Def: Eq. Diff.

Sia $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ con $n \in \mathbb{N}$, l'equazione differenziale di ordine $n$ è il problema di trovare delle funzioni $y:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili almeno $n$ volte e tali che:

- $\forall x \in (a,b) \Rightarrow (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \mathbb{Y}$;
- $\forall x \in (a,b) \Rightarrow g(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ con $g: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$;

---

- Una soluzione di una equazione differenziale si chiama Integrale;
- L'insieme di tutte le soluzioni si chiama Integrale Generale;
- Ogni soluzione si chiama Integrale Particolare;
- Il grafico di una soluzione si chiama Linea Integrale;

---

data la generica equazione differenziale:

$g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ con $g: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$

Supponiamo che $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \times \mathbb{R}$ con $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e che

$$g(x, y, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$\Rightarrow$ Allora abbiamo che $g(x, y, \dots, y^{(n)})$ diventerà $y^{(n)} - f(\dots) = 0$ cioè

$$\underbrace{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}_{\text{FORMA ESPLICITA}} \quad \text{con } f: \mathbb{X} \to \mathbb{R};$$

Dalla Forma Esplicita otteniamo il Problema di Cauchy;

**Problema di Cauchy:** Siano $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ con $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e un punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{X}$;

$\Rightarrow$ L'eq. diff. sarà $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$\Rightarrow$ La notazione:

$$(P) \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

prende il nome di Problema di Cauchy relativo all'eq. $y^{(n)} = \dots$ e ai valori iniziali $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$;

Ed è il problema di trovare una soluzione a tale equazione, definita in un intervallo $(a, b)$ che contenga $x_0$ e tale che $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$; $\dots$;

# Def: Eq. diff. a variabili separabili

È un'equazione diff. del 1° Ordine $y' = f(x,y)$ ; Siano:

$X : (a,b) \to \mathbb{R}$
continue e $f(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ definita in $(a,b) \times (c,d)$
$Y : (c,d) \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Allora $y' = X(x) Y(y)$ ;

Una soluzione è una funzione $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a,b) \to (c,d)$ derivabile e tale che:

$\forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y'(x) = X(x) Y(y(x))$ ;

---

Passi di Risoluzione: Sia $H = \{ l \in (c,d) : Y(l) = 0 \}$ l'insieme degli zeri di $Y$, cerchiamo 3 categorie di soluzioni:

I° cat.: Soluzioni che assumono costantemente valori $\in H$;

Sia $l \in H$, consideriamo $y : (a,b) \to (c,d) \Rightarrow y(x) = \underbrace{l}_{\text{costante}} \; \forall x \in (a,b)$

Ma $y'(x) = X(x) Y(y(x))$ ? si perché $0 = X(x) \underbrace{Y(l)}_{\text{zero}}$

II° Cat.: Soluzioni che non assumono mai valori $\in H$;

Sia $y : (\alpha, \beta) \subseteq (a,b) \to (c,d) \setminus H$ una tale soluzione

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)$ si ha $y'(x) = X(x) \underbrace{Y(y(x))}_{\neq 0} \; \forall x \in (\alpha, \beta)$

Partendo da $y'(x) = X(x) Y(y(x)) \Rightarrow$ possiamo dividere ambo i membri per $Y(y(x))$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Siano
- $A(x)$ una primitiva di $X(x)$
- $B(x)$ una primitiva di $\dfrac{1}{Y(y)}$ con $B : (c,d) \to (\gamma, \delta)$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ si ha che $y(x) \in (c,d) \Rightarrow$ ha senso effettuare la composizione $B(y(x))$ la cui derivata è $B'(y(x)) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{Y(y(x))} \cdot y'(x)$

$\Rightarrow$ Abbiamo che $A(x)$ e $B(y(x))$ hanno la stessa derivata e differiscono per una costante $B(y(x)) = A(x) + k$;

La derivata di B ha sempre lo stesso segno $\Rightarrow$ B è strettamente monotona $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è invertibile

$$B^{-1}(B(y(x))) = B^{-1}(A(x)+k)$$
$$\parallel$$
$$y(x) = B^{-1}(A(x)+k)$$

L'intervallo $(\alpha, \beta)$ si calcola dall'esame di queste eguaglianze,
se $(\alpha,\beta)=(a,b)$ abbiamo finito altrimenti se $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ abbiamo sol. di 3ª cat.;

III ª cat.: Soluzioni y della 2ª cat. tali che $\lim_{x\to\alpha} y(x) = \ell \in H$;

