomiany Czebyszewa.

1.2 Teoria

Złożona kwadratura Simpsona jest zastosowaniem (prostej) kwadratury Simpsona dla N przedziałów. Prosta kwadratura Simpsona przybliża całkę z funkcji f na przedziale $[a, b]$ za pomocą wzoru:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big).$$

Błąd prostej kwadratury Simpsona wynosi:

$$E(f) = -h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi_2),$$

gdzie $h = (b - a)/2$, ξ_2 jest pewnym punktem leżącym w przedziale (a, b). Błąd $E(f)$ jest równy zero, gdy $f^{(4)}(x) = 0$, dla wszystkich $x \in (a, b)$, co mamiejsce w przypadku wielomianów stopnia nie przekraczającego 3. Dlatego rząd kwadratury Simpsona wynosi 4. Złożony wzór Simpsona ma postać:

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{H}{6}\Big(f(x_{k-1}) + 4f\big(x_{k-1} + \frac{H}{2}\big) + f(x_k)\Big).$$

Po przekształceniu:

$$S(f) = \frac{H}{6}\Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kH) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f\big(a+kH+\frac{H}{2}\big)\Big).$$

Błąd złożonej kwadratury Simpsona jest równy

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) f^{(4)}(\mu_2),$$

dla pewnego $\mu_2 \in (a, b)$.
Wielomian z polecenia $w_n(x)$ jest kombinacją liniową wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju:

- Wielomiany Czebyszewa II-ego rodzaju:

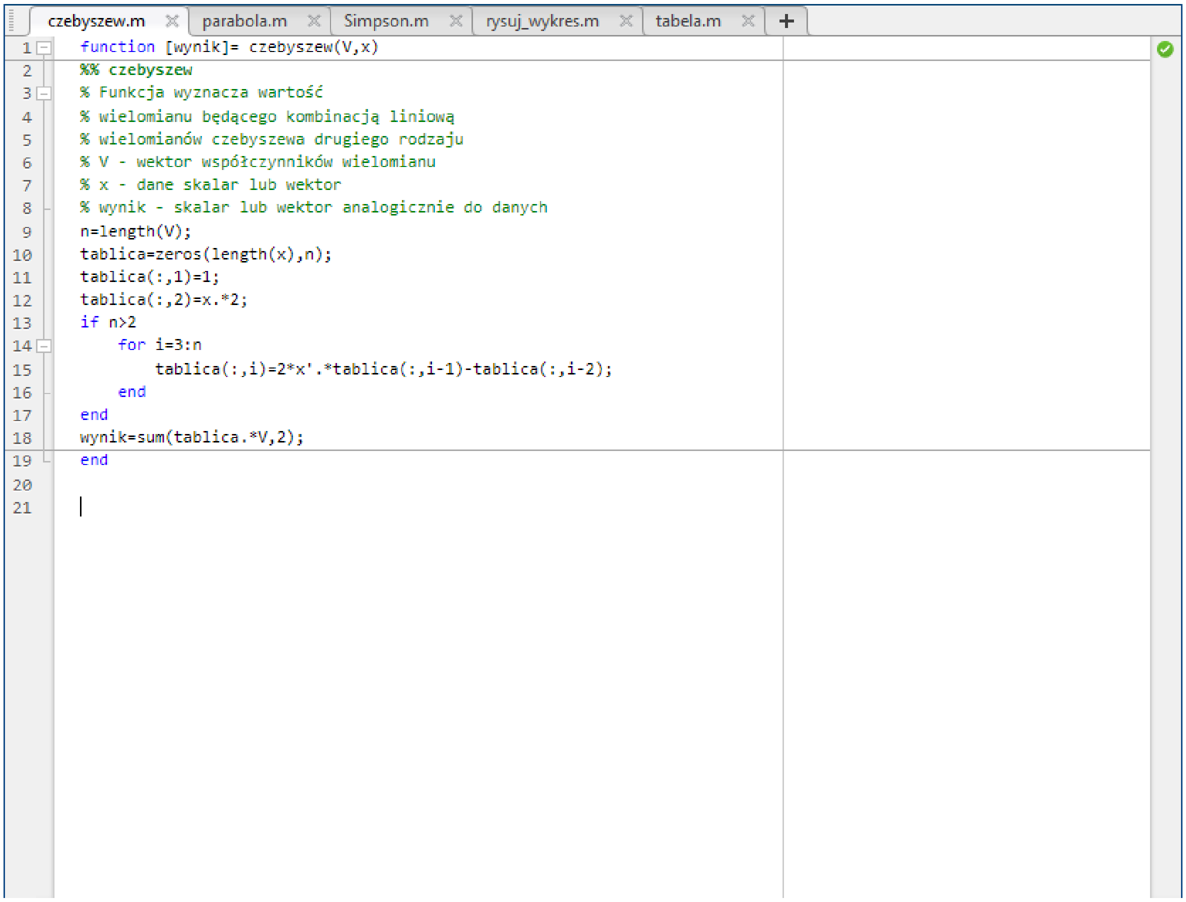
$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x,$$
$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

2 Opis programu

2.1 Działanie

Program w swoim działaniu wykorzystuje 5 funkcji przedstawionych w następnych podrozdziałach. Użytkownik kożystając z programu wpisuje dane do i wywołuje bezpośrenio tylko jedną funkcję - tabela. Funkcja tabela sama tylko tworzy tabelkę i wywołuje funkcję Simspon do policzenia całek. Funkcja Simpson liczy całkę i przy okazji wywołuje funkcję rysuj_wykres dla danej całki. Funkcja rysuj_wykres rysuje wykres wielomianu z którego jest liczona całka na przedziale całkowania i parabole którymi przybliżany jest dany wielomian, wykorzystuje przy tym funkcję parabola. Funkcja parabola oblicza wzór paraboli dla przedziału przybliżanego metodą Simpsona. Funkcja czebyszew oblicza wartość wielomianu będącego kombinacja liniową wielomianów czebyszewa drugiego rodzaju, jest wykorzystywana przez funkcje parabola i Simpson.

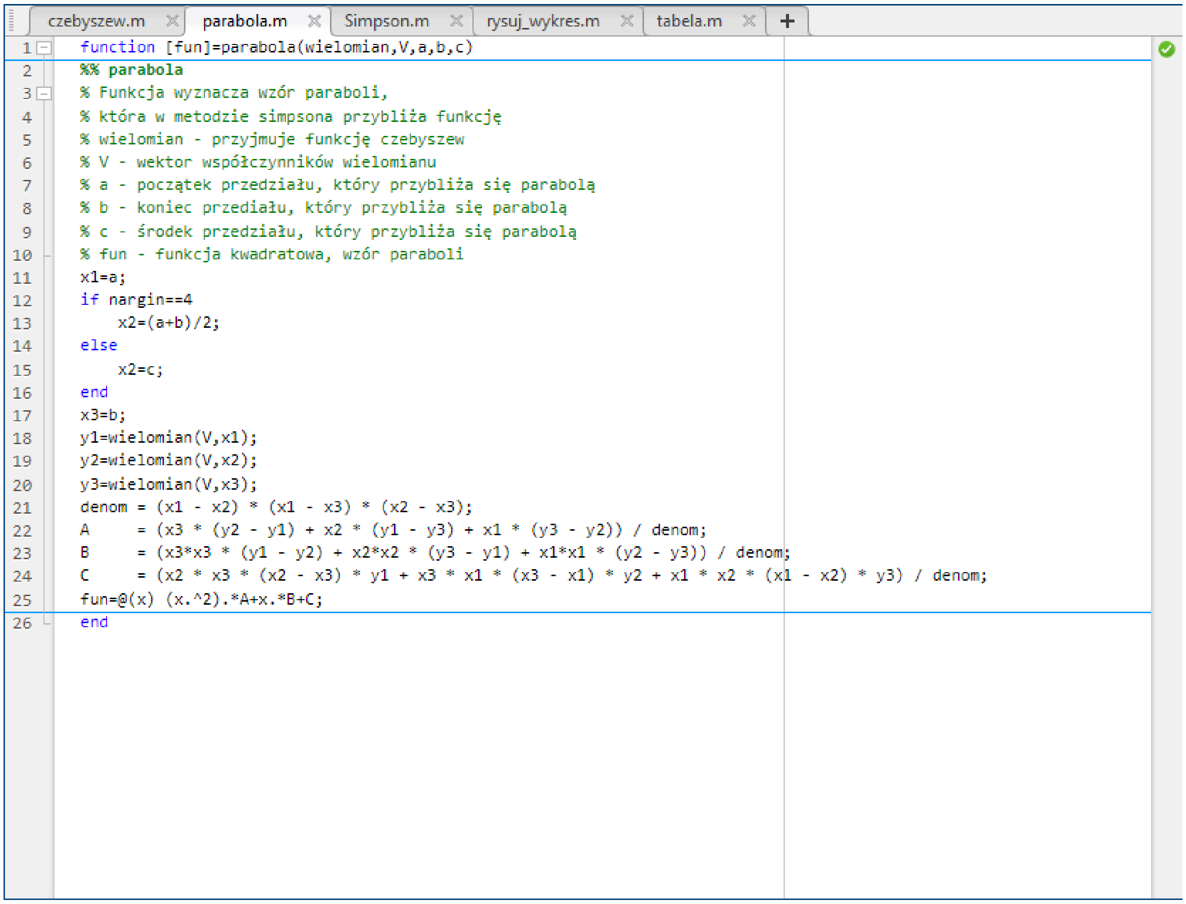
2.2 Funkcja czebyszew



```
function [wynik]= czebyszew(V,x)
%% czebyszew
% Funkcja wyznacza wartość
% wielomianu będącego kombinacją liniową
% wielomianów czebyszewa drugiego rodzaju
% V - wektor współczynników wielomianu
% x - dane skalar lub wektor
% wynik - skalar lub wektor analogicznie do danych
n=length(V);
tablica=zeros(length(x),n);
tablica(:,1)=1;
tablica(:,2)=x.*2;
if n>2
    for i=3:n
        tablica(:,i)=2*x'.*tablica(:,i-1)-tablica(:,i-2);
    end
end
wynik=sum(tablica.*V,2);
end
```

Rysunek 1: Funkcja czebyszew

2.3 Funkcja parabola




```
function [fun]=parabola(wielomian,V,a,b,c)
%% parabola
% Funkcja wyznacza wzór paraboli,
% która w metodzie simpsona przybliża funkcję
% wielomian - przyjmuje funkcję czebyszew
% V - wektor współczynników wielomianu
% a - początek przedziału, który przybliża się parabolą
% b - koniec przediału, który przybliża się parabolą
% c - środek przedziału, który przybliża się parabolą
% fun - funkcja kwadratowa, wzór paraboli
x1=a;
if nargin==4
    x2=(a+b)/2;
else
    x2=c;
end
x3=b;
y1=wielomian(V,x1);
y2=wielomian(V,x2);
y3=wielomian(V,x3);
denom = (x1 - x2) * (x1 - x3) * (x2 - x3);
A     = (x3 * (y2 - y1) + x2 * (y1 - y3) + x1 * (y3 - y2)) / denom;
B     = (x3*x3 * (y1 - y2) + x2*x2 * (y3 - y1) + x1*x1 * (y2 - y3)) / denom;
C     = (x2 * x3 * (x2 - x3) * y1 + x3 * x1 * (x3 - x1) * y2 + x1 * x2 * (x1 - x2) * y3) / denom;
fun=@(x) (x.^2).*A+x.*B+C;
end
```

Rysunek 2: Funkcja parabola

2.4 Funkcja Simpson

```matlab
function [y]=Simpson(wielomian,V,a,b,N)
%% Simpson
% Funkcja oblicza przybliżoną wartość całki na przedziale [a,b] złożoną
% metodą Simpsona, przy okazji wywołuje funkcje rysuj_wykres
% dla liczonej całki
% wielomian - przyjmuje funkcję czebyszew
% V - wektor współczynników wielomianu
% a - początek przedziału całkowania
% b - koniec przedziału całkowania
% N - liczba przedziałów w złożonej metodzie Simpsona
% y - przybliżona wartość całki
if N==1
    y=((b-a)/6)*(wielomian(V,a)+4*wielomian(V,((a+b)/2))+wielomian(V,b));
    punkty=[a,(a+b)/2,b];
else
    H=(b-a)/N;
    suma1=0;
    punkty=zeros(1,2*N+1);
    punkty(1)=a;
    punkty(end)=b;
    for k=1:(N-1)
        p=a+k*H;
        suma1=suma1+wielomian(V,p);
        punkty(2*k+1)=p;
    end
    suma2=0;
    for k=0:(N-1)
        p=a+k*H+H/2;
        suma2=suma2+wielomian(V,p);
        punkty(2*(k+1))=p;
    end
    y=(H/6)*(wielomian(V,a)+wielomian(V,b)+2*suma1+4*suma2);
end
rysuj_wykres(punkty,V,wielomian)
end
```

