4ª P.C.

- Carattere della serie;
- Serie Geometrica, Telescopica, Armonica;
- Teorema 1;
  - Dim;
- Teorema 2 (Cond. Necess. per la convergenza);
  - Dim;
- Serie Resto;
  - Teorema 3;
    - Dim;
- Corollario;
  - Dim;
- Teorema 5 (Convergenza di Cauchy)
- Assoluta Convergenza;
- Teorema 4;
  - Dim;
- Serie Somma;

Serie di segno costante:
- Regolarità;
- Criterio del confronto;
- Crit. del confronto Asintotico;
- Crit. del Rapporto;
- Crit. della Radice;
- Crit. di Raabe; → Serie Armonica Generalizzata;
- Crit. dell'infinitesimo;

Serie a segni alterni:
- Lemma
  - Dim;
- Crit. di convergenza di Leibniz;
  - Dim;
- Crit. di non regolarità;
  - Dim;
- Proprietà Commutativa;
- Teorema 1
  - Dim;
- Teorema 2;
- Serie esponenziale e logaritmica;

Def: Carattere della serie

Il carattere della serie coincide con il comportamento al limite della successione delle somme parziali.

i) se $s_n \to s$ la serie converge ed ha somma s;

ii) se $s_n \to \pm\infty$ la serie diverge;

iii) se $\{s_n\}$ oscilla la serie è irregolare;

TELESCOPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_1 - l;$$

ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge;}$$

GEOMETRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

- Conv. se e solo se $-1 < x < 1$ $\Rightarrow s = \dfrac{1}{1-x}$;
- se $x = 1$ diverge;
- se $x \neq 1 \Rightarrow s = \dfrac{1-x^n}{1-x}$;

Teorema 1:

— Ip: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) una serie regolare e $k \in \mathbb{R}$;

Ts: allora $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ (2) è regolare e si ha:

- Se $k = 0 \Rightarrow$ (2) converge e ha somma zero;
- Se $k \neq 0$ allora:
  - se (1) converge e ha somma $s \Rightarrow$ (2) converge e ha somma ks;
  - se (1) diverge a $+\infty$ e $k > 0 \Rightarrow$ (2) diverge a $+\infty$;
  - se (1) diverge a $+\infty$ e $k < 0 \Rightarrow$ (2) diverge a $-\infty$;
  - se (1) diverge a $-\infty$ e $k > 0 \Rightarrow$ (2) diverge a $-\infty$;
  - se (1) diverge a $-\infty$ e $k < 0 \Rightarrow$ (2) diverge a $+\infty$;

— Dim:

Se s_n e S_n sono rispettivamente le somme parziali di (1) e (2), si ha: $S_n = k s_n$;

Teorema 2: Condizione Necessaria per la convergenza di una serie

— Ip: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente;

— Ts: $a_n \to 0$;

— Dim:

$$a_n = \underset{\downarrow\, s}{s_n} - \underset{\downarrow\, s}{s_{n-1}} \to 0$$

La serie armonica è un controesempio della non sufficienza di questo Teorema;

Serie Resto:

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con s_n = somma parziale, fissiamo un $r \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$ è detta resto di posto r, con S_n;

Teorema 3: Una serie e tutti i suoi resti hanno lo stesso carattere;

— Dim:

Si ha $S_n = s_{n+r} - s_r$; $\{s_{n+r}\}$ è ottenuta da $\{s_n\}$ sopprimendo i suoi primi r termini, quindi $\{s_n\}$ e $\{s_{n+r}\}$ hanno lo stesso limite;

Invece in caso di convergenza si avrà $S = s - s_r$;

Corollario: Se due serie differiscono solo per un numero finito di termini, hanno lo stesso carattere;

— Dim:

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tali che $a_n \neq b_n$ solo per un numero finito di termini. Sia $r \in \mathbb{N}$ il massimo degli indici per i quali $a_n \neq b_n$: $r = \max\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$

$\Rightarrow$ Allora i resti r-esimi delle due serie coincidono $\Rightarrow$ Tesi;

