

Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières

Valérie Mignon

Citer ce document / Cite this document :

Mignon Valérie. Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières. In: Économie & prévision, n°132-133, 1998-1-2. pp. 193-214;

doi : <https://doi.org/10.3406/ecop.1998.5909>

https://www.persee.fr/doc/ecop_0249-4744_1998_num_132_1_5909

Fichier pdf généré le 12/05/2018

Abstract

Methods for Estimating the Hurst Exponent: Application to Stock Market Returns

by Valérie Mignon

This paper analyses whether long memory is a characteristic of stock returns. It starts by defining the main long memory processes, such as fractional Gaussian noise and ARFJJVIA processes, which are characterised by a parameter called the Hurst exponent. We then review various methods for estimating this exponent. Finally, we apply these procedures to time series of weekly stock returns. Our findings suggest that Italian and Japanese stock returns display long memory persistence. Since long memory is directly related to the issue of market efficiency, these findings raise questions about the efficiency of Italian and Japanese capital markets.

Résumé

Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières

par Valérie Mignon

L'objet de ce papier est de déterminer si les séries de rentabilités boursières sont caractérisées par une structure de dépendance de long terme. Nous commençons par rappeler les principales propriétés des processus à mémoire longue incluant le bruit gaussien fractionnaire et les processus ARFIMA. Ces processus sont caractérisés par un paramètre appelé exposant de Hurst dont nous présentons diverses méthodes d'estimation. Ces procédures sont ensuite appliquées à différentes séries de rentabilités boursières hebdomadaires. Les résultats obtenus suggèrent que les rentabilités japonaise et italienne sont caractérisées par un phénomène de persistance. La présence de mémoire longue est en outre directement liée à la question d'efficacité des marchés financiers, ce qui nous permet d'émettre certains doutes sur l'efficacité des marchés japonais et italien.

Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst

Application aux rentabilités boursières

Valérie Mignon^(*)

Depuis les travaux pionniers de l'hydrologue anglais Hurst (1951), le fait que les séries temporelles puissent exhiber une structure de dépendance de long terme est devenu un sujet de recherche important dans le domaine économique. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où nombre de séries économiques sont directement reliées aux séries hydrologiques ou météorologiques⁽¹⁾. Une série à mémoire longue est caractérisée par une fonction d'autocorrélation qui décroît lentement lorsque le retard augmente. Dans le domaine fréquentiel, le spectre de telles séries exhibe un pôle à la fréquence zéro. Cette caractéristique très spécifique, et pourtant si courante dans le domaine économique, a conduit Granger (1966) à la nommer "*la forme spectrale typique d'une variable économique*". Le phénomène de mémoire longue, défini au travers des propriétés de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale, est également connu sous le nom d'effet Joseph (Mandelbrot et Wallis, 1968).

Le premier processus à mémoire longue est le mouvement brownien fractionnaire développé par Mandelbrot et Van Ness (1968). Ce processus est caractérisé par un paramètre appelé exposant de Hurst, noté H , permettant de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance : mémoire courte ou nulle, mémoire longue positive (persistance) et anti-persistance. Les séries économiques étant typiquement en temps discret, Mandelbrot et Wallis (1969a,b,c) ont défini un analogue en temps discret du mouvement brownien fractionnaire en temps continu, appelé bruit gaussien fractionnaire. Tout comme le mouvement brownien fractionnaire, ce processus exhibe également le phénomène de persistance.

Une seconde classe de modèles, liés au mouvement brownien fractionnaire, est constituée des processus *ARFIMA* (*Auto Regressive Fractionally Integrated Moving Average*). Ceux-ci constituent une généralisation des processus *ARIMA*(p,d,q) standards dans lesquels l'exposant de différenciation d était un entier. Les processus *ARFIMA*(p,d,q) présentent ainsi l'avantage de tenir compte explicitement du comportement de long terme de la série au travers d'un paramètre d'intégration fractionnaire d , les fluctuations de court terme étant quant à elles décrites par les paramètres auto-régressifs et de moyenne mobile. Ces processus sont liés à l'exposant de Hurst au travers d'une relation entre le paramètre d'intégration fractionnaire et H , relation déduite de la fonction d'autocovariance du bruit gaussien fractionnaire. Une estimation des processus *ARFIMA* fournit donc également un estimateur de l'exposant de Hurst.

L'objet de ce papier est ainsi d'estimer par différentes méthodes l'exposant de Hurst afin de déterminer si les séries de rentabilités boursières sont caractérisées par une mémoire de long terme. La présence d'une mémoire

(*) Université Paris X - Nanterre, UFR SEGMI, Modem.

Une première version de ce papier a été présentée au colloque de l'ESEM (*Econometric Society European Meeting*) des 25-29 août 1996 à Istanbul sous le titre "Detecting Long-Range Dependence in Stock Returns". Je remercie E. Dubois pour son aide précieuse concernant la programmation informatique de certains tests économétriques. Je remercie également les deux rapporteurs anonymes dont les observations m'ont permis d'améliorer la version initiale de ce texte.

longue a d'importantes implications dans la théorie financière moderne (Lo, 1991), et plus spécifiquement en ce qui concerne la théorie de l'efficacité des marchés financiers (Mignon, 1995).

Nous savons qu'un marché est informationnellement efficace si les cours des actifs qui y sont cotés reflètent toute l'information disponible. En d'autres termes, il est impossible de prévoir les rentabilités futures à partir des rentabilités passées puisque toute l'information, connue ou anticipée, est déjà incorporée dans le prix. Si les rentabilités présentent une structure de dépendance de long terme, alors les observations distantes exhibent des autocorrélations significatives. La connaissance du passé fournit ainsi une aide à la prévision des valeurs futures. Nous savons de plus, depuis les travaux de Samuelson (1965) que, si un marché est efficace, le prix observé sur le marché est nécessairement égal à sa valeur fondamentale⁽²⁾. Il est donc impossible de réaliser des profits anormaux en spéculant sur une éventuelle différence entre les deux valeurs (Jensen, 1978). Cette définition de l'efficacité est moins restrictive que la précédente mais est à nouveau remise en question en présence de mémoire longue dans la mesure où la mémoire de long terme induit l'existence d'un écart durable entre le cours et sa valeur fondamentale. La mémoire longue dans les rentabilités a donc d'importantes implications en théorie financière et permet d'appréhender l'hypothèse d'efficacité sous un angle relativement nouveau.

L'article est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons les principales propriétés des processus à mémoire longue. Le paragraphe suivant a pour objet de présenter les diverses méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Ces méthodes sont ensuite appliquées sur des séries hebdomadaires de rentabilités boursières.

Les processus à mémoire longue

Après avoir défini de manière générale les processus à mémoire longue, nous présentons les propriétés essentielles de deux d'entre eux : le bruit gaussien fractionnaire et les processus *ARFIMA*.

Loi de Hurst et définition générale des processus à mémoire longue

Les premiers processus à mémoire longue ont été développés dans le but de formaliser mathématiquement la loi empirique découverte par Hurst (1951) sur diverses séries hydrologiques. Les modèles traditionnellement retenus en hydrologie supposaient que les niveaux d'eau successifs d'une rivière étaient indépendants au cours du temps, ou n'étaient que faiblement dépendants. On parle alors de mémoire nulle (indépendance totale) ou mémoire courte (faible dépendance entre les observations). L'exemple le plus connu de processus à mémoire courte est fourni par les modèles *ARMA*. Ces derniers sont caractérisés par une fonction d'autocorrélation décroissant géométriquement lorsque le retard augmente et par une densité spectrale finie et positive lorsque la fréquence tend vers zéro. Hurst va rejeter de tels modèles en montrant qu'ils sous-estiment très largement la complexité des fluctuations hydrologiques. La loi empirique de Hurst est issue de la détermination de la capacité idéale d'un réservoir d'eau. En divisant la capacité du réservoir par l'écart-type de T décharges successives d'un fleuve, Hurst trouve que ce rapport est proportionnel à T^H , où H est une constante, appelée exposant de Hurst, comprise entre 0 et 1. Si les niveaux d'eau de la rivière étaient indépendants, Hurst aurait dû trouver que ce rapport se comportait comme $T^{1/2}$. Le fait que le rapport entre la capacité et l'écart-type soit proportionnel à T^H est connu sous le nom de "loi de Hurst" ou "loi T^H ". La signification de cette découverte empirique réside dans le fait que la série des niveaux d'eau du fleuve n'est pas indépendante, n'est pas non plus faiblement dépendante, mais est fortement dépendante. On dira alors que cette série comporte une mémoire de long terme : les conséquences d'un choc sur la série considérée vont se répercuter sur un nombre très important de valeurs futures et le choc affectera donc le comportement de long terme de la série. Cette découverte empirique est à la base des divers processus à mémoire longue développés par la suite.

La définition de la mémoire longue peut alors être posée de manière équivalente en termes de fonction de corrélation et de densité spectrale :

Définition (domaine temporel) :

Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel α , $0 < \alpha < 1$, et une constante c , $c > 0$, vérifiant :

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c \cdot k^{-\alpha}} = 1$$

où ρ est la fonction d'autocorrélation et k le retard.

On constate donc que lorsque le retard k tend vers l'infini, les autocorrélations $\rho(k)$ diminuent à un taux hyperbolique, donc nettement plus lentement que les autocorrélations d'un processus à mémoire courte qui décroissent à un taux exponentiel.

Définition (domaine fréquentiel) :

Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel β , $0 < \beta < 1$, et une constante c' , $c' > 0$, vérifiant :

$$(2) \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(\omega)}{c' \cdot |\omega|^{-\beta}} = 1$$

où $f(\omega)$ est la densité spectrale du processus X_t à la fréquence ω .

Ainsi, la densité spectrale exhibe un pôle à la fréquence zéro, contrairement à la densité spectrale des processus à mémoire courte qui est finie et positive aux basses fréquences.

Les processus que nous présentons ci-après répondent à ces deux propriétés et vérifient donc la loi de Hurst.

Bruit gaussien fractionnaire et processus ARFIMA

Bruit gaussien fractionnaire

Le premier processus à mémoire longue, introduit par Mandelbrot et Van Ness (1968) est le mouvement brownien fractionnaire (cf. annexe 1). Ce dernier constitue une généralisation du mouvement brownien ordinaire dans lequel les incréments étaient indépendants au cours du temps. Les séries temporelles économiques étant cependant en temps discret, Mandelbrot et Wallis (1969c) ont dérivé un analogue en temps discret – le bruit gaussien fractionnaire – du mouvement brownien fractionnaire en temps continu.

