Árboles

- Presentar la estructura no lineal más importante en computación
- Mostrar la especificación e implementación de varios tipos de árboles
- Algoritmos de manipulación de árboles

Árboles

Contenido

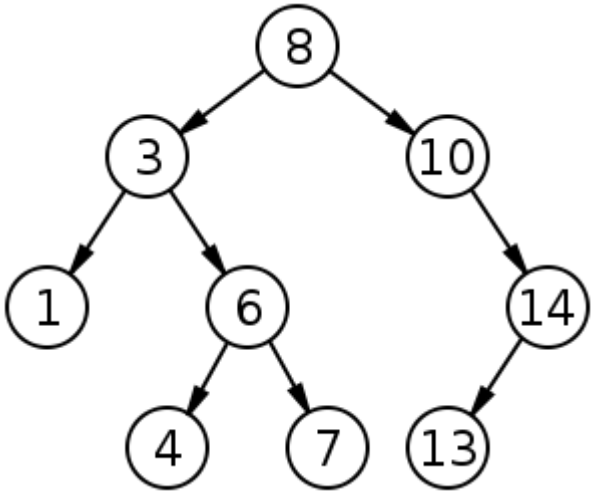
Árbol Binario de Búsqueda

- También llamados BST (acrónimo del inglés Binary Search Tree)
- Estructura de datos básica para almacenar elementos que están clasificados siguiendo algún orden lineal.
- **Propiedades**:
  - Para todo nodo N del árbol,
    - Todos los valores de los nodos del subárbol izquierdo de N deben ser *menores* al valor del nodo N, y
    - Todos los valores de los nodos del subárbol derecho de N deben ser *mayores o iguales* al valor del nodo N
- Un recorrido en *inorden* del árbol proporciona una lista en orden ascendente de los valores almacenados en los nodos

Árbol Binario de Búsqueda

- Ejemplo:

Un árbol binario de búsqueda de tamaño 9 y profundidad 3, con raíz 8 y hojas 1, 4, 7 y 13



Árbol Binario de Búsqueda

Operaciones:

- *Búsqueda:* determinar si x está en el árbol
  - Si x = raíz $\Rightarrow$ localizado
  - Si x < raíz $\Rightarrow$ buscar en el subárbol izquierdo
  - Si x ≥ raíz $\Rightarrow$ buscar en el subárbol derecho

Consiste en acceder a la raíz del árbol; si el elemento a localizar coincide con éste la búsqueda ha concluido con éxito; si el elemento es menor se busca en el subárbol izquierdo y si es mayor en el derecho. Si se alcanza un nodo hoja y el elemento no ha sido encontrado se supone que no existe en el árbol.

Cabe destacar que la búsqueda en este tipo de árboles es muy eficiente, representa una *función logarítmica*. El máximo número de comparaciones que necesitaríamos para saber si un elemento se encuentra en un árbol binario de búsqueda estaría entre $[\log_2(N+1)]$ y N, siendo N el número de nodos. La búsqueda de un elemento en un ABB (Árbol Binario de Búsqueda) se puede realizar de dos formas, iterativa o recursiva.