Rysunek 3: Funkcja Simpson

2.5 Funkcja rysuj_wykres

```
function []=rysuj_wykres(punkty,V,y1)
%% rysuj_wykres
% Funkcja rysuje wykres wielomianu i parabole, którymi jest przybliżany w
% metodzie Simpsona
% punkty - wektor punkty z funkcji Simpson, są to punkty wyznaczane w
% metodzie Simpsona
% V - wektor współczynników wielomianu
% y1 - przyjmuje funkcję czebyszew
n=length(punkty);
N=(n-1)/2;
x=linspace(punkty(1),punkty(end),n*50);
figure;
plot(x,y1(V,x),'b');
hold on
for i=1:N
    x_i1=linspace(punkty(2*i-1),punkty(2*i),50);
    x_i2=linspace(punkty(2*i),punkty(2*i+1),50);
    x_i=[x_i1,x_i2];
    fun=parabola(y1,V,punkty(2*i-1),punkty(2*i+1),punkty(2*i));
    area(x_i,fun(x_i),'FaceColor','r','LineStyle','none')
    plot(x_i,fun(x_i),'k-o', ...
    'MarkerSize',2,...
    'MarkerEdgeColor','k',...
    'MarkerFaceColor','k', ...
    'MarkerIndices',[1,50,100])
end
plot(x,y1(V,x),'b');
hold off
title('Wykres przyklad 1','FontSize',14);
legend({'wielomian','parabola Simpsona'},'Location','best');
xlabel('x');
ylabel('y');
end
```

Rysunek 4: Funkcja rysuj_wykres

2.6 Funkcja tabela

czebyszew.m | parabola.m | Simpson.m | rysuj_wykres.m | tabela.m

```
function [wynik]=tabela(wielomian,V,a,b,N,tru)
%% tabela
% Funkcja tworzy tabelke z 10 wierszami dla decyli z przedziału [1,N],
% gdzie N to liczba przedziałów w metodzie Simpsona i 6 kolumnach:
% N - liczba przedziałów w metodzie Simpsona
% a - początek przedziału całkowania
% b - koniec przedziału całkowania
% Simpson - wartość całki obliczona funkcją Simpson
% dokladna - wartość całki obliczona za pomocą wolframalpha, z dokładnością
% do 4 miejsc po przecinku
% blad - błąd względny metody Simpsona
% Funkcja poprzez wywoływnie funkcji rysuj_wykres poprzez wywoływanie
% funckji Simpson rysuje wykresy odpowiadające całkom z każdego wiersza
% Funkcja przyjmuje:
% wielomian - przyjmuje funkcję czebyszew
% V - wektor współczynników wielomianu
% a - początek przedziału całkowania
% b - koniec przedziału całkowania
% N - liczba przedziałów w złożonej metodzie Simpsona
% tru - wartość całki obliczona za pomocą wolframalpha, z dokładnością
% do 4 miejsc po przecinku

sz=[10,6];
wynik=zeros(sz);
wynik(:,1)=floor(linspace(1,N,10))';
wynik(:,2)=a;
wynik(:,3)=b;
for k=1:10
    wynik(k,4)=Simpson(wielomian,V,a,b,wynik(k,1));
    wynik(k,5)=tru;
    wynik(k,6)=((abs(wynik(k,4)-wynik(k,5)))/(wynik(k,5)));
end
colnames = {'N','a','b','Simpson','dokladna','blad'};
wynik = table(wynik(:,1), wynik(:,2), wynik(:,3), wynik(:,4),wynik(:,5),wynik(:,6),'VariableNames', colnames);
%xd
end
```

Rysunek 5: Funkcja tabela

3 Przykłady

3.1 Przykład 1

Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona w punktach przegięcia funkcji na dodatniej półosi.

Definite integral | More digits | Step-by-step solution

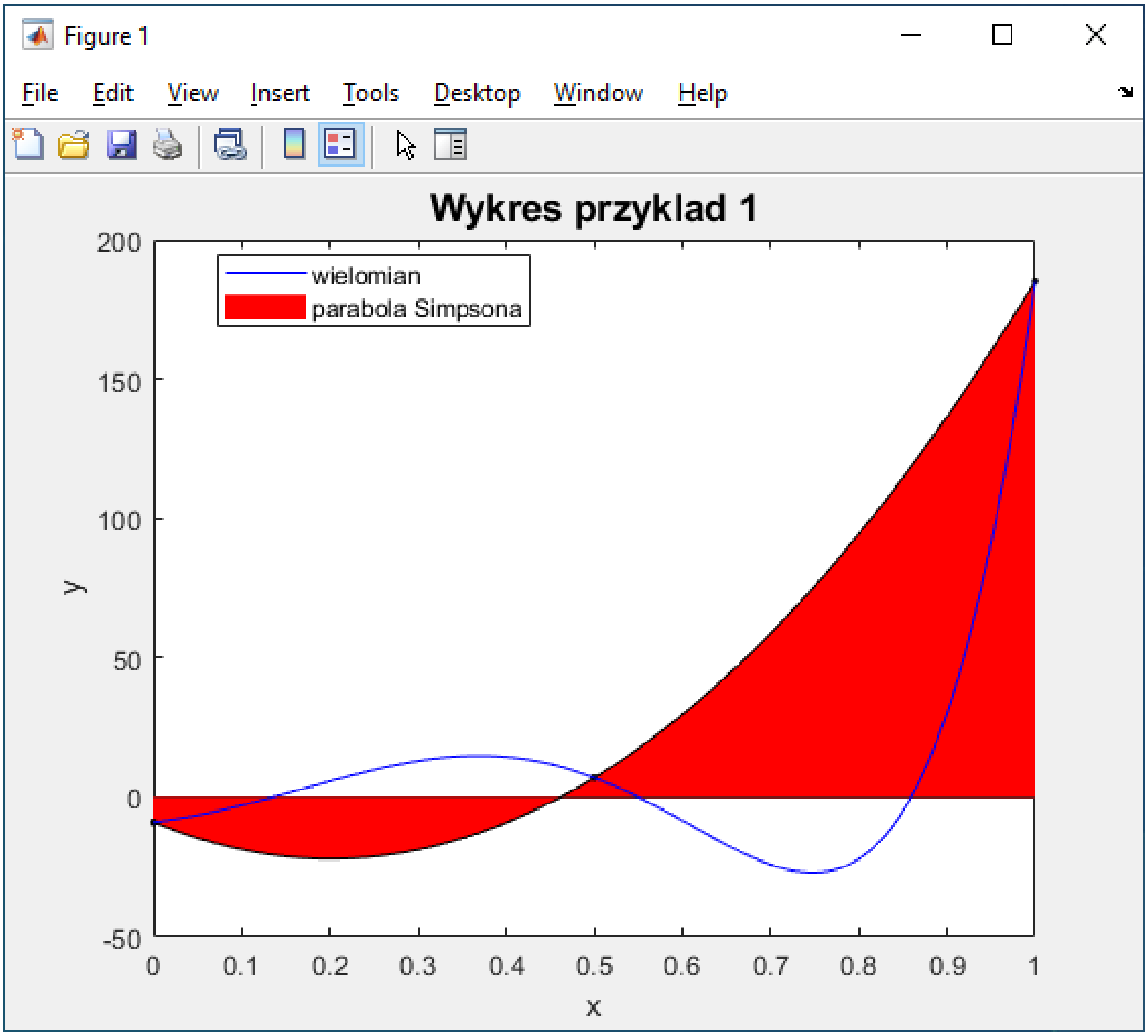
$$\int_0^1 (1\, U_0(x) + 1\, U_1(x) + 2\, U_2(x) + 3\, U_3(x) + 5\, U_4(x) + 8\, U_5(x) + 13\, U_6(x))\, dx = \frac{172}{21} \approx 8.1905$$

$U_n(x)$ is the Chebyshev polynomial of the second kind

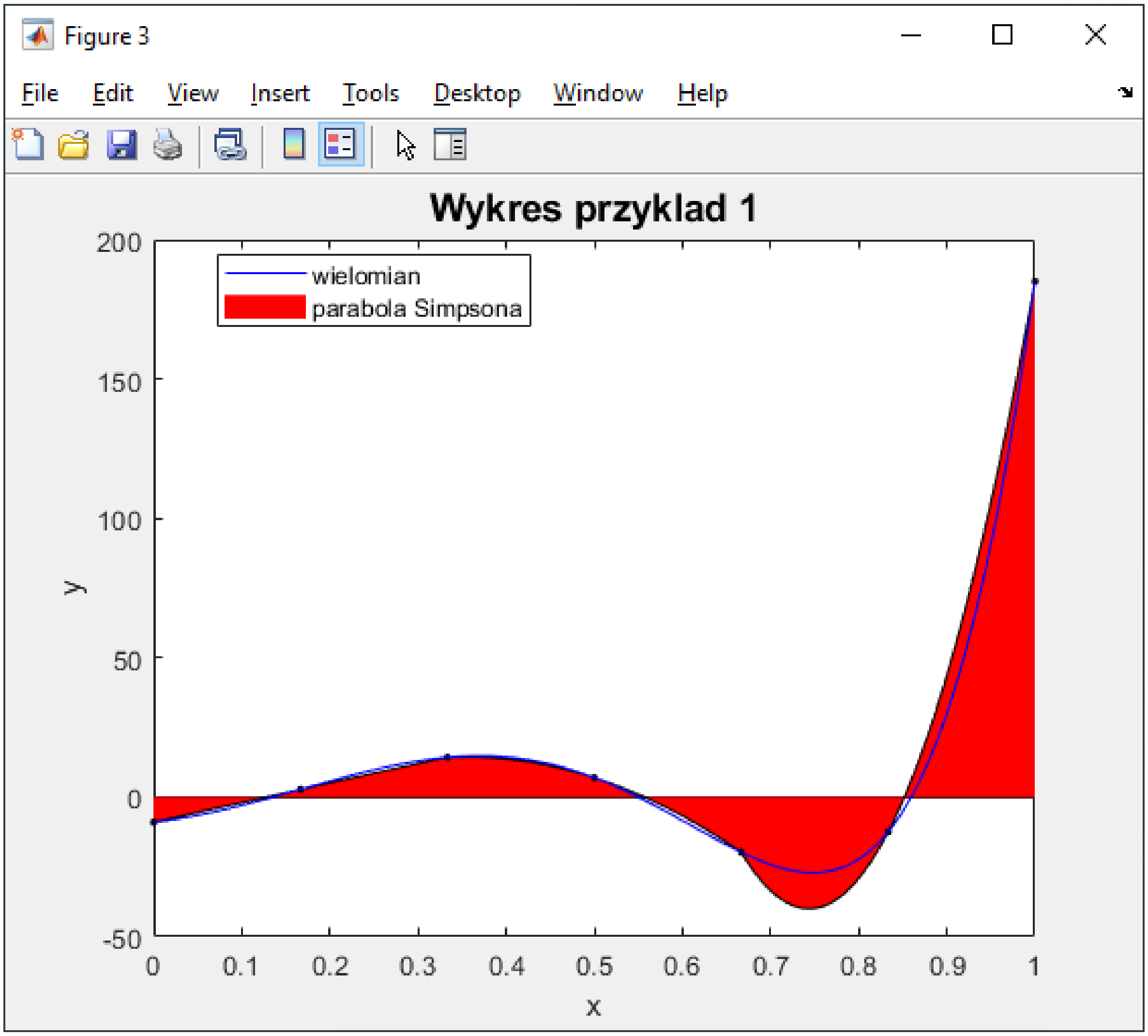
Rysunek 6: Wartość dokładna z wolframalpha

```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[1,1,2,3,5,8,13],0,1,10,8.1905)

wynik =

  10×6 table

     N     a    b    Simpson    dokladna       blad
    __    _    _    _______    ________    __________

     1    0    1         34     8.1905         3.1512
     2    0    1     10.094     8.1905        0.23237
     3    0    1      8.577     8.1905       0.047194
     4    0    1      8.314     8.1905       0.015074
     5    0    1     8.2413     8.1905      0.0061999
     6    0    1      8.215     8.1905      0.0029955
     7    0    1     8.2038     8.1905      0.0016179
     8    0    1     8.1983     8.1905     0.00094806
     9    0    1     8.1953     8.1905     0.00059115
    10    0    1     8.1937     8.1905     0.00038703
```

