Obliczenia naukowe

Lista 2

Arkadiusz Ziobrowski
229728

1 Zadanie pierwsze

1.1 Opis problemu

Celem zadania była modyfikacja danych wejściowych zadania 5 z listy 1 i zaobserwowanie jaki wpływ na wyniki działania algorytmów liczenia iloczynu skalarnego mają takie zmiany.

1.2 Rozwiązanie

Do wykonania zadania zostały użyte zaimplementowane w zadaniu 5 z listy 1 algorytmy liczenia iloczynu skalarnego. Jedynymi wprowadzonymi zmianami były modyfikacje danych wejściowych. W wektorze x wartość $x_4 = 0.5772156649$ została zmieniona na $x'_4 = 0.577215664$, zaś z $x_5 = 0.3010299957$ została usunięta ostatnia 7, co dało wartość $x'_5 = 0.301029995$.

1.3 Wyniki i interpretacja

Wyniki algorytmów				
Nazwa algorytmu	Dane oryginalne		Dane zmodyfikowane	
	`Float32`	`Float64`	`Float32`	`Float64`
Algorytm 1	-0.4999443	1.0251881368296672e-10	-0.4999443	-0.004296342739891585
Algorytm 2	-0.4543457	-1.5643308870494366e-10	-0.4543457	-0.004296342998713953
Algorytm 3	-0.5	0.0	-0.5	-0.004296342842280865
Algorytm 4	-0.5	0.0	-0.5	-0.004296342842280865

W powyższej tabeli można zauważyć, iż mimo zmiany danych wejściowych, wyniki działania algorytmów liczenia iloczynu skalarnego nie zmieniły się dla arytmetyki `single`. Przyjrzyjmy się reprezentacji bitowej wartości x'_4 oraz x'_5.

x_4	0 01111110 00100111100010001101000
x'_4	0 01111110 00100111100010001101000
x_5	0 01111101 00110100010000010011011
x'_5	0 01111101 0011010001000001001101**0**

Identyczne wyniki działania algorytmów w arytmetyce `single` wynikają z precyzji tej arytmetyki. Reprezentacja bitowa wartości x_4 jest taka sama jak x'_4, a x_5 różni się od x'_5 na najmniej znaczącym bicie. Powoduje to, że obliczenia w arytmetyce `Float32` odbywają się na niemal identycznych wartościach, stąd też wystąpienie niezmienionych wyników, mimo modyfikacji danych wejściowych.

Natomiast dla arytmetyki `double` różnice w wynikach są doskonale widoczne. Dla Algorytmu 3 oraz Algorytmu 4 nie pojawiają się już wartości zerowe. Otrzymane wyniki różnią się jednak wciąż w dużym stopniu od wyników oczekiwanych. Można zaobserwować również pewną stabilizację wyników po zmianie danych wejściowych. Wyniki działania algorytmów są podobne, w przeciwieństwie do wyników odpowiadających danym oryginalnym. Dla powyższych danych jedynie zmiana x'_4 na x_4 oraz x'_5 na x_5 spowodowała duże odchylenia wyników od ustabilizowanych wartości.

1.4 Wnioski

Małe zmiany danych wejściowych dla arytmetyki `single` nie zawsze muszą powodować zmiany w wynikach obliczeń. Spowodowane jest to precyzją tej arytmetyki. W przypadku arytmetyki `double` widoczne jest, że małe zmiany danych wejściowych podczas obliczeń na wektorach niemal prostopadłych powodują znaczne odchylenia wyników. Obliczanie iloczynu skalarnego dla $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, gdzie niektóre $sgn(x_i) \neq sgn(y_i)$ jest zatem źle uwarunkowane, gdyż małe zmiany danych powodują duże odkształcenia wyników.

2 Zadanie drugie

2.1 Opis problemu

Celem zadania było narysowanie wykresów funkcji $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch programach do wizualizacji. Następnie należało porównać otrzymane wykresy z wyliczoną granicą funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