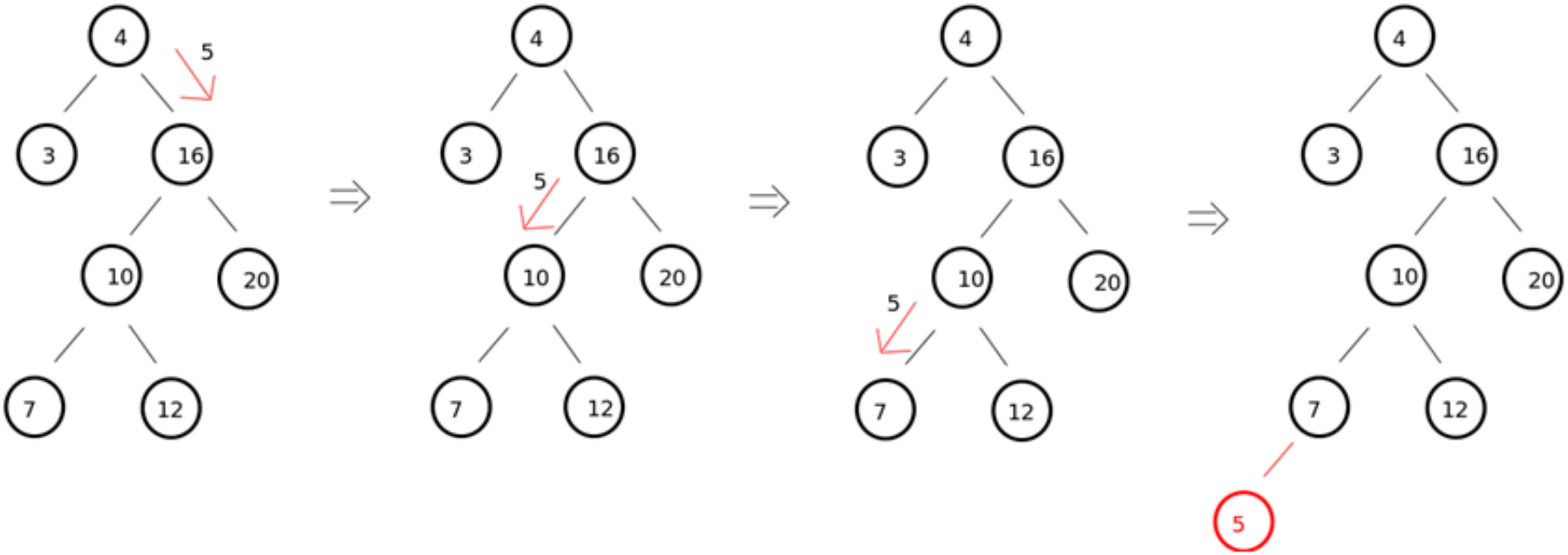
Árbol Binario de Búsqueda

- *Inserción*: añadir un nuevo elemento x al árbol
  - Avanzar en el árbol comparando x con raíz
  - Repetir el paso 1 hasta que el subárbol donde deba insertarse sea el árbol vacío
  - Insertar el elemento

La inserción es similar a la búsqueda y se puede dar una solución tanto iterativa como recursiva. Si tenemos inicialmente un árbol vacío se crea un nuevo nodo con el elemento a insertar. Si no lo está, se comprueba si el elemento dado es menor que la raíz del árbol inicial con lo que se inserta en el subárbol izquierdo y si es mayor o igual se inserta en el subárbol derecho.

Árbol Binario de Búsqueda

- Ejemplo de inserción



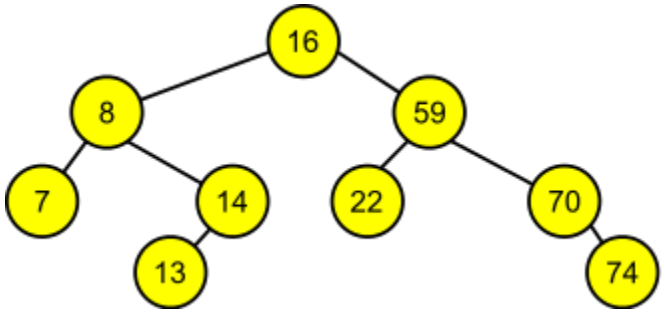
Árbol Binario de Búsqueda

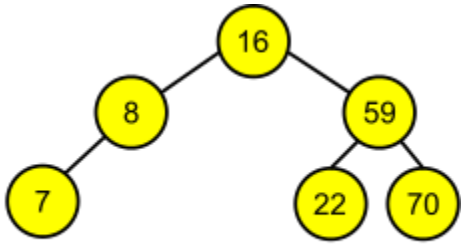
- *Eliminación*: borrar un elemento x del árbol
  - Si x es hoja $\Rightarrow$ se suprime x.
  - Si el elemento a borrar tiene un solo descendiente $\Rightarrow$ se sustituye por ese descendiente.
  - Si el elemento a borrar tiene los dos descendientes $\Rightarrow$ se sustituye por el menor elemento del subárbol derecho. Después se elimina el nodo correspondiente a dicho elemento.