Sia y una soluzione della seconda categoria e supponiamo che $\lim_{x\to\alpha} y(x) \to \ell \in H$ allora si costruisce una funzione che vale:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \ell & a < x \leq \alpha \\ y(x) & \alpha < x < \beta \end{cases}$$ è sol. di 3ª cat.;

**Def: Eq. diff. lineari di 1° Ordine**

Siano $a, f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ · continue $\Rightarrow$
- $y' + a(x)y = f(x)$ Eq. Completa;
- $y' + a(x)y = 0$ Eq. Omogenea;

Una soluzione è data da una funzione:
$y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$
- $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$

oppure
- $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

---

Risoluzione eq. omogenea:

$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y' = -a(x)y$
- $X(x) = -a(x)$ $\quad (a, b) = (\alpha, \beta)$
- $Y(y) = y$ $\quad (c, d) = ]-\infty, +\infty[$

$\Rightarrow Y(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow H = \{0\} \Rightarrow y(x) = 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ Sol. di 1° cat.;

Sia $y$ una soluzione sempre $\neq 0 \Rightarrow y$ è sempre positiva o è sempre negativa

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$ , chiamo:

- $A(x)$ una primitiva di $a(x) \Rightarrow -A(x)$ è primitiva di $-a(x)$;
- $B(y)$ la primitiva di $\frac{1}{y} \Rightarrow B(y) = \log|y|$

$$\Rightarrow \log|y(x)| = -A(x) + k \Rightarrow |y(x)| = e^{-A(x)} \cdot k \quad \text{con } k > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = k\, e^{-A(x)} \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$ INTEGRALE GENERALE;

---

Risoluzione eq. completa: Consideriamo l'Integrale Generale della omogenea e cerchiamo una soluzione della completa del tipo: $\bar{y}(x) = k(x)\, e^{-A(x)}$;

Si deve avere che $\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x)$

$$\Rightarrow k'(x)e^{-A(x)} \cancel{- k(x)a(x)e^{-A(x)}} \cancel{+ a(x)k(x)e^{-A(x)}} = f(x) \Rightarrow k'(x) = f(x)e^{A(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(x) \in \int f(x)e^{A(x)}\,dx$$ INTEGRALE PARTICOLARE;

---

i) Osserviamo che se $y$ è una soluzione della Omogenea e $\bar{y}$ è una soluzione della completa, allora: $\underbrace{\bar{y} + y}_{w}$ è soluzione della completa;

$$\Rightarrow \text{infatti } w'(x) + a(x)w(x) = \bar{y}'(x) + y'(x) + a(x)\bar{y}(x) + a(x)y(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\underbrace{\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x)}_{f(x)}) + (\underbrace{y'(x) + a(x)y(x)}_{\text{zero}}) = f(x);$$

ii) Osserviamo ora che se $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni della completa, allora $\boxed{6}$

$w = y_1 - y_2$ è soluzione dell'omogenea;

$\Rightarrow$ infatti $w'(x) + a(x)w(x) = y_1'(x) - y_2'(x) + a(x)y_1(x) - a(x)y_2(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \big(\underbrace{y_1'(x) + a(x)y_1(x)}_{= f(x)}\big) - \big(\underbrace{y_2'(x) + a(x)y_2(x)}_{= f(x)}\big) = 0 \;;$$

Ne segue che $y(x) = k\,e^{-A(x)} + \bar{y}(x)$ è l'INTEGRALE GENERALE della completa;

1ª Proposizione: Se $y_1, y_2$ sono soluzioni della omogenea e $l, k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow l y_1 + k y_2$ sono ancora soluzioni della omogenea;

Poniamo $w = l y_1 + k y_2 \Rightarrow w^{(i)} = l y_1^{(i)} + k y_2^{(i)}$, dobbiamo vedere se $w$ è soluzione dell'omogenea $\Rightarrow w^{(n)} + a_1(x) w^{(n-1)} + \dots + a_n(x) w =$

$= l y_1^{(n)}(x) + k y_2^{(n)}(x) + a_1(x) l y_1^{(n-1)}(x) + a_1(x) k y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) l y_1(x) + a_n(x) k y_2(x)$;

$\Rightarrow l(\underbrace{y_1^{(n)}(x) + a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y_1(x)}_{=0}) + k(\underbrace{y_2^{(n)}(x) + a_1(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y_2(x)}_{=0}) = 0$;

$\Rightarrow w$ è soluzione della omogenea;

---

2ª Proposizione: La funzione identicamente nulla $y(x) = 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ è soluzione della omogenea;

---

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno Spazio Vettoriale;

---

Proposizione 3ª: Siano:
- $y$ una soluzione della completa

e

- $z$ una soluzione della omogenea

Allora $\Rightarrow w = y + z$ è soluzione della completa;