Les incréments X_t du mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$:

$$(3) X_t = B_H(t) - B_H(t-1)$$

forment un processus gaussien stationnaire appelé bruit gaussien fractionnaire en temps discret (Mandelbrot et Wallis, 1969c). La fonction d'autocovariance de ce processus découle des propriétés d'auto-affinité et de stationnarité du mouvement brownien fractionnaire et est donnée par :

$$(4) \gamma(k) = \frac{1}{2} [|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}]$$

et :

$$(5) \lim_{k \rightarrow \infty} k^{2-2H} \gamma(k) = H(2H-1)$$

La densité spectrale vérifie les relations suivantes :

$$(6) f(\omega; H) = \pi^{-1} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H) \cdot (1 - \cos \omega) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j + \omega|^{-2H-1}$$

et

$$(7) \lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega; H) = C |\omega|^{1-2H}$$

où

$$(8) C = \pi^{-1} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H)$$

Tout comme le mouvement brownien fractionnaire, le bruit gaussien est auto-affine de paramètre d'auto-affinité H : la distribution de $X(rt)$ est identique à celle de $r^H X(t)$ où H est un paramètre tel que $0 < H < 1$ et r un paramètre positif (cf. annexe 1). Le coefficient H est appelé exposant de Hurst et fournit une mesure de l'intensité de la dépendance de long terme. Ainsi, les relations (5) et (7) permettent de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance :

Si $H = 1/2$, les autocorrélations sont nulles et la densité spectrale est constante et positive. Le processus ne présente donc aucune dépendance à long terme.

Si $1/2 < H < 1$, les autocorrélations sont toutes positives et diminuent hyperboliquement vers zéro. La densité spectrale exhibe un pôle à la fréquence zéro. La série présente des cycles non périodiques de tous ordres. Les basses fréquences sont très importantes et les cycles (non périodiques) lents deviennent de plus en plus marqués. Le processus présente une forme persistante de mémoire longue.

Si $0 < H < 1/2$, les autocorrélations alternent de signe et la densité spectrale, nulle en zéro, est dominée par les composantes de haute fréquence. Le processus est anti-persistant : des phases de hausse ont tendance à être suivies par des phases de baisse.

Le bruit gaussien fractionnaire est donc un analogue en temps discret du mouvement brownien fractionnaire. Toutefois, la définition de ce processus repose essentiellement sur sa fonction de corrélation qui est la même que celle du mouvement brownien fractionnaire en différence première. En outre, le bruit gaussien fractionnaire ne dépend que d'un seul paramètre, l'exposant de Hurst H , et, s'il peut effectivement caractériser le comportement de long terme d'une série, il ne peut prétendre à en expliquer le comportement à court terme. De ce point de vue les processus *ARFIMA* introduits par Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981) constituent une avancée notable dans la modélisation des séries temporelles. Ces processus contiennent en effet une partie *ARMA* traditionnelle, tenant compte du comportement de court terme, et un paramètre d'intégration fractionnaire visant à expliciter les mouvements de long terme de la série étudiée.

Processus ARFIMA

Les processus *ARFIMA* constituent une généralisation des processus *ARIMA* standards dans lesquels l'exposant de différenciation d était un entier. Le cas d'un paramètre de différenciation non entier est important en termes de mémoire longue. Dans un processus *ARMA*(p, q), $d = 0$, traduisant le fait que la série ne comporte qu'une mémoire courte. Pour les processus *ARIMA*(p, d, q), d est souvent égal à 1, ce qui correspond au cas de mémoire infinie. Par conséquent, le cas intermédiaire de mémoire longue, *i.e.* d fractionnaire, n'est pas pris en compte par les modèles classiques de séries temporelles. La classe des processus *ARFIMA* peut être utilisée pour modéliser une dépendance qui est plus forte que celle permise par les processus *ARMA* et plus faible que celle induite par les *ARIMA*.

Les processus *ARFIMA* sont donnés par :

$$(9) \Phi(L)(1-L)^d Y_t = \Theta(L) \varepsilon_t$$

où

$$(1-L)^d = \nabla^d = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots$$

$\Phi(L)$ et $\Theta(L)$ sont des polynômes retards en L :

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

$$-1/2 < d < 1/2$$

ε_t est un bruit blanc.

Le processus *ARFIMA* le plus simple est le processus *ARFIMA*(0,d,0)⁽³⁾ :

$$(1-L)^d Y_t = \varepsilon_t$$

En supposant que ε_t est de variance unitaire, la fonction d'autocovariance de ce processus est donnée par :

$$(10) \gamma(k) = \frac{\Gamma(1-2d) \Gamma(k+d)}{\Gamma(d) \Gamma(1-d) \Gamma(k+1-d)}$$

Quand k tend vers l'infini, on a :

$$(11) \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(k) = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d) \Gamma(1-d)} |k|^{2d-1}$$

Un des avantages du processus *ARFIMA*(0, d, 0) par rapport au bruit gaussien fractionnaire est qu'il possède une densité spectrale particulièrement simple :

$$(12) f(\omega, d) = \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{-2d} \text{ pour } 0 < \omega \leq \pi$$

et

$$(13) \lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega, d) = |\omega|^{-2d}$$

Lorsque $-1/2 < d < 1/2$, le processus Y_t est stationnaire et inversible. Les autocorrélations décroissent hyperboliquement vers zéro et la densité spectrale n'est pas limitée à la fréquence zéro. Ces processus vérifient donc la définition générale des processus à mémoire longue donnée au paragraphe précédent. En outre, d décrit le comportement de long terme de la série alors que les paramètres auto-régressifs et de moyenne mobile prennent en compte les fluctuations de court terme.

Si l'on compare les fonctions d'autocovariance du bruit gaussien fractionnaire et des processus *ARFIMA* (équations (5) et (11)), on constate qu'elles décroissent au même taux. En identifiant les deux puissances des relations (5) et (11), nous obtenons la relation suivante :

$$(14) d = H - \frac{1}{2}$$

Dès lors, à partir de cette relation, il est possible de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance selon le même schéma que celui retenu dans le cas du bruit gaussien fractionnaire⁽⁴⁾ :

- si $d = 0$, le processus *ARFIMA* se réduit au processus *ARMA* standard ;
- si $0 < d < 1/2$, le processus est persistant ;
- si $-1/2 < d < 0$, le processus est anti-persistant.

Ainsi, tout comme l'exposant de Hurst, le paramètre d'intégration fractionnaire nous fournit une mesure de l'intensité de la dépendance présente dans une série temporelle.

Estimation de l'exposant de Hurst

Il existe diverses méthodes pour estimer l'exposant de Hurst (cf. les travaux récents de Beran, 1994 ; Taqqu *et alii*, 1995). Nous nous référons ici explicitement à certaines procédures exposées dans Taqqu *et alii* (1995) et nous renvoyons à ces auteurs pour plus de détails. En outre, du fait de la relation existant entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire, il est également possible d'estimer les processus *ARFIMA* et d'en déduire la valeur de H . Nous présenterons donc également brièvement trois méthodes d'estimation des processus *ARFIMA*⁽⁵⁾.

Calcul de l'exposant de Hurst

Analyses *R/S* et *R/S* modifiée

Analyse *R/S*

L'analyse *R/S*, introduite par Hurst et développée dans divers travaux par Mandelbrot, est certainement la méthode d'estimation de H la plus connue. Cette statistique se définit comme l'étendue des sommes partielles des écarts d'une série temporelle à sa moyenne divisée par son écart-type. Considérons une série temporelle Y_t , $t = 1, \dots, T$, de moyenne \bar{Y}_T . L'étendue R est définie par :

$$(15) R = \max_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T) - \min_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T)$$

Le calcul de la statistique consiste à diviser l'étendue par l'écart-type s_T de la série, soit :

$$(16) Q_T = R/s_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (Y_j - \bar{Y}_T)^2 \right]^{1/2}} \left[\max_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T) - \min_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T) \right]$$

Q_T est alors appelée statistique *R/S* et est toujours positive. Dans divers articles, Mandelbrot et Wallis (1969e), Mandelbrot (1973), Mandelbrot et Taqqu (1979) ont souligné la supériorité de l'analyse *R/S* par rapport aux méthodes plus traditionnelles de détection de la mémoire longue telles que l'étude des autocorrélations, les rapports de variances et l'analyse spectrale. Mandelbrot et Wallis (1968) montrent que l'analyse *R/S* peut détecter la présence de mémoire longue même dans une série temporelle fortement non gaussienne. Mandelbrot et Wallis (1969d) notent en outre que, contrairement à l'analyse spectrale qui détecte uniquement les cycles périodiques, la statistique *R/S* peut déceler des cycles non périodiques. Enfin, Mandelbrot et Wallis (1969e) montrent que la statistique *R/S* est indépendante de la distribution marginale.

L'intérêt de l'analyse *R/S* est qu'elle donne lieu à l'exposant de Hurst :

$$(17) H \sim \frac{\log Q_T}{\log T}$$

où T est le nombre d'observations de la série.

Lo (1991) a montré que la statistique *R/S* souffrait de deux inconvénients majeurs :

- elle est sensible à la mémoire courte : la statistique *R/S* ne peut distinguer, en échantillon fini, les caractéristiques de court terme des propriétés de long terme de la série ;
- elle ne constitue pas un test statistique dans la mesure où sa distribution asymptotique est inconnue.

Afin d'apporter une solution à ces deux problèmes, Lo (1991) a créé une statistique, appelée *R/S* modifiée, robuste à la dépendance de court terme et a dérivé sa distribution limite. Cette nouvelle statistique constitue ainsi une généralisation de l'analyse *R/S* traditionnelle et son comportement statistique est invariant sous une classe générale de processus à mémoire courte tout en restant sensible à la présence d'une mémoire de long terme.