Teorema 5: Teorema di Convergenza di Cauchy

Condizione Necessaria e Sufficiente affinché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga è che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N}$;

Def: Assoluta convergenza

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge;

Teorema 4: Una serie assolutamente convergente è convergente;

— Dim: Si applica il Teorema di Cauchy:

$\Rightarrow$ Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow$ si ha che

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow$ Per il Teorema di Cauchy

$\exists \nu \in \mathbb{N} : \underbrace{||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}||}_{|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon} < \varepsilon \quad \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N}$

Si ha $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \Rightarrow$ Tesi;

Non vale il viceversa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è un controesempio perché converge ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Serie Armonica $\Rightarrow$ diverge;

Serie Somma: Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ consideriamo serie somma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;

$t_n = S_n + s_n \implies$
- Se s_n e S_n convergono $\implies t_n$ converge;
- Se una converge e l'altra diverge $\implies t_n$ diverge;
- Se entrambe divergono a $\pm\infty \implies t_n$ diverge a $\pm\infty$;
- Se una diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty \implies t_n$

Regolarità serie a segno costante: Una serie a termini non negativi è sempre regolare; consideriamo $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n \implies$
$\implies \{s_n\}$ è crescente $\implies$ è regolare;

$s_n \to s = \sup s_n$, se $\{s_n\}$ è limitata superiormente,

altrimenti $s_n \to +\infty$;

Criterio del confronto: Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n \geq 0$ $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) $b_n \geq 0$ $\forall n$ e supponiamo che $a_n \leq b_n$ $\forall n$;

Tesi:

(i) Se (2) converge $\implies$ (1) converge; | (ii) Se (1) diverge $\implies$ (2) diverge;

Dim:

(ii) Si ha $s_n \leq S_n$ $\forall n$, quindi se $s_n \to +\infty \implies S_n \to +\infty$;

(i) Se $S_n \to S = \sup S_n$ allora anche $\{s_n\}$ è limitata superiormente e $s_n \to s \leq S$;

Criterio dell'ordine di infinitesimo: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n > 0$ $\forall n$ e ipotizziamo che $\exists x \in \mathbb{R} : n^x a_n \to l > 0$;

Tesi:

(i) Se $x > 1 \implies$ (1) converge; | (ii) Se $x \leq 1 \implies$ (1) diverge;

Dim:

Vedo $n^x a_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n^x}}$ quindi segue per confronto con la serie Armonica generalizzata, applicando il criterio di confronto asintotico;

Criterio del confronto asintotico: Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n > 0$ $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) $b_n > 0$ $\forall n$ e consideriamo $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ supponendo che sia regolare;

Tesi:

(i) se $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$, $\underbrace{(a_n \sim b_n)}_{\text{I loro infinitesimi sono dello stesso ordine;}}$ $\Rightarrow$ (1) e (2) hanno lo stesso carattere

(ii) se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, $\underbrace{(a_n = o(b_n))}_{a_n \text{ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a } b_n}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{se (2) converge} \Rightarrow \text{(1) converge;} \\ \text{se (1) diverge} \Rightarrow \text{(2) diverge;} \end{cases}$

Dim:

(i) definitivamente si ha $\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$ $\Rightarrow$ $\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ La Tesi segue dal Teorema del confronto;

(ii) definitivamente si ha $a_n \leq b_n$ $\Rightarrow$ La Tesi segue dal Teorema del confronto;

Criterio del rapporto: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n > 0$ $\forall n$, consideriamo $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e supponiamo $\{x_n\}$ regolare, $\lim x_n \neq 1$ (Sia $l \in \mathbb{R}$, oppure $l = +\infty$);

Tesi:

(i) Se $l < 1$ $\Rightarrow$ (1) converge; | (ii) se $l > 1$ $\Rightarrow$ (1) diverge;

Dim:

(i) Sia ℓ: $l < \ell < 1$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ si ha $x_n < \ell$ quindi $x_{\alpha+1} < \ell$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_{\alpha+1} < \ell a_\alpha$
$a_{\alpha+2} < \ell a_{\alpha+1} < \ell^2 a_\alpha$
$\dots$
$a_{\alpha+n} < \ell^n a_\alpha$ $\Longrightarrow$ Il resto α-esimo di (1) si confronta con la serie geometrica di ragione $\ell < 1$, che converge $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Tesi, converge anche (1);

(ii) $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ si ha $x_n > 1$ $\Rightarrow$ $a_{n+1} > a_n$ $\Rightarrow$ La successione $\{a_n\}$ non può tendere a zero $\Rightarrow$ Tesi, diverge;

Criterio della radice: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n > 0 \; \forall n$ e consideriamo $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, supponendo che $\{x_n\}$ sia regolare e $\lim x_n \neq 1$ (Sia $l \in \mathbb{R}$ oppure $l = +\infty$);

Tesi:

(i) Se $l < 1 \Rightarrow$ (1) converge; | (ii) Se $l > 1 \Rightarrow$ (1) diverge;

Dim:

(i) Sia h: $l < h < 1$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$: se $n > \nu$ si ha $x_n < h \Rightarrow a_n < h^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tesi, per confronto con la serie geometrica di ragione $h < 1$;

(ii) definitivamente $x_n > 1 \Rightarrow a_n > 1 \Rightarrow$ Tesi, perchè $\{a_n\}$ non può tendere a zero;

Criterio di Raabe: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $a_n > 0 \; \forall n$ e consideriamo $x_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ ipotizzando $\{x_n\}$ regolare e $\lim x_n \neq 1$ (Sia $l \in \mathbb{R}$, oppure $l = +\infty$);

Tesi:

(i) Se $l > 1 \Rightarrow$ (1) converge; (ii) Se $l < 1 \Rightarrow$ (1) diverge;

Serie Armonica Generalizzata: Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ con $x \in \mathbb{R}$ (1)

- Se $x > 1 \Rightarrow$ (1) Converge;
- Se $x < 1 \Rightarrow$ (1) diverge;
- Se $x = 1$ è la serie Armonica $\Rightarrow$ diverge;

Lemma: Se $\{a_n\}$ è monotona la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ non può divergere;

Dobbiamo provare che $\{s_n\}$ non può divergere, quindi supponiamo che $\{a_n\}$ sia decrescente e consideriamo $\underset{\text{PARI}}{\{s_{2n}\}}$ e $\underset{\text{DISPARI}}{\{s_{2n-1}\}}$ e dimostriamo che sono monotone;

- $s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \Rightarrow \{s_{2n}\}$ è crescente $\Rightarrow$ Se diverge divergerà a $+\infty$;

- $s_{2n+1} = s_{2n-1} \underbrace{- a_{2n} + a_{2n+1}}_{\leq 0} \leq s_{2n-1} \Rightarrow \{s_{2n-1}\}$ è decrescente $\Rightarrow$ Se diverge divergerà a $-\infty$;

$\Rightarrow$ Ne segue che $\{s_n\}$ non può divergere;

~~Criterio di convergenza di Leibniz:~~

~~Se $\{a_n\}$ è decrescente e infinitesima $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ è convergente;~~

Criterio di convergenza di Leibniz:

Se $\{a_n\}$ è decrescente e infinitesima $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ è convergente;

Dim:

Dalla dimostrazione del Lemma sappiamo che $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente.

Ma $s_{2n-1} = \underbrace{(a_1-a_2)}_{\geq 0}+\dots+\underbrace{(a_{2n-3}-a_{2n-2})}_{\geq 0}+\underbrace{a_{2n-1}}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \{s_{2n-1}\}$ non può tendere a $-\infty$ $\Rightarrow$ converge a $s = \inf s_{2n-1}$;

E $s_{2n} = \underbrace{s_{2n-1}}_{\to s} + \underbrace{a_{2n}}_{\to 0} \to s \Rightarrow \{s_{2n}\}$ converge a $s = \sup s_{2n}$;

Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge $\Rightarrow s_n \to s = \inf s_{2n-1} = \sup s_{2n}$;

