Exercício 1: Considerando:

O modelo normal com média e variância desconhecidas:

$$L(x|\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

A independência a priori da média e variância:

$$\Pi(\mu,\sigma^2) = \Pi(\mu)\Pi(\sigma^2)$$

As seguinte prioris não informativas:

$$\Pi(\mu) \propto 1, \Pi(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}, \Pi(\mu,\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2},$$

a) Encontre a Posteriori Conjunta para (μ,σ^2).

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Temos que $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$ é uma constante, logo podemos remover a fração e manter a proporcionalidade. Assim:

$$p(\mu,\sigma^2|x) \propto \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ e ainda:}$$

$$\mu,\sigma^2|x \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

b) Encontre a Posteriori Marginal para μ.

$$p(\mu|x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+2} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

Vamos simplificar a expressão dentro da integral, começando por $\sum(x_i-\mu)^2$:

Usando a igualdade $(a-b)^2 = ((a-c)+(c-b))^2$, temos $\sum((x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu))^2$

Agora, para $a=(x_i-\bar{x})$ e $b=(\bar{x}-\mu)$, vamos reescrever nosso somatório como $a^2+2ab+b^2$:

$$\sum\left[(x_i+\bar{x})^2+2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)+(\bar{x}-\mu)^2\right] = \sum(x_i+\bar{x})^2+\sum 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)+\sum(\bar{x}-\mu)^2$$

Como sabemos que $(x_i-\bar{x})=0$ temos que:

$$\sum 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)=0$$

Simplificando nossos somatórios temos:

$$n(\bar{x} - \mu) + \sum(x_i + \bar{x})^2$$

Lembrando que $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$, podemos chegar na seguinte expressão:

$$n(\bar{x} - \mu)^2 + s^2(n-1)$$

Substituindo na integral inicial:

$$\int_0^\infty (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2 + s^2(n-1)}{2\sigma^2}\right) d\sigma^2$$

A seguinte propriedade pode ser aplicada:

$$p(\mu|x) = \int_0^\infty (\sigma^2)^{-a-1} exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) \propto b^{-a}$$

E assim, lembrando que a divisão por 2 é uma constante, temos:

$$p(\mu|x) \propto \left(n(\bar{x}-\mu)^2 + s^2(n-1)\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$s^2(n-1)$ é constante em relação a μ, pois utiliza apenas os valores da amostra, podemos reescrever nossa expressão assim:

$$p(\mu|x) \propto \left(1 + \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{s^2(n-1)}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Fazendo uma reparametrização, conseguimos obter uma distribuição t de Student. $\mu_0 = \bar{x}, \nu = n-1, \tau^2 = \frac{s^2}{n}$. Atenção para a simetria do quadrado: $(\mu_0 - \mu)^2 = (\mu - \mu_0)^2$.

$$p(\mu|x) = \left(1 + \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\tau^2\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \sim t_\nu\left(\mu_0, \tau^2\right)$$

Ou seja

$$\mu|x \sim t_{n-1}\left(\bar{x}, \frac{s^2}{n}\right)$$

c) Encontre a Posteri Marginal para σ^2.
Vamos utilizar da expansão do termo quadrático exatamente como na questão anterior $\sum(x_i - \mu)^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{x}-\mu)^2$. Agora temos:

$$p(\sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\mu$$

Reconhecendo que essa integral difere da distribuição normal pela constante de normalização e pela constante n, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\mu = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

Unindo os termos, simplificando as potências de σ^2 e retirando as constantes, obtemos:

$$p(\sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}-1} exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)$$

Podemos reconhecer nossa posteriori como uma Gamma Inversa com os parâmetros $\alpha = \frac{n-1}{2}$ e $\beta = \frac{(n-1)s^2}{2}$. Logo:

$$\sigma^2|x \sim \text{Gamma Inversa}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s^2}{2}\right)$$

d) Encontre a Posteriori Condicional para μ.
Tratando σ^2 como constante vamos utilizar a forma da posteriori conjunta.

$$p(\mu|\sigma^2, x) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+2} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \propto \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Assim, podemos enxergar que $p(\mu|\sigma^2, x)$ segue uma distribuição Normal com os seguintes parâmetros:

$$\mu|\sigma^2, x \sim Normal\left(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

e) Encontre a Posteriori Condicional para σ^2.
Observando a forma da a posteriori, considerando μ como constante, temos:

$$p(\sigma|\mu, x) \propto \left(\sigma^2\right)^{-(\frac{n}{2}+1)} \exp\left[\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Podemos reconhecer a forma da distribuição Gamma Inversa com parâmetros $\alpha = \frac{n}{2}$ e $\beta = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}$:

$$\sigma^2|\mu, x \sim \text{Gamma Inversa}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}\right)$$