Analyse *R/S* modifiée

La statistique *R/S* modifiée, notée \tilde{Q}_T , est définie par :

$$(18) \quad \tilde{Q}_T = R / \hat{\sigma}_T(q) \frac{1}{\hat{\sigma}_T(q)} \left[\text{Max}_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T) - \text{Min}_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (Y_j - \bar{Y}_T) \right]$$

où

$$(19) \quad \hat{\sigma}_T^2(q) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (Y_j - \bar{Y}_T)^2 + \frac{2}{T} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \left[\sum_{i=j+1}^T (Y_j - \bar{Y}_T) (Y_{i-j} - \bar{Y}_T) \right]$$

et

$$(20) \quad \omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}$$

Cette statistique diffère de la statistique *R/S* traditionnelle uniquement par son dénominateur. Ce dernier, en présence d'autocorrélation, ne représente plus seulement la somme des variances des termes individuels, mais inclue également les autocovariances. Celles-ci sont pondérées en fonction des décalages q ; les poids $\omega_j(q)$ ayant été suggérés par Newey et West (1987). En outre, Andrews (1991) a proposé une règle pour le choix de q :

$$(21) \quad q = [k_T] \text{ où } k_T = \left(\frac{3T}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2} \right)^{2/3}$$

où $[k_T]$ est la partie entière de k_T , et $\hat{\rho}$ le coefficient d'autocorrélation du premier ordre.

Contrairement à l'analyse *R/S* classique, la distribution limite de la statistique *R/S* modifiée est connue et la statistique V définie par :

$$(22) \quad V = \frac{\tilde{Q}_T}{\sqrt{T}}$$

converge vers l'étendue d'un pont brownien sur l'intervalle unité⁽⁶⁾. Il est donc possible d'effectuer un test statistique de l'hypothèse nulle de mémoire courte contre l'hypothèse alternative de mémoire longue en se référant à la table de valeurs critiques fournie par Lo (1991).

Méthode de la variance agrégée

Cette méthode est basée sur la série temporelle agrégée :

$$(23) \quad Y_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1+m(k-1)}^{km} Y(t)$$

où

m est la taille d'un bloc,

$k = 1, 2, \dots$ est le numéro séquentiel du bloc.

La procédure consiste ainsi à diviser la série en T/m blocs de taille m , où T est le nombre d'observations, et à calculer la série agrégée $Y_k^{(m)}$ pour $k = 1, 2, \dots, T/m$. On calcule ensuite la variance de $Y_k^{(m)}$ à l'intérieur de chaque bloc :

$$(24) \quad V(Y_k^{(m)}) = \frac{1}{T/m} \sum_{k=1}^{T/m} [Y_k^{(m)}]^2 - \left[\frac{1}{T/m} \sum_{k=1}^{T/m} [Y_k^{(m)}] \right]^2$$

Cette procédure est ensuite répétée pour des valeurs successives de m . D'après les relations (5) ou (11), on a

$$(25) V(Y_k^{(m)}) \sim C \cdot m^{2H-2}$$

où C est une constante.

Dès lors, un estimateur de l'exposant de Hurst H peut être obtenu au moyen d'une régression de $\log(V(Y_k^{(m)}))$ sur $\log(m)$.

Méthode des valeurs absolues de la série agrégée

Cette procédure, très similaire à la précédente, consiste à déterminer la série agrégée $Y_k^{(m)}$ selon l'équation (23). Ensuite, au lieu de calculer la variance, on calcule la somme des valeurs absolues de la série agrégée, soit :

$$(26) S(Y_k^{(m)}) = \frac{1}{T/m} \sum_{k=1}^{T/m} |Y_k^{(m)}|$$

En effectuant une régression de $\log(S(Y_k^{(m)}))$ sur $\log(m)$, on obtient une droite de pente $H-1$, ce qui nous fournit un estimateur de H .

Méthode des résidus

Tout comme précédemment, la série est divisée en m sous-séries. La procédure consiste alors à calculer les sommes partielles $S_p(i)$, $i = 1, \dots, m$. Après avoir régressé les sommes partielles sur une tendance, la variance des résidus de régression est estimée. Ce processus est répété pour chacune des sous-séries. Pour une valeur de m suffisamment grande, le résultat obtenu⁽⁷⁾ est proportionnel à m^{2H} .

L'utilisation de la dimension fractale

Outre les méthodes précédemment exposées, une procédure alternative consiste à utiliser un concept issu du domaine déterministe : la dimension fractale (cf. annexe 1). Cette notion est intéressante dans la mesure où la trajectoire temporelle d'un processus auto-affine de paramètre d'auto-affinité H a une dimension fractale D donnée par $D = 2 - H$ (Mandelbrot, 1985 ; Peitgen et Saupe, 1988 ; Abraham-Frois *et alii*, 1996). La procédure développée par Higuchi (1988) consiste à calculer les sommes partielles S_p de la série Y_t et à déterminer la quantité :

$$(27) L(m) = \frac{T-1}{m^3} \sum_{i=1}^m \left[\frac{m}{T-i} \right] \sum_{k=1}^{(T-i)/m} |S_p(i+km) - S_p(i+(k-1)m)|$$

où T est le nombre d'observations, m est la longueur d'une sous-série et $[]$ dénote la partie entière. La longueur $L(m)$ est alors proportionnelle à $c \cdot m^{-D}$ (Higuchi, 1988) où c est une constante et D est la dimension fractale de la trajectoire temporelle d'un processus de paramètre d'auto-affinité H : $D = 2 - H$. Ainsi, une régression de $\log(L(m))$ sur $\log(m)$ conduit à une droite de pente $-(2-H)$.

Du fait de la relation existant entre le paramètre d'intégration fractionnaire d et l'exposant de Hurst, il est également possible de déterminer H en estimant des processus *ARFIMA*.

Estimation des processus ARFIMA

Il existe diverses techniques d'estimation des processus *ARFIMA* (cf. Lardic et Mignon, 1996b). Nous présentons ici trois méthodes : la méthode spectrale de Geweke et Porter-Hudak (1983), la procédure du maximum de vraisemblance exact de Sowell (1992) et la technique du maximum de vraisemblance approximé développée par Fox et Taqu (1986).

La méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983)

Nous avons précédemment signalé la nature atypique de la densité spectrale d'un processus *ARFIMA* aux basses fréquences. La méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983) consiste ainsi à effectuer une régression du logarithme du périodogramme autour des basses fréquences :

$$(28) \ln I(\omega_j) = \ln f_\varepsilon(0) - d \ln |1 - e^{-i\omega_j}|^2 + \ln \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)} + \ln \frac{(f_\varepsilon \omega_j)}{f_\varepsilon(0)}$$

où

$I(\cdot)$ est le périodogramme

f_ε est la densité spectrale de ε_t , $\varepsilon_t = \nabla^d Y_t$,

f est la densité spectrale de Y_t ,

$j = 1, \dots, n$ où n correspond aux ordonnées. Généralement, $n = \sqrt{T}$.

ω_j sont les harmoniques : $\omega_j = 2\pi j / T$.

Lorsque ω_j tend vers zéro, le dernier terme de (28) est négligeable et (28) devient alors une équation de régression qui peut être estimée par les moindres carrés ordinaires.

Geweke et Porter-Hudak (1983) montrent que l'estimateur \hat{d} de d est tel que :

$$(29) \hat{d} \sim N \left(0, \frac{\pi^2}{6} \left[\sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 \right]^{-1} \right)$$

En utilisant la relation $d = H - 1/2$, on obtient ainsi un estimateur de l'exposant de Hurst.

Bien évidemment, cette procédure est équivalente à effectuer une régression de $\log I(\omega_j)$ sur $\log(\omega_j)$. Puisque $I(\omega_j)$ est un estimateur de la densité spectrale et puisque la densité spectrale d'un processus à mémoire longue est proportionnelle à $|\omega_j|^{1-2H}$, le périodogramme doit être proportionnel à $|\omega_j|^{1-2H}$ aux basses fréquences. Par conséquent, une régression du logarithme du périodogramme sur le logarithme de la fréquence fournit une droite de pente $1-2H$.

Procédure du maximum de vraisemblance exact

Cette procédure, développée par Sowell (1992a,b), a été utilisée par Lardic et Mignon (1995, 1996a et 1996b) sur diverses séries financières. L'intérêt principal de la méthode du maximum de vraisemblance exact est qu'elle utilise toute l'information concernant le comportement de la série, à la fois à court et long termes puisque sont estimés simultanément tous les paramètres de la représentation *ARFIMA*(p, d, q). La méthode ainsi que la mise en œuvre empirique sont présentées dans Lardic et Mignon (1996a,b), nous ne rappelons ici que les principaux résultats. La fonction de log-vraisemblance d'une série temporelle Y_T gaussienne stationnaire à intégration fractionnaire est donnée par :

$$(30) L(Y_T, \theta_0) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\Sigma(\theta_0)| - \frac{1}{2} Y_T' \Sigma^{-1}(\theta_0) Y_T$$

où Σ est la matrice de variance covariance de Y_T , $|\Sigma|$ son déterminant et θ_0 est le vecteur des vrais paramètres inconnus contenant la variance du bruit blanc, le paramètre d'intégration fractionnaire, les paramètres auto-régressifs et de moyenne mobile.

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_0$ de θ_0 est obtenu en maximisant la log-vraisemblance conditionnellement au vecteur des paramètres θ_0 .

Ainsi,

$$(31) L'(Y_T, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(Y_T, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log |\Sigma(\theta)| - \frac{1}{2} Y_T' \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \Sigma^{-1}(\theta) \right] Y_T$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ_0 est alors solution de :

$$(32) L'(Y_T, \hat{\theta}) = 0$$

Soit la matrice D telle que :

$$(33) D(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(Y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(Y) \right)' dY$$

La distribution asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance est alors donnée par :

$$\hat{\theta} \xrightarrow[p.s.]{p.s.} \theta_0 \text{ quand } T \rightarrow \infty \text{ (p.s. : presque sûrement)}$$

et $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0)$ tend en distribution vers une loi normale de moyenne 0 et de matrice de variance covariance $D^{-1}(\theta_0)$.

En outre, Dalhaus (1989) montre que l'estimateur du maximum de vraisemblance exact est asymptotiquement efficace au sens de Fisher.