2.2 Rozwiązanie

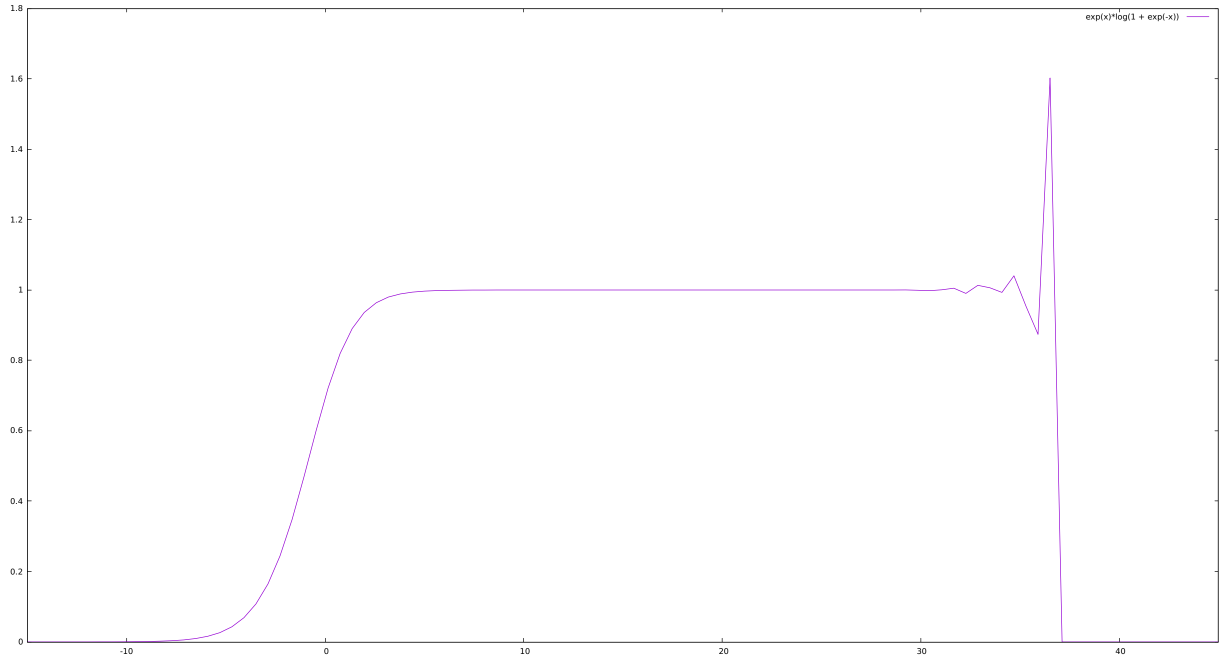
Wykresy wygenerowane zostały przy użyciu narzędzi do wizualizacji *gnuplot* oraz *Gadfly*. W celu wygenerowania wykresu funkcji w programie *gnuplot* została wykonana następująca komenda:

```
gnuplot> plot [-15 :  45] exp(x)*log(1 + exp(-x))
```

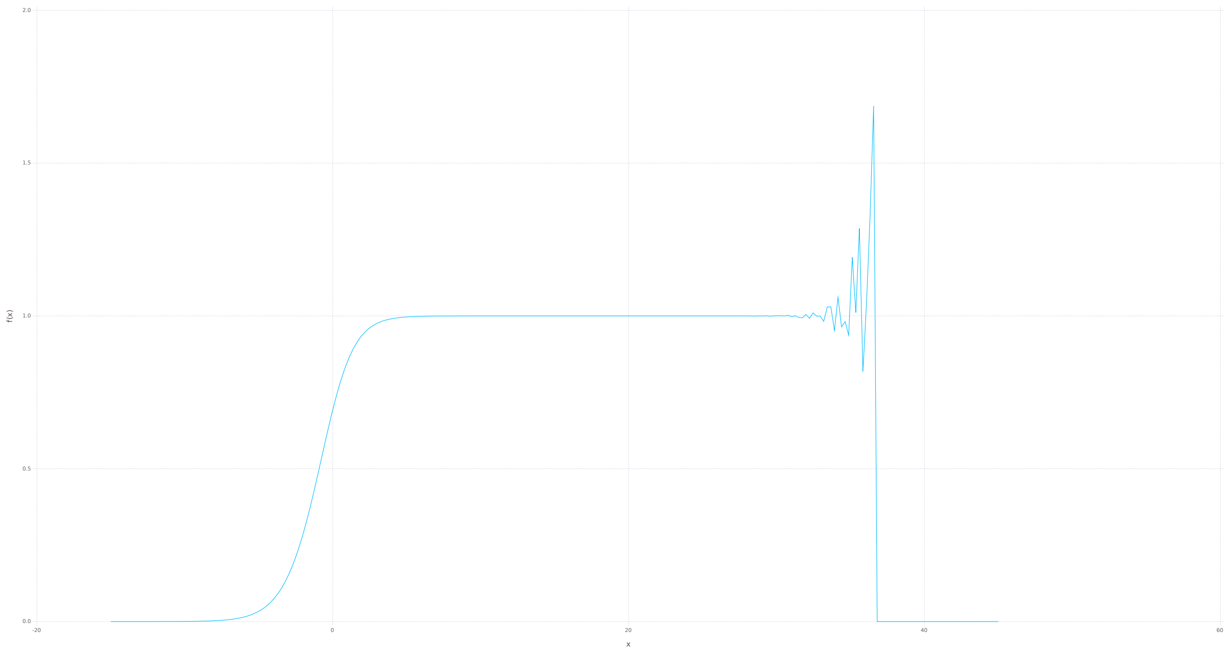
W celu wygenerowania wykresu funkcji przy użyciu narzędzia *Gadfly* został napisany program w języku `Julia`.

```
using Gadfly
f(x) = e^x * log(1 + e^-x)
draw(PDF("gadfly.pdf", 654mm, 350mm), plot(f, -15, 45))
```

2.3 Wyniki i interpretacja



Rysunek 1: $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w *gnuplot*



Rysunek 2: $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w *Gadfly*

Wyliczona granica $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Na wykresach widoczne jest, że zachowanie funkcji różni się od wartości granicy. Zbieżność funkcji na wykresie do 0 jest spowodowane przez $ln(1 + e^{-x})$. Dla dużych x wartość $1 + e^{-x} = 1$, natomiast $ln(1) = 0$. Stąd dla dużych x $f(x) = e^x ln(1) = e^x * 0 = 0$. Również widoczne przed gwałtownym spadkiem do 0 zaburzenie jest spowodowane redukcją cyfr znaczących dla $1 + e^{-x}$.

