MAT02034 – Métodos Bayesianos para Análise de Dados
Lista 2 - Modelos Multiparamétricos

Rafaela Oliveira

Setembro, 2025

Exercício 1. Considere o Modelo Normal com média μ e variância σ^2 desconhecidos.

$$\textbf{Verossimilhança:} \ L(x|\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \right)^n \exp\left[\frac{-\Sigma(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\textbf{Priori:} \ \Pi(\mu, \sigma^2)$$

A priori, a média μ e a variância σ^2 são independentes.

$$\Pi(\mu, \sigma^2) = \Pi(\mu)\,\Pi(\sigma^2)$$

Usando as seguintes prioris não informativas:

$$\Pi(\mu) \propto 1 \quad , \quad \Pi(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad , \quad \Pi(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

a) Encontre a Posteriori Conjunta para (μ, σ^2).

b) Encontre a Posteriori Marginal para μ.

c) Encontre a Posteriori Marginal para σ^2.

d) Encontre a Posteriori Condicional para μ.

e) Encontre a Posteriori Condicional para σ^2.

Exercício 2. Sejam $Y_1 \sim \text{Poisson}(\alpha\beta)$ e $Y_2 \sim \text{Poisson}((1-\alpha)\beta)$ com Y_1 e Y_2 (condicionalmente) independentes, dados α e β.
Agora suponha que a informação priori para α e β pode ser expressa como: $\alpha \sim Beta(p,q)$ e $\beta \sim Gama(p+q,1)$, com α e β independentes para os hiperparâmetros p e q especificados.

a) Encontre a Verossimilhança $L(y_1, y_2|\alpha, \beta)$.

b) Encontre a Priori $\Pi(\alpha, \beta)$.

c) Encontre a Posteriori Conjunta para (α, β).

d) Encontre a Posteriori Marginal para α.

e) Encontre a Posteriori Marginal para β.

f) Encontre a Posteriori Condicional para α.

g) Encontre a Posteriori Condicional para β.

Exercício 3. Suponha que X é o número de defeituosos na produção diária de um produto.

Considere $(X|Y,\theta) \sim Binomial(Y,\theta)$, em que Y, a produção de um dia, é uma variável aleatória com uma distribuição de Poisson com média conhecida λ, e θ é a probabilidade de que qualquer produto seja defeituoso.

A distribuição a priori é tal que $(\theta|Y=y) \sim Beta(\alpha,\gamma)$, com α e γ conhecidos independentes de Y. Observe que $X|\theta \sim Poisson(\lambda\theta)$. Em seguida, $\theta \sim Beta(\alpha,\gamma)$.

Considerando o problema de estimar θ, a probabilidade de um item produzido ser defeituoso, temos as seguintes distribuições:

$$(X|Y,\theta) \sim Binomial(Y,\theta)$$

$$(Y|\lambda) \sim Poisson(\lambda)$$

$$(\theta|Y=y) \sim Beta(\alpha,\gamma)$$

a) Encontre a Posteriori $\Pi(\theta|X=x)$.

b) Encontre a Posteriori Conjunta para $\Pi(Y,\theta|X=x)$.

c) Encontre as Distribuições Condicionais Completas para Y e para θ.

Resolução da lista 2

Grupo:

Davi Augusto;
Eduardo Garcez;
Gabriel Netto;
João Vitor Arend;
Luan Frederico.

Exercício 1: Considerando:

O modelo normal com média e variância desconhecidas:

$$L(x|\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

A independência a priori da média e variância:

$$\Pi(\mu,\sigma^2) = \Pi(\mu)\Pi(\sigma^2)$$

As seguinte prioris não informativas:

$$\Pi(\mu) \propto 1, \Pi(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}, \Pi(\mu,\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2},$$

a) Encontre a Posteriori Conjunta para (μ,σ^2).

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Temos que $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$ é uma constante, logo podemos remover a fração e manter a proporcionalidade. Assim:

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ e ainda:}$$

$$\mu,\sigma^2|x \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

b) Encontre a Posteriori Marginal para μ.

$$p(\mu|x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+2} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

Vamos simplificar a expressão dentro da integral, começando por $\sum(x_i-\mu)^2$:

Usando a igualdade $(a-b)^2 = ((a-c)+(c-b))^2$, temos $\sum((x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu))^2$

Agora, para $a=(x_i-\bar{x})$ e $b=(\bar{x}-\mu)$, vamos reescrever nosso somatório como $a^2+2ab+b^2$:

$$\sum\left[(x_i+\bar{x})^2 + 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right] = \sum(x_i+\bar{x})^2 + \sum 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu) + \sum(\bar{x}-\mu)^2$$

