Übungen - Angewandte Kryptologie

Alexander Weigl

May 6, 2011

Contents

1. Übung 1

1.1. Aufgabe 1

Chiffre	Alphabet	Geheimtext	Schlüsselraum	Länge
Caesar	$\{A, \cdots, Z\}$	$\{A, \cdots, Z\}$	$\{3\}, \{1, \cdots, 25\}$	4,64
OTP	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}^*$	∞
DES	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}^{56}$	56

1.2. Aufgabe 2

a. Beweis: Äquivalenzrelation: $\equiv_n$

Reflexivität $\forall x : x \equiv_n x$

$$x \mod n \equiv r = x \mod n \Rightarrow x \equiv_n x \tag{1}$$

#

Symmetrie $\forall x, y : x \equiv_n y \Rightarrow y \equiv_n x$

$$\begin{aligned} x \equiv_n y \mod n \Rightarrow x \mod n = r = y \mod n \\ \Rightarrow y \mod n = x \mod n \Rightarrow y \equiv_n x \end{aligned}$$

#

Transitiviät $\forall x, y, z : x \equiv_n y, y \equiv_n z => x \equiv_n z$

$$\begin{aligned} n.V.x \mod n = r_x, \\ y \mod n = r_y \\ z \mod n = r_z \wedge r_x = r_y, r_y = r_z \Rightarrow \\ r_x = r_z \Rightarrow x \equiv_n z \mod n \end{aligned}$$

#

b.

z. Z. $[i]_n + [j]_n = [i + j]_n$

$$\text{Sei } a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = q_a n + r_a, b = q_b n + r_b$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a \in [r_a]_n, b \in [r_b]_n \\
&\Rightarrow [r_a]_n + [r_b]_n = \{\forall i : in(r_a + r_b)\} \\
&\Rightarrow a + b = q_a n + r_a + q_b n + r_b \\
&\equiv_n n(q_a + q_b) + r_a + r_b \\
&\equiv_n r_a + r_b \Rightarrow [r_a + r_b]_n
\end{aligned}$$

z. Z. $[i]_n \cdot [j]_n = [i \cdot j]_n$

$$\text{Sei } a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = q_a n + r_a, b = q_b n + r_b$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a \in [r_a]_n, b \in [r_b]_n \\
&\Rightarrow [r_a]_n * [r_b]_n = \{\forall i : in(r_a * r_b)\} \\
&\Rightarrow a * b \equiv_n (q_a n + r_a) * (q_b n + r_b) \\
&\equiv_n q_a q_b n + q_a n r_b + q_b n r_a + r_a * r_b \\
&\equiv_n n(q_a q_b + q_a r_b + q_b r_a) + r_a * r_b \\
&\equiv_n r_a * r_b = [r_a + r_b]_n
\end{aligned}$$

1.3.

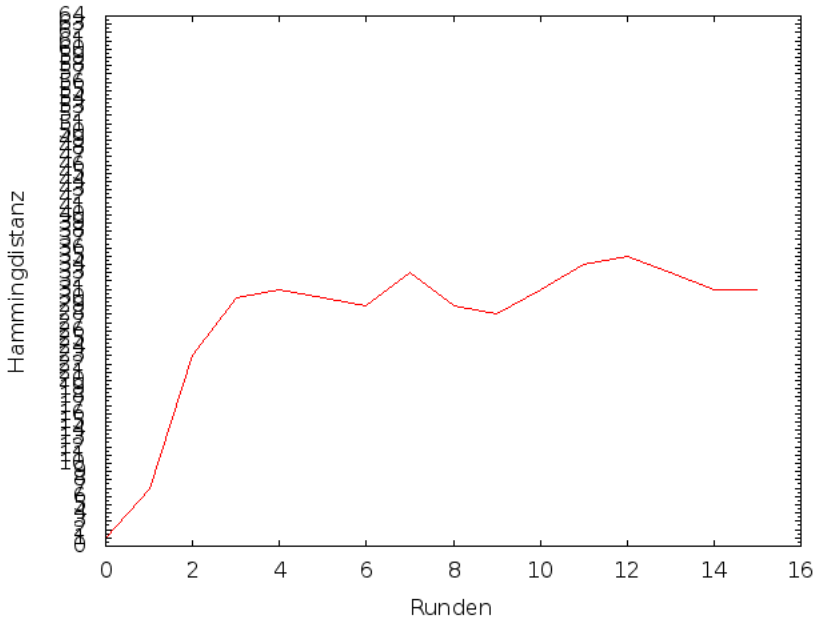
a.

$$\begin{aligned}
(23.145 \cdot = 12.479 + 14.543) \cdot \quad \mod 9 &\equiv_9 \\
(6 \cdot 5 + 8) \cdot 5 &\equiv_9 3 \\
8 \cdot 5 &\equiv_9 \\
2 \cdot 5 \equiv_9 10 = 1 \quad \mod 9
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
123 \cdot (123.983 \cdot 789.345 + 676.345) mod 11 &\equiv_{11} \\
2 \cdot (2 \cdot 7 + 10) &\equiv_{11} \\
2 \cdot (14 + 10) \equiv_{11} 4 \quad \mod 11
\end{aligned}$$

1.4.