La méthode du maximum de vraisemblance exact est probablement la technique d'estimation la plus efficace⁽⁸⁾ mais c'est également la plus difficile à mettre en œuvre en raison notamment de l'inversion de la matrice de variance covariance. Afin de faciliter la mise en œuvre empirique de l'estimation par le maximum de vraisemblance, Fox et Taqu (1986) ont proposé d'approximer la fonction de log-vraisemblance au moyen de la fonction de Whittle. Cette procédure du maximum de vraisemblance approximé est présentée succinctement ci-après.

Procédure du maximum de vraisemblance approximé

Cette technique suggérée initialement par Fox et Taqu (1986) consiste, afin de limiter les temps de calculs excessivement longs de la log-vraisemblance⁽⁹⁾, à remplacer le déterminant de la matrice de variance covariance ainsi que l'inverse de cette matrice (cf. équation (30)) par deux approximations :

$$(34) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log |\Sigma(\theta)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\omega, \theta) d\omega$$

$$(35) Y_T' \Sigma^{-1}(\theta) Y_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{f(\omega, \theta)} d\omega$$

La log-vraisemblance approximée peut alors s'écrire :

$$(36) L(Y_T, \theta) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\omega, \theta) d\omega - \frac{T}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega, \theta)}{f(\omega, \theta)} d\omega$$

Fox et Taqu (1986) ont montré que la distribution asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance approximé était identique à celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance exact. Dalhaus (1989) montre également l'efficacité asymptotique de cet estimateur au sens de Fisher. Notons cependant, à la suite de Dalhaus (1988), que le comportement en échantillon fini de l'estimateur du maximum de vraisemblance approximé est relativement mauvais si le spectre de la série exhibe des pics aux fréquences proches de zéro,

ce qui est le cas si la série comporte une mémoire de long terme. La méthode du maximum de vraisemblance exact, malgré sa difficulté de mise en œuvre, apparaît donc optimale comme en témoigne le paragraphe ci-après.

Comparaison des techniques d'estimation

L'avantage majeur de l'analyse R/S modifiée, de la procédure de Geweke et Porter-Hudak et des méthodes du maximum de vraisemblance est qu'elles fournissent des distributions asymptotiques permettant de tester la significativité de l'exposant de Hurst, *i.e.* l'hypothèse nulle $H = 0,5$. Les autres méthodes d'estimation souffrent de la même critique adressée par Lo (1991) concernant la statistique R/S . Nous appliquons cependant ces différentes techniques dans le but de comparer les valeurs estimées de l'exposant de Hurst.

Divers auteurs ont mené des simulations afin de comparer les différentes techniques d'estimation. Taquq *et alii* (1995) ont ainsi généré des bruits gaussiens fractionnaires et des processus $ARFIMA(0,d,0)$ pour des valeurs de l'exposant de Hurst variant entre 0,5 et 0,9. Les méthodes d'estimation testées sont l'analyse R/S , la méthode de la variance agrégée, la procédure des valeurs absolues de la série agrégée, la technique des résidus, la procédure de Higuchi, la méthode de Geweke et Porter-Hudak et la méthode du maximum de vraisemblance approximé. Pour les deux types de processus envisagés, les auteurs montrent que la meilleure méthode, en termes de robustesse (biais minimum) et d'efficacité (variance minimale) est la procédure d'estimation par le maximum de vraisemblance approximé. Le biais et la racine de l'erreur quadratique moyenne restent de plus constants lorsque la valeur de l'exposant de Hurst augmente. Outre cette technique, la méthode des résidus apparaît également satisfaisante en ce qui concerne l'estimation du bruit gaussien fractionnaire. Dans le cas des processus $ARFIMA(0,d,0)$, la technique R/S est la plus efficace alors que la méthode des résidus semble être la plus robuste. Les procédures les moins efficaces et les moins robustes sont respectivement la méthode des valeurs absolues de la série agrégée et la procédure de la variance agrégée.

Concernant plus spécifiquement les techniques d'estimation par le maximum de vraisemblance, les simulations effectuées par Sowell (1992) sur des échantillons de 100 observations issues de processus $ARFIMA(0,d,0)$, font ressortir la supériorité de la méthode du maximum de vraisemblance exact par rapport à la procédure du maximum de vraisemblance approximé et la technique de Geweke et Porter-Hudak. L'auteur montre en outre que le biais est indépendant de la valeur du paramètre d'intégration fractionnaire pour les deux techniques du maximum de vraisemblance alors qu'il croît avec la valeur de d dans la procédure de Geweke et Porter-Hudak. Dans le cas où l'on introduit des termes auto-régressifs et de moyenne mobile dans les processus $ARFIMA$, la méthode du maximum de vraisemblance exact apparaît toujours comme plus optimale en termes de minimisation du biais et de la variance. Ces conclusions sont globalement confirmées par Cheung et Diebold (1994) qui montrent qu'en échantillon fini la méthode du maximum de vraisemblance exact est plus efficace et plus robuste que la procédure du maximum de vraisemblance approximé. Néanmoins, les auteurs soulignent que dans le cas où la moyenne du processus est inconnue – et doit donc être estimée – l'efficacité de la procédure du maximum de vraisemblance approximé croît considérablement au détriment de la méthode du maximum de vraisemblance exact.

Pour conclure, notons que les simulations de Cheung (1993a) font ressortir que l'analyse R/S modifiée et la procédure de Geweke et Porter-Hudak sont robustes à l'hétéroscédasticité conditionnelle. Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cadre de notre étude sur les séries boursières puisque l'on sait que de telles séries exhibent fréquemment un effet de type $ARCH^{(10)}$: la volatilité – appréhendée au travers de la variance conditionnelle – évolue au cours du temps. Il convient de souligner que les méthodes d'estimation par le maximum de vraisemblance n'incluent pas l'hétéroscédasticité conditionnelle, ce qui peut causer une certaine perte d'efficacité. Néanmoins, on notera à la suite de Cheung (1993b) que pour des tailles d'échantillon relativement importantes (ce qui est le cas dans notre étude), la perte d'efficacité reste faible et les propriétés des estimateurs restent valides.

Application aux rentabilités boursières

Nous appliquons les diverses méthodes évoquées précédemment sur les séries hebdomadaires des indices boursiers des pays du G7. Les indices ainsi que les périodes d'études retenus figurent dans le tableau 1 ci-après.

L'estimation de l'exposant de Hurst nécessite que la série analysée soit stationnaire afin d'éviter qu'une valeur élevée de H ne soit due à une éventuelle non stationnarité de la série (Mandelbrot, 1972). En outre, les méthodes d'estimation des processus *ARFIMA* basées sur l'analyse spectrale ne sont bien évidemment valides que si les séries étudiées sont stationnaires.

Tableau 1 : description des séries boursières

Indice boursier	Pays	Période d'étude
SP 500	États-Unis	02/01/1968 - 10/06/1996
FT 500	Grande-Bretagne	01/01/1969 - 29/01/1996
SBF 250	France	28/12/1990 - 10/06/1996
TOPIX	Japon	06/01/1969 - 10/06/1996
TSE 300	Canada	01/01/1970 - 10/06/1996
FAZ	Allemagne	01/01/1969 - 10/06/1996
BCI	Italie	01/01/1970 - 10/06/1996

Tableau 2 : tests de racine unitaire

Série	Test de Dickey-Fuller Augmenté			Test de Phillips-Perron		
	Modèle	Retards	Stat. DF	Modèle	Retards	Stat. PP
SP 500	1	6	2,377	1	6	2,5499
	2	6	-13,3846	2	6	-29,8243
FT 500	3	9	-2,7435	3	6	-2,8579
	1	10	-10,277	1	6	-27,0853
SBF 250	2	1	-2,307	1	4	1,0698
	1	0	-12,624	1	4	-12,7632
TOPIX	1	10	2,2555	1	6	2,5482
	2	9	-10,9805	1	6	-28,9425
TSE 300	3	3	-2,9016	3	6	-2,6809
	1	3	-15,8975	2	6	-24,8116
FAZ	3	1	-2,4782	3	6	-2,4318
	1	0	-27,7645	1	6	-27,8994
BCI	1	13	0,8858	1	6	1,0902
	1	12	-8,5755	1	6	-27,6896

Pour chaque série, les résultats sur la première ligne concernent la série brute en logarithmes et sur la seconde ligne la série en différence première logarithmique. Modèle 1 : modèle sans constante ni tendance, modèle 2 : modèle avec constante et sans tendance, modèle 3 : modèle avec constante et tendance. La colonne retards indique l'ordre du processus auto-régressif retenu pour la série en différence première (première ligne) et en différence seconde (deuxième ligne). Stat. DF et Stat. PP sont respectivement les statistiques de Dickey-Fuller et de Phillips-Perron à comparer avec les valeurs critiques de Fuller (1976).

Tableau 3 : statistiques descriptives sur les séries de rentabilités

Série	T	Moyenne	Écart-type	Skewness	Kurtosis	J.B.
SP 500	1404	0,001386	0,018125	-0,802536	9,477558	2605,298
FT 500	1331	0,001754	0,023086	0,039457	13,61881	6253,781
SBF 250	273	0,001371	0,016758	-0,14091	2,841104	1,19063
TOPIX	1331	0,001891	0,019843	-0,561735	8,031394	1473,922
TSE 300	1247	0,001265	0,018083	-0,87477	10,87819	3383,876
FAZ	1380	0,000991	0,0186	-0,726461	6,614252	872,4936
BCI	1298	0,001157	0,027756	-0,317956	5,923141	483,9991

T est le nombre d'observations. J.B. est la statistique du test de normalité de Jarque et Béra qui, sous l'hypothèse nulle de normalité, suit une loi de Khi-deux à 2 degrés de liberté.

Étude préliminaire : tests de racine unitaire et statistiques descriptives

Afin de tester la non stationnarité en moyenne des séries et de déterminer leur ordre d'intégration, il convient d'appliquer les tests de racine unitaire. Nous avons donc mis en œuvre le test de Dickey- Fuller Augmenté ainsi que le test de Phillips-Perron afin de tenir compte de l'hétéroscédasticité caractéristique des séries financières. Ces deux statistiques ont pour objet de tester l'hypothèse nulle de non stationnarité (présence d'une racine unitaire) contre l'hypothèse alternative de stationnarité.