Como sabemos que $(x_i-\bar{x}) = 0$ temos que:

$$\sum 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu) = 0$$

Simplificando nossos somatórios temos:

$$n(\bar{x}-\mu)+\sum(x_i+\bar{x})^2$$

Lembrando que $s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$, podemos chegar na seguinte expressão:

$$n(\bar{x}-\mu)^2+s^2(n-1)$$

Substituindo na integral inicial:

$$\int_0^\infty (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2+s^2(n-1)}{2\sigma^2}\right) d\sigma^2$$

A seguinte propriedade pode ser aplicada:

$$p(\mu|x)=\int_0^\infty (\sigma^2)^{-a-1} exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right)\propto b^{-a}$$

E assim, lembrando que a divisão por 2 é uma constante, temos:

$$p(\mu|x)\propto\left(n(\bar{x}-\mu)^2+s^2(n-1)\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$s^2(n-1)$ é constante em relação a μ, pois utiliza apenas os valores da amostra, podemos reescrever nossa expressão assim:

$$p(\mu|x)\propto\left(1+\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{s^2(n-1)}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Fazendo uma reparametrização, conseguimos obter uma distribuição t de Student.
$\mu_0=\bar{x},\nu=n-1,\tau^2=\frac{s^2}{n}$. Atenção para a simetria do quadrado: $(\mu_0-\mu)^2=(\mu-\mu_0)^2$.

$$p(\mu|x)=\left(1+\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\tau^2\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\sim t_\nu\left(\mu_0,\tau^2\right)$$

Ou seja

$$\mu|x\sim t_{n-1}\left(\bar{x},\frac{s^2}{n}\right)$$

c) Encontre a Posteri Marginal para σ^2.
Vamos utilizar da expansão do termo quadrático exatamente como na questão anterior $\sum(x_i-\mu)^2=(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2$. Agora temos:

$$p(\sigma^2|x)\propto(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^\infty exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)d\mu$$

Reconhecendo que essa integral difere da distribuição normal pela constante de normalização e pela constante n, obtemos:

$$\int_{-\infty}^\infty exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)d\mu=\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

Unindo os termos, simplificando as potências de σ^2 e retirando as constantes, obtemos:

$$p(\sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}-1} exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)$$

Podemos reconhecer nossa posteriori como uma Gamma Inversa com os parâmetros $\alpha = \frac{n-1}{2}$ e $\beta = \frac{(n-1)s^2}{2}$. Logo:

$$\sigma^2|x \sim \text{Gamma Inversa}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s^2}{2}\right)$$

d) Encontre a Posteriori Condicional para μ.
Tratando σ^2 como constante vamos utilizar a forma da posteriori conjunta.

$$p(\mu|\sigma^2, x) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+2} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \propto \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Assim, podemos enxergar que $p(\mu|\sigma^2, x)$ segue uma distribuição Normal com os seguintes parâmetros:

$$\mu|\sigma^2, x \sim Normal\left(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

e) Encontre a Posteriori Condicional para σ^2.
Observando a forma da a posteriori, considerando μ como constante, temos:

$$p(\sigma|\mu, x) \propto \left(\sigma^2\right)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Podemos reconhecer a forma da distribuição Gamma Inversa com parâmetros $\alpha = \frac{n}{2}$ e $\beta = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}$:

$$\sigma^2|\mu, x \sim \text{Gamma Inversa}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}\right)$$

2. • $Y_1 \sim$ Poisson$(\alpha\beta)$, $Y_2 \sim$ Poisson$((1-\alpha)\beta)$

• Y_1 e Y_2 são condicionalmente independentes.

• A priori: $\alpha \sim$ Beta(p,q), $\beta \sim$ Gamma$(p+q,1)$

• α e β são independentes.

a)

PMF da Poisson: $P(Y=k,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Como há independência a veross. conjunta é o produto das PMF's:

$$L(y_1,y_2|\alpha,\beta) = \left(\frac{e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta)^{y_1}}{y_1!}\right)\left(\frac{e^{-(1-\alpha)\beta}((1-\alpha)\beta)^{y_2}}{y_2!}\right)$$

$$= \frac{\alpha^{y_1}(1-\alpha)^{y_2}\beta^{y_1+y_2}e^{-\alpha\beta-(1-\alpha)\beta}}{y_1!\,y_2!} \propto \alpha^{y_1}(1-\alpha)^{y_2}\beta^{y_1+y_2}e^{-\beta}$$

—||—

b) a priori $\pi(\alpha,\beta)$

constante de normalização

$$\pi(\alpha) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\alpha^{p-1}(1-\alpha)^{q-1} \propto \alpha^{p-1}(1-\alpha)^{q-1}$$

$$\pi(\beta) = \frac{1^{p+q}}{\Gamma(p+q)}\beta^{p+q-1}e^{-\beta} \propto \beta^{p+q-1}e^{-\beta}$$

Como temos independência

$\rightarrow \pi(\alpha,\beta) = \pi(\alpha)\pi(\beta)$

$$\propto \alpha^{p-1}(1-\alpha)^{q-1}\beta^{p+q-1}e^{-\beta}$$

c) $\pi(\alpha, \beta | y_1, y_2) \propto L(y_1, y_2 | \alpha, \beta) \cdot \pi(\alpha, \beta)$ Post. conjunta