Round k	$HD(M_k, M_k)$	$HD(M_{1_k}, M_{1_k})$	$HD(M_{1_k}, M_{1_k})$
0	1	39	35
1	7	35	31
2	23	32	33
3	30	36	35
4	31	37	34
5	30	31	34
6	29	26	30
7	33	26	26
8	29	29	26
9	28	29	34
10	31	25	36
11	34	28	35
12	35	30	38
13	33	29	37
14	31	32	38
15	31		

2. Übung 2

2.1. Aufgabe 1

a. Verschiebechiffren

$$E_1 : z \mapsto (z + k_1) \mod n \tag{2}$$
$$E_2 : z \mapsto (z + k_2) \mod n \tag{3}$$

Dann wäre die Verkettung $E_2 \circ E_1$:

$$E_2 \circ E_1 = E_2(E_1(z)) = (((z + k_1) \mod n) + k_2) \mod n \tag{4}$$
$$= z + \underbrace{k_1 + k_2}_{k_3} \mod n \tag{5}$$
$$= z + k_3 \mod n = E_3(z) \tag{6}$$

Wir folgern daraus, dass eine Verkettung von zwei Verschiebechiffren keine zusätzlichen Gewinn bringt.

b. Multiplikative Chiffren

$$E_1 : z \mapsto (z \cdot t_1) \mod n \tag{7}$$
$$E_2 : z \mapsto (z \cdot t_2) \mod n \tag{8}$$

Dann wäre die Verkettung $E_2 \circ E_1$:

$$E_2 \circ E_1 = E_2(E_1(z)) = (((z \cdot t_1) \mod n) \cdot t_2) \mod n \tag{9}$$
$$= z \cdot \underbrace{t_1 \cdot t_2}_{t_3} \mod n \tag{10}$$
$$= z \cdot t_3 \mod n = E_3(z) \tag{11}$$

Wir folgern daraus, dass eine Verkettung von zwei Multiplikativen Chiffren keine zusätzlichen Gewinn bringt.

c. Tauschchiffren

$$E_1 : z \mapsto (z \cdot t_1 + k_1) \mod n \tag{12}$$
$$E_2 : z \mapsto (z \cdot t_2 + k_2) \mod n \tag{13}$$

Dann wäre die Verkettung $E_2 \circ E_1$:

$$E_2 \circ E_1 = E_2(E_1(z)) = (((z \cdot t_1 + k_1) \mod n) \cdot t_2 + k_2) \mod n \tag{14}$$
$$= z \cdot \underbrace{t_1 \cdot t_2}_{t_3} + \underbrace{k_1 \cdot t_2 + k_2}_{k_3} \mod n \tag{15}$$
$$= z \cdot t_3 + k_3 \mod n = E_3(z) \tag{16}$$

Wir folgern daraus, dass eine Verkettung von zwei Tauschchiffren keine zusätzlichen Gewinn bringt.

2.2. Aufgabe 2

Berechnen Sie die multiplikativen Inverse zu $3,\ 5$ **und** 22 **in** Z_23**.**

$$\begin{aligned} 23 &= 7 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ 1 &= 3 - (23 - 7 \cdot 3) = \\ 1 &= \underline{8} \cdot -1 \cdot 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 15 + 8 \\ 15 &= 1 \cdot 8 + 7 \\ 8 &= 1 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 7 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 8 - 7 \\ 1 &= (23 - 15) - (15 - 8) \\ 1 &= (23 - 15) - (15 - (23 - 15)) \\ 1 &= 23 - 15 - 15 + 23 - 15 \\ 1 &= \underbrace{-3}_{20} \cdot 15 + 2 \cdot 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 22 + 1 \\ 22 &= 22 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$1 = 1 \cdot 23 \underbrace{-1}_{22} \cdot 22$$

Berechnen Sie die multiplikativen Inversen zu $3,\ 15$ **und** 22 **in** Z_{24}.

$$\begin{aligned} 24 &= 3 \cdot 8 + 0 \\ &\Rightarrow \neg\exists \text{ multiplikatives Inverses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 15 + 9 \\ 15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \\ &\Rightarrow \neg\exists \text{ multiplikatives Inverses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 22 + 2 \\ 22 &= 11 \cdot 2 + 0 \\ &\Rightarrow \neg\exists \text{ multiplikatives Inverses} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(n-1)$ **in** Z_n **bzgl. der Multiplikation zu sich selbst invers ist.**

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot (n-1) &\equiv_n n^2 - 2n + 1 && (17) \\ &\equiv_n 1 \mod n && (18) \end{aligned}$$

2.3. Aufgabe 3

Alphabet: `ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ` Alphabet: `UEBRDNWOLKMSIFHTACGJPQVXYZ`

Wind Nord-Ost, Startbahn null-drei,
Bis hier hör ich die Motoren.
Wie ein Pfeil zieht sie vorbei,
Und es dröhnt in meinen Ohren.
Und der nasse Asphalt bebt,
Wie ein Schleier staubt der Regen,
Bis sie abhebt und sie schwebt
Der Sonne entgegen.
Über den Wolken

Muß die Freiheit wohl grenzenlos sein.
Alle Ängste, alle Sorgen, sagt man,
Blieben darunter verborgen und dann
Würde, was hier gross und wichtig erscheint,
Plötzlich nichtig und klein.

2.4. Aufgabe 4

a.

Die Playfair-Verschlüsselung stellt eine Substitution für Buchstaben-Paare dar. Es handelt sich um eine bigraphische monoalphabetische Methode. Ähnlich wie bei der einfachen (monographischen) Buchstabensubstitution, beruhen Methoden zur Entzifferung von Playfair im Wesentlichen auf einer Analyse der Häufigkeitsverteilung hier der Buchstabenpaare (Bigramme). In der deutschen Sprache beispielsweise sind die Bigramme "er", "en" und "ch" sehr häufig. Im Beispieltext fallen die "Doppler" (also Bigramm-Wiederholungen) ME...ME, IK...IK, QC...QC und TE...TE sowie die "Reversen" (Wiederholung eines umgedrehten Bigramms) CQ...QC auf, die sich in gleicher Weise im englischen Klartext wiederfinden. Da kein Buchstabe mit sich selbst gepaart wird, gibt es nur 600 (25×24) mögliche Buchstabenkombinationen, die substituiert werden. Überdies gibt es eine Reihe von Symmetrien, die teilweise schon am obigen Beispieltext erkannt werden können. So hilft der erwähnte Klartext-Geheimtext-Zusammenhang EL ↔ CQ und LE ↔ QC beim Bruch des Textes. Ist nämlich ein Bigramm geknackt, dann ist auch sofort das reverse (umgedrehte) Bigramm bekannt. In den Fällen des Überkreuz-Schrittes gibt es darüber hinaus noch weitere Beziehungen zwischen den vier auftretenden Buchstaben in der Art (vgl. beispielsweise obere linke Ecke des Quadrats) DC ↔ EB, CD ↔ BE, EB ↔ DC sowie BE ↔ CD, die der Angreifer zur Entzifferung ausnutzen kann. Ferner hat auch die geschilderte Methode zur Erzeugung des Playfair-Quadrats Schwächen, denn es endet häufig – wie auch im Beispiel – auf "XYZ". Die Playfair-Verschlüsselung ist somit weit entfernt von einer allgemeinen bigraphischen Methode mit völlig willkürlicher Zuordnung der Buchstabenpaare und stellt in der heutigen Zeit kein sicheres Verschlüsselungsverfahren mehr dar. So lassen sich mit modernen Mitteln auch relativ kurze Playfair-Texte in sehr kurzer Zeit brechen.