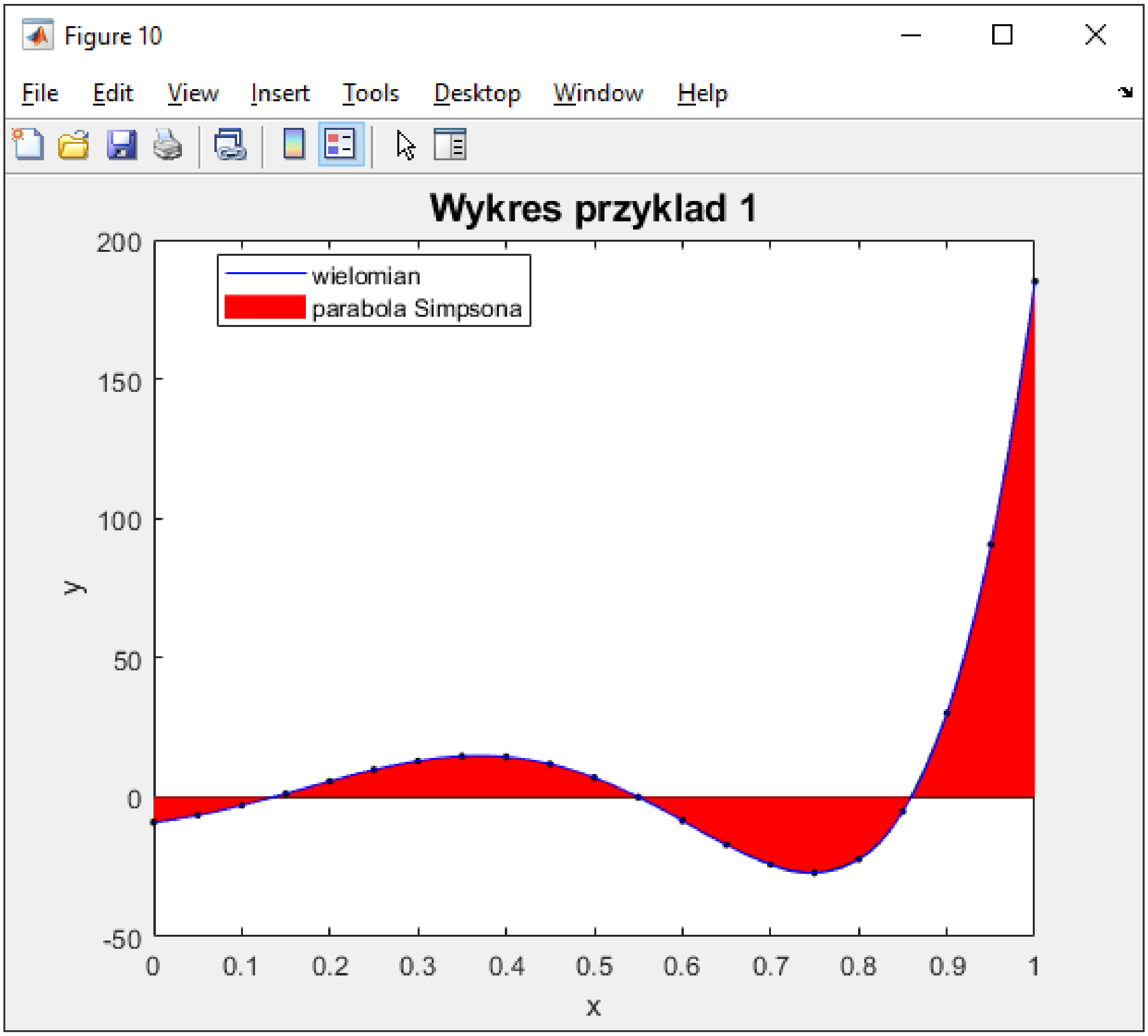
Rysunek 7: Wynik z działania programu



Rysunek 8: Wykres dla N=1



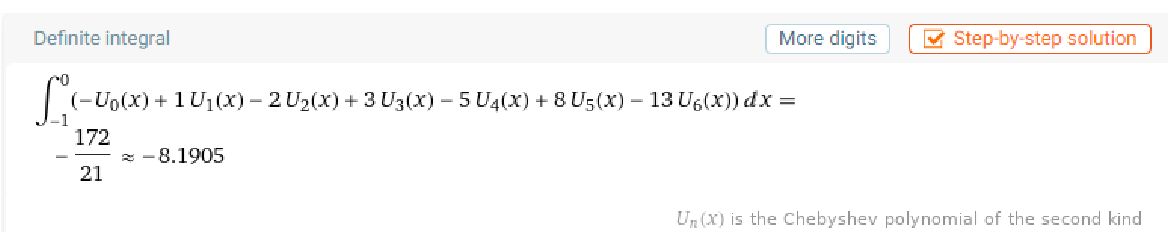
Rysunek 9: Wykres dla N=3



Rysunek 10: Wykres dla N=10

3.2 Przykład 2

Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona w punktach przegięcia funkcji na ujemej półosi.

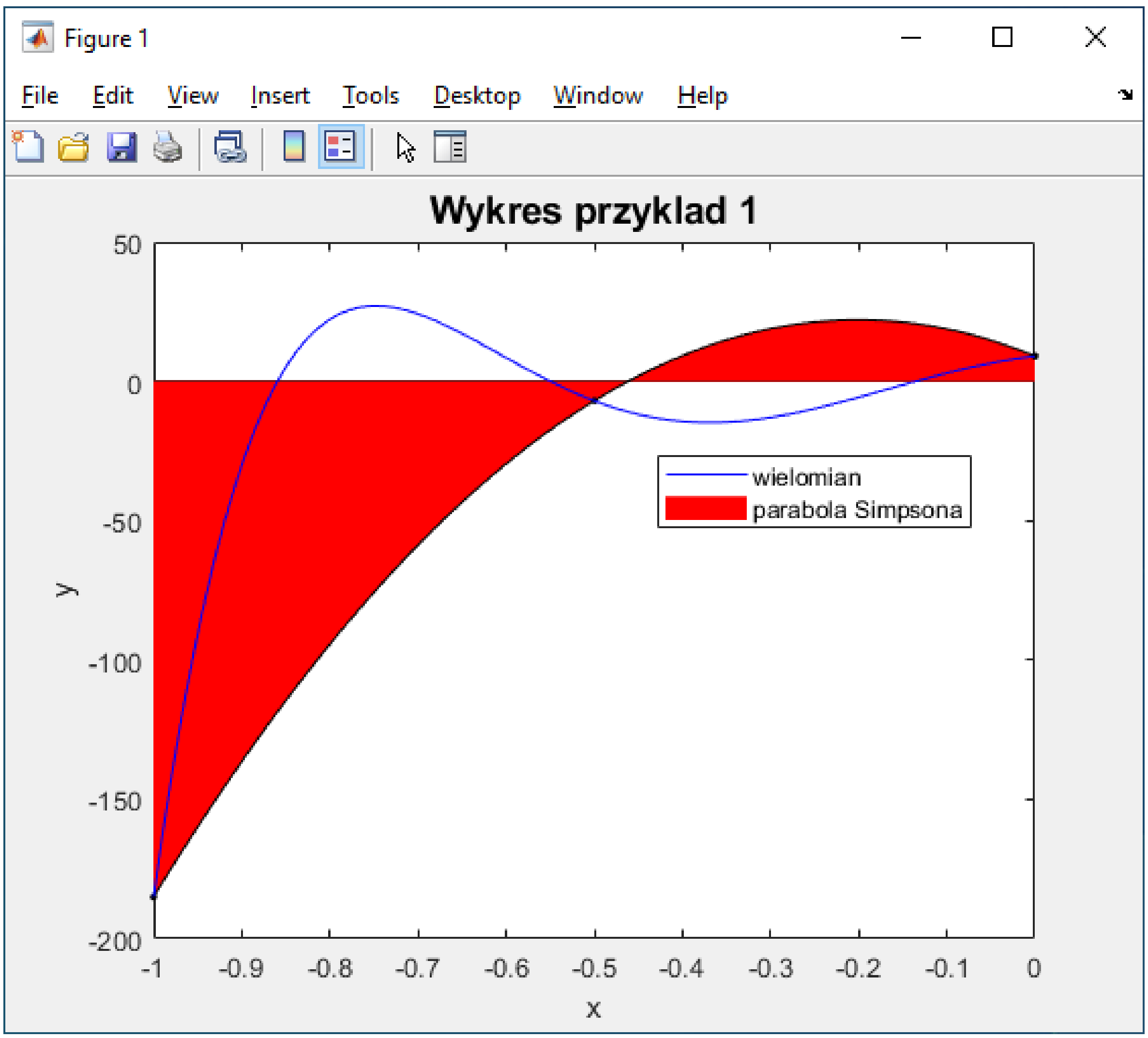


Rysunek 11: Wartość dokładna z wolframalpha

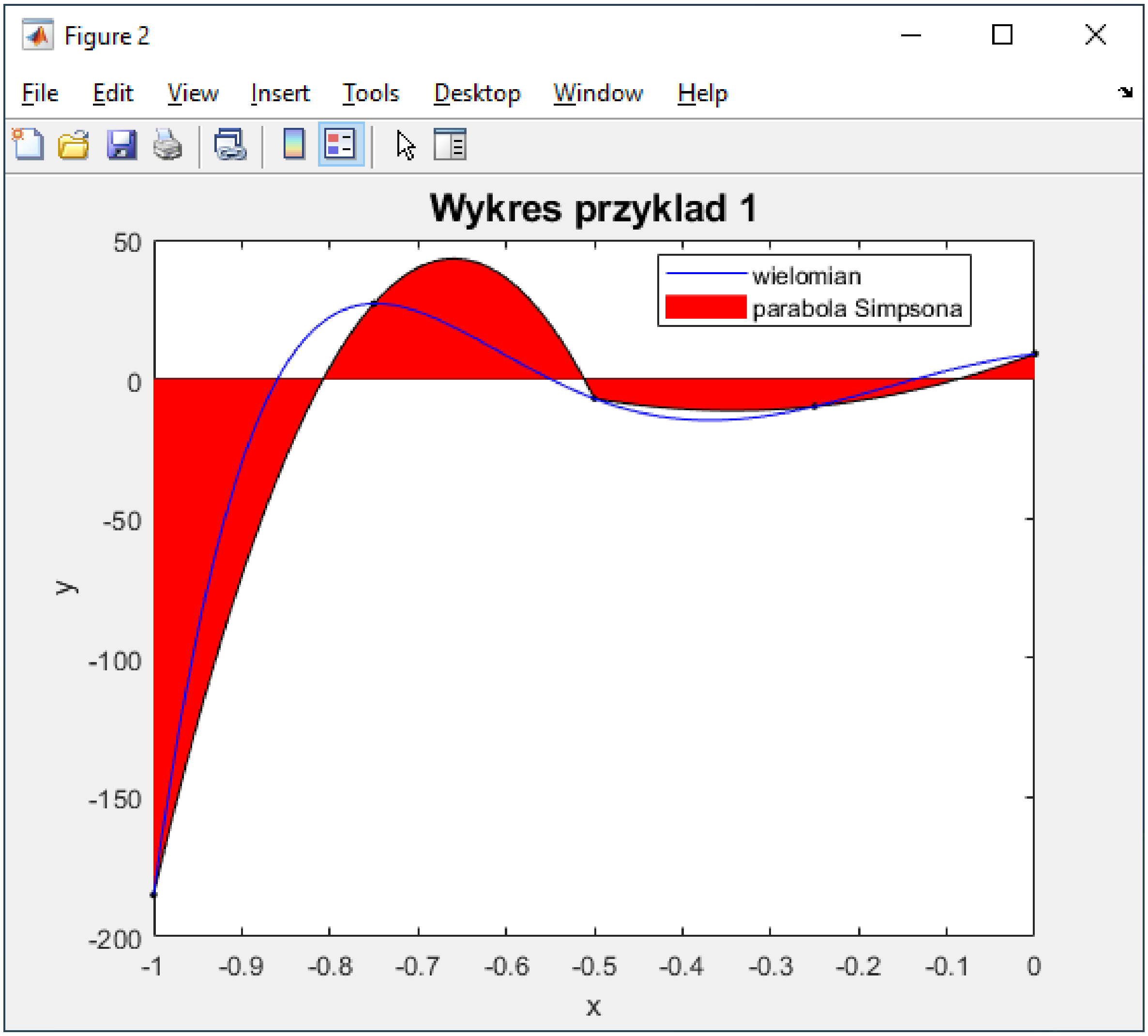
```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[-1,1,-2,3,-5,8,-13],-1,0,10,-8.1905)

wynik =

  10×6 table
```

N	a	b	Simpson	dokladna	blad
1	-1	0	-34	-8.1905	-3.1512
2	-1	0	-10.094	-8.1905	-0.23237
3	-1	0	-8.577	-8.1905	-0.047194
4	-1	0	-8.314	-8.1905	-0.015074
5	-1	0	-8.2413	-8.1905	-0.0061999
6	-1	0	-8.215	-8.1905	-0.0029955
7	-1	0	-8.2038	-8.1905	-0.0016179
8	-1	0	-8.1983	-8.1905	-0.00094806
9	-1	0	-8.1953	-8.1905	-0.00059115
10	-1	0	-8.1937	-8.1905	-0.00038703