Árbol Binario de Búsqueda

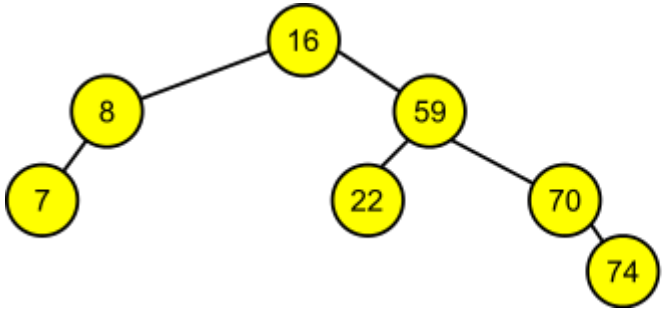
Ejemplo de borrado

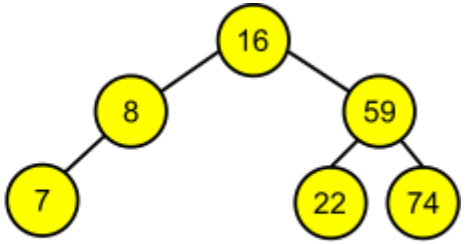
- Sin descendientes (nodos 13, 14, 74):





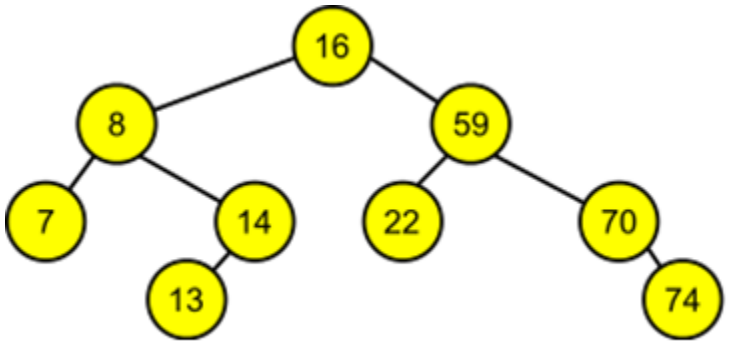
- Con 1 descendiente (nodo 70)

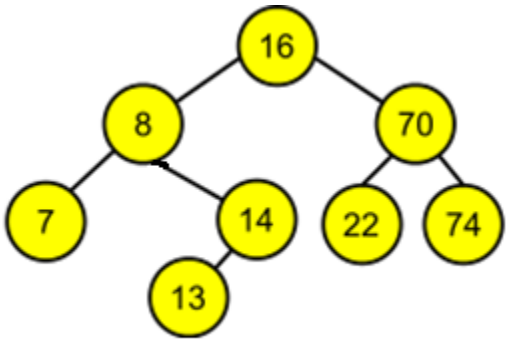




Árbol Binario de Búsqueda

- Con 2 descendientes (nodo 59)





TAD Árbol Binario de Búsqueda

Especificación

```
public class ArbolBusqueda<E> {
    // Declaración de tipos: ArbolBusqueda
    // Características: Es un árbol binario donde para cada nodo se cumple la propiedad
    //                  de que todos los nodos con clave menor que la suya están en
    //                  su subárbol izquierdo y todos los nodos con clave mayor o igual
    //                  se encuentran en el subárbol derecho.
    //                  Los objetos son modificables

    public ArbolBusqueda();
        // Produce: Un árbol vacío
    public boolean esVacio();
        // Produce:          Cierto si el árbol está vacío. Falso en caso contrario.
    public E raiz() throws ArbolVacioExcepcion;
        // Produce: Si el árbol está vacío lanza la excepción ArbolVacioExcepcion,
        //           sino devuelve el objeto almacenado en la raíz
    public ArbolBusqueda<E> hijoIzq() throws ArbolVacioExcepcion;
        // Produce: Si el árbol está vacío lanza la excepción ArbolVacioExcepcion,
        //          sino devuelve el subárbol izquierdo
```

TAD Árbol Binario de Búsqueda

Especificación

```
public ArbolBusqueda<E> hijoDer() throws ArbolVacioExcepcion;
        // Produce: Si el árbol está vacío lanza la excepción ArbolVacioExcepcion,
        //          sino devuelve el subárbol derecho

public void insertar(E elemento);
        // Modifica:        this
        // Produce:         Añade el objeto elemento a this

public void eliminar(E elemento) throws ElementoIncorrecto;
        // Modifica:        this
        // Produce:         Si elemento no existe en el árbol, lanza la excepción
        //                  ElementoIncorrecto sino elimina el objeto de this.

public boolean buscar(E elemento) ;
        // Produce:         Devuelve cierto si el objeto está en el árbol y
        //                  falso en otro caso
}
```

TAD Árbol Binario de Búsqueda

Implementación

- ¿Cómo comparar los elementos de los nodos?