2.5. Aufgabe 5

Herleitung des Gleichungssystems:

$$Hx_1 + Ix_2 = \ddot{A} \qquad Lx_1 + Lx_2 = U \tag{19}$$

$$Hx_3 + Ix_4 = U \qquad Lx_3 + Lx_4 = K \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 11 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 20 \\ 11 & 11 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 0 & 26 \\ 11 & 11 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 7^{-1} = 25 \\ \mid \cdot 11^{-1} = 8 \\ \mid \cdot 7^{-1} = 25 \\ \mid \cdot 7^{-1} = 8 \end{matrix} \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 26 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot -1 \\ + \\ \cdot -1 \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 26 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 26 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 4^{-1} = 22 \\ \\ \mid \cdot 4^{-1} = 22 \end{matrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 26 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot -26 \\ + \\ \cdot -26 \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ I \\ L \\ L \end{pmatrix} \tag{24}$$

Bildung der Inversen K^{-1}

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 0 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \cdot 7^{-1} = 25 \quad \begin{pmatrix} 1 & 26 & 25 & 0 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 11^1 \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 25 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 1 \end{pmatrix} \mid \cdot 15^{-1} = 2 \quad \begin{matrix} + \\ \cdot 26 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Lösung: HILLISTEINFACHZUKNACKEN

2.6. Aufgabe 6

a. Warum gilt für zufällige Texte $I_r = \frac{1}{26} = 0.0385$?

Wirklicher Zufall würde bedeuten das jeder Buchstaben $a \in A$ gleich oft im Text vorkommt. Folglich handelt es sich um einen Laplace-Raum (wie beim Würfel) und die Warscheinlichkeit für $P(X = a) = \frac{1}{|A|}$. In unseren Fall ist $|A| = 26$.

b.

c.

2.7. Übungsaufgabe: One-Time-Pad

$$P_1 = hike = 001\ 010\ 011\ 000 \tag{26}$$
$$P_2 = rike = 101\ 010\ 011\ 000 \tag{27}$$
$$C = eier = 000\ 010\ 000\ 101 \tag{28}$$
$$K = klet = 011\ 100\ 000\ 111 \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

a.

$$001\ 010\ 011\ 000\,\text{xor} \tag{31}$$
$$000\ 010\ 000\ 101 = \tag{32}$$
$$001\ 000\ 011\ 101 = hekr \tag{33}$$

$$101\ 010\ 011\ 000\,\text{xor} \tag{34}$$
$$000\ 010\ 000\ 101 = \tag{35}$$
$$101\ 000\ 011\ 101 = rekr \tag{36}$$

b.

$$001\ 010\ 011\ 000\,\text{xor} \tag{37}$$
$$011\ 100\ 000\ 111 = \tag{38}$$
$$010\ 110\ 011\ 111 = iskt \tag{39}$$

$$101\ 010\ 011\ 000\ \text{xor} \tag{40}$$
$$011\ 100\ 000\ 111\ = \tag{41}$$
$$110\ 110\ 011\ 010\ = sski \tag{42}$$

c.

wenn $C_{1_i} = C_{2_i} \Rightarrow P_{1_i} = P_{2_i}$

$$C_1\,\text{xor}\,C_2 = (P_1\,\text{xor}\,K)\,\text{xor}(P_2\,\text{xor}\,K) = P_1\,\text{xor}\,P_2 \tag{43}$$

d.

$$K = C_1 \operatorname{xor} P_1 \tag{44}$$
$$C_2 \operatorname{xor} K = P_2 \tag{45}$$

2.8. Skytale

a.

$$E(k, x_1, \ldots, x_{km}) = \tag{46}$$
$$x_1 x_{m+1} x_{2m+1} \ldots x_{(k-1)m+1} x_2 x_{m+2} x_{2m+2} \ldots x_{(k-1)m+2} \ldots x_m x_{2m} x_{3m} \ldots x_k m \tag{47}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(k-1)m+1} & x_{(k-1)m+2} & \cdots & x_{km} \end{pmatrix} \tag{48}$$

Ist die Klartextlänge kein Vielfaches von k, so kann der Klartext durch das Ein- bzw. Anfügen von sogenannten Blendern (Füllzeichen) verlängert werden. Damit der Emp fänger diese Füllzeichen nach der Entschlüsselung wieder entfernen kann, ist lediglich darauf zu achten, dass sie im Klartext leicht als solche erkennbar sind.

3. Moderne Symmetrische Chiffren

3.1. Lineare Abbildungen

3.2. Feistel-Cipher

a.

$F : \{0,1\}^4 \times \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$ mit $F(X,Y) = X \operatorname{xor} Y$
die Rundenzahl $n = 2$,
der Plaintext $P = 10011100$ und
die Rundenschlüssel $K_1 = 0101$und $K_2 = 1100$.