L'application des tests de Dickey-Fuller et de Phillips-Perron fait ressortir la présence d'une racine unitaire dans toutes les séries en niveau (en logarithmes) considérées. Par conséquent, afin de rendre ces séries stationnaires, il convient de les différencier. Pour tester l'ordre d'intégration des séries, nous avons ensuite mis en œuvre les deux tests sur les séries en différence première. Les résultats du tableau 2 montrent alors clairement que toutes les séries en différence première sont stationnaires. Notre étude, nécessitant la stationnarité des séries, portera donc sur les séries de rentabilités, exprimées comme les variations logarithmes des cours⁽¹¹⁾. Le tableau 3 fournit les statistiques descriptives des séries considérées :

On remarquera principalement que l'hypothèse nulle de normalité est rejetée pour toutes les séries étudiées, à l'exception des rentabilités hebdomadaires de l'indice SBF 250. On notera en particulier le caractère fortement leptokurtique des séries de rentabilités boursières, ce phénomène d'excès de kurtosis des séries financières – témoignant de la forte probabilité des points extrêmes – étant dorénavant bien connu. Le coefficient de skewness souvent négatif indique quant à lui que les distributions des séries sont étalées vers la gauche (cf. annexe 2). Cette asymétrie peut être le signe de la présence de non linéarités dans le processus d'évolution des rentabilités. On sait en effet que les modèles linéaires ont des dynamiques restreintes dans la mesure où ils ne peuvent produire que quatre types de trajectoires : oscillatoire et stable, oscillatoire et explosive, non oscillatoire et stable, non oscillatoire et explosive. En particulier, comme le note Gouriéroux (1992), l'hypothèse de linéarité a pour conséquence que les composantes périodiques sont de période fixe et que les phases ascendante et descendante du cycle économique sont symétriques. Par conséquent, si l'on veut tenir compte de l'asymétrie caractéristique de nos séries, une modélisation non linéaire doit être envisagée. On peut à cet égard distinguer les processus à non linéarités dans la moyenne des processus à non linéarités dans la variance. Dans cette dernière catégorie les processus *ARCH* jouent un rôle prépondérant. Ces modèles sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle et permettent ainsi de modéliser le processus d'évolution de la volatilité des séries. Ces processus ont connu un très vif succès dans la littérature financière puisqu'ils permettent notamment de modéliser le risque (cf. Bollerslev *et alii*, 1991 pour une revue de la littérature). Notre objet est ici d'étudier la série des rentabilités à proprement parler et donc de nous focaliser sur les processus à non linéarités dans la moyenne. Dans cette classe de processus, nous nous intéressons ici aux processus à mémoire longue (processus *ARFIMA*) en tentant d'estimer l'exposant de Hurst. Ainsi, afin de tester le type de la structure de dépendance des séries de rentabilités boursières, nous appliquons à présent les diverses méthodes présentées au cours du troisième paragraphe.

Estimation de l'exposant de Hurst

Nous nous proposons à présent d'appliquer les diverses méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst exposées précédemment. Toutes ces techniques sont appliquées sur les séries d'indices boursiers en variations logarithmiques. Les résultats obtenus figurent dans le tableau 4 ci-après.

Au vu des résultats figurant dans le tableau 4, on constate tout d'abord que les méthodes *R/S* et *R/S* modifiée conduisent à des résultats relativement proches. On notera cependant que la technique *R/S* tend à surestimer la valeur de l'exposant de Hurst comparativement à la méthode *R/S* modifiée. Ceci peut s'expliquer par le fait que la méthode *R/S* est sensible à la dépendance de court terme, alors que la statistique *R/S* modifiée ne l'est pas. Ainsi, au regard des résultats fournis par l'application de la méthode *R/S* traditionnelle, toutes les séries paraissent présenter une mémoire de long terme puisque les exposants de Hurst sont toujours supérieurs à 0,5. Néanmoins, la distribution asymptotique de cette statistique est inconnue et nous ne pouvons donc pas déterminer si la valeur estimée de l'exposant de Hurst est significativement supérieure à 0,5. Ce problème peut être résolu par l'application de la méthode *R/S* modifiée. Il suffit alors de comparer les valeurs estimées de la statistique *V* aux valeurs critiques fournies par Lo (1991) qui sont, dans le cas d'un test unilatéral, 1,620 et 1,747 aux seuils respectifs de 10% et 5%. On constate ainsi que seules deux séries exhibent réellement un phénomène de persistance : les rentabilités des indices boursiers FT 500 et BCI. Pour toutes les autres séries et malgré le fait que l'exposant de Hurst soit supérieur à 0,5, l'hypothèse nulle de mémoire courte ne peut être rejetée.

Tableau 4 : estimation de l'exposant de Hurst

	SP 500	FT 500	SBF 250	TOPIX	TSE 300	FAZ	BCI
<i>R/S</i>	$H=0,5562$	$H=0,6178$	$H=0,5719$	$H=0,5884$	$H=0,5461$	$H=0,5575$	$H=0,6130$
<i>R/S mod.</i>	$H=0,5337$	$H=0,5728$	$H=0,5351$	$H=0,5566$	$H=0,5077$	$H=0,5206$	$H=0,5762$
	$V=1,2771$	$V=1,6881$	$V=1,2175$	$V=1,5026$	$V=0,9879$	$V=1,1609$	$V=1,7273$
Var. agr.	$H=0,4380$	$H=0,4592$	$H=0,4098$	$H=0,5647$	$H=0,4417$	$H=0,5052$	$H=0,6084$
Val. abs.	$H=0,5189$	$H=0,6015$	$H=0,4237$	$H=0,6356$	$H=0,4919$	$H=0,5747$	$H=0,6335$
Résidus	$H=0,4219$	$H=0,5909$	$H=0,5967$	$H=0,5946$	$H=0,5611$	$H=0,5832$	$H=0,6497$
Higuchi	$H=0,4903$	$H=0,5472$	$H=0,2273$	$H=0,6116$	$H=0,4237$	$H=0,5178$	$H=0,5981$
GPH	$H=0,3895$	$H=0,5598$	$H=0,5320$	$H=0,7184$	$H=0,5214$	$H=0,5632$	$H=0,6316$
	$t_H=0,7890$	$t_H=0,4273$	$t_H=0,2274$	$t_H=1,6560$	$t_H=0,1529$	$t_H=0,4512$	$t_H=0,9394$
Whittle	$H=0,4523$	$H=0,5545$	$H=0,5736$	$H=0,5785$	$H=0,5294$	$H=0,5252$	$H=0,5765$
	$t_H=0,1101$	$t_H=0,9966$	$t_H=0,9211$	$t_H=2,4208$	$t_H=0,8752$	$t_H=0,5072$	$t_H=1,6481$
Sowell	$H=0,4860$	$H=0,5381$	$H=0,4409$	$H=0,5701$	$H=0,5235$	$H=0,5109$	$H=0,5625$
	$t_H=0,4798$	$t_H=0,8522$	$t_H=0,4211$	$t_H=2,2356$	$t_H=0,7095$	$t_H=0,2238$	$t_H=1,3382$

V est égal au rapport de la statistique *R/S* modifiée sur la racine carrée du nombre d'observations et est à comparer aux valeurs critiques fournies par Lo (1991, p. 1288). t_H est la valeur de la statistique de Student associée au coefficient H estimé.

Les méthodes de la variance agrégée (Var. agr.), des valeurs absolues de la série agrégée (Val. abs.), des résidus et de Higuchi – que nous appellerons "méthodes de régression" pour simplifier– conduisent à des résultats assez homogènes pour les rentabilités boursières des indices TOPIX, FAZ et BCI. Pour ces trois séries, l'exposant de Hurst estimé est relativement stable et supérieur à 0,5 laissant ainsi envisager la présence d'une structure de dépendance de long terme. On notera également que ces techniques semblent détecter un phénomène d'anti-persistance dans les rentabilités boursières américaines puisque H est inférieur à 0,5. Pour les autres séries les résultats sont plutôt épars. Ainsi, pour les rentabilités des indices FT 500 et TSE 300, certaines techniques concluent à un phénomène de persistance alors que d'autres nous conduisent à opter en faveur d'anti-persistance! Les résultats sont particulièrement surprenants pour les rentabilités françaises (SBF 250) puisque H varie entre 0,22 (soit un net phénomène d'anti-persistance) et 0,59 selon les méthodes. Ces résultats nous conduisent à nous interroger sur la fiabilité des "techniques de régression" en échantillon fini. La forte imprécision, difficilement explicable, attachée aux résultats concernant les rentabilités du SBF 250 nous paraît ainsi provenir de la taille de l'échantillon puisque le nombre d'observations est très faible comparativement à celui des autres séries. Quoiqu'il en soit, aucune des ces quatre techniques ne nous permet de tester la significativité de l'exposant de Hurst estimé. À cet égard, les résultats fournis par l'estimation des processus *ARFIMA* nous paraît plus intéressante.

Les méthodes d'estimation des processus *ARFIMA* – Geweke et Porter-Hudak (GPH), maximum de vraisemblance approximé (Whittle) et maximum de vraisemblance exact (Sowell)– conduisent à des résultats comparables en termes de valeur de l'exposant de Hurst, abstraction faite de la série SBF 250. On notera en particulier à nouveau la valeur inférieure à 0,5 de l'exposant de Hurst pour les rentabilités du SP 500, même si ce phénomène d'anti-persistance ne paraît pas significatif au regard des valeurs des t de Student. Les autres séries sont caractérisées par un exposant de Hurst supérieur à 0,5 mais celui-ci n'est significatif que pour les rentabilités boursières des indices japonais (par les trois méthodes) et italien (par le maximum de vraisemblance approximé).

Ces commentaires méthode par méthode étant effectués, que ressort-il globalement de nos résultats ?

En premier lieu, les résultats en termes de significativité de l'exposant de Hurst sont assez éparpillés. Ainsi, la série des rentabilités de l'indice FT 500 qui présentait un exposant de Hurst significativement différent de 0,5 au regard de l'analyse *R/S* modifiée ne paraît plus comporter de mémoire longue au travers des résultats fournis par les méthodes *ARFIMA*. Pour les rentabilités japonaises, on retrouve le même cas de figure mais en sens inverse. La série des rentabilités de l'indice BCI présente quant à elle une structure de dépendance de long terme au regard de l'analyse *R/S* modifiée et d'une seule technique d'estimation *ARFIMA* : la méthode du maximum de vraisemblance approximé.

