MAT02034 – Métodos Bayesianos para Análise de Dados
Lista 3 - Metropolis-Hastings e Gibbs Sampling

Rafaela Oliveira

Setembro, 2025

Exercício 1. Descreva as principais características dos algoritmos Metropolis-Hastings e Amostrador de Gibbs. Explique em quais cenários o uso de cada algoritmo é mais adequado.

Exercício 2. Considere o Modelo Normal com média μ e variância σ^2 desconhecidos.

$$\textbf{Verossimilhança: } L(x|\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left[\frac{-\Sigma(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\textbf{Priori: } \Pi(\mu,\sigma^2) = \Pi(\mu)\,\Pi(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

Ajuste o algoritmo de Metropolis-Hastings para resolver a Posteriori Conjunta de (μ, σ^2).

Exercício 3. Considere uma amostra aleatória gerada a partir de um modelo Poisson(λ), cuja função de verossimilhança é definida por

$$L(\lambda|x) = \exp\{-n\lambda + nz\ln\lambda\}\,, \quad \lambda > 0 \quad \text{e} \quad z = \bar{x}.$$

Suponha que a priori λ possui uma densidade Log-Normal $LN(\mu, \sigma^2)$, com hiperparâmetros conhecidos, cujo núcleo é dado por

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,\exp\left[-\frac{(\ln\lambda-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Para gerar a cadeia computacionalmente, especifique os valores $\mu = 2$ e $\sigma = 1$.

Além disso, as seguintes observações foram geradas a partir de um modelo Poisson:
. 5, 2, 4, 4, 4, 4, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 3, 0, 2, 4, 5, 3, 3, 2.

a) Derive a densidade a posteriori $\Pi(\lambda|x)$.

b) Escolha uma densidade proposta para o Metropolis-Hastings. (Dica: log-normal).

c) Calcule a probabilidade de aceitação no t-ésimo passo da cadeia M-H e explique como a cadeia deve ser gerada.

d) Construa um código comentado para gerar uma amostra da distribuição a posteriori a partir do algoritmo obtido no item anterior.

e) Gere uma trajetória da cadeia a partir do código e dos dados, especificando o tamanho da cadeia, o período de burn-in, o thinning (lag) e os valores iniciais.

f) Avalie a convergência da cadeia gerada e realize a inferência para os parâmetros; utilize estimativas pontuais, intervalos de credibilidade e construa gráficos.

Exercício 4. As doze observações a seguir são de um estudo de confiabilidade de componentes industriais: 0.56, 2.26, 1.90, 0.94, 1.40, 1.39, 1.00, 1.45, 2.32, 2.08, 0.89, 1.68.

Um modelo Weibull com parâmetros α e η é considerado apropriado:

$$f(x|\alpha,\eta) = \alpha\,\eta\,x^{\alpha-1}\,e^{-\eta\,x^{\alpha}}\ ,\ x,\alpha,\eta > 0.$$

Considere a distribuição a priori, com valores especificados $\beta = 0.01$ e $\xi = 1$, sendo

$$g(\alpha,\eta) \propto e^{-\alpha}\,\eta^{\beta-1}\,e^{-\xi\,\eta}.$$

A distribuição a posteriori de (α,η) dado os dados tem densidade

$$g(\alpha,\eta|x) \propto (\alpha\,\eta)^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\eta\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right\}\times g(\alpha,\eta).$$

Para obter uma amostra da densidade a posteriori, pode-se usar o algoritmo Metropolis-Hastings (M-H) com densidade proposta

$$q(\alpha^{c},\eta^{c}|\alpha,\eta) = \frac{1}{\alpha\eta}\exp\left\{-\frac{\alpha^{c}}{\alpha}-\frac{\eta^{c}}{\eta}\right\},$$

que é um produto de duas distribuições exponenciais independentes com médias α e η.

a) Calcule a probabilidade de aceitação no t-ésimo passo da cadeia M-H e explique como a cadeia deve ser gerada.

b) Construa um código comentado para gerar uma amostra da distribuição a posteriori a partir do algoritmo obtido no item anterior.

c) Gere uma trajetória da cadeia a partir do código e dos dados, especificando o tamanho da cadeia, o período de burn-in, o thinning (lag) e os valores iniciais.

d) Avalie a convergência da cadeia gerada e realize a inferência para os parâmetros; utilize estimativas pontuais, intervalos de credibilidade e construa gráficos.

