3ª P.C ANALISI II

- Limite funz conv;
- Limite funz div;
- Teorema, limite funz composte;
- Teorema delle restrizioni;
- Def. Continuità in $\mathbb{R}^2$;
- Def. Continuità funz composte in $\mathbb{R}^2$;
- Teorema di Weierstrass;
- Def. Derivate parziali;
- Def. Gradiente;
  - Derivate Seconde;
- Teorema, lemma di Schwarz;
- Def. Differenziabilità in (x_0, y_0); [Derivate totali];
- Teorema, C.N. per la differenziabilità;
  - DIM (a);
  - DIM (b);
- Teorema del Differenziale totale (C.S.);
  - DIM;
- Teorema sulla derivazione delle funz composte;
- Def. Derivate direzionali;
  - Teorema (se f è diff $\Rightarrow \exists$ la der. direzionale);
    - DIM.;
- Def. estremo relativo;
- Teorema di Fermat;
  - DIM;
- Def. Punto di sella;
- Def. Hessiano;
- Teorema, CN del 2° Ordine;
- Teorema, C.S. 2° Ordine;
  - Schema;
- Def. Estremi Assoluti;

Def: Limite funzione convergente

Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in DA$, $l \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap A, \ (x,y) \neq (x_0,y_0) \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Def: Limite funzione divergente

Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in DA$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \ (o -\infty) \quad \text{se}$$

$$\forall k > 0 \ \exists \delta > 0 : (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap A, \ (x,y) \neq (x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) > k \ (o < k)$$

Teorema, limite delle funzioni composte

Ipotesi:

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in DA$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: A \to I$

allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0$

$$\exists \delta > 0 : g(x,y) \neq t_0 \ \forall (x,y) \in A \cap I_\delta(x_0,y_0), \ (x,y) \neq (x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} f(t) = l$$

Tesi:

posto $F(x,y) = f(g(x,y))$ con $F: A \to \mathbb{R}$ si ha

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

Se t_0 è un numero finito $\Rightarrow$ t_0 è un punto di accumulazione per A;

Se $t_0 = +\infty \ (o -\infty)$ $\Rightarrow$ I non è limitato;

Teorema delle restrizioni:

— Ipotesi: —

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in DA$, $E \subseteq A$ tale che $(x_0, y_0) \in DE$...

allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

— Tesi: —

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E}(x,y) = l$ $\quad \Rightarrow$ Il viceversa non è vero;

- Se una funzione tende ad un certo l $\Rightarrow$ tutte le sue restrizioni tenderanno ad l;
- Se due restrizioni hanno limiti diversi $\Rightarrow$ il limite della funzione non esiste;
- Se due o più restrizioni hanno lo stesso limite $\Rightarrow$ Forse il limite esiste ed è quello, bisogna dimostrarlo;

Def: Continuità in $\mathbb{R}^2$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$

allora f è continua in (x_0, y_0) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x,y) \in I_\delta(x_0, y_0) \cap A \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

- Se (x_0, y_0) è isolato $\Rightarrow$ f è continua in (x_0, y_0);
- Se $(x_0, y_0) \in DA$ $\Rightarrow$ f è continua in (x_0, y_0) se e solo se il limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$;

Def: Continuità delle funzioni composte in $\mathbb{R}^2$

Consideriamo le funzioni composte del tipo $f(g_1(t), g_2(t))$...

— Ipotesi: —

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, g_1 e $g_2: (a,b) \to \mathbb{R}$ continue in $t_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow$ se $(g_1(t), g_2(t)) \in A \ \ \forall t \in (a,b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è continua in $(g_1(t_0), g_2(t_0))$;

— Tesi: —

$F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ con $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in t_0;

Teorema di Weierstrass:

Ipotesi:

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, $f: A \to \mathbb{R}$ continua;

Tesi:

$\Rightarrow f$ è dotata di minimo e massimo assoluti;

Def: Derivate parziali

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in int(A)$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : I_\delta(x_0, y_0) \subseteq A ;$$

in particolare: se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow (x, y_0) \in A$

e se $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\Rightarrow (x_0, y) \in A$

Definiamo quindi:

- in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ una $g(x) = f(x, y_0)$ che, se $\exists\, g'(x)$ viene chiamata derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0);
- in $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ una $G(y) = f(x_0, y)$ che, se $\exists\, G'(y)$ viene chiamata derivata parziale di f rispetto ad y nel punto (x_0, y_0);

Def: Gradiente

Il vettore che ha per componenti le due derivate parziali si chiama Gradiente: $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$;

Teorema, Lemma di Schwarz:

Ipotesi:

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$

$\exists\, f_{xy}, f_{yx}$ in A e sono continue in (x_0, y_0);

Tesi:

$\Rightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$;

Se le due derivate seconde miste sono continue in un punto allora sono uguali;

Def: Differenziabilità di f in (x_0, y_0)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$,

posto $H = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 : (x_0 + h, y_0 + k) \in A\}$

e $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ Incremento di f;

$\Rightarrow$ f si dice differenziabile in (x_0, y_0) se $\exists\, l, m \in \mathbb{R}$ tali che,

posto $df(x_0, y_0) = lh + mk$ Differenziale di f in (x_0, y_0) si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \;;$$

Teorema, Condizione Necessaria per la differenziabilità:

Ipotesi:

Sia f differenziabile in (x_0, y_0);

Tesi:

(a) f è continua in (x_0, y_0);

(b) $\exists\, f_x(x_0, y_0) = l$, $\exists\, f_y(x_0, y_0) = m$ con $l, m \in \mathbb{R}$ tali che

$$df(x_0, y_0) = lh + mk \quad \text{con } (h, k) \in H = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : (x_0+h, y_0+k) \in A\}$$

Dimostrazione:

(a) Tesi $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta f = 0$

$$\Delta f = \Delta f - (lh + mk) + (lh + mk) = \underbrace{\frac{\Delta f - (lh + mk)}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{(lh + mk)}_{\downarrow\, 0} \to 0$$

(b) si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - lh - mk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ Considero la restrizione in cui $k = 0$ (o $h = 0$);

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - lh}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = l \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_x(x_0, y_0) = l$;

e analogamente $f_y(x_0, y_0) = m$;

Teorema del differenziale totale, Condizione Sufficiente per la differenziabilità; 3

—— Tesi: ——

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in A$, $H = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : (x_0+h, y_0+k) \in A\}$

$\Rightarrow \exists$ in A $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ e sono continue in (x_0,y_0);

—— Ipotesi: ——

f è differenziabile in (x_0,y_0);

—— Dimostrazione: ——

Dalla Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (h,k) \in H,\ 0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta \Rightarrow \dfrac{|\Delta f - df|}{\sqrt{h^2+k^2}} < \varepsilon$

- f_x continua in (x_0,y_0):

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : (x,y) \in A,\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f_x(x,y) - f_x(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$;

- f_y continua in (x_0,y_0):

$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : (x,y) \in A,\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |f_y(x,y) - f_y(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$;

Sia $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e sia $(h,k) \in H : 0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$, proviamo che (h,k) verifica la Tesi, si ha che:

$$\frac{|\Delta f - df|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq$$

$$\leq \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{|f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Consideriamo la funzione $f(x_0+h, y)$ nell'intervallo $(y_0, y_0+k) \Rightarrow$ per il Teorema di Lagrange $\exists t$ in tale intervallo tale che:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = f_y(x_0+h, t)k;$$

Analogamente per $f(x, y_0)$ in $(x_0, x_0+h) \Rightarrow$ per il Teorema di Lagrange $\exists s$ tale che:

$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(s, y_0)h;$$

Dalla disuguaglianza segue allora:

$$\underbrace{|f_y(x_0+h, t) - f_y(x_0,y_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} + \underbrace{|f_x(s, y_0) - f_x(x_0,y_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} < \varepsilon;$$

Teorema sulla derivazione delle funzioni composte:

Ipotesi:

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, g_1 e $g_2 : (a,b) \to \mathbb{R} : (g_1(t), g_2(t)) \in A \quad \forall t \in (a,b)$

$t_0 \in (a,b)$, $\exists\ g_1'(t_0), g_2'(t_0)$, f differenziabile nel punto $(g_1(t_0), g_2(t_0))$