2.4 Wnioski

Wykresy niektórych funkcji nie mogą być przedstawione dokładnie na całym przedziale z powodu występowania zjawiska redukcji cyfr znaczących. Stąd też różnica między wartością granicy funkcji, a rzeczywistym jej zachowaniem w reprezentacji w artymetyce `double`. Należy być wyczulonym na występowanie tego zjawiska, gdyż poprawne z matematycznego punktu widzenia założenia, nie zawsze znajdują pokrycie w realizacji komputerowej.

3 Zadanie trzecie

3.1 Opis problemu

Celem zadania było rozwiązanie układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dla $\mathbf{A}$ będącego macierzą Hilberta stopnia n oraz macierzą losową stopnia n o zadanym wskaźniku uwarunkowania. Układy miały być rozwiązane za pomocą dwóch algorytów: eliminacji Gaussa oraz $x = A^{-1}b$.

3.2 Rozwiązanie

Rozwiązywanie układu równań liniowych zaczynamy od wygenerowania macierzy Hilberta, bądź macierzy losowej przy użyciu odpowiednio funkcji `hilb(n)` i `matcond(n, c)`, gdzie `n` to stopień macierzy, a `c` zadany wskaźnik uwarunkowania. Następnie tworzymy $x = (1, ..., 1)^T$ i $b = (0, ..., 0)^T$ przy użyciu funkcji `ones(n)` oraz `zeros(n)` z języka `Julia`. Wektor prawych stron otrzymujemy poprzez wykonanie `b = A * x`. Teraz przystępujemy do rozwiązywania układu równań liniowych. Macierze, na których operujemy muszą być nieosobliwe. Macierz Hilberta jest nieosobliwa, ale w przypadku macierzy losowej dodatkowo sprawdzamy czy $det(A) \neq 0$. Układy równań rozwiązujemy poprzez zastosowanie eliminacji Gaussa (w języku `Julia` używamy `x = A\b`, ponieważ operator \ jest dociążony) oraz $x = A^{-1}b$.

3.3 Wyniki i interpretacja

Przez δ oznaczony jest błąd względny liczony jako $\frac{||x-x'||}{||x||}$.

Macierz Hilberta				
n	rank(A)	cond(A)	$\delta(A\backslash b)$	$\delta(A^{-1}b)$
1	1	1.0	0.0	0.0
2	2	19.28147006790397	5.661048867003676e-16	1.4043333874306803e-15
3	3	524.0567775860644	8.022593772267726e-15	0.0
4	4	15513.73873892924	4.137409622430382e-14	0.0
5	5	476607.25024259434	1.6828426299227195e-12	3.3544360584359632e-12
6	6	1.4951058642254665e7	2.618913302311624e-10	2.0163759404347654e-10
7	7	4.75367356583129e8	1.2606867224171548e-8	4.713280397232037e-9
8	8	1.5257575538060041e10	6.124089555723088e-8	3.07748390309622e-7
9	9	4.931537564468762e11	3.8751634185032475e-6	4.541268303176643e-6
10	10	1.6024416992541715e13	8.67039023709691e-5	0.0002501493411824886
11	11	5.222677939280335e14	0.00015827808158590435	0.007618304284315809
12	11	1.7514731907091464e16	0.13396208372085344	0.258994120804705
13	11	3.344143497338461e18	0.11039701117868264	5.331275639426837
14	12	6.200786263161444e17	1.4554087127659643	8.71499275104814
15	12	3.674392953467974e17	4.696668350857427	7.344641453111494
16	12	7.865467778431645e17	54.15518954564602	29.84884207073541
17	12	1.263684342666052e18	13.707236683836307	10.516942378369349
18	12	2.2446309929189128e18	9.134134521198485	7.575475905055309
19	13	6.471953976541591e18	9.720589712655698	12.233761393757726
20	13	1.3553657908688225e18	7.549915039472976	22.062697257870493

Macierz Hilberta jest przykładem macierzy bardzo źle uwarunkowanej. Wskaźnik uwarunkowania dla macierzy Hilberta H_n wynosi dla $cond(H_6) = 1.5e7$, a dla $cond(H_{10}) = 1.5e13$. Im większy wskaźnik uwarunkowania tym wyniki stają się mniej wiarygodne. Jak widać w powyższej tabeli, wskaźnik uwarunkowania dla macierzy Hilberta rośnie bardzo szybko, przez co nawet dla niewielkich n rozwiązania stają się niepoprawne. Liczone błędy względne rosną bardzo szybko dla wyników działania obu algorytmów.