  Solución: los elementos deben ser instancias de una clase que implemente la interface Comparable<E> existente en java.

```
public interface Comparable<E>{
        public int compareTo(E e);
}
```

- Paso 1: Definición interfaz

```
public interface ArbolBusqueda <E extends Comparable<E>> {
    public boolean esVacio();
    public E raiz() throws ArbolVacioExcepcion;
    public ArbolBusqueda<E> hijoIzq() throws ArbolVacioExcepcion;
    public ArbolBusqueda<E> hijoDer() throws ArbolVacioExcepcion;
    public void insertar(E elemento);
    public void eliminar(E elemento) throws ElementoIncorrecto;
    public boolean buscar(E elemento);
    }
```

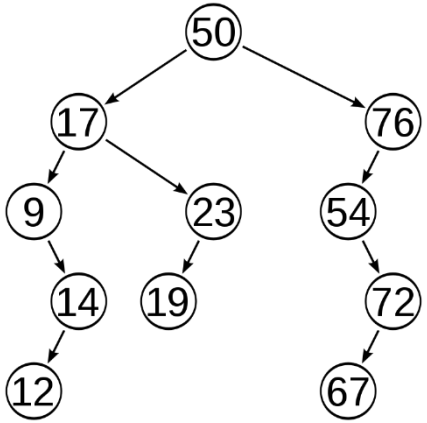
- Paso 2: Clase implemente la interfaz
  - Mediante estructuras enlazadas genéricas
    - **public class** ArbolBinarioBusqueda<E **extends** Comparable<E>> **implements** ArbolBusqueda<E>

Árbol Binario Equilibrado

- Los **árboles binarios de búsqueda** son una estructura sobre la cual se pueden realizar eficientemente las operaciones de búsqueda, inserción y eliminación
  - La eficiencia de las operaciones depende exclusivamente de la altura del árbol
  - Árbol de *N* nodos perfectamente equilibrado $\Rightarrow$ el coste de acceso es de orden logarítmico: O(log *N*)

Árbol Binario Equilibrado

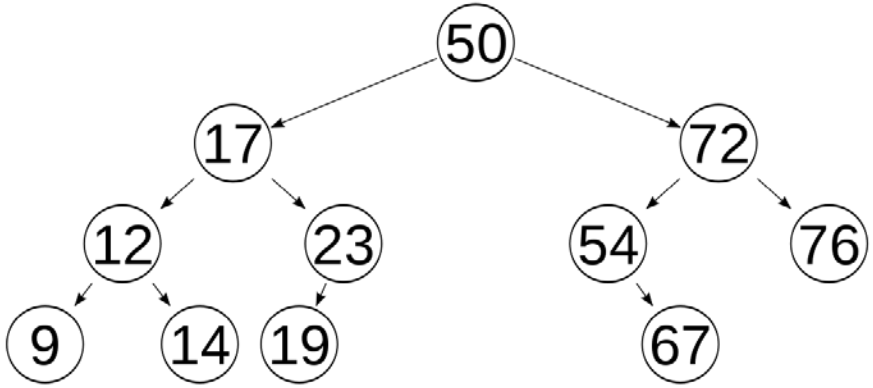
- Sin embargo, si el árbol crece o decrece descontroladamente, el rendimiento puede disminuir considerablemente



  - Caso más desfavorable: insertar un conjunto de claves ordenadas en forma ascendente o descendente
  - Coste de acceso: O(*N*)
- **Árboles equilibrados**:
  - Aseguran un coste logarítmico sin exigir que el árbol sea completo
  - Idea central: realizar acomodos o equilibrios después de inserciones o eliminaciones de elementos

Árbol AVL

- Un **árbol AVL** es un árbol binario de búsqueda en el que para todo nodo A del árbol la altura de los subárboles izquierdo y derecho no debe diferir en más de una unidad.
- La condición de equilibrio asegura una profundidad del árbol de O(log *N*).