En second lieu, les méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst paraissent fortement sensibles à la taille de l'échantillon à en juger par les résultats obtenus sur la série des rentabilités de l'indice SBF 250 : pour cette série, l'exposant de Hurst varie entre 0,22 et 0,60 !

Globalement, nous retiendrons que seules deux séries semblent présenter une structure de dépendance de long terme : les rentabilités boursières des indices TOPIX et BCI ; le résultat positif obtenu sur la série FT 500 avec l'analyse *R/S* modifiée nous paraissant quelque peu isolé... On notera en outre le caractère relativement stable de l'estimation de *H* pour les rentabilités italiennes. Pour toutes les autres séries, l'hypothèse nulle de mémoire courte ne peut être rejetée. Le paragraphe suivant appréhende les implications économiques de nos résultats vis-à-vis de l'hypothèse d'efficience des marchés.

Efficience des marchés et mémoire des séries temporelles

Par définition, un marché est informationnellement efficient si l'ensemble des informations pertinentes à l'évaluation des actifs qui y sont cotés se trouve instantanément reflété dans les cours. Dès lors, le prix observé sur le marché englobe instantanément les conséquences des événements passés et reflète les anticipations concernant les événements futurs. Les variations de prix, ou rentabilités, sont imprévisibles puisque tous les événements connus et anticipés sont déjà intégrés dans le cours actuel. La série des rentabilités ne présente aucune mémoire. C'est ainsi que l'hypothèse d'efficience des marchés financiers a initialement été associée au modèle de marche aléatoire : les cours boursiers suivent une marche aléatoire et les rentabilités répondent à un processus de bruit blanc. En conséquence, le prix observé sur le marché fluctue de façon aléatoire autour de sa valeur fondamentale⁽¹²⁾.

L'absence totale de mémoire dans la série des rentabilités est apparue comme une hypothèse trop restrictive, ce qui amena Samuelson (1965) à remplacer le modèle de marche aléatoire par le modèle de martingale. Ce dernier est moins restrictif que le modèle de marche aléatoire dans la mesure où aucune condition n'est imposée sur l'autocorrélation des résidus. Samuelson a alors démontré que si les prix suivent un processus de martingale, le marché support est efficient. Son apport fondamental consiste à postuler que les prix observés sur le marché sont toujours égaux à la valeur fondamentale et non plus qu'ils fluctuent aléatoirement autour de celle-ci. La différence est ici de taille. En effet, si les prix fluctuent aléatoirement autour de la valeur fondamentale, il est possible de spéculer sur un écart entre ces deux valeurs. En revanche, si les prix sont toujours égaux à la valeur fondamentale, il est bien évident que l'on peut espérer tirer un profit en spéculant sur une différence entre les deux valeurs. Jensen (1978) définira alors un marché efficient comme un marché sur lequel il est impossible, à partir d'un certain ensemble d'information, de réaliser des profits anormaux. Selon cette définition, les rentabilités peuvent donc être faiblement dépendantes, mais cette faible autocorrélation ne permet pas l'élaboration d'une stratégie rémunératrice sur le marché boursier. Notons enfin que selon la nature de l'information contenue dans l'ensemble informationnel, on distingue usuellement trois formes d'efficience : forme faible, forme semi-forte et forme forte. Nous nous intéressons ici uniquement à l'efficience au sens faible dans la mesure où notre ensemble d'information ne concerne que l'historique des séries de prix et de rentabilités.

Ces définitions générales étant présentées, quelles sont les implications de nos résultats empiriques sur l'hypothèse d'efficience ?

Tout d'abord, la présence d'une mémoire (courte ou longue) dans une série de rentabilités boursières indique l'existence d'autocorrélations statistiquement significativement différentes de zéro. Par conséquent, les cours boursiers ne suivent pas une marche aléatoire. Nous avons cependant précédemment mentionné que le rejet du modèle de marche aléatoire n'impliquait pas le rejet de l'efficience. Néanmoins, les observations du processus générant les rentabilités contiennent des informations utiles pour la détermination des valeurs futures de la série.

Si l'on analyse les résultats figurant dans le tableau 4, on constate que pour la majeure partie des séries de rentabilités, l'hypothèse nulle de mémoire courte n'est pas rejetée. Il suffit notamment de comparer les valeurs des deux statistiques *R/S* : la statistique *R/S* traditionnelle, qui est sensible à la mémoire courte, surestime toujours la valeur de l'exposant de Hurst par rapport à l'analyse *R/S* modifiée. Cette présence de mémoire courte est également confirmée par les résultats du tableau 2, les retards retenus dans les modèles utilisés pour les tests de racine unitaire étant relativement élevés. Si l'existence d'une mémoire de court terme nous conduit à rejeter l'hypothèse de marche aléatoire, qu'en est-il au niveau de l'efficience ? Selon Fama (1970, 1991), même si ces autocorrélations sont statistiquement significatives⁽¹³⁾, elles ne le sont pas d'un point de vue économique dans la mesure où il est impossible d'exploiter ces autocorrélations pour établir des règles de spéculation conduisant à des profits anormaux. En d'autres termes, la présence d'autocorrélations significatives à court terme ne remet pas en cause l'hypothèse d'efficience; la mémoire n'étant pas suffisamment durable pour être exploitée avec profit.

L'étude de l'efficience doit alors être menée en tenant compte explicitement du comportement de long terme des rentabilités. Un résultat désormais classique dans la littérature, depuis les travaux de Summers (1986), concerne le phénomène de retour à la moyenne (*mean reversion*) des prix. Selon cet effet, à la suite d'un choc, le prix s'écarte de sa valeur fondamentale mais finit toujours par y revenir. Le phénomène de retour à la moyenne implique également l'existence d'un écart entre le cours et sa valeur fondamentale. Si l'écart entre les deux valeurs est durable, alors la *mean reversion* peut être interprétée en termes de mémoire longue. En effet, dans ce cas, le choc aura des conséquences durables et affectera donc nombre de valeurs futures de la série. Les prix tendront à retourner vers leur valeur fondamentale mais beaucoup plus lentement que si la série ne comportait qu'une mémoire courte. La mémoire de long terme induit donc la présence d'un écart durable entre le cours et sa valeur fondamentale⁽¹⁴⁾, ce qui va à l'encontre de la proposition de Samuelson (1965). Intuitivement on peut en outre penser que plus une série est persistante, *i.e.* plus l'écart entre le cours et sa valeur fondamentale est durable, plus il sera possible d'établir une stratégie rémunératrice sur les marchés financiers. Ceci nous permet donc d'émettre des doutes sur l'efficience des marchés japonais et italien.

Conclusion

Afin de tester la présence de mémoire longue dans les séries de rentabilités boursières des pays du G7, l'exposant de Hurst a été estimé par différentes méthodes : techniques *R/S*, "méthodes de régression" et procédures *ARFIMA*. Les résultats obtenus diffèrent fortement selon les méthodes d'estimation employées. Ainsi, pour les séries de rentabilités des indices FT 500 et TSE 300, certaines techniques de régression concluent à un phénomène de persistance, alors que d'autres nous conduisent à opter en faveur d'anti-persistance. Ce manque de fiabilité des procédures apparaît très clairement pour la série des rentabilités françaises. Cette dernière, ne comprenant qu'un faible nombre d'observations (273, soit six à sept fois moins que les autres séries), voit ainsi la valeur de son exposant de Hurst varier entre 0,22 (net phénomène d'anti-persistance) et 0,60 (persistance)! Ces résultats nous ont donc conduit à conclure en termes de manque de fiabilité des techniques d'estimation de l'exposant de Hurst en petit échantillon et à relativiser le caractère "certain" des estimations obtenues.

Parmi toutes les séries considérées, seules deux d'entre elles paraissent caractérisées par un processus sous-jacent de type persistant : les rentabilités boursières des indices TOPIX et BCI. Pour les autres séries (SP 500, SBF 250, TSE 300, FAZ), aucun test ne permet de conclure au rejet de l'hypothèse nulle de mémoire courte.

Rappelons que la présence de mémoire longue dans les séries financières a d'importantes implications, notamment en ce qui concerne la théorie de l'efficience des marchés financiers. En effet, plus la mémoire de la série est importante, plus l'écart entre le cours et sa valeur fondamentale sera durable. Les prix tendront à revenir vers leur valeur fondamentale mais beaucoup plus lentement que si la série ne comportait qu'une mémoire courte. Ainsi, l'existence du phénomène de *mean reversion* constatée par de nombreux auteurs tels que Summers (1986), Fama et French (1988), Poterba et Summers (1988) sur les marchés financiers pourrait être attribuée à l'effet Joseph de dépendance à long terme. La mémoire longue induit donc un écart durable entre le cours et sa valeur fondamentale, et par conséquent la possibilité de réaliser des profits anormaux en spéculant sur la différence entre les deux valeurs. Nos résultats, même s'ils jettent donc un doute sur l'efficience des marchés boursiers japonais et italien, doivent néanmoins être teintés d'une grande prudence en raison du manque de fiabilité apparent de certaines techniques d'estimation en petit échantillon.

Notes

- (1) Un exemple immédiat est fourni par les séries de prix et quantités des produits agricoles. Celles-ci dépendent en effet directement des conditions météorologiques.
- (2) La valeur fondamentale d'un titre est définie comme la somme actualisée des dividendes futurs anticipés rationnellement par les agents.
- (3) Les propriétés de ce processus sont largement développées dans Hosking (1981), nous ne reprenons ici que les caractéristiques principales.
- (4) En outre, les processus *ARFIMA* sont des processus auto-affines de paramètre d'auto-affinité d .
- (5) On pourra se reporter à Lardic et Mignon (1996b) pour une étude complète des méthodes d'estimation des processus *ARFIMA*.
- (6) Un pont brownien W est un mouvement brownien contraint à l'égalité $W(2\pi) = W(0)$.
- (7) Cf. Taqqu *et alii* (1995) pour la démonstration de ce résultat.
- (8) Cf. les résultats de simulations présentés dans Lardic et Mignon (1996b).
- (9) Les temps de calcul augmentent en effet plus que proportionnellement à la taille de l'échantillon, l'algorithme d'optimisation étant d'ordre n^2 .
- (10) Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique.
- (11) On trouvera en annexe 2 les graphiques des diverses séries de rentabilités et des distributions empiriques associées.
- (12) Notons que la relation entre marche aléatoire et efficience n'est pas une équivalence. Si l'hypothèse de marche aléatoire repose sur la théorie de l'efficience, l'hypothèse d'efficience n'implique pas que les prix suivent une marche aléatoire. Il suffit en effet par exemple que l'hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque ne soit pas respectée ou que les fonctions d'utilité des agents ne soient pas séparables et additives (Leroy, 1982).
- (13) Les études sur données boursières font fréquemment ressortir la présence d'autocorrélations significatives à court terme (Fama, 1965 ; Fama, 1970 ; Fama, 1991 ; Lo et McKinlay, 1988).
- (14) Bien évidemment, cette interprétation n'est valable que si la mémoire longue est effectivement présente dans la série des rentabilités et non pas dans la série des fondamentaux influençant les cours boursiers.