Tesi:

Posto $F: (a,b) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$

$\Rightarrow \exists\ f'(t_0) = f_x(g_1(t_0), g_2(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + f_y(g_1(t_0), g_2(t_0)) \cdot g_2'(t_0)$;

Def: Derivate direzionali

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) punto interno ad A

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 : I_\delta(x_0, y_0) \subseteq A$

Si dice che la funzione è derivabile nel punto (x_0, y_0) lungo la direzione del versore $v = (v_1, v_2)$ se

$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)}{t}$ esiste ed è finito, con $t \in]-\delta, \delta[$;

↳ Teorema: (se f è diff. $\Rightarrow \exists$ la derivata direzionale)

Se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) allora $\forall v$ esiste la derivata direzionale:

$$D_v f(x_0, y_0) = \underbrace{(\nabla f(x_0, y_0), v)}_{\text{prodotto scalare}} = f_x(x_0, y_0) v_1 + f_y(x_0, y_0) v_2$$

Dimostrazione:

Segue dal Teorema di derivazione della funzione composta, dato che

$g_1'(t) = v_1$, $g_2'(t) = v_2$;

Def: minimo (o massimo) relativo

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$

(x_0, y_0) punto di minimo (o massimo) relativo se:

$\exists\ \delta > 0 : (x, y) \in A \cap I_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$; (o $f(x,y) \underset{\text{max}}{\leq} (x_0, y_0)$)

Teorema di Fermat (Condizione del 1° Ordine):

Ipotesi:

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{interno}(A)$, $v = (v_1, v_2)$ versore,

$\exists\, D_v f(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) punto di min o max relativo

Tesi:

$D_v f(x_0, y_0) = 0$;

Dimostrazione:

$t = 0$ è un punto di estremo relativo per $f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ quindi segue dal Teorema di Fermat per le funzioni di una variabile.

In particolare se $\exists f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0) \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$; (punti stazionari)

I punti interni all'insieme A, il cui gradiente è nullo si chiamano punti stazionari.

Def: Punto di sella

Un punto stazionario, che non è estremo relativo è chiamato Punto di Sella;

Teorema, Condizione Necessaria del 2° Ordine:

Ipotesi:

Siano f dotata di derivate seconde continue,

(x_0, y_0) punto di estremo relativo;

Tesi:

$\underbrace{H(x_0, y_0)}_{\text{Hessiano}} \geq 0$ e $\underbrace{f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0}_{\text{min rel}}$ $\left(\text{o } \underbrace{f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0}_{\text{max rel}}\right)$

Teorema, Condizione Sufficiente del 2° Ordine:

Ipotesi:

Siano f dotata di derivate seconde continue, (x_0, y_0) punto stazionario,

$H(x_0,y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ (o $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$)

H: Hessiano; $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$: min rel; $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$: max rel

Tesi:

(x_0, y_0) è un punto di min relativo (o max relativo)

Schema:

I°) ricerca dei punti stazionari (x_0,y_0) risolvendo il sistema: $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$;

II°) costruire $H(x,y)$;

III°) calcolare $H(x_0,y_0)$ se (x_0,y_0) è un punto stazionario:

- i) $H(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ punto di Sella;
- ii) $H(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ controllare i valori di f in un intorno;
- iii) $H(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } f_{xx}(x_0,y_0) > 0 & \text{p. di min. relativo;} \\ \text{se } f_{xx}(x_0,y_0) < 0 & \text{p. di max. relativo;} \end{cases}$

Def: Estremi Assoluti

Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, $f: A \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow$ Allora $\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$: $\begin{cases} f(x_1,y_1) = \min\limits_A f \\ f(x_2,y_2) = \max\limits_A f \end{cases}$

Questi punti vanno cercati nei tre insiemi:

- $X_1 = \{(x,y) \in \text{interno}(A) : \nabla f(x,y) = 0\}$; Insieme dei punti interni stazionari;

- $X_2 = \{(x,y) \in \text{interno}(A)$: non esistono le derivate prime oppure una non esiste e l'altra è nulla$\}$;

- $X_3 = \mathcal{F}(A)$; Frontiera dell'insieme A;