Macierz losowa o zadanym wskaźniku uwarunkowania				
n	rank(A)	cond(A)	$\delta(A\backslash b)$	$\delta(A^{-1}b)$
5	5	1.0	1.719950113979703e-16	1.4043333874306804e-16
5	5	10.0	2.6272671962866383e-16	1.719950113979703e-16
5	5	1000.0	1.0295066439664222e-14	1.0173423748423966e-14
5	5	1.0e7	4.330021001082515e-11	1.0732962350934844e-10
5	5	1.0e12	2.522301895949992e-6	4.264961199760036e-6
5	4	1.0e16	0.004509893783428691	0.06702378309227254
10	10	1.0	3.2368285245694683e-16	3.528343968566428e-16
10	10	10.0	2.673771110915334e-16	1.7901808365247238e-16
10	10	1000.0	1.0870438501801568e-14	7.303883810382728e-15
10	10	1.0e7	1.6290627639144684e-10	2.1344738145604099e-10
10	10	1.0e12	6.221212756561689e-16	7.635352669238318e-6
10	9	1.0e16	4.496060575246782e-16	0.07733980419227864
20	20	1.0	7.842607901964165e-16	4.896322696446008e-16
20	20	10.0	2.8413902102441497e-16	5.283775210381055e-16
20	20	1000.0	1.0986468849098833e-14	9.99348740935716e-15
20	20	1.0e7	2.4285867112639743e-10	2.557721613880287e-10
20	20	1.0e12	2.9043168599769948e-5	2.724071818393436e-5
20	19	1.0e16	0.2069677081502989	0.26486564253173717

Macierz losowa o zadanym wskaźniku uwarunkowania potwierdza obserwacje zależności między wskaźnikiem uwarunkowania a δ z macierzy Hilberta. Można tutaj dokładnie obejrzeć wpływ wzrastającego, kontrolowanego wskaźnika uwarunkowania na generowane błędy względne. Wraz ze zwiększeniem $cond(A)$ rosną błędy względne algorytmów rozwiązywania układu równań liniowych dla macierzy o zadanym n.

3.4 Wnioski

Macierze o wysokim wskaźniku uwarunkowania generują duże błędy w obliczeniach. Pojawienie się macierzy Hilberta podczas obliczeń może sprawić, że otrzymane wyniki będą niewiarygodne. Na szczególną uwagę zasługuje stopień „złośliwości” macierzy Hilberta. Dla macierzy H_{20} wskaźnik uwarunkowania wynosi aż $1.3553657908688225e18$.

4 Zadanie czwarte

4.1 Opis problemu

Celem zadania było sprawdzenie zachowania pierwiastków wielomianu Wilkinsona dla wielomianów postaci naturalnej:

$$P(x) = x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} + 1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^{9} + 63030812099294896x^{8} - 311333643161390640x^{7} + 1206647803780373360x^{6} - 3599979517947607200x^{5} + 8037811822645051776x^{4} - 12870931245150988800x^{3} + 13803759753640704000x^{2} - 8752948036761600000x + 2432902008176640000$$

oraz postaci iloczynowej:

$$p(x) = (x-20)(x-19)(x-18)(x-17)(x-16)(x-15)(x-14)(x-13)(x-12)(x-11)(x-10)(x-9)(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$$

Drugą częścią zadania było wprowadzenie zaburzenia dla wielomianu w postaci naturalnej dla współczynnika przy x^{19} i sprawdzenie zmiany zachowania pierwiastków wielomianu.

4.2 Rozwiązanie

Badanie zachowania pierwiastków wielomianu Wilkinsona zaczynamy od stworzenia postaci naturalnej wielomianu w języku `Julia`. Współczynniki wielomianu przechowujemy w tablicy. Wielomian Wilkinsona w postaci naturalnej tworzymy poprzez użycie konstruktora `Poly` z pakietu `Polynomials`. Postać iloczynową tworzymy przy użyciu funkcji `poly`. Ważne jest, aby przekazywane do metod `poly` oraz `Poly` współczynniki były uporządkowane od współczynników stojących przy najniższych potęgach x. Pierwiastki wielomianu wyliczamy przy użyciu funkcji `roots`, a wartość wielomianu dla danego argumentu x za pomocą metody `polyval`.