Exercício 5. Num estudo para implementação de turbinas eólicas numa dada área mediu-se a velocidade do vento (em m/s) a uma dada altura ao longo de várias ocasiões e obteve os seguintes dados:
. 1.82, 1.09, 0.61, 0.04, 4.28, 1.03, 0.92, 0.99, 1.32, 3.20, 0.10, 0.57, 1.23, 0.26, 1.78.

O modelo que costuma ser utilizado para descrever esta variação é o modelo Weibull com parâmetros de escala e de forma denotados por δ e α, respectivamente, e cuja função densidade de probabilidade é expressa por

$$f(x|\delta,\alpha) = \delta\,\alpha\,x^{\alpha-1}\,e^{-\delta x^{\alpha}}\ ,\ x,\delta,\alpha > 0.$$

Admita-se que a priori δ e α são independentes com distribuições Gama, $Ga(a,b)$, e Log-Normal, $LN(c,d)$, de hiperparâmetros conhecidos, com $a,b,d > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Especifique os valores $a = 4$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = 2$.

Supondo que os dados são uma concretização de uma amostra aleatória desse modelo:

a) Encontre as distribuições condicionais completas para os parâmetros δ e α.

b) Explique em detalhes como podemos gerar uma cadeia de Markov utilizando o amostrador de Gibbs para obtermos uma amostra da distribuição a posteriori conjunta de δ e α.

c) Construa um código comentado para gerar uma amostra da distribuição a posteriori conjunta de δ e α a partir do algoritmo obtido no item anterior.

d) Gere uma trajetória da cadeia a partir do código e dos dados, especificando o tamanho da cadeia, o período de burn-in, o thinning (lag) e os valores iniciais.

e) Avalie a convergência da cadeia gerada e realize a inferência para os parâmetros; utilize estimativas pontuais, intervalos de credibilidade e construa gráficos.

Exercício 6. Seja $D = \{(y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n)\}$ uma concretização de uma amostra aleatória do modelo Poisson-Normal caracterizado por $Y|X \sim Poisson(\eta\,\delta^X)$ e $X \sim N(\mu, \tau^{-1})$.

Considere que para $\theta = (\eta, \delta, \mu, \tau)$ a distribuição a priori não informativa é dada por $p(\eta, \delta, \mu, \tau) \propto (\eta\,\delta\,\tau)^{-1}$.

a) Especifique a distribuição a posteriori de θ, explicitando os passos do amostrador de Gibbs.

b) Introduzindo a parametrização $\eta = e^{\beta_0}$ e $\delta = e^{\beta_1}$, derive as distribuições condicionais completas de $\phi = (\beta_0, \beta_1, \mu, \tau)$ e comente de que modo se pode fazer a amostragem Gibbs.

Exercício 7. Considere que $x_1, \ldots, x_n$ são observações provenientes de variáveis aleatórias independentes Poisson com médias $\lambda_1 t_1, \ldots, \lambda_n t_n$, em que os t_i são tempos conhecidos e os λ_i intensidades esperadas desconhecidas.

Suponha que os λ_i são condicionalmente i.i.d. $Ga(a, \beta)$ e que, com a, c, d fixados,

$$\beta \sim GaI(c, d) \iff p(\beta) \propto \frac{d^c\, e^{-d/\beta}}{\beta^{c+1}\,\Gamma(c)}\, I_{(0,\infty)}(\beta).$$

Especifique a distribuição conjunta dos dados e dos $n+1$ parâmetros e desenvolva um esquema sequencial Gibbs para amostrar da distribuição a posteriori.