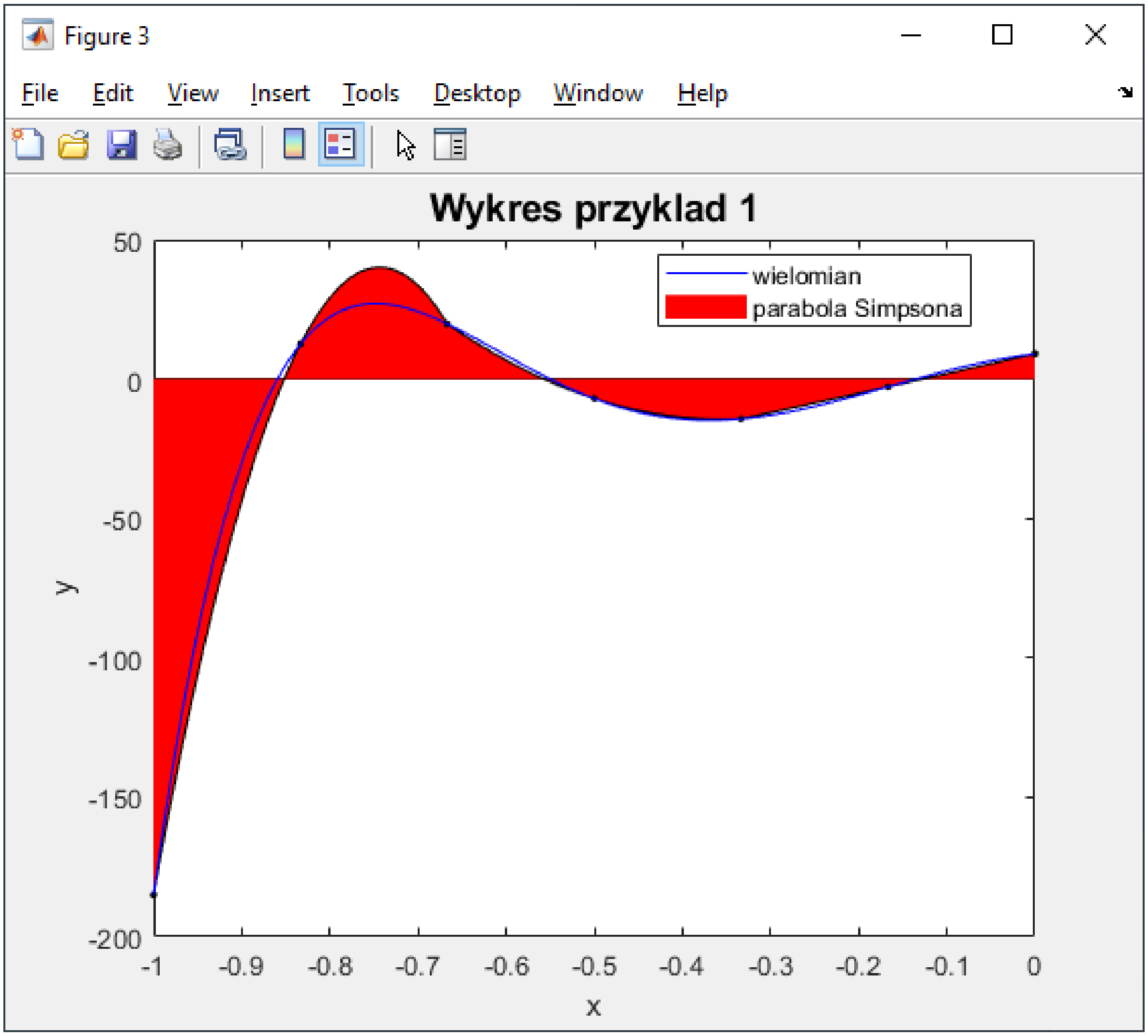
Rysunek 12: Wynik z działania programu



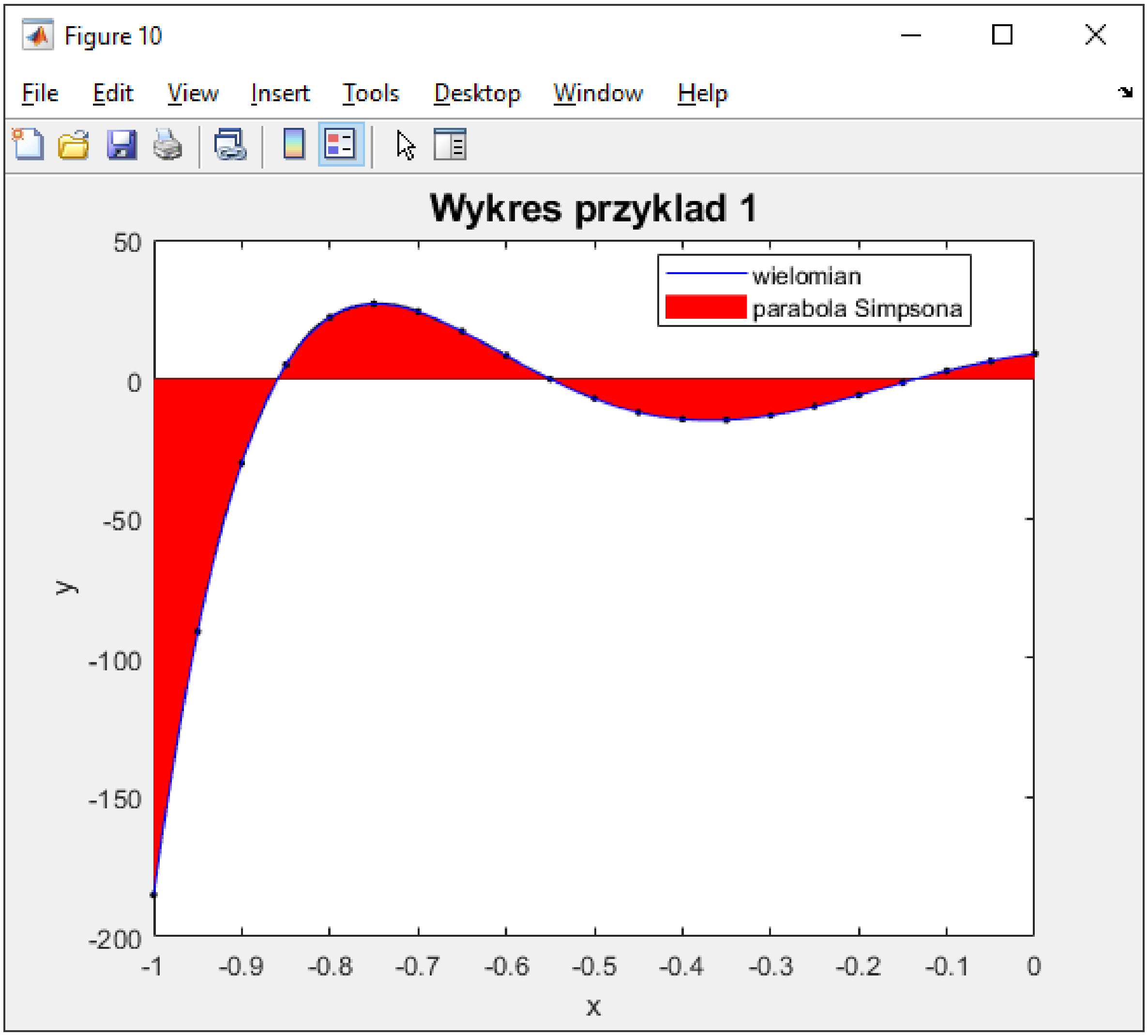
Rysunek 13: Wykres dla N=1



Rysunek 14: Wykres dla N=2



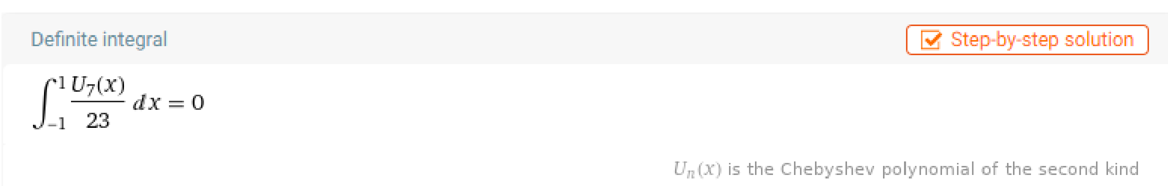
Rysunek 15: Wykres dla N=3



Rysunek 16: Wykres dla N=10

3.3 Przykład 3

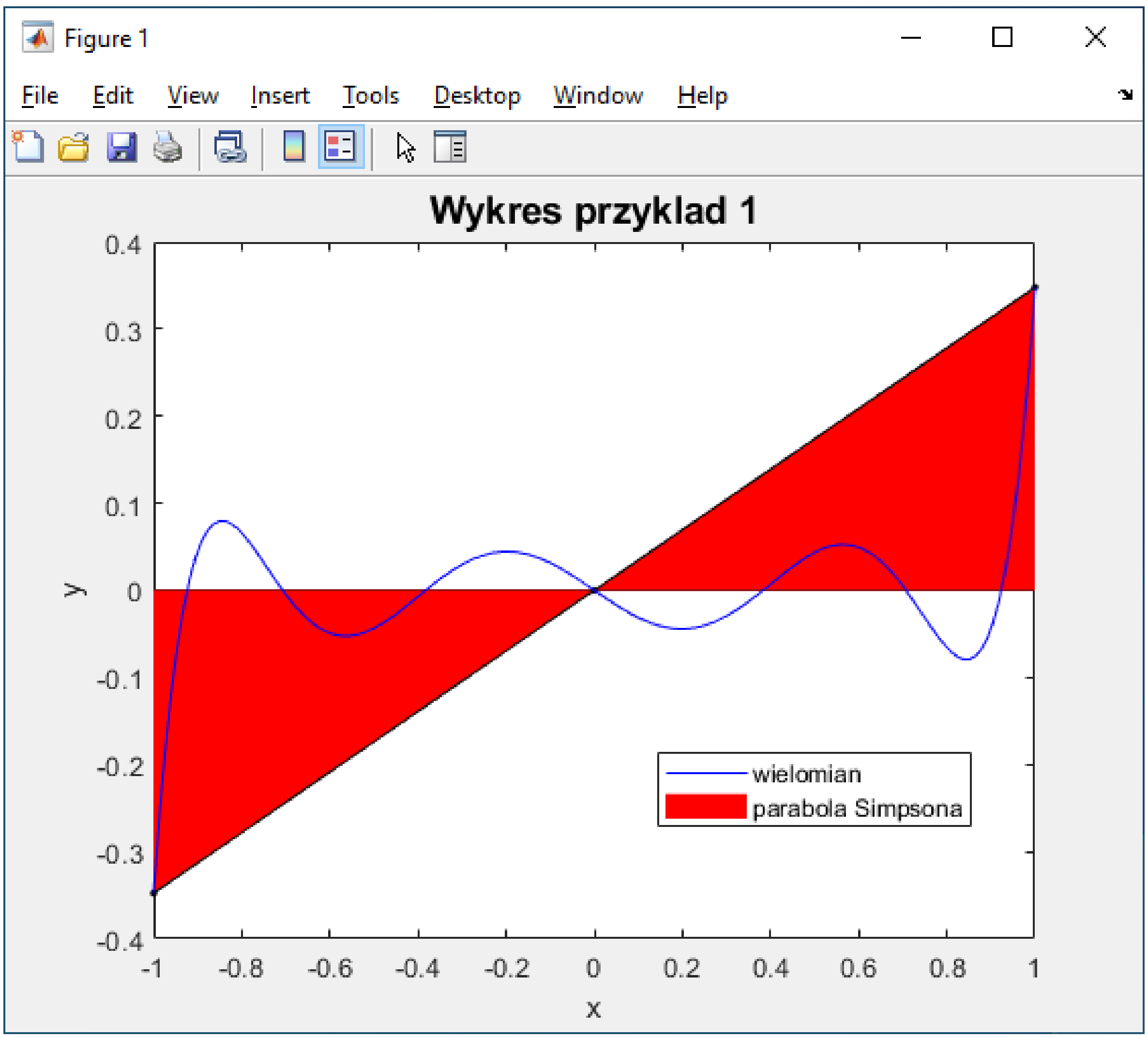
Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona, gdy przedział jest symetryczny względem osi OY i całka wynosi 0.