4.3 Wyniki i interpretacja

W poniższej tabeli przez z_k zostały oznaczone wyliczone pierwiastki wielomianu, a przez k dokładne pierwiastki.

z_k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
0.9999999999996989	36352.0	38400.0	3.0109248427834245e-13
2.0000000000283182	181760.0	198144.0	2.8318236644508943e-11
2.9999999995920965	209408.0	301568.0	4.0790348876384996e-10
3.9999999837375317	3.106816e6	2.844672e6	1.626246826091915e-8
5.000000665769791	2.4114688e7	2.3346688e7	6.657697912970661e-7
5.999989245824773	1.20152064e8	1.1882496e8	1.0754175226779239e-5
7.000102002793008	4.80398336e8	4.78290944e8	0.00010200279300764947
7.999355829607762	1.682691072e9	1.67849728e9	0.0006441703922384079
9.002915294362053	4.465326592e9	4.457859584e9	0.002915294362052734
9.990413042481725	1.2707126784e10	1.2696907264e10	0.009586957518274986
11.025022932909318	3.5759895552e10	3.5743469056e10	0.025022932909317674
11.953283253846857	7.216771584e10	7.2146650624e10	0.04671674615314281
13.07431403244734	2.15723629056e11	2.15696330752e11	0.07431403244734014
13.914755591802127	3.65383250944e11	3.653447936e11	0.08524440819787316
15.075493799699476	6.13987753472e11	6.13938415616e11	0.07549379969947623
15.946286716607972	1.555027751936e12	1.554961097216e12	0.05371328339202819
17.025427146237412	3.777623778304e12	3.777532946944e12	0.025427146237412046
17.99092135271648	7.199554861056e12	7.1994474752e12	0.009078647283519814
19.00190981829944	1.0278376162816e13	1.0278235656704e13	0.0019098182994383706
19.999809291236637	2.7462952745472e13	2.7462788907008e13	0.00019070876336257925

Powyższa tabela przedstawia wyniki dla wielomianu Wilkinsona o niezaburzonych współczynnikach. Można zauważyć, że wartości wielomianów w postaci naturalnej i iloczynowej różnią się dla pewnych z_k. Widoczna jest również różnica między pierwiastkami wyliczonymi, a rzeczywistymi. Wielomian Wilkinsona jest bardzo czuły na odchylenia na poziomie przekazywanych argumentów. Oczekiwanymi wartościami $P(z_k)$ oraz $p(z_k)$ były zera, natomiast otrzymane wyniki znacznie odbiegają od zera. Dla $z_k \approx 20$ jest to odchylenie nawet o $2.74e13$. Zauważyć można także, że nawet stosunkowo niewielkie odchylenia danych wejściowych (dla $z_k \approx 1$ błąd jest na poziomie 13 miejsc po przecinku, co widać w kolumnie $|z_k - k|$) potrafią znacznie wpłynąć na wynik końcowy.

z'_k	$\lvert P(z'_k)\rvert$	$\lvert p(z'_k)\rvert$	$\lvert z'_k - k\rvert$
0.9999999999998357 + 0.0im	20992.0	22016.0	1.6431300764452317e-13
2.0000000000550373 + 0.0im	349184.0	365568.0	5.503730804434781e-11
2.99999999660342 + 0.0im	2.221568e6	2.295296e6	3.3965799062229962e-9
4.000000089724362 + 0.0im	1.046784e7	1.0729984e7	8.972436216225788e-8
4.99999857388791 + 0.0im	4.2535936e7	4.3303936e7	1.4261120897529622e-6
6.000020476673031 + 0.0im	2.04793344e8	2.06120448e8	2.0476673030955794e-5
6.99960207042242 + 0.0im	1.754868736e9	1.757670912e9	0.00039792957757978087
8.007772029099446 + 0.0im	1.852128e10	1.8525486592e10	0.007772029099445632
8.915816367932559 + 0.0im	1.37168464896e11	1.37174317056e11	0.0841836320674414
10.095455630535774 - 0.6449328236240688im	1.4912572850824043e12	1.4912633816754019e12	0.6519586830380406
10.095455630535774 + 0.6449328236240688im	1.4912572850824043e12	1.4912633816754019e12	1.1109180272716561
11.793890586174369 - 1.6524771364075785im	3.2960224849741504e13	3.2960214141301664e13	1.665281290598479
11.793890586174369 + 1.6524771364075785im	3.2960224849741504e13	3.2960214141301664e13	2.045820276678428
13.992406684487216 - 2.5188244257108443im	9.545941965367332e14	9.545941595183662e14	2.5188358711909045
13.992406684487216 + 2.5188244257108443im	9.545941965367332e14	9.545941595183662e14	2.7128805312847097
16.73074487979267 - 2.812624896721978im	2.7420894080997828e16	2.7420894016764064e16	2.9060018735375106
16.73074487979267 + 2.812624896721978im	2.7420894080997828e16	2.7420894016764064e16	2.825483521349608
19.5024423688181 - 1.940331978642903im	4.252502487879955e17	4.2525024879934694e17	2.454021446312976
19.5024423688181 + 1.940331978642903im	4.252502487879955e17	4.2525024879934694e17	2.004329444309949
20.84691021519479 + 0.0im	1.3743733195398482e18	1.3743733197249713e18	0.8469102151947894

Powyższa tabela przedstawia wyniki dla wielomianu Wilkinsona o zaburzonych współczynnikach. Wprowadzone zostało niewielkie zaburzenie przy x^{19}. Współczynnik -210 został pomniejszony o 2^{-23}. Przez tak niewielkie zaburzenie współczynnika zaczęły pojawiać się zera zespolone. W przypadku obliczeń wartości $P(z'_k)$ oraz $p(z'_k)$ błędy generowane są znacznie szybciej niż dla niezaburzonych wartości.