Criterio di non regolarità:

(a) Se $\{a_n\}$ è crescente ed ha almeno un termine positivo,

OPPURE

(b) Se $\{a_n\}$ è decrescente e non tende a zero

ALLORA

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ è indeterminata;

Dim:

(a) $\{a_n\}$ non può tendere a zero $\Rightarrow$ (1) non può convergere, per il Lemma non diverge $\Rightarrow$ (1) è indeterminata;

(b) $\{a_n\}$ non tende a zero $\Rightarrow$ (1) non converge, per il Lemma non diverge $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (1) è indeterminata;

Proprietà Commutativa: Siano; $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) s_n,

$s: N \to N$ una corrispondenza biunivoca e

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2) S_n tale che $b_n = a_{s(n)}$ (un riordinamento di a_n);

(1) gode della proprietà commutativa se tutti i suoi riordinamenti hanno lo stesso carattere e, in caso di convergenza, la stessa somma;

Teorema 1: Una serie a termini non negativi gode della proprietà commutativa;

Dim:

Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) e il suo riordinamento $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2)

s_n S_n

Se (1) converge $\Rightarrow S_n \leq s$:

$$S_n = b_1 + \dots + b_n = a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(n)} \leq s_r \quad \text{con } r = \max(\sigma(1), \dots, \sigma(n));$$

$\Rightarrow s_r \leq s \Rightarrow S_n \leq s \Rightarrow$ (2) converge e $S \leq s$ ma $a_n = b_{\sigma^{-1}(n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1) è un riordinamento della (2) $\Rightarrow$ dato che (2) converge $\Rightarrow s \leq S$

$\Rightarrow$ Dunque $S = s$;

Se (1) diverge $\Rightarrow$ (2) diverge;

Teorema 2:

(i) Una serie assolutamente convergente gode della proprietà commutativa;

(ii) Se una serie converge non assolutamente allora non gode della proprietà commutativa;

Serie Esponenziale: Sia $x \in \mathbb{R}$, $a_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (1)

- Se $x = 0 \Rightarrow s_n = 1 \ \forall n \Rightarrow$ (1) converge e ha somma 1;
- Se $x > 0 \Rightarrow$ Crit. del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x}{n} \to 0 \Rightarrow (1) \text{ Converge;}$$

- Se $x < 0 \Rightarrow$ Consideriamo $\sum |a_n| \Rightarrow |a_n| = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ è una serie esponenziale con $|x| > 0 \Rightarrow$ Converge $\Rightarrow$ (1) Converge assolutamente;

La serie esponenziale converge $\forall x \in \mathbb{R}$;

Serie Logaritmica: Sia $x \in \mathbb{R}$, $a_n = \frac{x^n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (1)

- Se $x = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \Rightarrow$ (1) converge ed ha somma zero;
- Se $x > 0 \Rightarrow$ Crit. del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x \cdot \frac{n}{n+1} \to x;$$

  - Se $0 < x < 1 \Rightarrow$ (1) converge;
  - Se $x > 1 \Rightarrow$ (1) diverge
  - Se $x = 1 \Rightarrow$ Serie Armonica $\Rightarrow$ diverge;

- Se $x < 0 \Rightarrow$ Consideriamo $|a_n| = \frac{|x|^n}{n}$ che è ancora una serie logaritmica con $|x| > 0 \Rightarrow$ Converge se $|x| < 1$ cioè se $-1 < x < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (1) converge assolutamente;
  - Se $x = -1 \Rightarrow$ Serie Armonica Alternata $\Rightarrow$ Converge NON assolutamente;
  - Se $x < -1 \Rightarrow$ Consideriamo $|a_n| = \frac{|x|^n}{n}$ e vediamo se è monotona;

    $|a_n| < |a_{n+1}|$? $\Rightarrow \frac{|x|^n}{n} < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\downarrow 1} < \underbrace{|x|}_{\Downarrow > 1}$? Vero definitivamente;

    $\Rightarrow$ (1) è indeterminata;

La serie logaritmica converge se e solo se $-1 \leq x < 1$;