La cascade multifractale, telle que présentée par Calvet et Fisher, modélise la volatilité en la décomposant en plusieurs niveaux hiérarchiques de multiplicateurs. Chacun de ces multiplicateurs est binaire : il peut prendre l'une de deux valeurs, par exemple m0​ ou 2−m0​. Ces deux valeurs sont choisies de manière à ce que leur moyenne soit égale à 1, ce qui assure que l'effet global ne dévie pas de la moyenne (la volatilité ne s'écrase ni ne s'explose en moyenne).

Dans le code, cette idée se traduit par la génération de l'ensemble des 2^K états possibles pour K composantes. Chaque état est une combinaison spécifique de valeurs m0 et 2−m0 ​, correspondant à la configuration de la cascade à un moment donné. Ainsi, en parcourant toutes les combinaisons (via la représentation binaire d'un entier), le code construit l'espace d'états complet et calcule le produit des multiplicateurs pour chaque configuration, ce qui représente l'effet cumulé de la cascade sur la volatilité.

Le paramètre m0 doit, théoriquement, être choisi de façon à ce que les deux valeurs possibles m0 et 2−m0 soient positives, ce qui impose que m0 soit compris entre 0 et 2. Toutefois, dans le cadre du modèle MSM de Calvet et Fisher, on impose généralement que m0 soit inférieur à 1 (typiquement m0∈(0,1)). Cela garantit que :

* m0 < 1 (état de faible volatilité),
* 2−m0 > 1 (état de forte volatilité),

et ainsi la moyenne m0+(2−m0)2=1est respectée, tout en créant une asymétrie entre un état de "bas" et un état de "haut" niveau de volatilité.

Choisir K=3 signifie que le modèle utilise 3 composantes hiérarchiques dans la cascade multifractale. Concrètement, cela implique :

* Il y a 3 multiplicateurs dans la cascade, chacun pouvant prendre l'une des deux valeurs m0 ou 2−m0.
* Cela conduit à 2^3=8 états possibles, c'est-à-dire 8 combinaisons différentes de valeurs pour ces 3 multiplicateurs.
* Chaque état représente une configuration particulière de la volatilité à travers ces 3 niveaux hiérarchiques. Le produit des multiplicateurs de chaque état donne l'effet cumulé sur la volatilité dans ce modèle.

En résumé, K=3 introduit une structure hiérarchique à trois niveaux, avec 8 configurations possibles pour modéliser la dynamique de la volatilité.

**product\_cache :** un tableau contenant le produit des multiplicateurs pour chaque état, utilisé pour accélérer le calcul de la vraisemblance.

Processus Global :   
Cette boucle imbriquée explore un espace de paramètres pour calibrer le modèle MSM en maximisant la vraisemblance. Voici le détail de chaque niveau :

1. **Boucle sur m0 (m0\_grid) :**  
   Pour chaque valeur m0m0m0 dans le vecteur de paramètres m0\_gridm0\\_gridm0\_grid :
   * La fonction build\_state\_space(K, m0) est appelée pour construire l'espace d'états du modèle pour KKK composantes.
   * Elle renvoie :
     + **states :** une liste de tuples représentant toutes les combinaisons possibles (par exemple, pour K=3K = 3K=3, il y aura 23=82^3 = 823=8 états).
     + **product\_cache :** un tableau contenant le produit des multiplicateurs pour chaque état, utilisé pour accélérer le calcul de la vraisemblance.
2. **Boucle sur gamma1 (gamma1\_grid) :**  
   Pour chaque valeur γ1\gamma\_1γ1​ dans gamma1\_gridgamma1\\_gridgamma1\_grid :
   * On calcule une liste de paramètres γk\gamma\_kγk​ pour k=1k = 1k=1 à KKK via la formule : γk=1−(1−γ1)×b(k−1)\gamma\_k = 1 - (1 - \gamma\_1) \times b^{(k-1)}γk​=1−(1−γ1​)×b(k−1) Cette formule définit comment la probabilité de changement de l'état évolue selon le niveau hiérarchique kkk (ici, bbb est un paramètre donné qui module cette décroissance).
   * Le résultat est stocké dans gamma\_list.
3. **Construction de la matrice de transition :**  
   À partir de l'espace d'états et de la liste γ\_list\gamma\\_listγ\_list, la fonction build\_transition\_matrix(states, K, gamma\_list) construit la matrice de transition AAA.
   * Cette matrice décrit les probabilités de passage d’un état à l’autre d’un instant à l’autre dans le modèle, en tenant compte de la structure hiérarchique et des probabilités γk\gamma\_kγk​.
4. **Boucle sur sigma (sigma\_grid) :**  
   Pour chaque valeur σ\sigmaσ dans sigma\_gridsigma\\_gridsigma\_grid :
   * On calcule la log-vraisemblance du modèle avec la fonction msm\_loglik(data\_arr, sigma, states, product\_cache, A) en utilisant :
     + Les données observées (data\_arr),
     + Le paramètre de volatilité ou échelle σ\sigmaσ,
     + L'espace d'états et son cache,
     + La matrice de transition AAA.
   * Si la log-vraisemblance obtenue (ll) est supérieure à la meilleure log-vraisemblance trouvée jusqu'à présent (best\_logL), alors :
     + On met à jour best\_logL et on stocke les paramètres correspondant (m0m0m0, γ1\gamma\_1γ1​ et σ\sigmaσ) dans best\_params.

En résumé, cette structure à trois niveaux permet de rechercher de manière exhaustive le triplet de paramètres (m0,γ1,σ)(m0, \gamma\_1, \sigma)(m0,γ1​,σ) qui maximise la vraisemblance du modèle MSM sur les données. Chaque boucle ajuste un aspect spécifique du modèle :

* m0m0m0 influence l'échelle des multiplicateurs dans l'espace d'états,
* γ1\gamma\_1γ1​ (et donc les γk\gamma\_kγk​) contrôle la dynamique de la transition entre états à différents niveaux hiérarchiques,
* σ\sigmaσ ajuste le bruit ou la volatilité globale.