Pokazuje to w jak dużym stopniu niewielkie zmiany danych wejściowych są w stanie zaburzyć wynik końcowy.

4.4 Wnioski

Problem wyznaczania pierwiastków wielomianu Wilkinsona jest źle uwarunkowany ze względu na zaburzenia współczynników. Nawet niewielkie odchylenia danych wejściowych potrafią całkowicie zaburzyć wyniki, co sprawia, że obliczenia na takim wielomianie są niewykonywalne.

5 Zadanie piąte

5.1 Opis problemu

Celem zadania było przeprowadzenie symulacji modelu wzrostu populacji opisanego następującym równaniem rekurencyjnym:

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n) \text{ dla } n = 0, 1, ...$$

Pierwsza część zadania polegała na przeprowadzeniu 40 iteracji powyższego wyrażenia dla zadanych danych startowych, a następnie porównanie wyników dla analogicznych iteracji, jednak z wprowadzeniem obcięcia wyniku po 10 iteracji w arytmetyce `Float32`.

Druga część zadania polegała na przeprowadzeniu 40 iteracji powyższego wyrażenia dla arytmetyk `single` i `double`.

5.2 Rozwiązanie

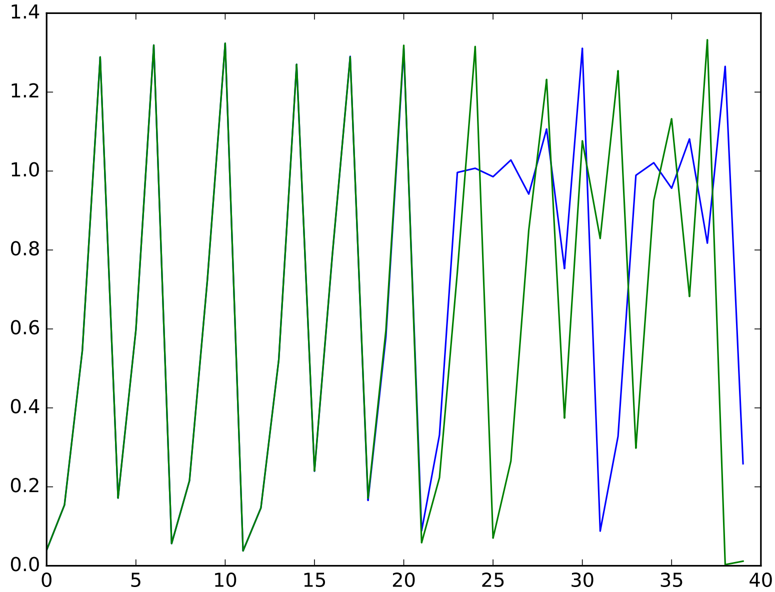
Do przeprowadzenia symulacji użyte zostało podane w opisie problemu wyrażenie. Kolejne wartości wyrażenia, począwszy od $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ były wyliczane iteracyjnie, a wartości p_n były zapisywane w tablicy. Tablica ta służyła potem do odtworzenia kolejnych wartości wyrażenia. Obcięcie wyniku po 10 iteracjach w pierwszej części zadania zostało wykonane przy użyciu funkcji bibliotecznej `trunc` z języka `Julia`.

5.3 Wyniki i interpretacja

n	p_n	p_n z obcięciem
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726	0.5450726
4	1.2889781	1.2889781
5	0.1715188	0.1715188
6	0.5978191	0.5978191
7	1.3191134	1.3191134
8	0.056273222	0.056273222
9	0.21559286	0.21559286
10	0.7229306	**0.722**
11	1.3238364	1.3241479
12	0.037716985	0.036488414
13	0.14660022	0.14195944
14	0.521926	0.50738037
15	1.2704837	1.2572169
...	...	...
20	0.5799036	1.3096911
...	...	...
25	1.0070806	1.0929108
26	0.9856885	0.7882812
...	...	...
30	0.7529209	1.3191822
31	1.3110139	0.05600393
...	...	...
35	1.021099	0.034241438
36	0.95646656	0.13344833
37	1.0813814	0.48036796
38	0.81736827	1.2292118
39	1.2652004	0.3839622
40	0.25860548	1.093568

Do iteracji dziesiątej wartości p_n z obu kolumn są sobie równe, co jest oczywiste. Wprowadzenie obcięcia w iteracji dziesiątej zaczyna powodować propagację błędu. Wartości w bliskich dziesiątej iteracjach różnią się nieznacznie, co jest spowodowane utratą dokładności. Jednakże w wyższych iteracjach propagacja błędu wprowadzonego w dziesiatej iteracji jest już tak silna, że wyniki są zupełnie ze sobą nieskorelowane. Jest to zjawisko opisywane przez Lorenza jako *chaos deterministyczny*, czyli *niemożność przewidywania*[1]. Powyższa symulacja jest przykładem sprzężenia zwrotnego, w którym dane wyjściowe stanowią dane wejściowe dla dalszych obliczeń. Błąd obliczeniowy w wyniku powoduje zatem jego akumulację w dalszych obliczeniach.