Berechnen Sie den Ciphertext C.

$$L_i = R_{i-1} \tag{49}$$
$$R_i = L_{i-1} \operatorname{xor} F(R_{i-1}, K_i) \tag{50}$$

Rnd	K_i	L_i	R_i
0	—	1001	1100
1	0101	1100	0000
2	1100	0000	0000

Berechnen Sie aus C wieder den Plaintext P .

$$R_i = L_{i+1} \tag{51}$$
$$L_i = R_{i+1} \operatorname{xor} F(R_i, K_{i+1}) \tag{52}$$

Rnd	K_i	L_i	R_i
2	1100	0000	0000
1	0101	1100	0000
0	—	1001	1100

b.

Eine Feistel-Funktion ist definiert durch $F(X,Y) = X$. Berechnen Sie den Ciphertext C in Abhängigkeit von einer beliebigen Rundenzahl n und dem Plaintext $P = (L_0, R_0)$ Wie gut ist die dadurch erreichte Verschlüsselung?

Rnd	K_i	L_i	R_i
0	—	a	b
1	—	b	$b \operatorname{xor} a$
2	—	$b \operatorname{xor} a$	a
3	—	a	b

$$f(n,(a,b)) = \begin{cases} (a,b), & n \mod 3 = 0 \\ (b, b \operatorname{xor} a), & n \mod 3 = 1 \\ (b \operatorname{xor} a, a), & n \mod 3 = 2 \end{cases} \tag{53}$$

3.3. DES-Details

a. Zeigen Sie, dass die DES-Expansionspermutation eine lineare Abbildung ist.

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Sei $P \in \mathbb{N}^{32\times 48}$ die entsprechende Permutationsmatrix für A und $f : A^{32} \to A^{48}, \quad x \mapsto P \cdot x$ die Permutationsfunktion.

zZ: f ist linear

Sei $x, y \in A^{32}$ mit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{31})$ und $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{31})$ dann ist

$$f(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x_{31} & \alpha x_0 & \cdots & \alpha x_8 \\ \alpha x_7 & \alpha x_8 & \cdots & \alpha x_{16} \\ \alpha x_{15} & \alpha x_{16} & \ddots & \vdots \\ \alpha x_{23} & \alpha x_{24} & \cdots & \alpha x_0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} x_{31} & x_0 & \cdots & x_8 \\ x_7 & x_8 & \cdots & x_{16} \\ x_{15} & x_{16} & \ddots & \vdots \\ x_{23} & x_{24} & \cdots & x_0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$= \alpha f(x) \tag{57}$$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} x_{31}+y_{31} & x_0+y_0 & \cdots & x_8+y_8 \\ x_7+x_7 & x_8+y_8 & \cdots & x_{16}+y_{16} \\ x_{15}+y_{15} & x_{16}+y_{16} & \ddots & \vdots \\ x_{23}+y_{23} & x_{24}+y_{24} & \cdots & x_0+y_0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{31} & x_0 & \cdots & x_8 \\ x_7 & x_8 & \cdots & x_{16} \\ x_{15} & x_{16} & \ddots & \vdots \\ x_{23} & x_{24} & \cdots & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{31} & y_0 & \cdots & y_8 \\ y_7 & y_8 & \cdots & y_{16} \\ y_{15} & y_{16} & \ddots & \vdots \\ y_{23} & y_{24} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$= f(x) + f(y) \tag{60}$$

#

b. Zeigen Sie, dass die DES S-Boxen keine lineare Abbildung sind.

zZ. S_i **ist nicht linear.** Wir nehmen die S1-Box und sei $x = 0 \wedge \alpha = 2$

$$\begin{aligned} \mathrm{S1}(\alpha x) &= \mathrm{S1}(000000_2) && (61)\\ &= 1110_2 = 14_{10} && (62)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathrm{S1}(x) &= 2\,\mathrm{S1}(000000_2) && (63)\\ &= 2_{10} * 1110_2 = 28_{10} && (64)\\ \Rightarrow \mathrm{S1}(\alpha x) &\neq \alpha\,\mathrm{S1}(x) && (65)\end{aligned}$$

$$\#$$

c. Geben Sie für die DES-Permutation die Zykelschreibweise an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & \\ 15 & 6 & 19 & 20 & 28 & 11 & 27 & 16 & 0 & 14 & 22 & 25 & 4 & 17 & 30 & 9 & 1 & 7 & 23 & 13 & 31 & 26 & 2 & \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\text{Zyklen:}(0\,15\,9\,14\,30\,3\,20\,31\,24\,18\,23\,8)(1\,6\,27\,5\,11\,25\,12\,4\,28\,21\,26\,29\,10\,22\,2\,19\,13\,17\,7\,16) \quad (67)$$

d. Zeigen Sie, dass für den DES Schlüssel $K = 0xE0E0E0E0F1F1F1F1$ **(inklusive Parity-Bits) alle Rundenschlüssel identisch sind. Warum gilt in diesem Fall** $DES(K, DES(K, M)) = M$ **(d.h. Ver- und Entschlüsselung sind identisch)?**

$$K = \begin{matrix} 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{matrix} \xrightarrow{PC1} \begin{matrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{matrix} \quad (68)$$

Da alle in den folgenden Runden lediglich zu Spaltentransposition kommt und jede Spalte gleich sind, sind alle C_i, D_i für alle $1 \leq i \leq 16$.