---

4ª Proposizione: Siano $y, z$ due soluzioni della completa $\Rightarrow$
$\Rightarrow w = y - z$ è soluzione della omogenea;

---

5ª Proposizione: Supponiamo che l'equazione completa abbia il termine noto che sia una funzione complessa: $f(x) = a(x) + i\,b(x)$

$\Rightarrow$ Allora troveremo soluzioni che sono a valori complessi:

$y(x) = z(x) + i\,w(x)$ è soluzione della completa se e solo se

- $z$ è soluzione dell'equa $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = a(x)$;

e

- $w$ è soluzione dell'equa $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = b(x)$;

Teorema di esistenza e unicità: Siano:

(1) $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$ un' eq. diff. di ordine n

e

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ - - - - - - - \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$ un problema di Cauchy (2)

$\Rightarrow$ Supponendo di avere questi due oggetti $\Rightarrow$ Il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione definita in $(\alpha, \beta)$;

---

Def: Wronskiano

E' il determinante della matrice composta dalle n soluzioni dell'eq. omogenea, ed è usato per conoscere la dimensione dello spazio vettoriale (ovvero l'insieme delle soluzioni dell'eq. omogenea);

$$W(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x) & --- & y_n(x) \\ y_1'(x) & --- & y_n'(x) \\ --- & --- & --- \\ y_1^{(n-1)}(x) & --- & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che $W'(x) + a_1(x) W(x) = 0$ cioè

$\Rightarrow W$ è sol. dell'eq. diff. $y' + a_1(x) y = 0$ che è lineare del 1° Ordine

$\Rightarrow W(x) = K e^{-A_1(x)}$ con $A_1$ primitiva di $a_1$;

$\Rightarrow W(x)$ è identicamente nulla o sempre $\neq$ zero;

---

## Def: Soluzioni dipendenti e indipendenti

Date $n$ soluzioni dell'eq. omogenea $y_1, \dots, y_n$ si dice che sono:

- Indipendenti se $W(x) \neq 0$;
- Dipendenti se $W(x) = 0$;

---

## Def: Lineare Indipendenza (di elementi)

$y_1, \dots, y_n$ sono linearmente indipendenti se $k_1 y_1(x) + \dots + k_n y_n(x) = 0$

$$\Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0;$$

P.s. Il numero massimo di elementi linearmente indipendenti ci serve per scoprire la dimensione di uno spazio vettoriale;

---

**Teorema 1:** L'eq. diff. lin. omogenea di ord. $n$ ha sempre $n$ soluzioni indipendenti:

**Dim:**

Dato $c \in (\alpha, \beta)$ consideriamo un problema di Cauchy;

$$P_1 \begin{cases} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \\ y(c) = 1 \\ y'(c) = 0 \\ \dots \\ y^{(n)}_{(c)} = 0 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} \text{''} \quad \text{''} \\ y(c) = 0 \\ y'(c) = 1 \\ \dots \\ y^{(n)}_{(c)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad P_n \begin{cases} \text{''} \quad \text{''} \\ y(c) = 0 \\ y'_{(c)} = 0 \\ \dots \\ y^{(n)}_{(c)} = 1 \end{cases}$$

Ciascuno di essi, per il Teorema di esistenza e unicità avrà una ed una sola soluzione;

$\Rightarrow$ Siano $y_1, \dots, y_n$ le sol. di $P_1, \dots, P_n$, per essere sol. indipendenti il loro Wronskiano deve essere $\neq 0$, ma sappiamo che il Wronskiano o è $\neq 0$ o è sempre $= 0$, quindi lo studiamo nel punto $c$;

$$W(c) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} y(c) = 1 & y(c) = 0 & \dots & y(c) = 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \neq 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{Sono Indipendenti};$$

Matrice Identità

Teorema 2: Le funzioni $y_1, \dots, y_n$ soluzioni dell'eq. diff. omogenea, sono linearmente indipendenti se e solo se sono soluzioni indipendenti;

Dim:

Supponiamo che $y_1, \dots, y_n$ siano indipendenti, vogliamo dimostrare che sono linearmente indipendenti:

Sia $\underbrace{k_1 y_1(x) + \dots + k_n y_n(x)}_{z(x)} = 0 \quad \forall x$ e dimostriamo che $k_1 = \dots = k_n = 0$

Se $z(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow z'(x) = \dots = z^{(n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 y_1(x) + \dots + k_n y_n = 0 \\ k_1 y_1'(x) + \dots + k_n y_n' = 0 \\ \dots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Se noi fissiamo il punto $x$ allora $\Rightarrow$