[1] Eksperyment Lorenza został opisany w książce "Granice chaosu. Fraktale, część 1"



Rysunek 3: Wykres wyników iteracji dla `Float32` (niebieski) i `Float64` (zielony)

Wyniki drugiej części zadania zostały przedstawione na powyższym wykresie. Dobrze widoczny jest moment, w którym iteracje dla arytmetyki `Float32` i `Float64` zaczynają dawać różne rezultaty. Dzieje się tak w okolicach 21. iteracji, kiedy dokładność arytmetyki potrzebna na zapisanie wyników wyrażenia rekurencyjnego staje się niewystarczająca, przez co propagacja błędów daje dla tych dwóch iteracji zupełnie nieskorelowane wyniki. Niższa precyzja arymetyki `single` spowodowała znacznie szybszą akumulację błędu.

5.4 Wnioski

Proces sprzężenia zwrotnego jest niestabilny, czyli niewielkie błędy popełnione w początkowym stadium procesu kumulują się w jego kolejnych stadiach. Taka propagacja błędu dla modelu wzrostu populacji jest spowodowana charakterystyką arytmetyk zmiennopozycyjnych `single` i `double`, na których pracowaliśmy. Błąd wprowadzony na wyjściu stadium procesu będzie dalej kumulowany, przez co kolejne wyniki będą coraz bardziej niewiarygodne. Sposobem chwilowego opóźnienia zbyt dużej akumulacji błędu jest podwyższenie precyzji arytmetyki, jednak nie jest to rozwiązanie wystarczające, gdyż propagowany błąd spowoduje występowanie niepoprawnych wyników w dalszych stadiach procesu.

6 Zadanie szóste

6.1 Opis problemu

Celem zadania było przeprowadzenie eksperymentów dla następującego równania rekurencyjnego:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1, ...$$

oraz dla zadanych serii danych wejściowych. Eksperymenty polegały na wykonaniu 40 iteracji powyższego wyrażenia i zaobserwowania zachowania generowanych ciągów w arytmetyce `Float64`.

6.2 Rozwiązanie

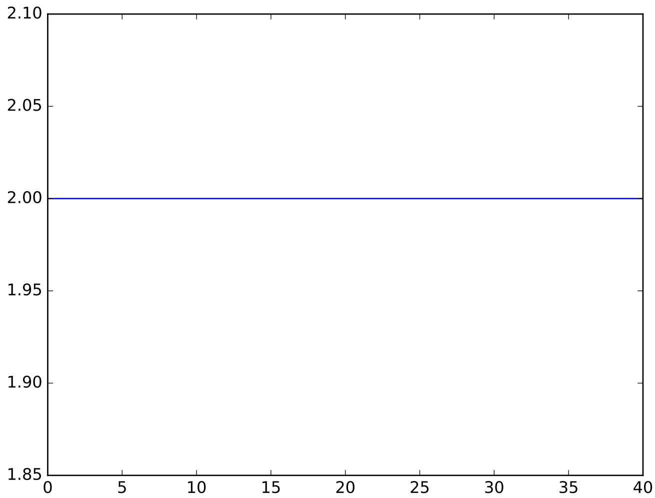
Do przeprowadzenia eksperymentów zostało użyte wyrażenie podane w opisie problemu. Kolejne wartości wyrażenia były generowane iteracyjnie, a kolejne wyniki zostały zapisane w tablicy w celu ich późniejszego odtworzenia.

6.3 Wyniki i interpretacja

Dla zadanych danych wejściowych eksperymentów można zaobserwować dwa zjawiska: niestabilności związanej ze sprzężeniem zwrotnym oraz stabilizacji układu sprzężenia zwrotnego.

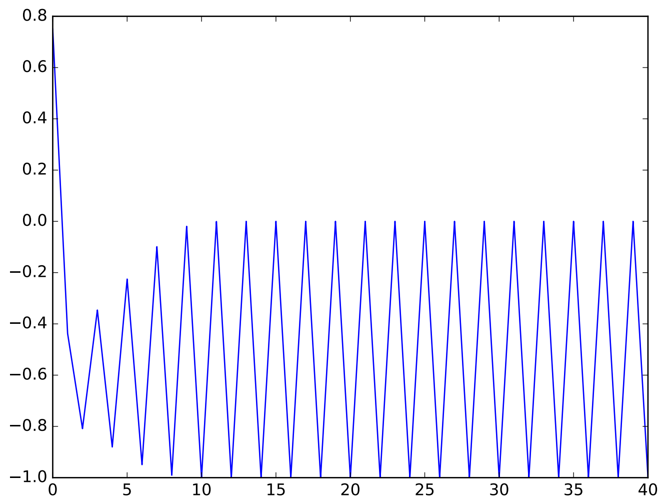
Zacznijmy od omówienia zjawiska stabilizacji układu sprzężenia zwrotnego. Sytuację tę można zaobserwować dla eksperymentów: 1, 2, 4, 5, 6 i 7, jednak z niewielkimi różnicami.