3.4. Meet-in-the-Middle-Angriff auf 3DES

3.5. Übungsaufgabe: Rechnen in $GF(2^3)$

a. Berechnen Sie das Produkt der Elemente 5 * 3 sowie die Summe der Elemente 5 + 3 für das Modularpolynom $M(x) = x3 + x + 1$**.**

$$5 = 101\ ,\ 3 = 011$$

Summe: $101 \operatorname{xor} 011 = 110 = 6$
Produkt:

$$101 \cdot 011 = 1111 \tag{69}$$
$$1111 \operatorname{xor} 1011 = 100 = 4 \tag{70}$$

b. Der erweiterte Euklidische Algorithmus kann benutzt werden, um auch für Elemente in einem Erweiterungskörper $GF(2^r)$ multiplikativ inverse Elemente zu berechnen. Das Modularpolynom sei $M(x) = \{100011011\}$ vom Grad $r = 8$. Dieses Modularpolynom wird auch von AES benutzt. Berechnen Sie zu $a(x) = \{00001101\}$ das multiplikativ inverse Element $a^{-1}(x)$.

$$M(x) = 111000 \cdot a(x) + 11$$
$$a(x) = 100 \cdot 11 + 1$$

$$1 = a(x) + 100 \cdot 11 \tag{71}$$
$$= a(x) + 100 \cdot (M(x) + 111000 \cdot a(x)) \tag{72}$$
$$= a(x) + 100 \cdot M(x) + 111000 \cdot 100 \cdot a(x) \tag{73}$$
$$= a(x) + 11100000 \cdot a(x) \tag{74}$$
$$= 11100001 \cdot a(x) \tag{75}$$
$$\rightarrow a^{-1}(x) = 11100001 = x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 225 \tag{76}$$

Nebenrechnungen:
1.Reihe

```
100011011
1101
 1011
 1101
  1101
  1101
     000
```

$$r = 11 \quad q = 111000$$

$$110100000 + 11010000 + 1101000 = 1101 * (x^5 + x^4 + x^3) = 1101 * 111000$$

2.Reihe

```
1101
11
```

$$r = 1 \quad q = 100$$

3.6. Übungsaufgabe: $GF(2^3)$

a. Finden Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad 3 mit Koeffizienten aus $GF(2)$.

b. Definieren Sie den Körper mit 8 Elementen, indem Sie ein passendes irreduzibles Polynom und die Verknüpfungstabellen für Addition und Multiplikation angeben.

3.7. AES-MixColumns-Beispiel

a. Berechnen Sie, in was die Spalte $(d4, bf, 4d, 30)$ durch MixColumns transformiert wird.

b. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem das Ergebnis mit der Inversen Matrix multiplizieren und wieder die Ausgangsspalte erhalten. Hinweis: Die inverse Matrix finden Sie in FIPS 197.

3.8. Multiplikation mit x in AES

3.9. A5/1

$$X = (x_0, x_1 \cdots, x_{18}) = (1010101010101010101) \tag{77}$$
$$Y = (y_0, y_1, \cdots, y_{21}) = (1100110011001100110011) \tag{78}$$
$$Z = (z_0, z_1, \cdots, z_{22}) = (11100001111000011110000) \tag{79}$$

---

while *True* **do**
- $m = maj(x_8, y_{10}, z_{10})$;
- **if** $x_8 = m$ **then**
  - $t = x13 \text{ xor } x16 \text{ xor } x17 \text{ xor } x18$;
  - shift t into X;
- **if** $y_{10} = m$ **then**
  - $t = y_{20} \text{ xor } y_{21}$;
  - shift t into Y;
- **if** $z_{10} = m$ **then**
  - $t = z_7 \text{ xor } z_{20} \text{ xor } z_{21} \text{ xor } z_{22}$;
  - shift t into Y;
- $k_i = x_{18} \text{ xor } y_{21} \text{ xor } z_{22}$;

---

a.

Rnd	x_8	y_{10}	z_{10}	m	X'	Y'	Z'	Bit
1	1	0	1	1	0101010101010101010*1*	1100110011001100110011	011100001111000011110000	1
2	0	0	1	0	0010101010101010101*0*	0110011001100110011001*1*	011100001111000011110000	0
3	1	1	1	1	1001010101010101010*1*	0011001100110011001100*1*	101110000111100001111000	0

b.

```
package ueb4;

public class A51 {
    ShiftRegister x, y, z;

    public A51() {
        x = new ShiftRegister(19,  349525);
        y = new ShiftRegister(22, 3355443);
        z = new ShiftRegister(23, 7401712);
    }

    public int maj(int i, int j, int k) {
        if ((i == 0 && j == 0) || (j == 0 && k == 0) || (i == 0 && k == 0))
            return 0;
        return 1;
    }

    public int next() {
        System.out.format("\t%d %d %d%n", x.get(8), y.get(10), z.get(10));
        int m = maj(x.get(8), y.get(10), z.get(10));

        System.out.println("M:" + m);

        if (m == x.get(8)) {
            int t = x.get(13) ^ x.get(16) ^ x.get(17) ^ x.get(18);
            x.push(t);
        }
        if (m == y.get(10)) {
            int t = y.get(20) ^ y.get(21);
            y.push(t);
        }

        if (m == z.get(10)) {
            int t = z.get(7) ^ z.get(20) ^ x.get(21) ^ x.get(22);
            z.push(t);
        }
        return (x.get(18) ^ y.get(21) ^ z.get(22));
    }

    @Override
    public String toString() {
        return "x: " + x + "\ny: " + y + "\nz: " + z;
    }
```

```
    public static void main(String[] args) {
        A51 c = new A51();

        System.out.println(c);

        for (int i = 0; i < 3; i++) {
            System.out.println(c.next());
            System.out.println(c);
        }
        System.out.println();
    }

    private static void checkBin(int i) {
        if (i != 0 && i != 1)
            throw new IllegalArgumentException();
    }

    class ShiftRegister {
        int reg;
        final int size;

        public ShiftRegister(int size, int content) {
            if (size >= 64)
                throw new IllegalArgumentException();
            this.size = size;
            reg = content;
        }

        public void push(int t) {
            checkBin(t);
            reg = (reg << 1) + t;
        }

        public int get(int i) {
            return (int) ((reg >> i) & 1);
        }

        @Override
        public String toString() {
            StringBuilder b = new StringBuilder();
            for (int i = 0; i < size; i++) {
                b.append(get(i));
            }
            return b.toString();
```

```
        }
    }
}
```