$\Rightarrow k_1, \dots, k_n$ sono sol. del sistema; Il determinante di questo sistema è:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = W(x) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Il sistema è di Cramer ed essendo omogeneo ammette solo la soluzione nulla $\Rightarrow k_1, \dots, k_n = 0$;

Il viceversa è analogo;

Teorema 3:

Sia $z$ una soluzione dell'eq. omogenea $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$ e siano $y_1, \dots, y_n$ $n$ soluzioni indipendenti di tale equazione

$\Rightarrow$ Allora $\exists\, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R} : z(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x)$

Dim:

Fissiamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e consideriamo il problema di Cauchy:

$$P \begin{cases} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y'(x_0) = z'(x_0) \\ \dots \quad \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \Rightarrow \text{Ha una soluzione}$$

$z$ è sol. di $P$, cerchiamo una sol. di $P$: $\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x)$

$$\Rightarrow \text{deve accadere che} \begin{cases} k_1 y_1(x_0) + \dots + k_n y_n(x_0) = z(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + \dots + k_n y_n'(x_0) = z'(x_0) \\ \dots \quad \dots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

è un sistema lineare di $n$ equazioni nelle incognite $k_1, \dots, k_n$

Il suo determinante $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ ha una sola sol. $\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x)$

$\Rightarrow$ allora $z$ e $\bar{y}$ sono due soluzioni di $P \Rightarrow z = \bar{y}$;

Caratterizzazione dell'integrale generale dell'eq. omogenea di ordine $n$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) \quad \text{con } k_i \in \mathbb{R},\ y_1, \dots, y_n \ n \text{ sol. indipendenti;}$$

Caratterizzazione dell'integrale generale dell'eq. completa di ordine $n$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_1(x) + \bar{y}(x)$$

Con:
- $k_i \in \mathbb{R}$,
- $y_1, \dots, y_n$ $n$ sol. indipendenti,
- $\bar{y}$ sol. particolare della completa;

Teorema 4: Tutte le $n$ soluzioni ottenute dall'eq. caratteristica sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ daranno luogo all'Integrale Generale;

$\rightarrow$ Dim nel caso $n=2$:

$y''+a_1y'+a_2y=0 \quad \Rightarrow$ eq. caratt. $\quad \alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$

$\Delta = a_1^2-4a_2$;

$\boxed{1° \text{ Caso: } \Delta>0}$

$\Delta>0, \quad \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$;

$y_1(x)=e^{\alpha_1 x}$; $\quad y_2(x)=e^{\alpha_2 x}$;

$$W(x)=\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x}\end{pmatrix} = \alpha_2 e^{\alpha_1 x+\alpha_2 x}-\alpha_1 e^{\alpha_1 x+\alpha_2 x} = \underbrace{(\alpha_2-\alpha_1)}_{\neq 0}\underbrace{e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le sol. sono linearm. indipendenti; $\quad \boxed{y(x)=K_1e^{\alpha_1 x}+K_2e^{\alpha_2 x} \quad \text{INT. GEN.}}$

$\boxed{2° \text{ Caso: } \Delta=0}$

$\Delta=0; \quad \alpha \in \mathbb{R}$; molteplicità $=2$;

$y_1(x)=e^{\alpha x}$; $\quad y_2(x)=xe^{\alpha x}$;

$$W(x)=\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}+\alpha x e^{\alpha x}\end{pmatrix} = e^{2\alpha x}+\alpha x e^{2\alpha x}-\alpha x e^{2\alpha x} = e^{2\alpha x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le sol. sono linearm. indipe. $\quad \boxed{y(x)=K_1e^{\alpha x}+K_2xe^{\alpha x} \quad \text{INT. GEN.}}$

$\boxed{3° \text{ Caso: } \Delta<0}$

$\Delta<0, \quad \beta \pm i\gamma$;

$y_1(x)=e^{\beta x}\cos\gamma x$; $\quad y_2(x)=e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x$;

$$W(x)=\begin{pmatrix} e^{\beta x}\cos\gamma x & e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x \\ \beta e^{\beta x}\cos\gamma x-\gamma e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x & \beta e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x+\gamma e^{\beta x}\cos\gamma x\end{pmatrix} =$$

$$= e^{2\beta x}(\beta\cos\gamma x\operatorname{sen}\gamma x+\gamma\cos^2\gamma x-\beta\cos\gamma x\operatorname{sen}\gamma x+\gamma\operatorname{sen}^2\gamma x) = \underbrace{\gamma}_{\neq 0}\underbrace{e^{2\beta x}}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le sol. sono linearm. ind. $\quad \boxed{y(x)=K_1e^{\beta x}\cos\gamma x+K_2e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x \quad \text{INT. GEN.}}$

Equazione Diff. lineare di ordine n:

Equazione completa: $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x);$$

Equazione omogenea: $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0;$$

con $a_1, \dots, a_n$ e $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue;

Risoluzione omogenea:
$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

cercheremo una soluzione simile a quella di ordine 1, del tipo:

$y(x) = e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ da determinare...

