ANALISI II - P. 1

- Primitive;
- Teorema sulle primitive;
  - Dim.;
- Teorema Int. per parti;
- Teorema Int. per sost. I° forma;
- Teorema Int. per sost. II° forma;
- Criterio di Integrabilità di Riemann;
- Se f è continua in un intervallo ⇒ è integrabile;
  - Dim.;
- Se f è monotona in un intervallo ⇒ è integrabile;
  - Dim.;
- Se f è generalmente continua e limitata in un intervallo ⇒ è integrabile;
- Insieme Limitato;
- Punto Interno;
- Plurirettangolo;
- Rettangoloide;
- Integrale definito;
  - Teorema della Media;
  - Proprietà di monotonia;
- Funzione Integrale
- Teorema di Derivazione della Funz. Integrale;
  - Dim.;
- Teorema fondamentale del calcolo Integrale;
- Formula fondamentale del calcolo Integrale;
  - Dim.;

Primitiva:

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, si definisce primitiva di f un funzione $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile, tale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$;

Teorema sulle primitive:

Se una funzione ammette una primitiva F, allora tutte e sole le sue primitive sono date da $F(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$;

$\longrightarrow$ Funz. che non ammette primitive:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \geq 0 \\ -1 & \text{se } < 0 \end{cases}$$

Suppongo per assurdo che $\exists F:]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x+k & \text{se } x \geq 0 \\ -x+c & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Suppongo la continuità in zero:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 0} -x+c = \lim_{x\to 0} x+k \Longrightarrow c=k$$

$$\Longrightarrow F(x) = \begin{cases} x+k & x \geq 0 \\ -x+k & x<0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{|x|+k} \text{ Assurdo}$$

Assurdo perché sappiamo che il valore Assoluto non è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, che era l'ipotesi iniziale;

Teorema Int. per parti:

Siano f, g derivabili, allora:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \, ;$$

Teorema Int. per sost. I^a forma:

HP:

Dati $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitiva

$g:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

TS:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \left[\int f(t)\, dt \right]_{t=g(x)} \, ;$$

DIM:

Sia F primitiva di f e $G(x) = F(g(x))$:

$$\cancel{\Rightarrow G'(x) = F'(x) \cdot g'(x)} \quad \Longrightarrow G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\Longrightarrow$ Il I° M. della tesi è $G(x) + k$

$\Longrightarrow$ Il II° M. della tesi è $\left[F(t) + k \right]_{t = g(x)} = g(x) + k \, ;$

Teorema Int. per sost. II° forma:

HP:

Dati

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive

$g : (c, d) \to (a, b)$ invertibile e derivabile

TS:

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \right]_{t = g^{-1}(x)}$$

DIM:

Per il I° teorema (I° forma) abbiamo che:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \left[\int f(x)\, dx \right]_{x = g(t)}$$

Adesso componiamo ambo i membri per $t = g^{-1}(x)$

$$\left[\int f(g(t))\, g'(t)\, dt \right]_{t = g^{-1}(x)} = \left[\int f(x)\, dx \right]_{x = g(g^{-1}(x)) = x}$$

Criterio di Integrabilità di Riemann:

f è integrabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0 : \exists D : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$

Con $S =$ Somma superiore secondo Riemann.

e $s =$ Somma inferiore secondo Riemann.

$D =$ insieme di decomposizione;

f continua $\Rightarrow$ è integrabile:

Se f è continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f è integrabile

Dim:

TS:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D: \ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$

DIM:

Fissato ε applico l'uniforme continuità con $\frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Sia $D: \ |D| < \delta$

$$m_i = \inf_{I_i} f = \min f = f(c_i) \qquad c_i \in I_i$$

$$M_i = \sup_{I_i} f = \max f = f(d_i)$$

$$\Rightarrow S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(x_i - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\left(f(d_i) - f(c_i) \right)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(d_i) - f(c_i)) < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a}}_{\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a}}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \ ;$$

f monotona ⇒ f è integrabile: Se f è monotona in $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile;

HP:

Supponiamo f crescente e $f(a) < f(b)$

TS:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists D: \ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

DIM:

Sia $|D| < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$$\Rightarrow S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\leq |D| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}} (M_i - m_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot (M_i - m_i) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$ Sviluppo la sommatoria e semplifico... =

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{f(b)-f(a)}} \cdot \cancel{f(b)-f(a)} = \varepsilon;$$

---

f generalmente continua e limitata ⇒ è integrabile:

Se f è generalmente continua e limitata in $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile;

Insieme Limitato:

Un insieme del piano si dice limitato se esiste un cerchio che lo contiene: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ Limitato se $\exists$ un cerchio che lo contiene;

Punto Interno:

Un punto si dice interno $p \in X$ se $\exists$ un cerchio di centro p contenuto in X;

Plurirettangolo:

Chiamiamo plurirettangolo l'unione di rettangoli a due a due privi di punti interni a comune;

Rettangoloide:

Chiamiamo rettangoloide $R_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x) \}$

- Se f è integrabile $\Rightarrow R_f$ ha area;

$$\Rightarrow \text{area } R_f = \int_a^b f(x)\,dx \ ;$$

- Se $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow R_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq 0 \}$

$$\Rightarrow \text{area } R_f = - \int_a^b f(x)\,dx ;$$

Integrale definito:

Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua, e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx \text{ di Riemann} & \text{se } a < b \\ -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{" "} & \text{se } b > a \\ \text{zero} & \text{se } a = b \end{cases} \ ;$$

Questo simbolo ha senso qualsiasi sia la posizione di a e b e lo chiamiamo Integrale definito di f tra a e b;

Teorema della Media:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

TS:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \ ;$$

DIM:

Ricordiamo che $s(f, D) \leq \int \leq S(f, D) \quad \forall D$

Prendo $D = \{a ; b\} \Rightarrow$

$$s(f, D) = m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) = S(f, D) \ ;$$

Proprietà di Monotonia: (Integrale Definito)

a) Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

DIM:

Segue dal Teorema della media, perché:

$$\int \geq m(b-a) \quad \text{ma} \quad m \geq 0 \quad \Rightarrow \int \geq 0 \,;$$

b) Se $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$

DIM

Segue da (a):

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \,;$$

Funzione Integrale:

Sia $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua, fissiamo $a \in (\alpha, \beta)$

~~$\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$~~ si definisce funzione Integrale:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad \text{con } F: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

Teorema fondamentale del calcolo Integrale (Corollario):

Ogni funzione continua è dotata di primitive;

Dim. a $\boxed{\text{pag } 8}$; (La prima di sopra)

Teorema di Derivazione della Funz. Integrale:

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ si ha $F'(x) = f(x)$ $\Longrightarrow$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

DIM. –

Sia $c > a$ ambo $\in (\alpha, \beta)$, dimostriamo che $F'(c) = f(c)$

$\Rightarrow$ Consideriamo il rapporto incrementale $\dfrac{F(x) - F(c)}{x - c}$

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt}{x - c} = \text{Proprietà additiva} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^c f(t)\,dt} + \int_c^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^c f(t)\,dt}}{x - c} = \frac{\int_c^x f(t)\,dt}{x - c};$$

$\Rightarrow$ Se $x > c$ è un Integrale di Riemann e quindi vale il Teorema della Media:

$$\exists\, \bar{x} \in [c, x] : \frac{\int_c^x f(t)\,dt}{x - c} = f(\bar{x});$$

$\Rightarrow$ Se $x \to c$ anche $\bar{x} \to c$ $\Rightarrow$ per la continuità di f, si ha $f(\bar{x}) \to f(c)$;

Formula fondamentale del calcolo integrale:

Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua, e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$, sia F una primitiva di f;

$\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \Longleftrightarrow [F(x)]_a^b$;

DIM: –

Oltre F consideriamo anche $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$;

$\Rightarrow$ Per il Teorema sulle primitive $\exists k \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

in particolare se $x = a$ abbiamo $F(a) = \underbrace{G(a)}_{\text{zero}} + k \Rightarrow F(a) = k$;

Se invece $x = b$ abbiamo:

$$F(b) = G(b) + k = \int_a^b f(x)\,dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$