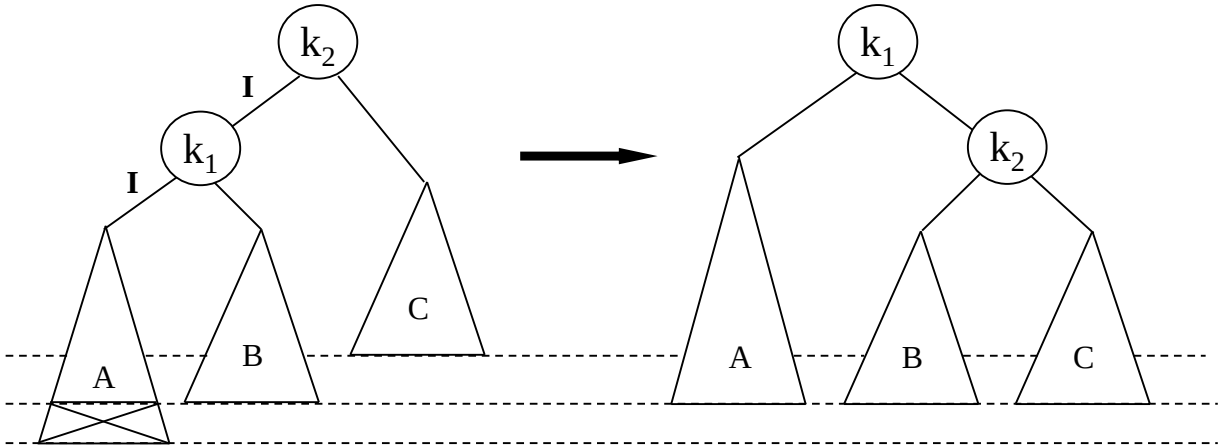


Árbol AVL

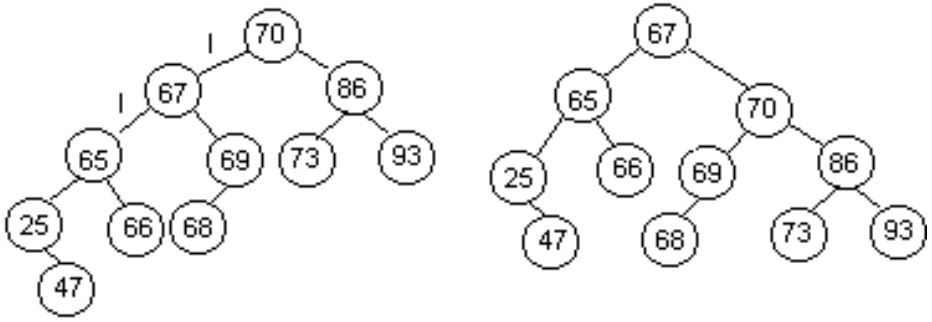
- **Factor de equilibrio** (FE) de un nodo: diferencia entre la altura de los subárboles. Los valores que puede tomar son -1, 0, 1. Si llegara a tomar los valores -2 o 2 $\Rightarrow$ debe reestructurarse el árbol
  - Reestructurar el árbol significa rotar los nodos del mismo
    - Rotación simple: involucra dos nodos
      - Por la rama izquierda
      - Por la rama derecha
    - Rotación compuesta: afecta a tres nodos
      - Por las ramas izquierda y derecha
      - Por las ramas derecha e izquierda