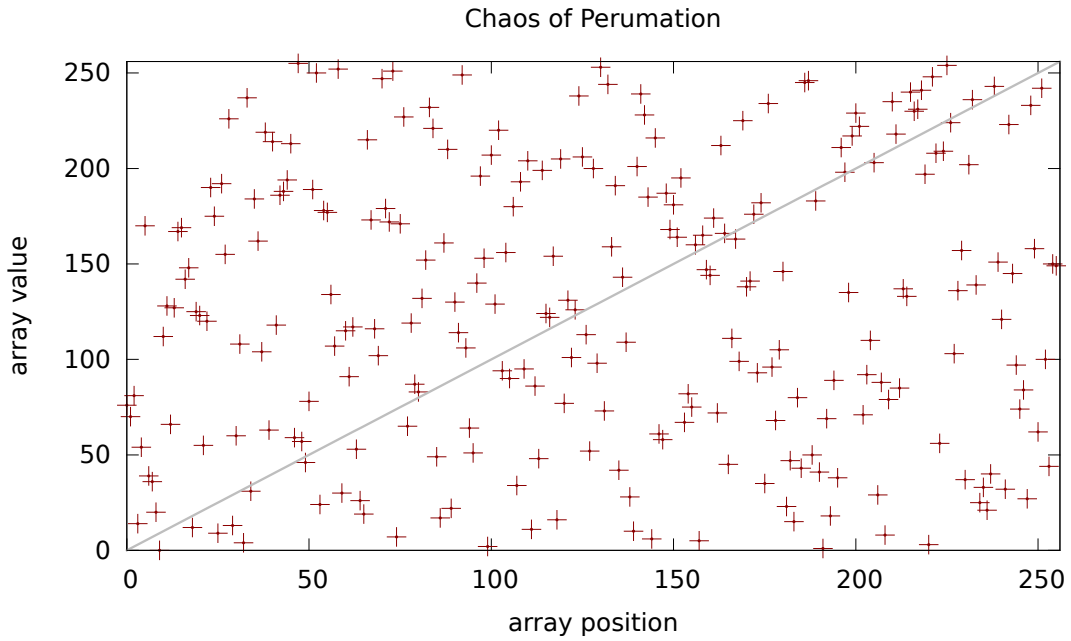
3.10. RC4

```
package ueb4;

import java.util.Arrays;

import com.panayotis.gnuplot.*;
import com.panayotis.gnuplot.plot.*;
import com.panayotis.gnuplot.style.*;
import com.panayotis.gnuplot.terminal.*;

public class RC4 {
    int[] k, s = new int[256];
    byte L;

    public RC4(int[] k2) {
        this.k = k2;
        L = (byte) k2.length;
        init();
    }

    private void init() {
        for (int i = 0; i < s.length; i++) {
            s[i] = (i % 256);
            assert s[i] >= 0;
        }
        int j = 0;
        for (int i = 0; i < s.length; i++) {
            j = (j + s[i] + k[i % L]) % 256;
            swap(s, j, i);
        }
    }

    private void swap(int[] b, int j, int i) {
        int t = b[i] % 256;
        b[i] = b[j];
        b[j] = t;
    }

    public void next(int[] ciph) {
```

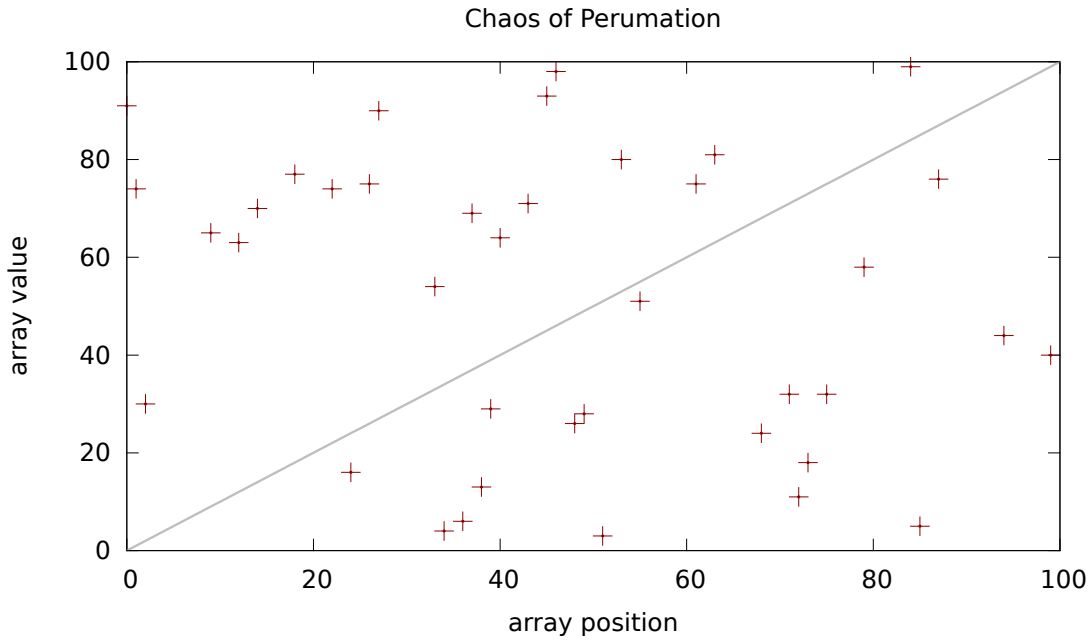
```
        int i = 0, j = 0;
        for (int n = 0; n < ciph.length; n++) {
            i = (i + 1) % 256;
            j = (j + s[i]) % 256;
            swap(s, i, j);
            int rand = s[(s[i] + s[j]) % 256];
            ciph[n] = rand;
        }
    }

    @Override
    public String toString() {
        return Arrays.toString(s);
    }

    private static void plot(String file, int k[]) {
        JavaPlot plot = new JavaPlot();
        double[][] data = new double[k.length][2];
        for (int i = 0; i < k.length; i++) {
            data[i][0] = i;
            data[i][1] = k[i];
        }

        plot.setTitle("Chaos of Perumation");
        plot.setTerminal(new FileTerminal("pdf", file));

        DataSetPlot dataP = new DataSetPlot(data);
        PlotStyle ps = new PlotStyle(Style.POINTS);
        ps.setLineType(NamedPlotColor.DARK_RED);
        dataP.setPlotStyle(ps);
        dataP.setTitle("");
        plot.addPlot(dataP);

        FunctionPlot dataL = new FunctionPlot("x");
        PlotStyle rp = new PlotStyle(Style.LINES);
        rp.setLineType(NamedPlotColor.GRAY);
        rp.setLineWidth(3);
        dataL.setPlotStyle(rp);
        dataL.setTitle("");
        plot.addPlot(dataL);

        plot.getAxis("x").setLabel("array position");
        plot.getAxis("x").setBoundaries(0, k.length);
        plot.getAxis("y").setLabel("array value");
```

```
        plot.getAxis("y").setBoundaries(0, k.length);

        // GNUPlot.getDebugger().setLevel(Debug.VERBOSE);
        plot.plot();
    }

    public static void main(String[] args) {
        int k[] = { 0x1A, 0x2B, 0x3C, 0x4D, 0x5E, 0x6F, 0x77 };
        RC4 rc4 = new RC4(k);
         System.out.println("S:"+rc4);
//       plot("beforerc4.pdf", rc4.s);
        int b[] = new int[100];
        rc4.next(b);
        plot("rc4-key-seq.pdf", b);
         System.out.println("S:" +rc4);
//       plot("afterrc4.pdf", rc4.s);
        System.out.println(Arrays.toString(b));
    }
}
```

