MAT02034 – Métodos Bayesianos para Análise de Dados
Lista 2 - Modelos Multiparamétricos

Rafaela Oliveira

Setembro, 2025

Exercício 1. Considere o Modelo Normal com média μ e variância σ^2 desconhecidos.

$$\textbf{Verossimilhança: } L(x|\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left[\frac{-\Sigma(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\textbf{Priori: } \Pi(\mu, \sigma^2)$$

A priori, a média μ e a variância σ^2 são independentes.

$$\Pi(\mu, \sigma^2) = \Pi(\mu)\,\Pi(\sigma^2)$$

Usando as seguintes prioris não informativas:

$$\Pi(\mu) \propto 1 \quad , \quad \Pi(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad , \quad \Pi(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

a) Encontre a Posteriori Conjunta para (μ, σ^2).

b) Encontre a Posteriori Marginal para μ.

c) Encontre a Posteriori Marginal para σ^2.

d) Encontre a Posteriori Condicional para μ.

e) Encontre a Posteriori Condicional para σ^2.

Exercício 2. Sejam $Y_1 \sim \text{Poisson}(\alpha\beta)$ e $Y_2 \sim \text{Poisson}((1-\alpha)\beta)$ com Y_1 e Y_2 (condicionalmente) independentes, dados α e β.
Agora suponha que a informação priori para α e β pode ser expressa como: $\alpha \sim Beta(p, q)$ e $\beta \sim Gama(p+q, 1)$, com α e β independentes para os hiperparâmetros p e q especificados.

a) Encontre a Verossimilhança $L(y_1, y_2|\alpha, \beta)$.

b) Encontre a Priori $\Pi(\alpha, \beta)$.

c) Encontre a Posteriori Conjunta para (α, β).

d) Encontre a Posteriori Marginal para α.

e) Encontre a Posteriori Marginal para β.

f) Encontre a Posteriori Condicional para α.

g) Encontre a Posteriori Condicional para β.

Exercício 3. Suponha que X é o número de defeituosos na produção diária de um produto.

Considere $(X|Y, \theta) \sim Binomial(Y, \theta)$, em que Y, a produção de um dia, é uma variável aleatória com uma distribuição de Poisson com média conhecida λ, e θ é a probabilidade de que qualquer produto seja defeituoso.

A distribuição a priori é tal que $(\theta|Y = y) \sim Beta(\alpha, \gamma)$, com α e γ conhecidos independentes de Y. Observe que $X|\theta \sim Poisson(\lambda\theta)$. Em seguida, $\theta \sim Beta(\alpha, \gamma)$.

Considerando o problema de estimar θ, a probabilidade de um item produzido ser defeituoso, temos as seguintes distribuições:

$$(X|Y, \theta) \sim Binomial(Y, \theta)$$

$$(Y|\lambda) \sim Poisson(\lambda)$$

$$(\theta|Y = y) \sim Beta(\alpha, \gamma)$$

a) Encontre a Posteriori $\Pi(\theta|X = x)$.

b) Encontre a Posteriori Conjunta para $\Pi(Y, \theta|X = x)$.

c) Encontre as Distribuições Condicionais Completas para Y e para θ.