Árbol AVL

- **Rotación simple (I-I)**

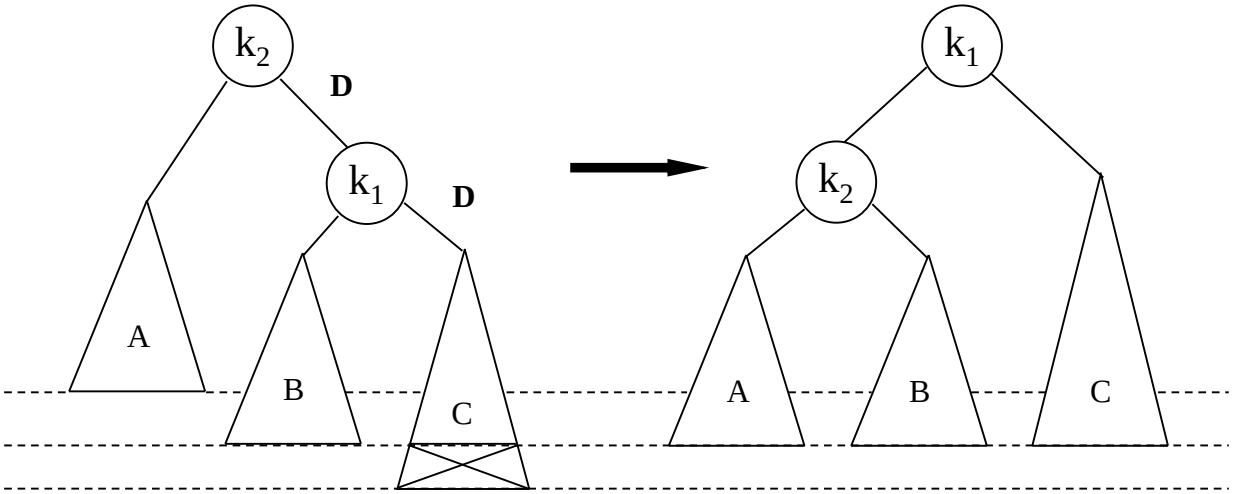


- Ejemplo: Inserción del nodo 47 en un árbol equilibrado



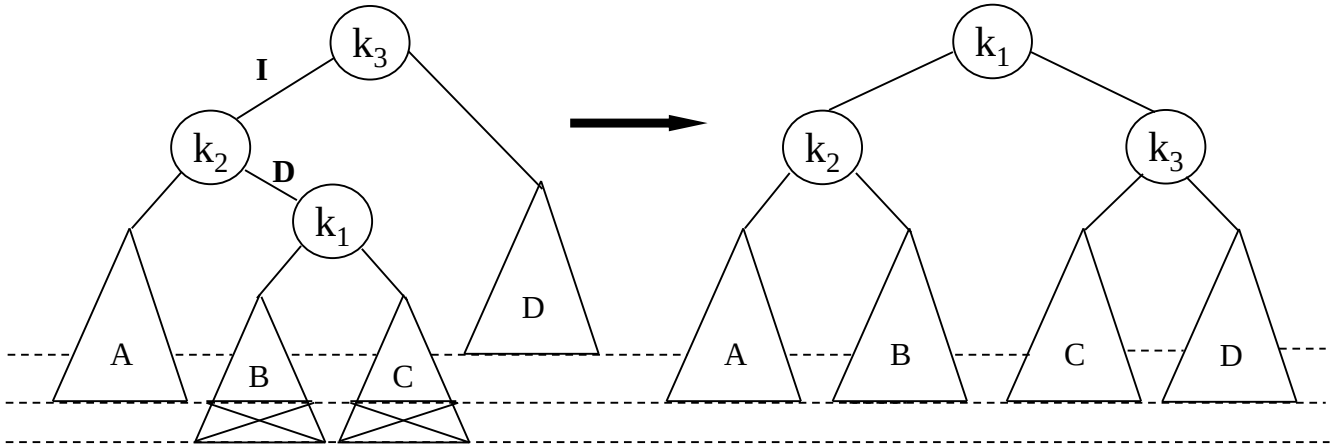
Árbol AVL

- **Rotación simple (D-D)**

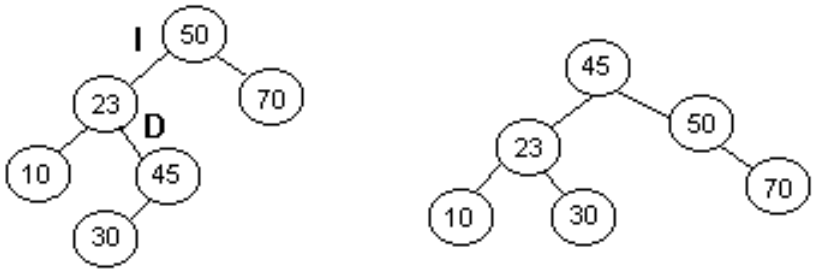


Árbol AVL

- **Rotación doble (I-D)**

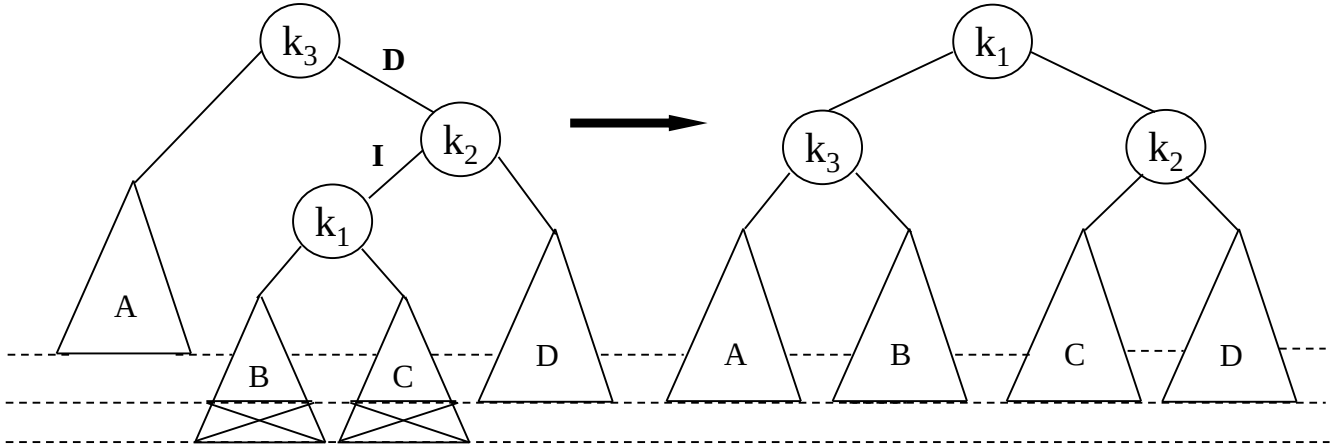


- Ejemplo: Inserción del nodo 30 en un árbol equilibrado

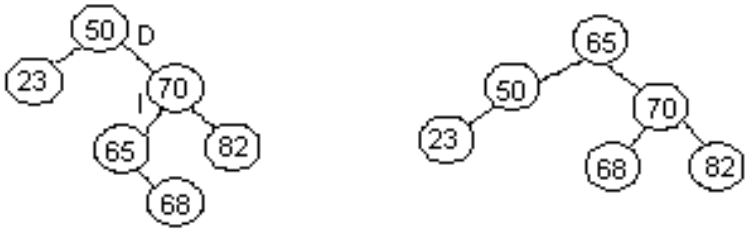


Árbol AVL

- **Rotación doble (D-I)**



- Ejemplo: Inserción del nodo 68 en un árbol equilibrado



Árbol AVL

- **Resumen operación insertar:**
  - Insertar el nodo como en un árbol binario de búsqueda
  - En el regreso por el camino de inserción se comprueba el FE de los nodos
  - Si un nodo presenta un FE incorrecto (2 o –2) se detiene el retroceso en este punto y se reestructura el árbol
  - Una inserción provoca una única reestructuración

Árbol AVL

- **Resumen operación suprimir:**
  - Suprimir el nodo como en un árbol binario de búsqueda
  - En el regreso por el camino de supresión se comprueba el FE de los nodos
  - Si un nodo presenta un FE incorrecto (2 o –2) se reestructura el árbol y se continua el ascenso hasta llegar a la raíz
  - Una supresión puede provocar varias reestructuraciones

Árbol AVL

- **Ejercicio:**

- Dibuja el árbol AVL que resulta después de insertar los elementos: 10, 33, 58, 40, 75, 49, 7, 18, 25, 15, 36, 3.

- Dibuja el árbol AVL que resulta después de eliminar los siguientes elementos del árbol anterior: 40, 75, 10, 49, 18, 33, 25, 58.