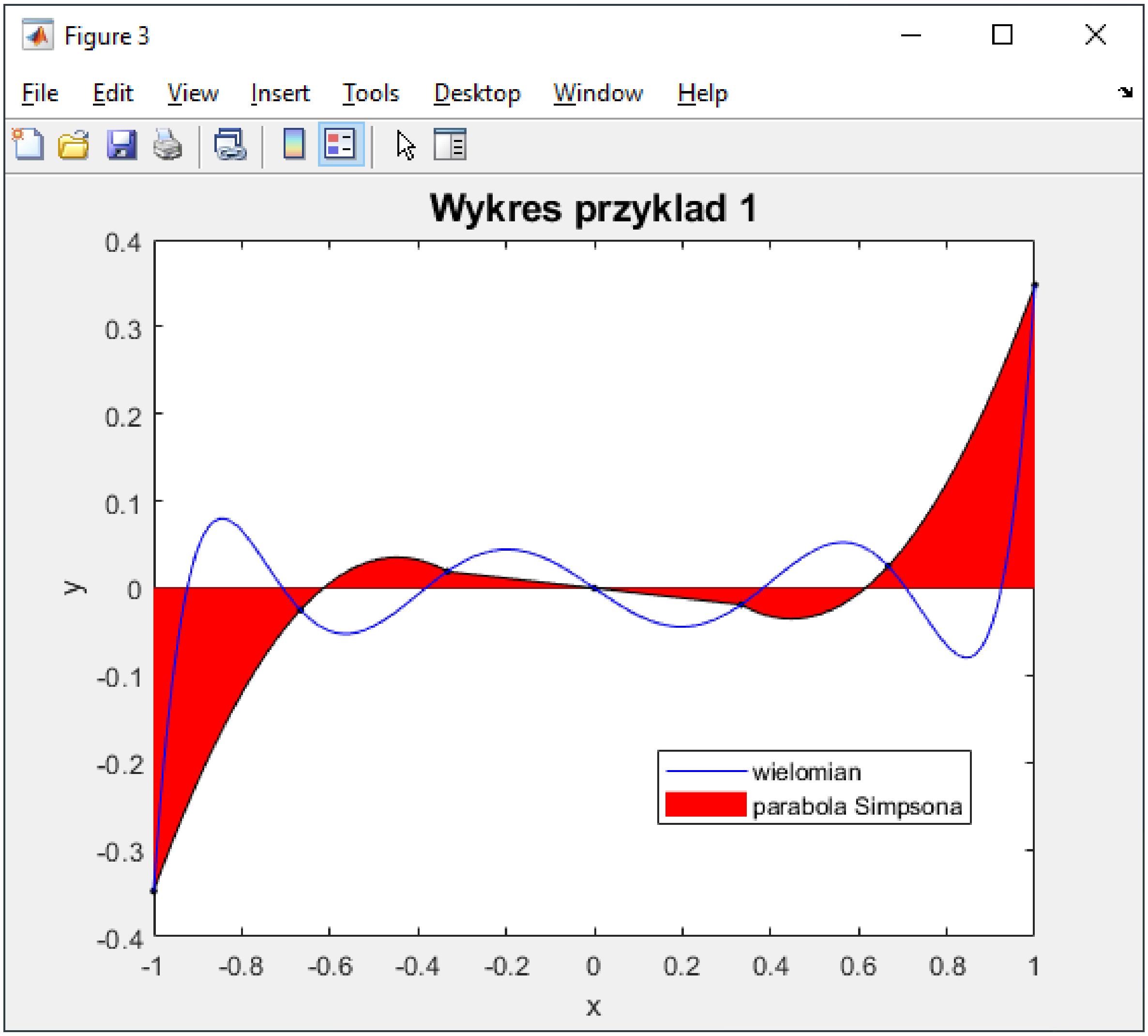
Rysunek 17: Wartość dokładna z wolframalpha

```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[0,0,0,0,0,0,0,(1/23)],-1,1,10,0)

wynik =

  10×6 table

     N     a     b      Simpson      dokladna     blad
    __    __    _    __________    ________    ____

     1    -1    1             0           0     NaN
     2    -1    1             0           0     NaN
     3    -1    1     5.474e-17           0     Inf
     4    -1    1             0           0     NaN
     5    -1    1    1.5728e-17           0     Inf
     6    -1    1    9.2519e-18           0     Inf
     7    -1    1    -1.933e-17           0     Inf
     8    -1    1    -2.313e-18           0     Inf
     9    -1    1     1.799e-17           0     Inf
    10    -1    1    1.3878e-17           0     Inf
```

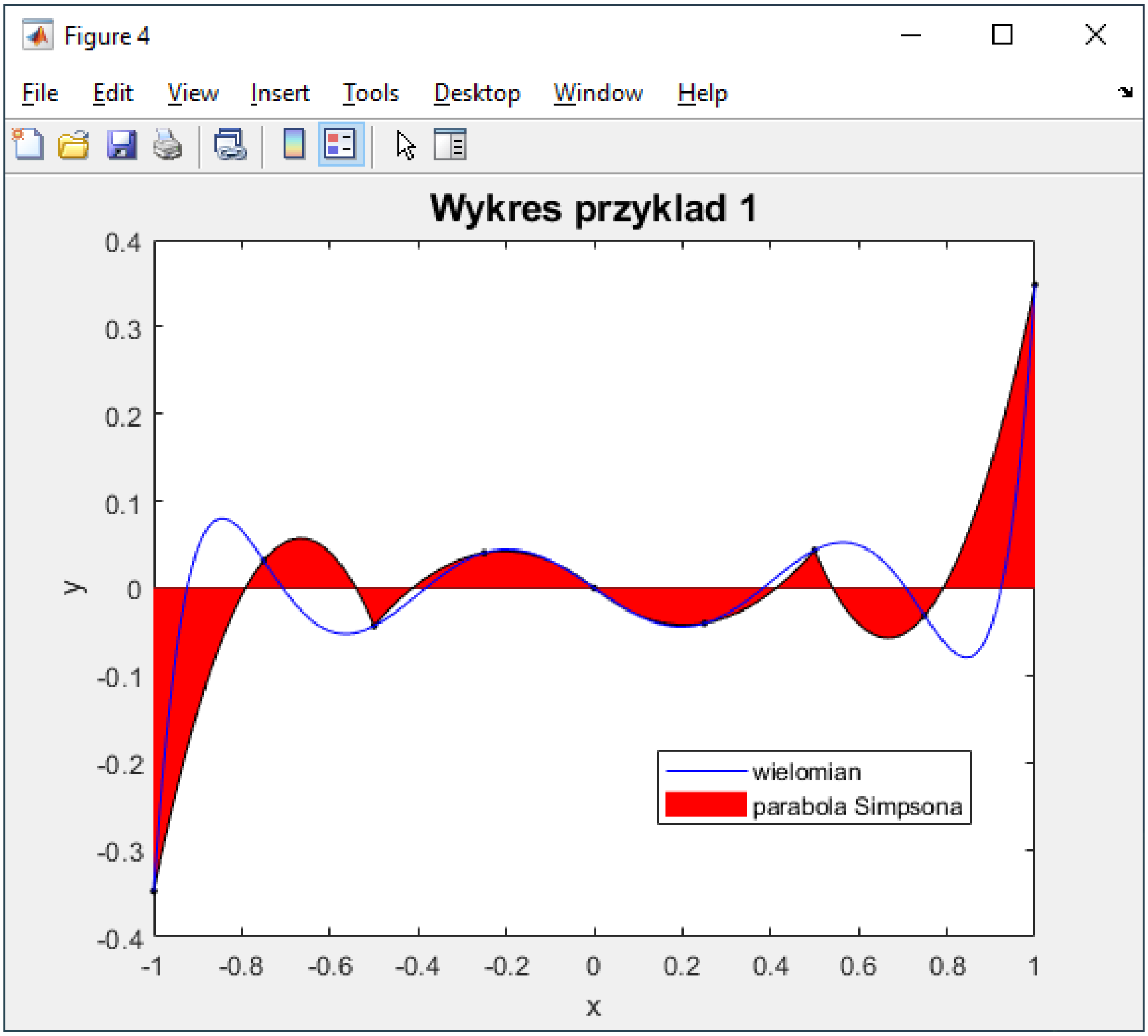
Rysunek 18: Wynik z działania programu



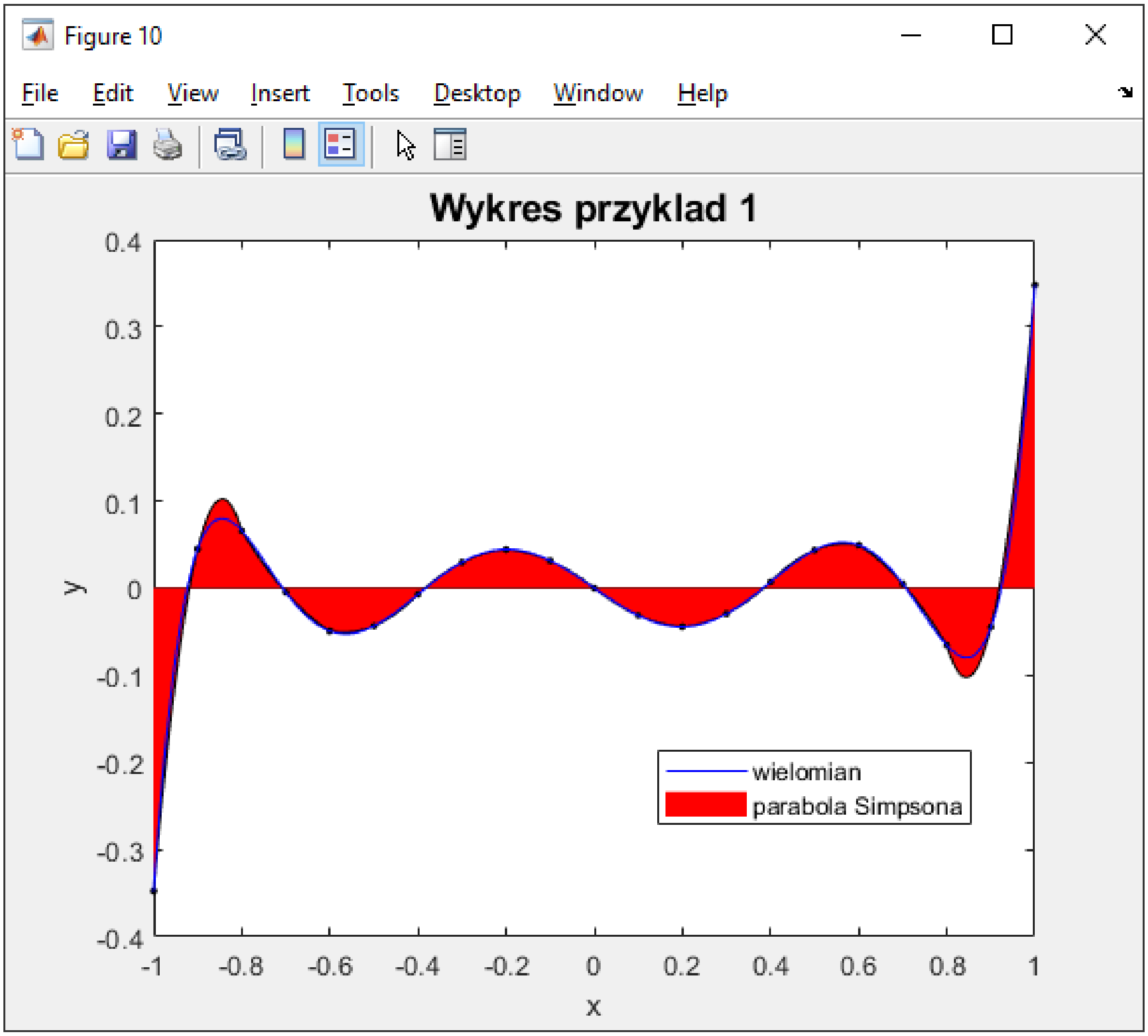
Rysunek 19: Wykres dla N=1



Rysunek 20: Wykres dla N=3



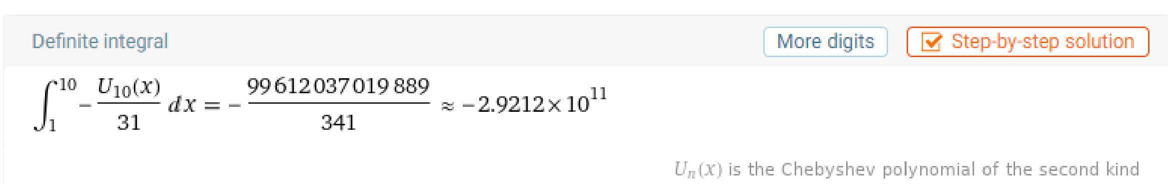
Rysunek 21: Wykres dla N=4



Rysunek 22: Wykres dla N=10

3.4 Przykład 4

Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona, zbiór wartości » dziedzina.