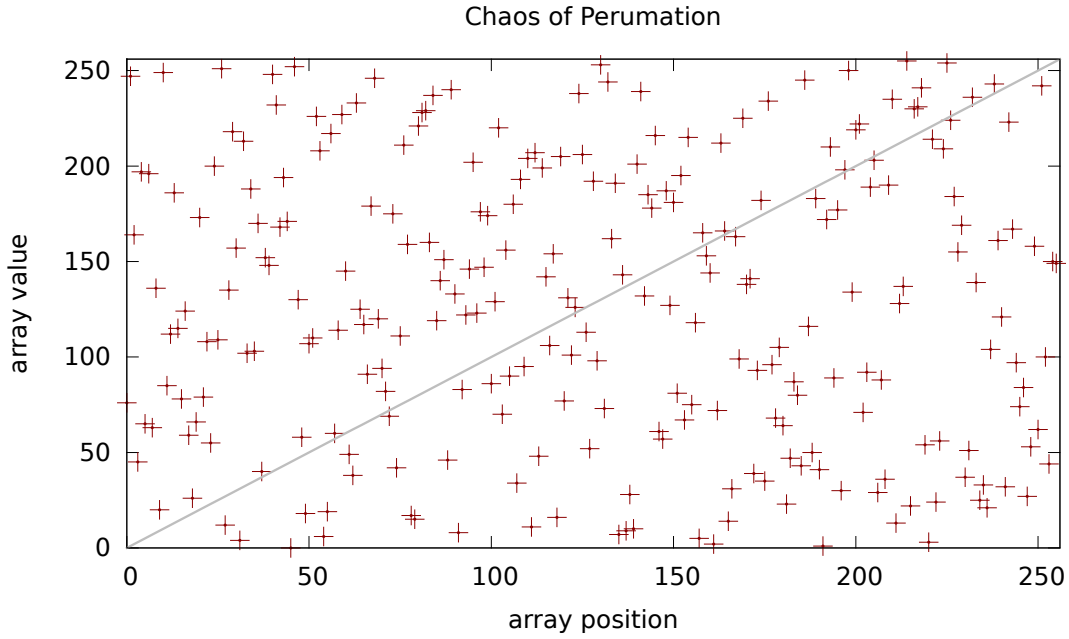
a. Listen Sie die Permuation S nach der Initialisierung auf.



b. Generieren Sie 100 Schlüsselbytes.



c. Listen Sie die Permuation S erneut auf.



4. Hashfunktionen und MACs

4.1. Funktionsweise von Hash-Funktionen

$$Y = 11110 \tag{80}$$
$$F: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2, \tag{81}$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 \text{ xor } x_4, x_2 \text{ xor } x_3) \tag{82}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	1	1	11
1	1	1	1	00
0	0	0	0	00

4.2. Kollisionen und Preimage-Angriffe

$$X = (X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

$$H(X) = nX_0 + (n-1)X_1 + (n-2)X_2 + \ldots + 2X_{n-2} + X_{n-1} \mod 256 = \sum_{i \geq 0}^{n} (n-i)X_i \mod 256$$

a. Berechnen Sie H(X) für die Nachricht "FHT4ever". Interpretieren Sie dabei jeden Buchstaben als seinen 8 Bit ASCII-Wert.

$$X = (70, 72, 84, 52, 101, 118, 101, 114) \tag{83}$$
$$H(X) = 8 \cdot 70 + 7 \cdot 72 + 6 \cdot 84 + 5 \cdot 52 + 4 \cdot 101 + 3 \cdot 118 + 2 \cdot 101 + 114 \tag{84}$$
$$= 560 + 504 + 504 + 260 + 404 + 354 + 202 + 114 \tag{85}$$
$$= 48 + 248 + 248 + 4 + 148 + 98 + 202 + 114 \tag{86}$$
$$= 86 \tag{87}$$

```
H = lambda x: sum([(len(x)-i)*ord(e)\%256 for i,e in enumerate(x)])\%256
```

b. Finden Sie eine andere (sinnvolle) Nachricht, die den gleichen Hashwert wie "FHT4ever" hat.

$$H(Uni4ever) = 86$$

c. Gegeben sei $h(X) = 42$, wobei $X = (X_0, X_1, X_2)$. Finden Sie ein $Y = (Y_0, Y_1, Y_2)$ mit $X \neq Y \wedge h(Y) = h(X)$.

d. Finden Sie eine weitere Kollision.

$$H(X) = 42 = (3X_1 + 2X_2 + X_1) \mod 256 \tag{88}$$

Folgende Tabelle gibt Tupeln $X = (X_0, X_1, X_2)$ mit $H(X) = 42$ an. Insgesamt existieren 65536 Kollision (ExhaustedSearch).

```
c = [ (x,y,z) for x in range(256)
            for y in range(256)
              for z in range(256)
                if (3*x+2*y+z) % 256==42 ]
print len(c)
```

X_1	X_2	X_3
96	166	190
96	167	188
96	168	186

4.3. Das Online-Auktionshaus

a. Denken Sie sich ein möglichst einfaches Verfahren aus, das auf einer Hash-Funktion beruht.