$y(x) = e^{\alpha x};$

$y'(x) = \alpha e^{\alpha x};$

$y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x};$ $\Rightarrow$ Sostituiamo all'eq. omogenea

...

$y^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x};$

$$\Rightarrow \alpha^n e^{\alpha n} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha n} + \dots + a_{n-1}\alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{\underset{\parallel}{e^{\alpha x}}}(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n) = 0$$

$\Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}$ è sol. dell'eq. omogenea se $\alpha$ è sol. di

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$ $\Rightarrow$ Eq. caratt. della omogenea

Per ogni soluzione reale $\alpha$ della eq. caratt. di molteplicità $r$ si ottengono $r$ sol. dell'eq. diff.: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x};$

Per ogni coppia di sol. immaginarie coniugate $\beta \pm i\gamma$ dell'eq. caratt. di molteplicità $r$ si ottengono $2r$ sol. della omogenea;

- $e^{\beta x}(\cos\gamma x + i\,\text{sen}\,\gamma x) = e^{\beta x}\cos\gamma x + i e^{\beta x}\text{sen}\,\gamma x$
- $e^{\beta x}(\cos(-\gamma x) + i\,\text{sen}(-\gamma x)) = e^{\beta x}\cos\gamma x - i e^{\beta x}\text{sen}\,\gamma x$

Prendiamo parte reale e immaginaria delle due soluzioni e otteniamo le $2r$ soluzioni:

- $e^{\beta x}\cos\gamma x,\ x e^{\beta x}\cos\gamma x,\ \dots,\ x^{r-1}e^{\beta x}\cos\gamma x$;
- $e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x,\ x e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x,\ \dots,\ x^{r-1}e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x$;

Risoluzione completa:

$f(x) = e^{\lambda x} p(x)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, $p$ polinomio di grado $m$ a coeff. complessi;

[1° Caso] $\lambda$ non è sol. dell'eq. caratteristica:

Si cerca un integrale particolare $\bar{y}(x) = e^{\lambda x} q(x)$ con $q$ polinomio di grado $m$ a coeff. complessi da determinare;

[2° Caso] $\lambda$ è sol. di molteplicità $s$ dell'eq. caratt.:

Si cerca un integrale particolare $\bar{y} = e^{\lambda x} x^s q(x)$ con $q$ polinomio di grado $m$ a coeff. complessi da determinare;

# Metodo di Lagrange (Variazione della costante):

[Caso $n=1$] $y(x) = K e^{-A(x)}$ è int. gen. dell'omogenea;

$\Rightarrow$ Si cerca $\bar{y}(x) = K(x) e^{-A(x)}$ con $K$ funzione derivabile e si trova che $K(x) \in \int f(x) e^{A(x)} dx$;

[Caso generale $n \in \mathbb{N}$] $y(x) = K_1 y_1(x) + \dots + K_n y_n(x)$ è int. gen. dell'omogenea;

$\Rightarrow$ Si cerca $\bar{y}(x) = K_1(x) y_1(x) + \dots + K_n(x) y_n(x)$ con $K_1, \dots, K_n$ funzioni derivabili $n$ volte;

---

per $n=2$:

$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)$ è int. gen. dell'omogenea;

$\Rightarrow \bar{y}(x) = K_1(x) y_1(x) + K_2(x) y_2(x)$;

$\Rightarrow y'' + ay' + by = f(x)$ deve essere verificata la condizione $\bar{y}''(x) + a\bar{y}'(x) + b\bar{y}(x) = 0$

$\cancel{\Rightarrow \bar{y}'(x) = K_1'(x) y_1(x) + K_1(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (*)}$

$\Rightarrow \bullet \quad \bar{y}'(x) = \underline{K_1'(x) y_1(x)} + K_1(x) y_1'(x) + \underline{K_2'(x) y_2(x)} + K_2(x) y_2'(x)$

$K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}' = K_1(x) y_1'(x) + K_2(x) y_2'(x)$;

$\Rightarrow \bullet\bullet \quad \bar{y}''(x) = K_1'(x) y_1'(x) + K_1(x) y_1''(x) + K_2'(x) y_2'(x) + K_2(x) y_2''(x)$;

Continua...