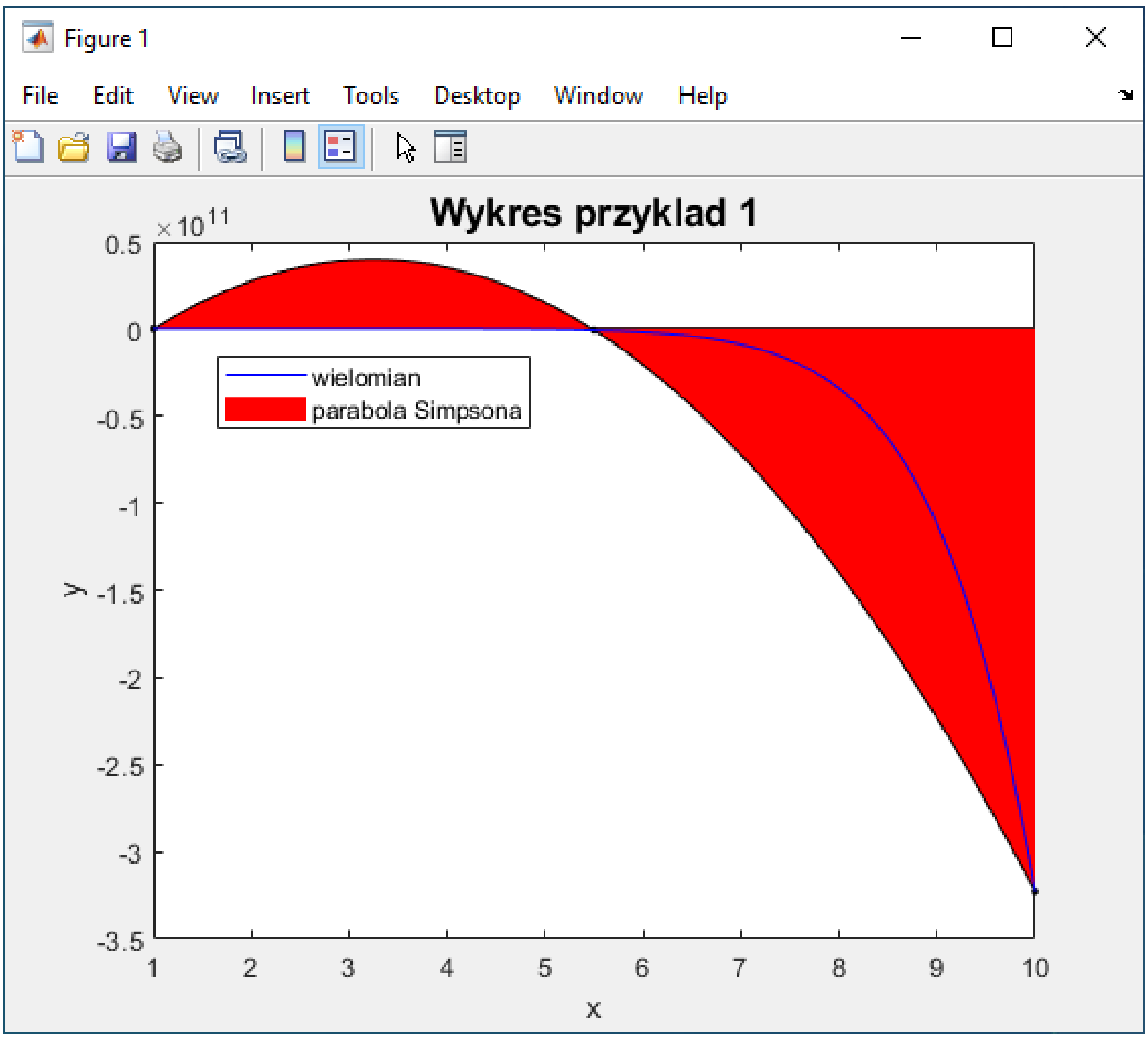


Rysunek 23: Wartość dokładna z wolframalpha

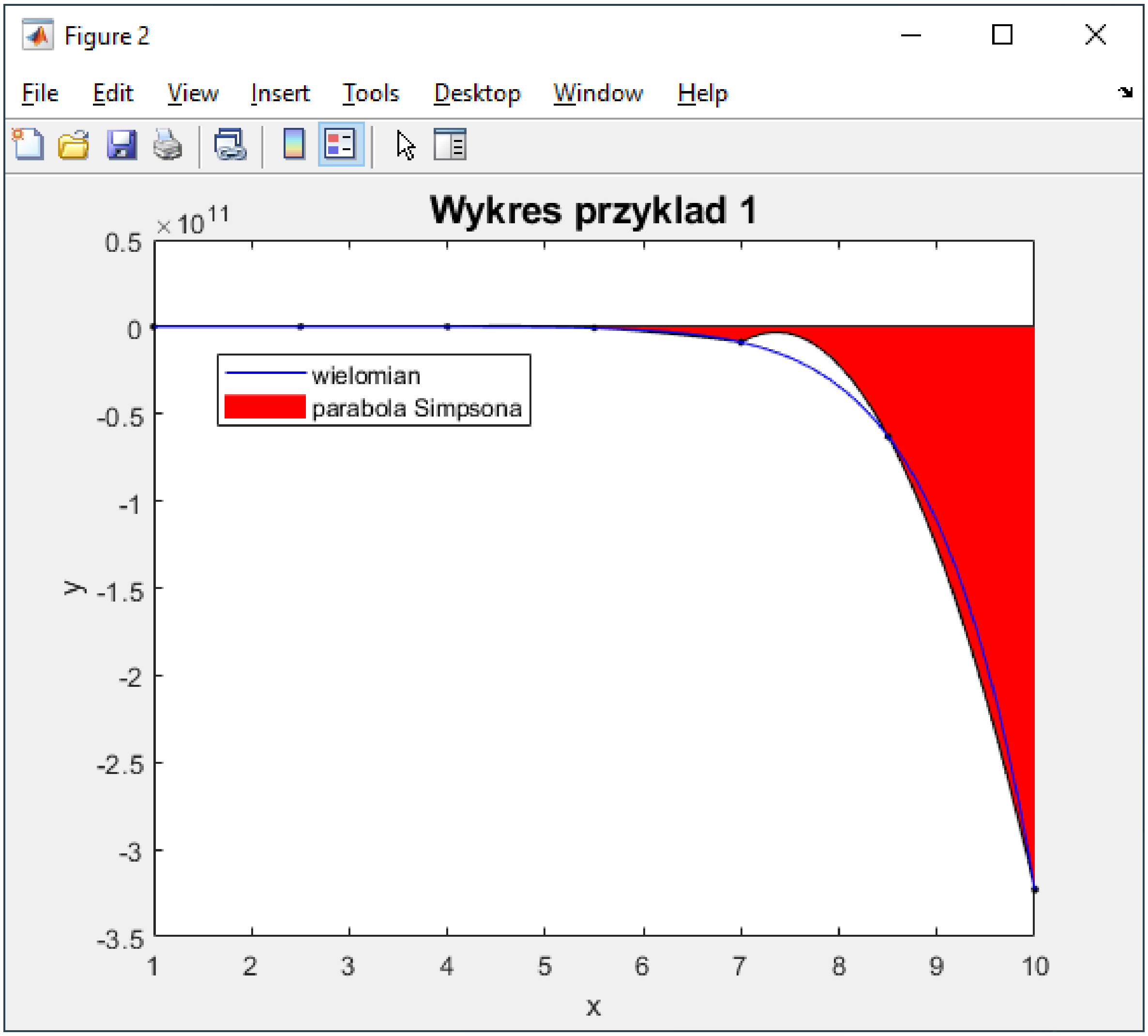
```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,(-1/31)],1,10,20,(-2.9212*(10^11)))

wynik =

  10×6 table
```

N	a	b	Simpson	dokladna	blad
1	1	10	-4.8908e+11	-2.9212e+11	-0.67424
3	1	10	-2.9802e+11	-2.9212e+11	-0.020206
5	1	10	-2.9294e+11	-2.9212e+11	-0.0028101
7	1	10	-2.9234e+11	-2.9212e+11	-0.0007398
9	1	10	-2.922e+11	-2.9212e+11	-0.00026737
11	1	10	-2.9215e+11	-2.9212e+11	-0.00011544
13	1	10	-2.9214e+11	-2.9212e+11	-5.501e-05
15	1	10	-2.9213e+11	-2.9212e+11	-2.7226e-05
17	1	10	-2.9212e+11	-2.9212e+11	-1.3033e-05
20	1	10	-2.9212e+11	-2.9212e+11	-2.5776e-06

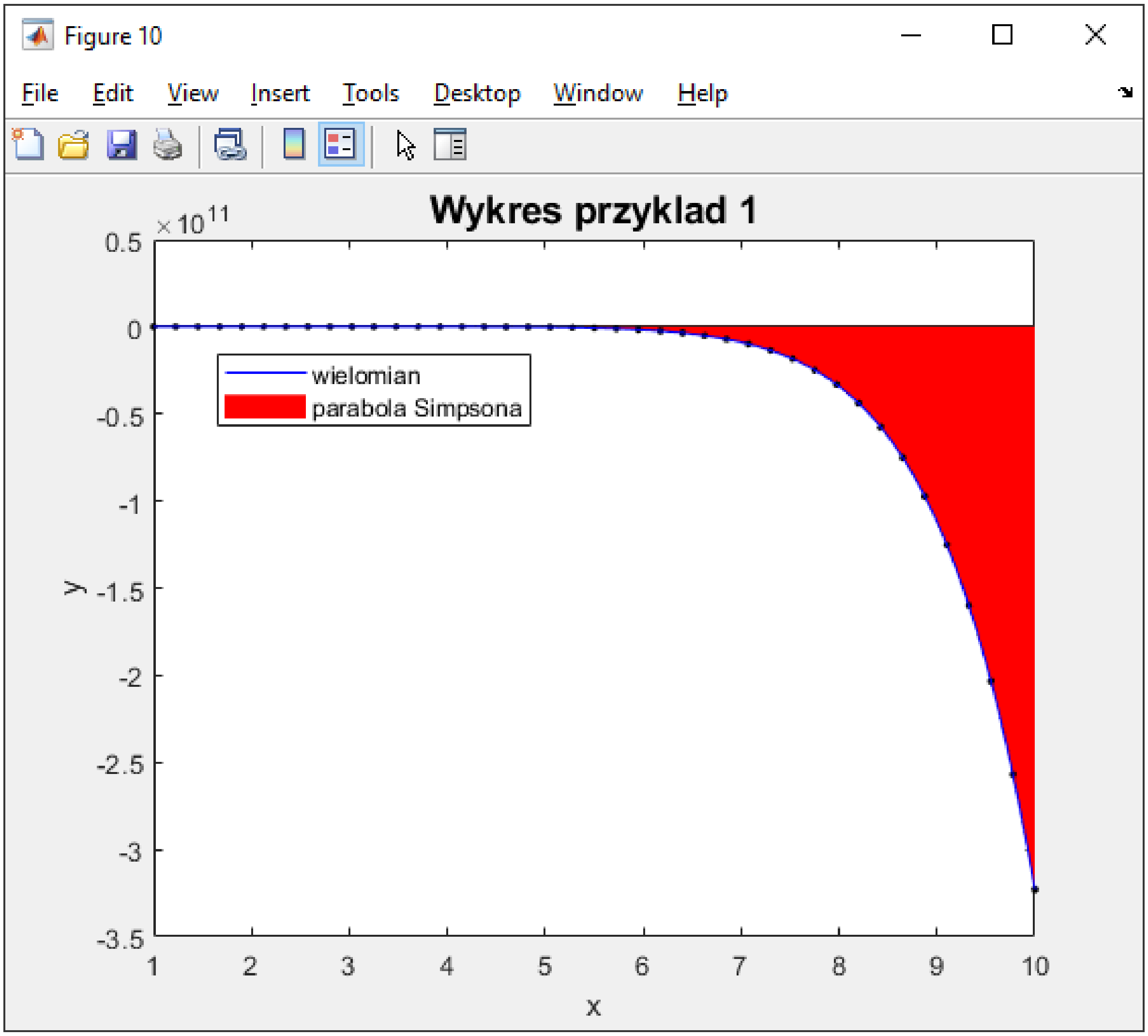
Rysunek 24: Wynik z działania programu



Rysunek 25: Wykres dla N=1



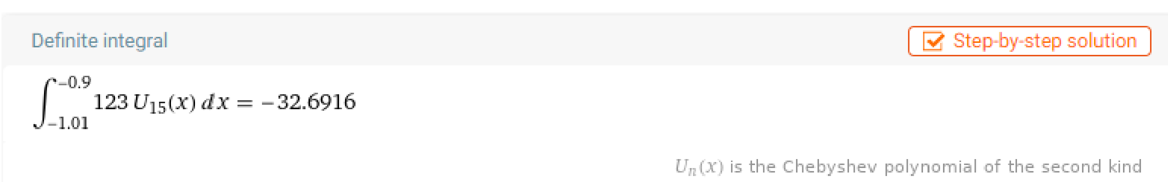
Rysunek 26: Wykres dla N=3



Rysunek 27: Wykres dla N=20

3.5 Przykład 5

Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona, na stosunkowo małych przedziałach