Bibliographie

- Abraham-Frois G., Lardic S. et Mignon V. (1996).** "Mémoire, fractales et chaos", *Actes du colloque Théorie et Méthodes de la Macroéconomie*, mai, Paris.
- Andrews D. (1991).** "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation", *Econometrica*, vol. 59, pp. 817-858.
- Beran J. (1994).** *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.
- Bollerslev T., Chou R.Y., Jayaraman N. et Kroner K.F. (1991).** "Les modèles ARCH en finance : un point sur la théorie et les résultats empiriques", *Annales d'économie et de statistique*, n°24, pp. 1-59.
- Cheung Y-W. (1993a).** "Tests for Fractional Integration: A Monte Carlo Investigation", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 14, pp. 331-345.
- Cheung Y-W. (1993b).** "Long Memory in Foreign Exchange Rates", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 11, pp. 93-101.
- Cheung Y-W. et Diebold F.X. (1994).** "On Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter of Fractionally-Integrated Noise with Unknown Mean", *Journal of Econometrics*, vol. 62, pp. 301-316.
- Dalhaus R. (1988).** "Small Sample Effects in Time Series Analysis: A New Asymptotic Theory and a New Estimate", *Annals of Statistics*, vol. 16, pp. 808-841.
- Dalhaus R. (1989).** "Efficient Parameter Estimation for Self-Similar Processes", *Annals of Statistics*, vol. 17, pp. 1749-1766.
- Fama E.F. (1965).** "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, vol. 38, pp. 31-105.
- Fama E.F. (1970).** "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *The Journal of Finance*, vol. XXV, pp. 383-417.
- Fama E.F. (1991).** "Efficient Capital Markets: II", *The Journal of Finance*, vol. XLVI, pp. 1575-1617.
- Fama E.F. et French K.R. (1988).** "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", *Journal of Political Economy*, vol. 96, pp. 246-273.
- Fox R. et Taqqu M.S. (1986).** "Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series", *Annals of Statistics*, vol. 14, pp. 517-532.
- Fuller W.A. (1976).** *Introduction of Statistical Time Series*, John Wiley.
- Geweke J. et Porter-Hudak S. (1983).** "The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 4, pp. 221-238.
- Gouriéroux C. (1992).** *Modèles ARCH et applications financières*, Economica.
- Granger C.W.J. (1966).** "The Typical Spectral Shape of an Economic Variable", *Econometrica*, vol. 34, pp. 150-161.
- Granger C.W.J. et Joyeux R. (1980).** "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 1, pp. 15-29.
- Higuchi T. (1988).** "Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory", *Physica*, vol. 31D, pp. 277-283.
- Hosking J.R.M. (1981).** "Fractional Differencing", *Biometrika*, vol. 68, pp. 165-176.
- Hurst H.E. (1951).** "Long Term Storage Capacity of Reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116, pp. 770-799.
- Jensen M.C. (1978).** "Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, vol. 6, pp. 95-101.
- Lardic S. et Mignon V. (1995).** "Les tests de mémoire longue appartiennent-ils au camp du démon ?", *Actes du colloque de l'AFSE*, Septembre, Paris, et *Revue Économique*, mai 1996, vol. 47, pp. 531-540.
- Lardic S. et Mignon V. (1996a).** "Prévisions ARFIMA des taux de change : les modélisateurs doivent-ils encore exhorter à la naïveté des prévisions ?", *Actes du colloque Théorie et Méthodes de la Macro-économie*, janvier, Paris, à paraître dans les *Annales d'Économie et de Statistique*.
- Lardic S. et Mignon V. (1996b).** "Vingt ans de tests de mémoire longue au travers des processus ARFIMA", *Actes du colloque de l'AEA*, Janvier, Paris.
- Leroy S.F. (1982).** "Expectations Models of Asset Prices: A Survey of Theory", *Journal of Finance*, vol. 37, pp. 185-217.
- Lo A.W. (1991).** "Long-Term Memory in Stock Market Prices", *Econometrica*, vol. 59, pp. 1279-1313.

- Lo A.W. et Mc Kinlay C. (1988).** "Stock Market Prices Do not Follow Random Walks: Evidence from a Single Specification Test", *Review of Financial Studies*, vol. 1, pp. 41-66.
- Mandelbrot B.B. (1972).** "Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement*, vol. 1, pp. 259-290.
- Mandelbrot B.B. (1973).** "Le problème de la réalité des cycles lents et le syndrome de Joseph". *Economie Appliquée*, vol. 26, pp. 349-365.
- Mandelbrot B.B. (1985).** "Self-Affine Fractals and Fractal Dimension". *Physica Scripta*, vol. 32, pp. 257-260.
- Mandelbrot B.B. et Taqqu M.S. (1979).** "Robust R/S Analysis of Long-Run Serial Correlation". *Bulletin of the International Statistical Institute*, vol. 48, pp. 69-104.
- Mandelbrot B.B. et Van Ness J. (1968).** "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review*, vol. 10, pp. 422-437.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1968).** "Noah, Joseph, and Operational Hydrology", *Water Resources Research*, vol. 4, pp. 909-918.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1969a).** "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part I, Averages and Variances", *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 228-241.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1969b).** "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part II, Rescaled Range and Spectra", *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 242-259.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1969c).** "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part III, Mathematical Appendix", *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 260-267.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1969d).** "Some Long-Run Properties of Geophysical Records", *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 321-340.
- Mandelbrot B.B. et Wallis J. (1969e).** "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long-Run Statistical Dependence", *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 967-988.
- Mignon V. (1995).** "Les implications de la mémoire longue et de la non linéarité sur l'efficacité du marché des changes", Actes du colloque de l'AEA, mars, Haigerloch (Allemagne), et *Journal de la Société Statistique de Paris*, 1^{er} trimestre 1996, pp. 51-72.
- Newey W. et West K. (1987).** "A Simple Positive Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", *Econometrica*, vol. 55, pp. 703-705.
- Peitgen H.O. et Saupe D. (1988).** *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag.
- Poterba J.M. et Summers L.H. (1988).** "Mean Reversion in Stock Prices, Evidence and Implications", *Journal of Financial Economics*, vol. 22, pp. 27-59.
- Samuelson P.A. (1965).** "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 41-49.
- Sowell F. (1992).** "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models", *Journal of Econometrics*, vol. 53, pp. 165-188.
- Sowell F. (1992).** "Modeling Long-Run Behavior with the Fractional ARIMA Model", *Journal of Monetary Economics*, vol. 29, pp. 277-302.
- Summers L.H. (1986).** "Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values?", *The Journal of Finance*, vol. XLI, pp. 591-601.
- Taqqu M.S., Teverovsky V. et Willinger W. (1995).** "Estimators for Long-Range Dependence: An Empirical Study", Preprint, Boston University.

Processus auto-similaire :

Un processus $X(t)$ est auto-similaire si, pour tout r positif, la distribution en échantillon fini de $X(rt)$ est la même que celle de $rX(t)$: $X(rt) \stackrel{d}{=} rX(t)$, \equiv , représentant l'égalité en distribution.

Processus auto-affine :

Un processus $X(t)$ est auto-affine de paramètre d'auto-affinité H ($0 < H < 1$) si, pour tout r positif, la distribution en échantillon fini de $X(rt)$ est la même que celle de $r^H X(t)$: $X(rt) \stackrel{d}{=} r^H X(t)$, \equiv représentant l'égalité en distribution.

Dimension fractale :

La dimension fractale permet de quantifier les notions d'auto-similarité ou d'auto-affinité. Contrairement à la dimension euclidienne classique, la dimension fractale peut prendre des valeurs non entières. Cette dimension, qui caractérise le degré d'irrégularité d'une série temporelle, mesure la façon dont une série remplit son espace. Il existe de nombreuses définitions de la dimension fractale (Mandelbrot, 1985), une des plus utilisées étant la dimension de capacité.

Soit un ensemble compact A et soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes de côté ε nécessaire pour recouvrir A . La dimension de capacité, D , est alors définie par :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

On peut alors montrer (Mandelbrot, 1985) que pour des processus auto-affines de paramètre d'auto-affinité H , on a la relation suivante : $D = 2 - H$. Par conséquent :

Si $1 < D < 3/2$, soit $1/2 < H < 1$, la série présente une mémoire longue.

Si $3/2 < D < 2$, soit $0 < H < 1/2$, la série est anti-persistante.

Si $D = 3/2$, la série ne présente pas de dépendance à long terme.

Mouvement brownien fractionnaire :

Un mouvement brownien fractionnaire d'exposant H , noté $B_H(t)$, a pour expression :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left[\int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right]$$

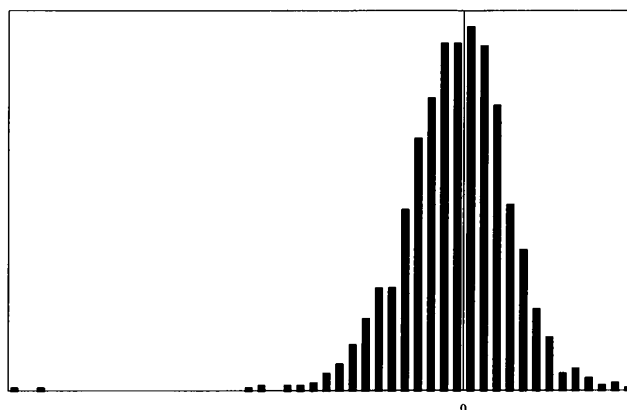
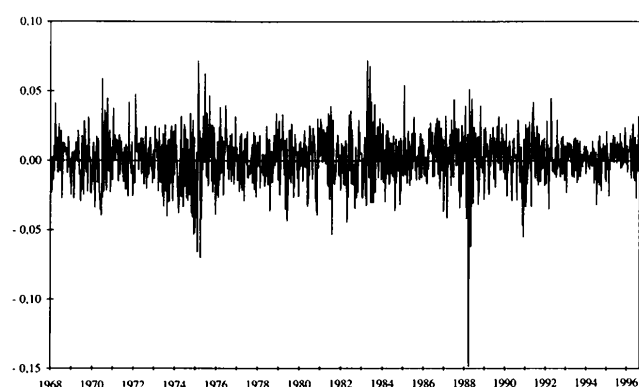
où H , $0 < H < 1$, est l'exposant de Hurst et $B(s)$ le mouvement brownien ordinaire. Le mouvement brownien fractionnaire est un processus auto-affine de paramètre d'auto-affinité H .