$\therefore \pi(\alpha, \beta | y_1, y_2) \propto \alpha^{y_1} (1-\alpha)^{y_2} \beta^{y_1+y_2} e^{-\beta} \cdot (\alpha^{p-1} (1-\alpha)^{q-1} \beta^{p+q-1} e^{-\beta})$

agrupando os termos:

$$\pi(\alpha, \beta | y_1, y_2) \propto \alpha^{y_1+p-1} (1-\alpha)^{y_2+q-1} \beta^{(y_1+y_2)+(p+q-1)} e^{-2\beta}$$

—//—

d) Posterior Marginal α.

$$\pi(\alpha | y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}^+} \pi(\alpha, \beta | y_1, y_2) \, d\beta$$

$$\therefore \pi(\alpha | y_1, y_2) \propto \alpha^{y_1+p-1} (1-\alpha)^{y_2+q-1} \cdot \int_{\mathbb{R}} \beta^{(y_1+y_2)+(p+q-1)} e^{-2\beta} \, d\beta$$

A integral em questão se assemelha ao núcleo de uma distribuição Gamma: $x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

$\therefore$ A integral resulta em uma constante que não depende de α, portanto:

$$\therefore \pi(\alpha | y_1, y_2) \propto \alpha^{y_1+p-1} (1-\alpha)^{y_2+q-1} \sim \text{Beta}(y_1+p, y_2+q)$$

—//—

e) Posterior Marginal β (mesma ideia da anterior)

$$\pi(\beta | y_1, y_2) = \int_0^1 \pi(\alpha, \beta | y_1, y_2) \, d\alpha$$

$$\therefore \pi(\beta | y_1, y_2) \propto \beta^{y_1+y_2+p+q-1} e^{-2\beta} \int_0^1 \alpha^{y_1+p-1} (1-\alpha)^{y_2+q-1} \, d\alpha$$

Como já vimos essa integral é núcleo de uma Beta logo consiste numa constante em relação a β.

$$\therefore \pi(\beta | y_1, y_2) \propto \beta^{y_1+y_2+p+q-1} e^{-2\beta} \sim \text{Gamma}(y_1+y_2+p+q, 2)$$

③ $X :=$ Número de defeituosas / dia

$(X|Y,\theta) \sim Bin(Y,\theta)$, $Y \sim Poisson(\lambda)$ sendo λ conhecido

a prior: $(\theta|Y=y) \sim Beta(\alpha,\gamma)$. α e γ conhecidos e independentes de Y.

$X|\theta \sim Poisson(\lambda\theta)$. $\theta \sim Beta(\alpha,\gamma)$

Problema: Estimar θ

a) a Posterior: $\pi(\theta|X=x)$

$\pi(\theta|x) \propto \underbrace{p(x|\theta)}_{?} \cdot \underbrace{\pi(\theta)}_{B(\alpha,\gamma)}$. → Temos $p(x|y,\theta)$ então tiraremos y da equação.

$$p(x|\theta) = \sum p(x|y,\theta) \cdot p(y) = \sum \left(\binom{y}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{y-x} \right) \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{y}}{y!} \right)$$

$\therefore p(x|\theta)$ é uma mistura Binomial(Y,θ) com Poisson(λ)

o que resulta em $\sim Poisson(\lambda\theta) \rightarrow p(x|\theta) = \frac{(\lambda\theta)^{x} e^{-\lambda\theta}}{x!}$

$$\therefore \pi(\theta|X=x) \propto \frac{(\lambda\theta)^{x} e^{-\lambda\theta}}{x!} \left(\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\gamma-1} \right)$$

Removendo constantes:

$$\therefore \pi(\theta|X=x) \propto \left(\theta^{x+\alpha-1}\right)(1-\theta)^{\gamma-1} e^{-\lambda\theta}$$

b) posterior conjunta $\pi(\gamma, \theta | x = x)$

$$\pi(\gamma, \theta | x = x) \propto p(x = x | \gamma = y, \theta) \cdot p(\gamma = y) \cdot \pi(\theta)$$

veross. de x · dist γ · priori (θ)

$$\propto \binom{y}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{y-x} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y}}{y!} \cdot \theta^{\alpha - 1} (1-\theta)^{\gamma - 1}$$

$$\propto \frac{1}{x! (y-x)!} \theta^{x} (1-\theta)^{y-x} \cdot e^{-\lambda} \lambda^{y} \cdot \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\gamma-1}$$

$$\therefore \pi(\gamma, \theta | x = x) \propto \frac{\lambda^{y}}{(y-x)!} \theta^{x+\alpha-1} (1-\theta)^{y-x+\gamma-1}$$

portanto é valido p/ $y \geq x$ e $\theta \in [0,1]$