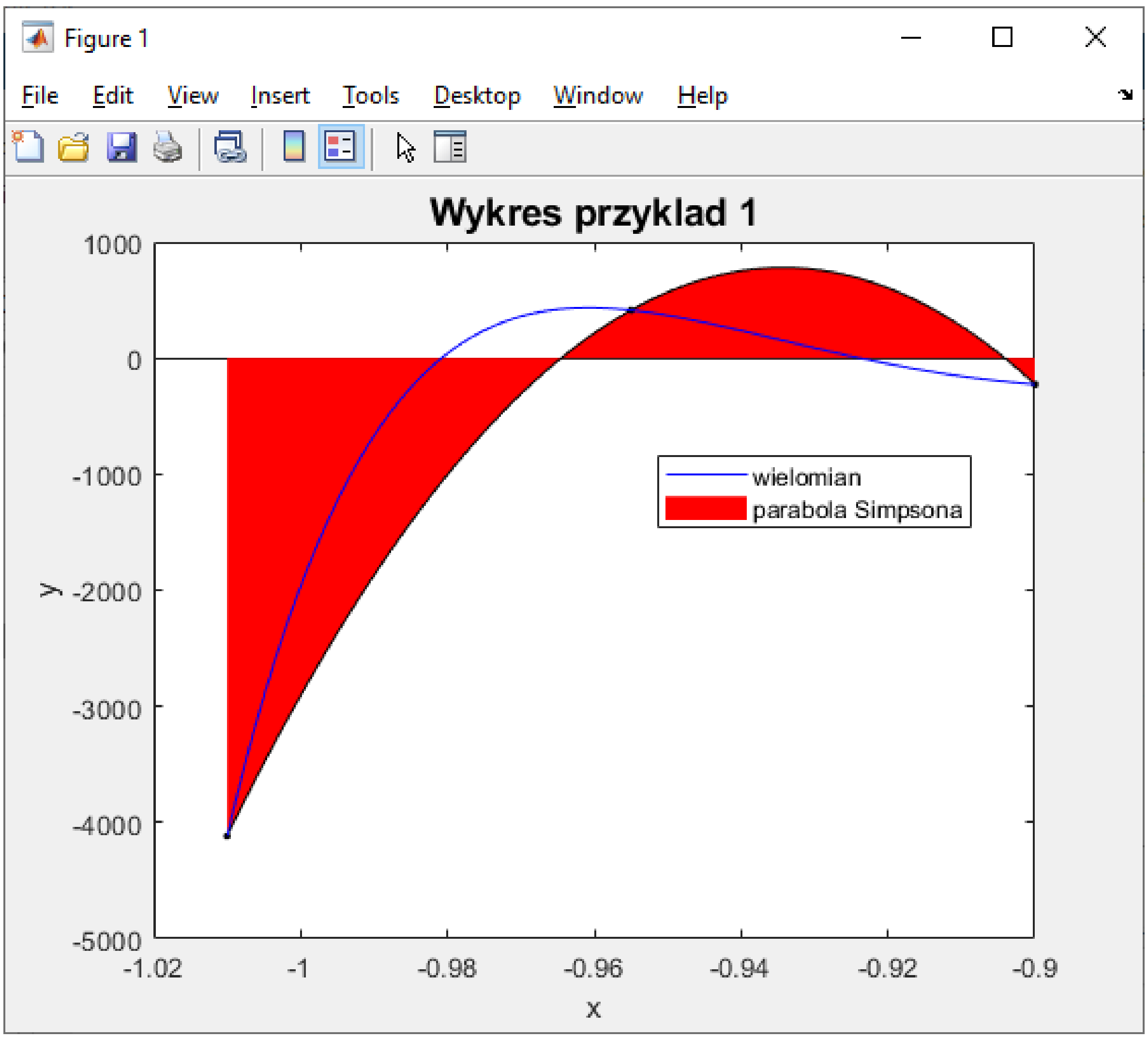


Rysunek 28: Wartość dokładna z wolframalpha

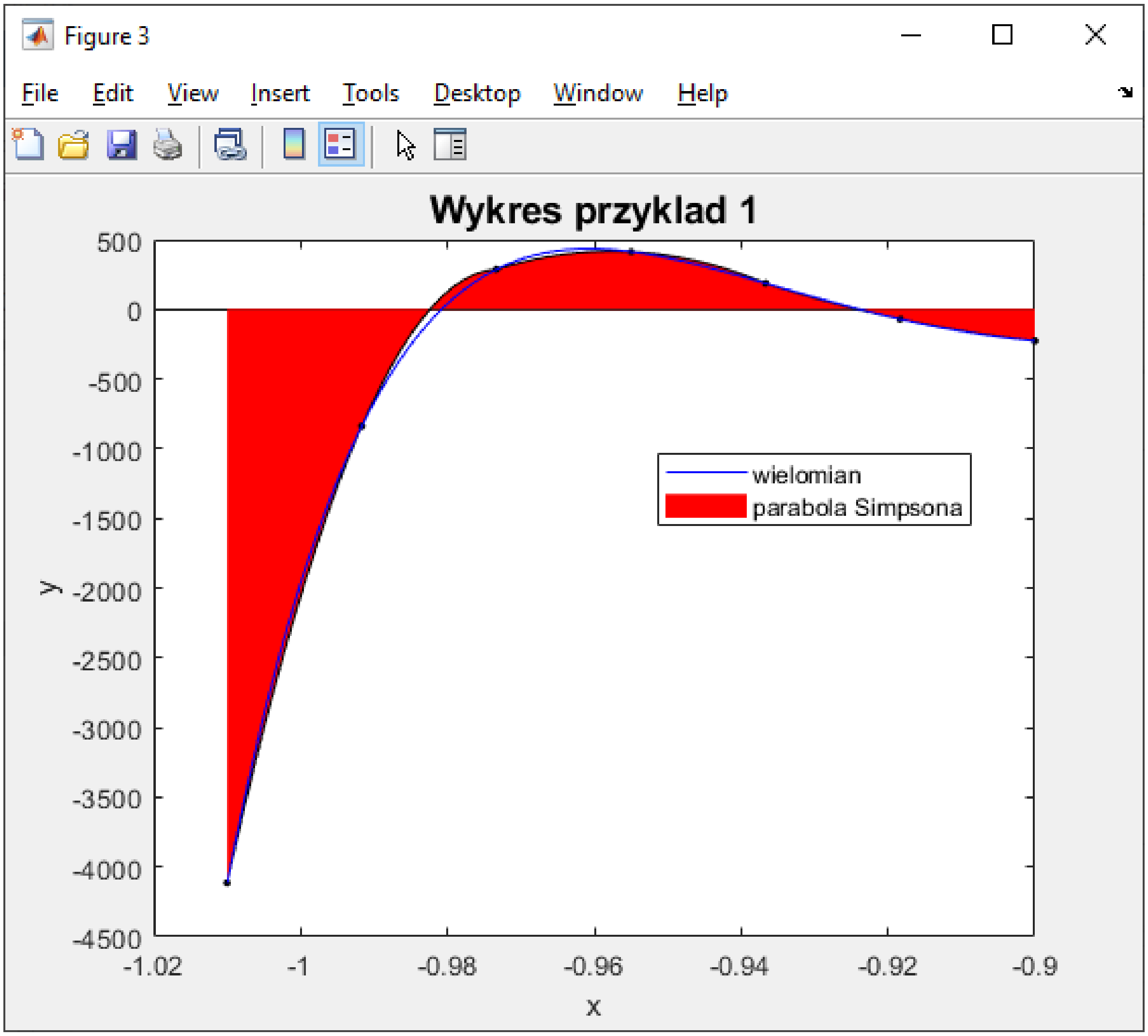
```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,123],-1.01,-0.9,10,-32.6916)

wynik =

  10×6 table
```

N	a	b	Simpson	dokladna	blad
1	-1.01	-0.9	-49.365	-32.692	-0.51002
2	-1.01	-0.9	-33.874	-32.692	-0.036172
3	-1.01	-0.9	-32.931	-32.692	-0.0073112
4	-1.01	-0.9	-32.768	-32.692	-0.0023323
5	-1.01	-0.9	-32.723	-32.692	-0.00095916
6	-1.01	-0.9	-32.707	-32.692	-0.00046379
7	-1.01	-0.9	-32.7	-32.692	-0.00025091
8	-1.01	-0.9	-32.696	-32.692	-0.00014743
9	-1.01	-0.9	-32.695	-32.692	-9.2308e-05
10	-1.01	-0.9	-32.694	-32.692	-6.0785e-05