Przykładowo dla eksperymentu: 2. $c = -2$ i $x_0 = 2$ stabilizacja układu sprzężenia zwrotnego jest już widoczna od samego początku iteracji.

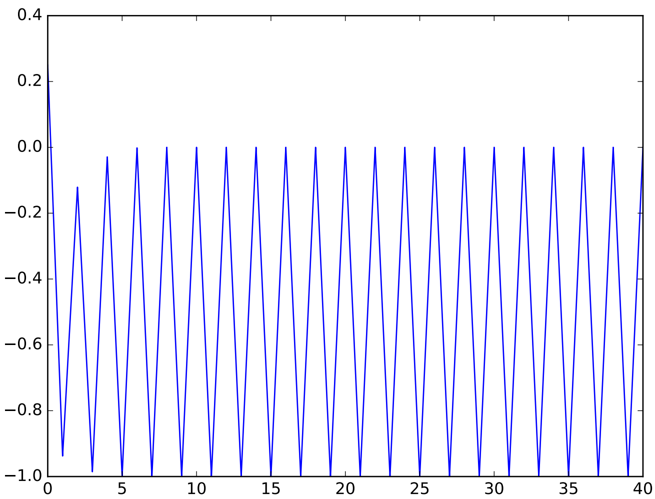


Rysunek 4: 40 iteracji $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla $n = 0, 1, ...$ dla $c = -2$ i $x_0 = 2$

Natomiast dla eksperymentów 6. $c = -1$ i $x_0 = 0.75$ i 7. $c = -1$ i $x_0 = 0.25$ układ sprzężenia zwrotnego wchodzi w stan idealnie stabilny dopiero od pewnej iteracji.



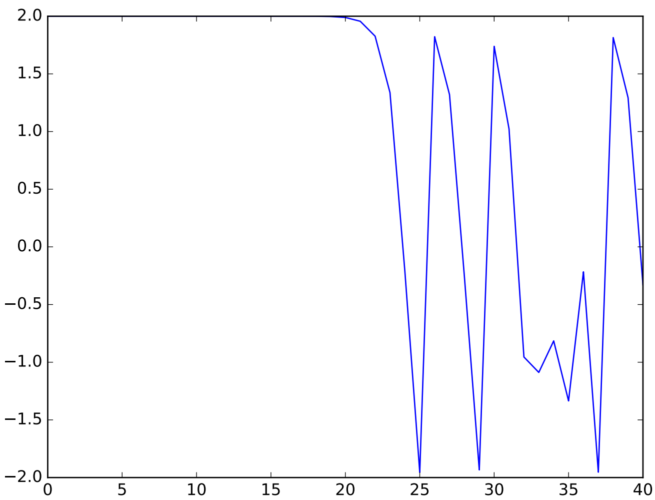
Rysunek 5: 40 iteracji $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla $n = 0, 1, ...$ dla $c = -1$ i $x_0 = 0.75$



Rysunek 6: 40 iteracji $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla $n = 0, 1, ...$ dla $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

Na widocznych powyżej wykresach stabilizacja układu sprzężenia zwrotnego charakteryzuje się występowaniem przewidywalnych wartości w regularnych interwałach. Jest to swoiste uporządkowanie chaosu.

Dla zadanych eksperymentów pojawia się również niestabilność, podobnie jak w zadaniu 5. Dla eksperymentu 3. $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$ błędy wprowadzone w danych wyjściowych są przekazywane wraz z nimi jako dane wejściowe, co powoduje ich akumulację. Jest to doskonale widoczne na poniższym wykresie.



Rysunek 7: 40 iteracji $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla $n = 0, 1, ...$ dla $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$

Od pewnej iteracji wartośc przestają być uporządkowane i stają się nieprzewidywalne. Jest to spodowane akumulacją błędu, wprowadzonego już w początkowych iteracjach.

6.4 Wnioski

Problem ten pozwolił na zaobserwowanie dwóch zachowań układów sprzężenia zwrotnego: stabilizacji oraz niestabilności. Stabilizację można było zaobserwować jako powtarzanie się przewidywalnych wyników, zaś niestabilność jako generowanie błędnych wyników, spowodowane niewielkimi błędami popełnionymi w początkowych stadiach obliczania wartości wyrażenia. Podobnie jak w zadaniu 5 wprowadzona niestabilność jest skutkiem precyzji arytmetyki `double`, która była używana do przeprowadzanych w zadaniu obliczeń. Liczba miejsc po przecinku, potrzebnych do przedstawienia kolejnych wyników, zwiększała się, co uniemożliwiało otrzymanie poprawnych wyników.