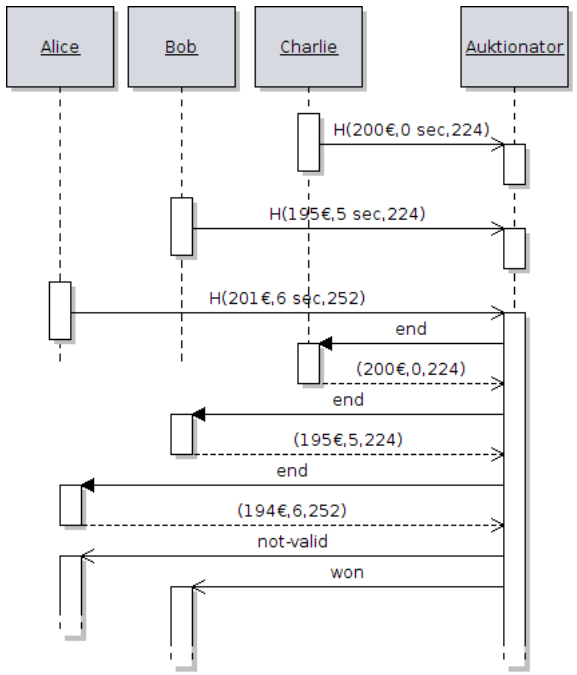
Ein Gebot ist ein Hashwert bestehend aus: Betrage, Timestamp und Nonce

$$H((bid \circ time \circ salt)) = Y$$

Die anderen Bieter können nicht errechnen welchen Betrag ein Bieter geboten hat, da die Umkehrung von H nicht möglich ist.

Sobald die Bieterrunde geschlossen wird, schickt jeder Bieter sein Gebot, Timestamp und Nonce zum Auktionator. Dieser kann nun die Hashwerte der Gebote überprüfen und den günstigen Bieter ermitteln.

Folgendes Bild zeigt ein Beispielablauf einer Auktion.



Im Beispiel sehen, dass Alices Gebot abgelehnt wird da

$$H(201 \circ \ldots) = H(196 \circ \ldots)$$

Sowie das Bob gewinnt, da er das günstigste Gebot abgeben hat.

b. Welche Angriffe gibt es trotzdem noch auf das Verfahren?

- Man-in-the-Middle Attake aufgrund fehlender Authentizität.
- Störungen des Übertragungskanals
- ohne Timetamp wäre Replayangriffe möglich
- ohne Salt wäre die Authentifizierung komplett ausgehebelt

4.4. Datenbankschutz durch Verschlüsselung und Hash-Funktionen

```
-- Alexander Weigl <weigla@fh-trier.de>
-- Date: 2011-05-02
-- Simple membership management with crypto functions on mysql
-- call: mysql -u <user> -p<password> < member.db.sql
--       for creation

drop database if exists krypt;
create database krypt;
use             krypt;

CREATE TABLE members (
  idx varchar(40)    not null primary key comment 'sha_1_key_of_lastname',
  data varchar(1000) not null unique      comment 'crypted_data_from_person'
);

DELIMITER //

CREATE FUNCTION getMember (lastname varchar(40) )
RETURNS varchar(256)
BEGIN
        DECLARE tmp VARCHAR(1000);
        SELECT data FROM members
        WHERE idx = SHA1(lastname) INTO tmp;
        RETURN AES_DECRYPT(tmp,lastname);
END;//

CREATE PROCEDURE saveMember(IN lastname varchar(40)
                          , IN data varchar(256)    )
```

```
BEGIN
        DECLARE k VARCHAR(40);
        DECLARE v VARCHAR(1000);

        SET v= AES_ENCRYPT(data, lastname);
        SET k= SHA1(lastname);

        INSERT INTO members VALUES (k, v);
END;//

delimiter ;

CALL saveMember("Weigl", "Alexander Weigl -- Hornstr 11 -- 54294 Trier");
CALL saveMember("Wambach", "Tim Wambach -- Somewhere ...");
CALL saveMember("Kuenkler", "Andreas Kuenkler -- Somewhere ...");
CALL saveMember("Knor", "Konstantin Knor -- Somewhere ...");
CALL saveMember("Yuen", "Timmy Wai Hong Yuen -- Am Bahnhof, im schlimmen Vier


SELECT * FROM members;

SELECT getMember("Weigl");
SELECT getMember("Yuen");
```

4.5. kryptologische Absicherung der Prüfungsvorleistung

a. Das Verfahren ist bisher kryptologisch nicht gesichert. Welche Angriffe sind denkbar?

- Identitätsdiebstahl, man verwendet den Zettel eines anderen
- Replikation des eigenen Scheines mit Fälschung des Ergebnisses
- Replikation eines anderen Scheines Fälschung der persönlichen Angaben

b. Sichern Sie das Verfahren kryptologisch ab. Der Professor soll die "Echtheit" der Bescheinigung möglichst einfach prüfen können.

(1) Auf dem Schein wird ein QR-Code abgedruckt der einen Hash mit den Angaben auf dem Schein und einen geheimen Saltwert beinhaltet. Dies kann mit einem Handy leicht geprüft. Überprüfung der Identität ist weiterhin erforderlich.
(2) Verfahren (1) kann auch als Hex-Zeichen aufgedruckt werden.
(3) $H(Matrikel, Bestanden, Salt) = (Matrikel + Bestanden + Salt \mod N)$