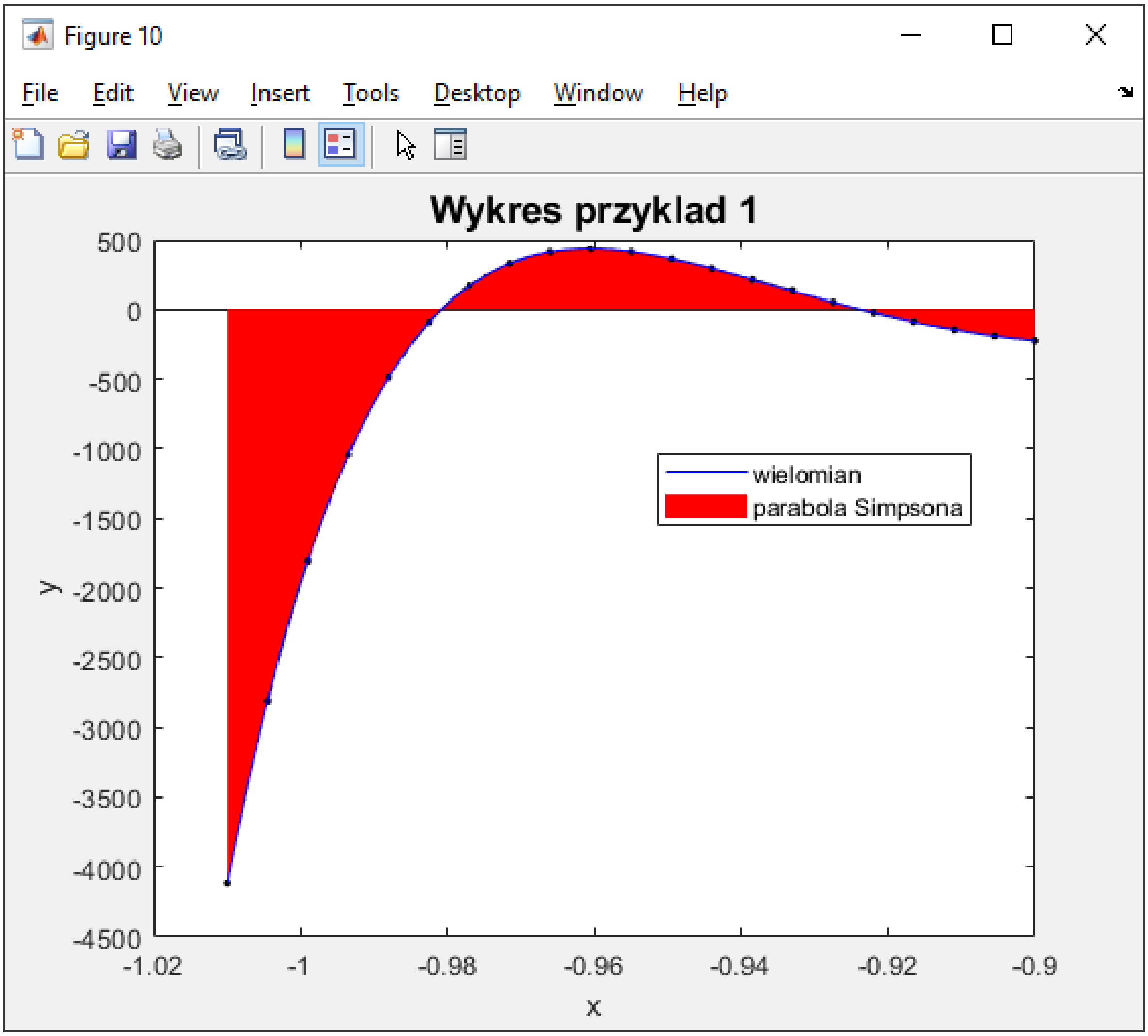
Rysunek 29: Wynik z działania programu



Rysunek 30: Wykres dla N=1



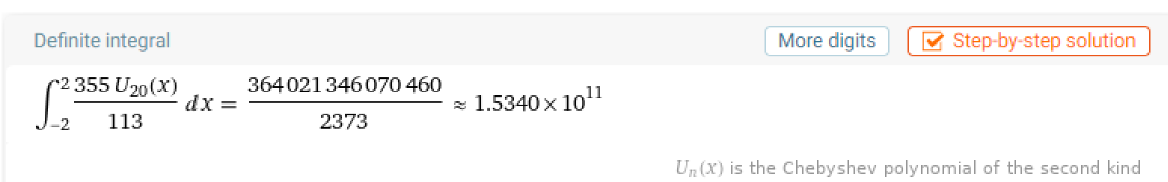
Rysunek 31: Wykres dla N=3



Rysunek 32: Wykres dla N=10

3.6 Przykład 6

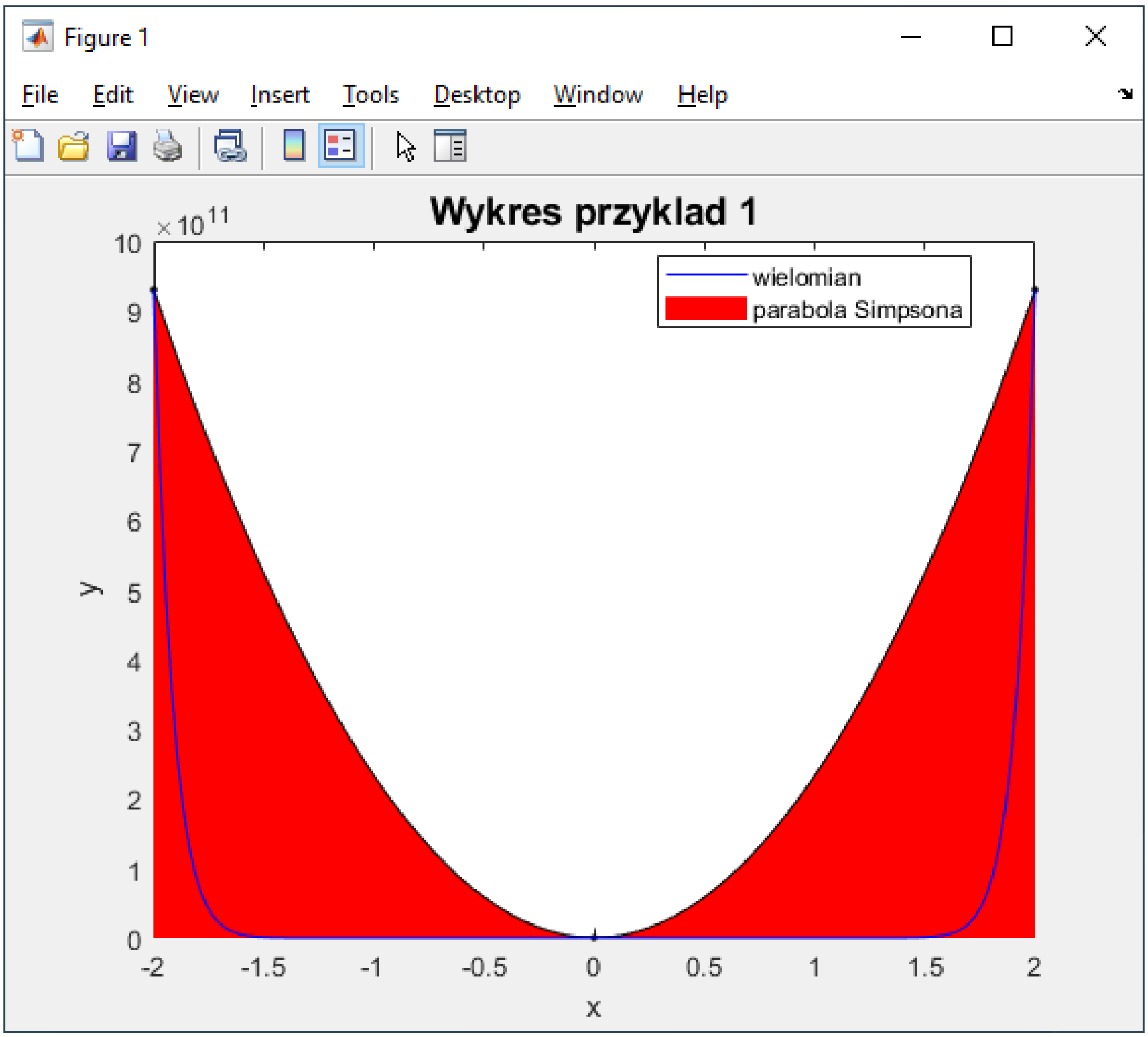
Przykład pokazuje jak zachowuje się metoda Simpsona, gdy na tym samym przedziale jest część z wartościami bliskimi 0 i fragmenty gdzie funkcja rośnie szybko.



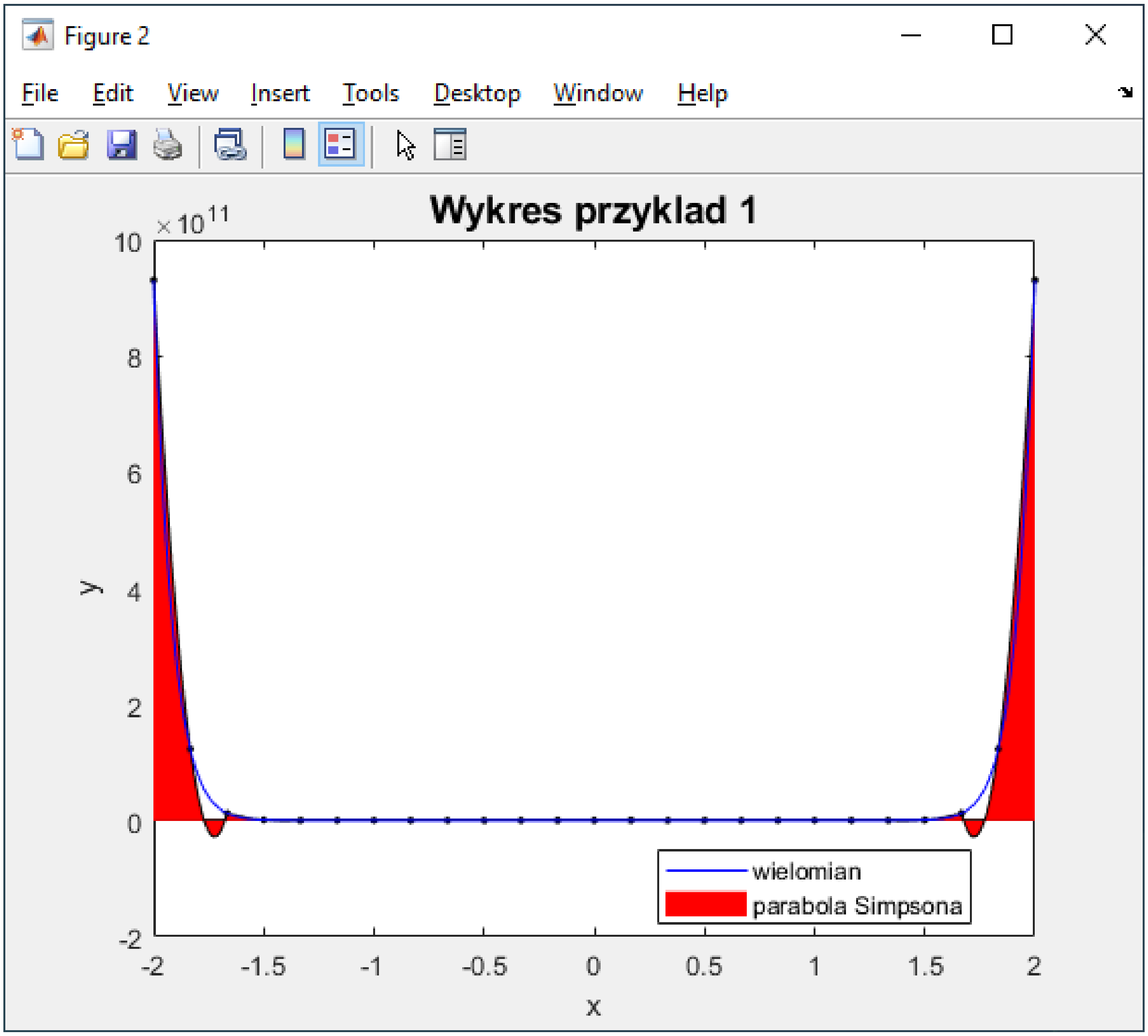
Rysunek 33: Wartość dokładna z wolframalpha

```
>> wynik=tabela(@czebyszew,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,355/113],-2,2,100,(1.534*(10^11)))

wynik =

  10×6 table

     N      a     b     Simpson       dokladna         blad
    ___    __    _    __________    _________    __________

      1    -2    2    1.2399e+12    1.534e+11         7.083
     12    -2    2    1.6107e+11    1.534e+11      0.050023
     23    -2    2    1.5409e+11    1.534e+11     0.0044972
     34    -2    2    1.5355e+11    1.534e+11    0.00098748
     45    -2    2    1.5345e+11    1.534e+11    0.00033239
     56    -2    2    1.5342e+11    1.534e+11    0.00014458
     67    -2    2    1.5341e+11    1.534e+11    7.5244e-05
     78    -2    2    1.5341e+11    1.534e+11    4.4986e-05
     89    -2    2     1.534e+11    1.534e+11    3.0116e-05
    100    -2    2     1.534e+11    1.534e+11     2.213e-05
```

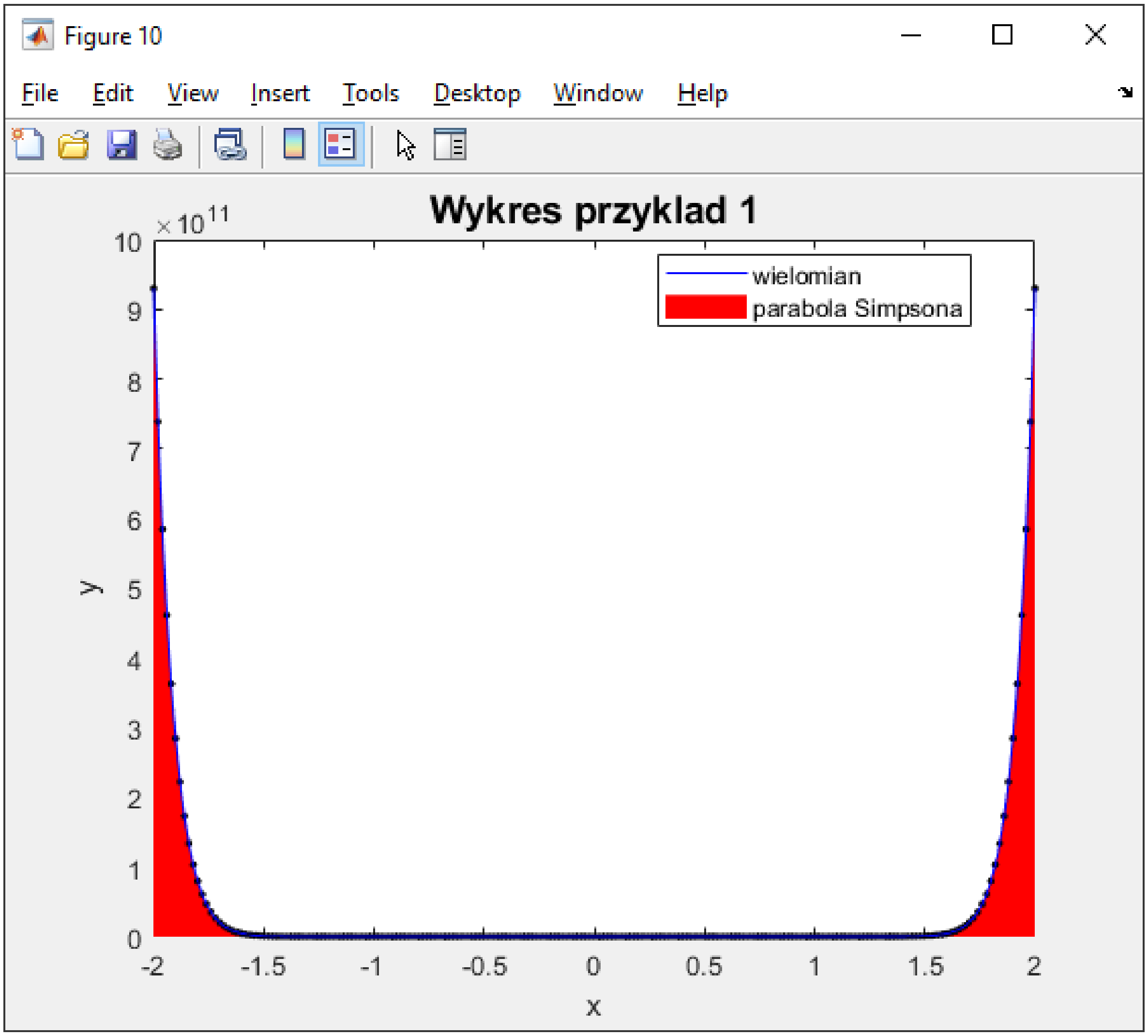
Rysunek 34: Wynik z działania programu



Rysunek 35: Wykres dla N=1



Rysunek 36: Wykres dla N=12



Rysunek 37: Wykres dla N=100

4 Analiza

Podsumowując na podstawie powyższych przykładów możemy zauważać, że złożona metoda Simpson radzi sobie nie najlepiej gdy funkcja ma dosyć gęsto rozmieszczone punkty przegięcia, ale przy dostatecznym zwiększeniu liczby przedziałów dokładność błąd zaczyna dosyć szybko maleć.