Si $H = 1/2$, le mouvement brownien fractionnaire se réduit au mouvement brownien standard. Dans ce cas, le processus étudié est un processus à mémoire courte. Lorsque H est différent de $1/2$, le mouvement brownien est un processus persistant si $H > 1/2$ et anti-persistant si $H < 1/2$.

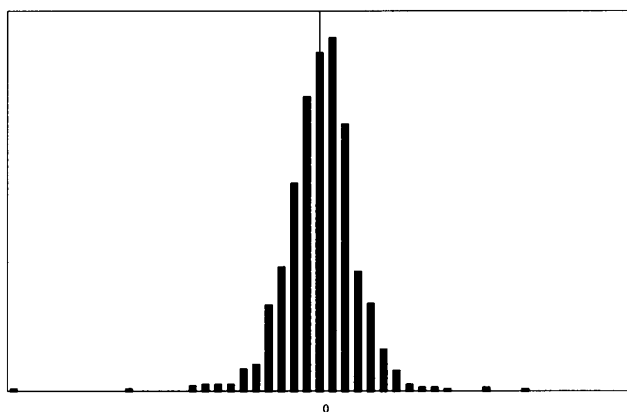
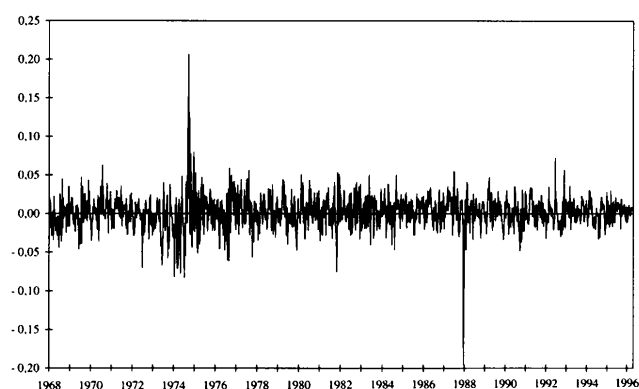
Annexe 2

Sur les graphiques de gauche figurent les séries de rentabilités boursières. Les graphiques de droite représentent la distribution de la série considérée.

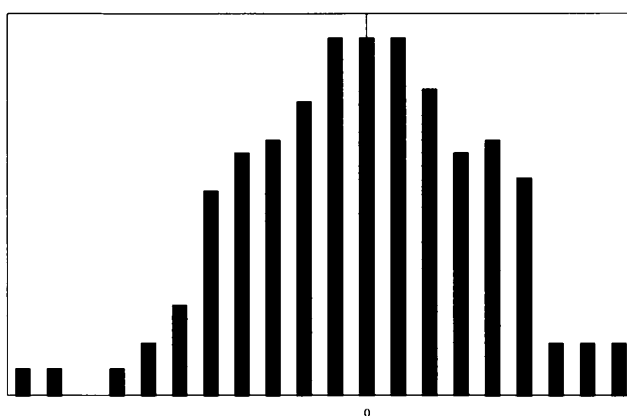
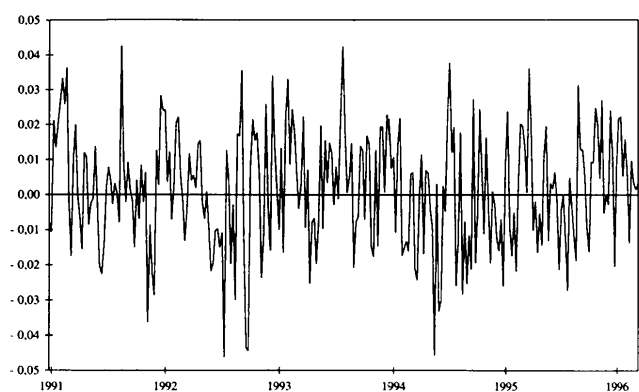
Graphiques 1 : rentabilités de l'indice SP 500



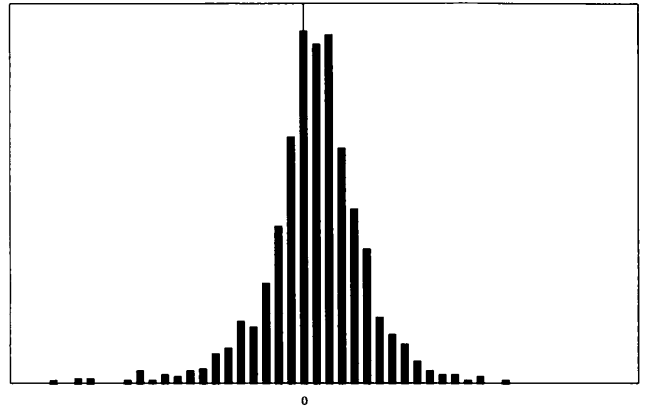
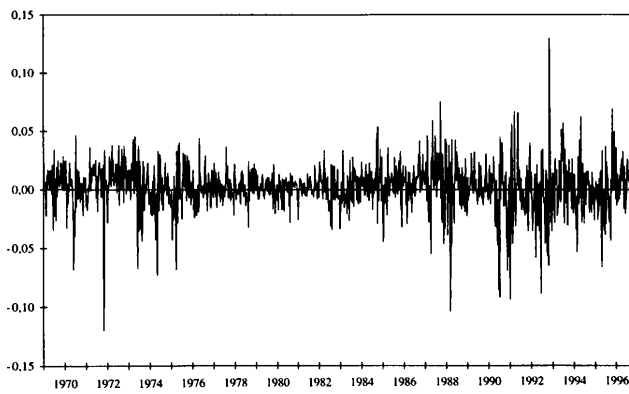
Graphiques 2 : rentabilités de l'indice FT 500



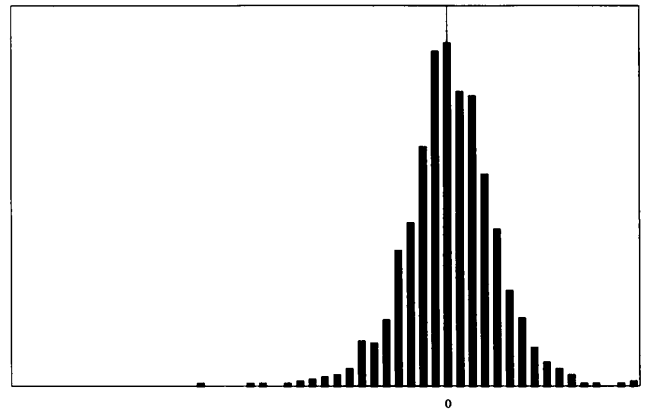
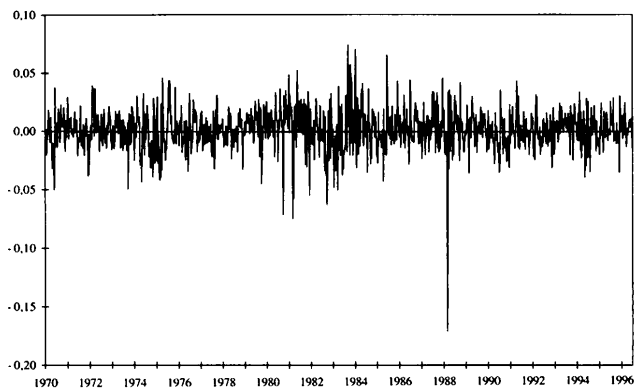
Graphiques 3 : rentabilités de l'indice SBF 250



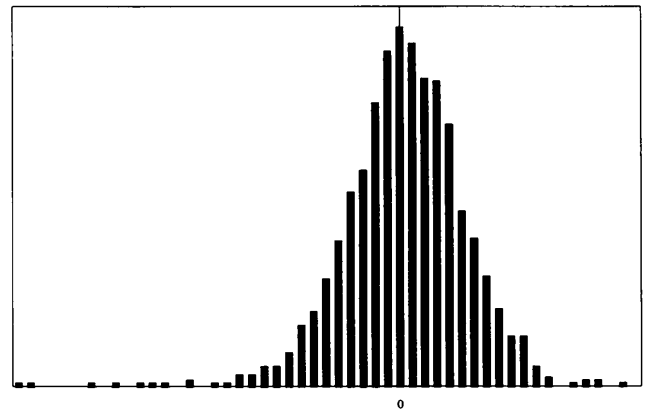
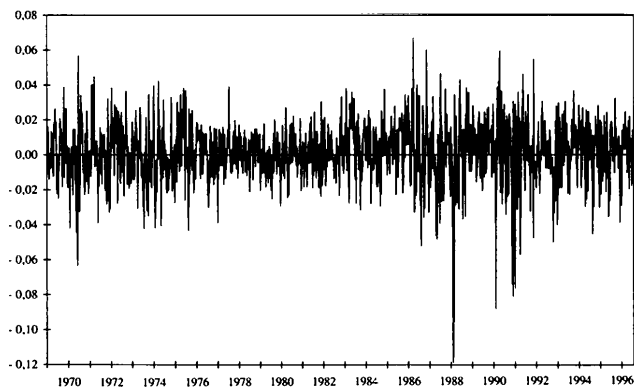
Graphiques 4 : rentabilités de l'indice TOPIX



Graphiques 5 : rentabilités de l'indice TSE



Graphiques 6 : rentabilités de l'indice FAZ



Graphiques 7 : rentabilités de l'indice BCI

