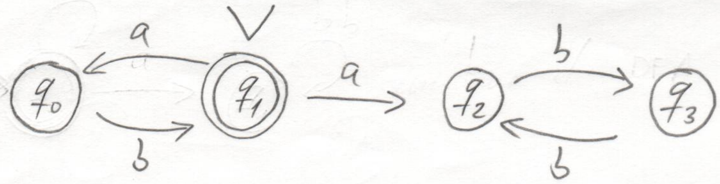
Ejercicio

Dado el NFA,  encontrar el DFA equiv.

La función de transición en nuestro caso es la que sigue:

δ	a	b
q_0	×	q_1
q_1	q_0, q_2	×
q_2	×	q_3
q_3	×	q_2

Dado que no hay estados inaccesibles, podemos en principio contar con todos los estados para construir el DFA.

El nuevo DFA $A' = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \delta', \{q_0\}, \{S \subseteq Q / S \cap F \neq \emptyset\})$ donde

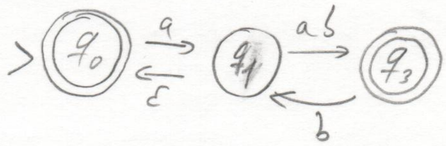
$$\forall S \subseteq Q,\ \delta'(S,a) = \{p \in Q / \exists q \in S, p \in \delta(q,a)\}$$

En nuestro caso:

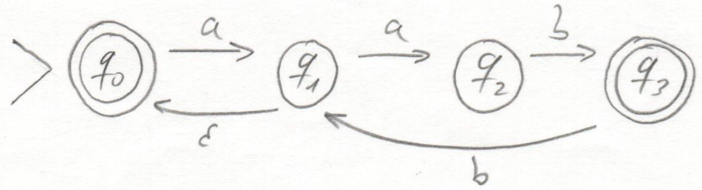
δ'	a	b
$[q_1]$	$[q_0, q_2]$	
$[q_0, q_2]$		$[q_1, q_3]$
$[q_1, q_3]$	$[q_0, q_2]$	$[q_2]$
$[q_2]$		$[q_3]$
$[q_3]$		$[q_2]$

que tiene en cuenta el conj. de estados accesibles.

Ejercicio

Dado el NFA  hallar un DFA equiv.

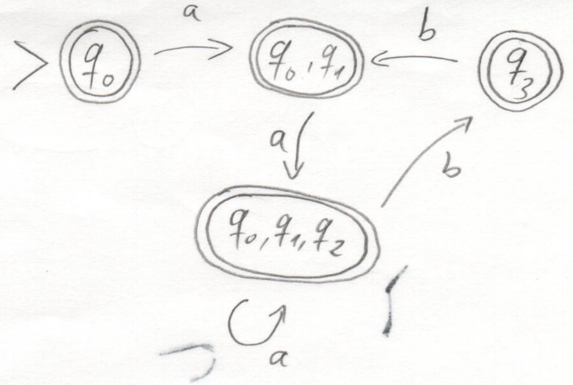
Primero escribimos nuestro NFA con transiciones sobre un solo símbolo del alfabeto.



A partir de este punto y aplicando el mismo método que en el ejercicio anterior obtenemos:

δ	a	b
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1, q_2]$	
$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_3]$
$[q_3]$		$[q_0, q_1]$

cuyo grafo es:



<u>Ejercicio</u>: Sea el alfabeto $\Sigma = \{\emptyset, 1\}$, y determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no.

a) Las cadenas terminadas en $\emptyset\emptyset$

b) Las cadenas donde cada grupo de cinco símbolos contiene dos ceros al final.

c) Las cadenas con un número impar de unos.

a) Bastaría considerar la expr. regular $(\emptyset+1)^*\emptyset\emptyset$

b) " " " " " $((0+1)(\emptyset+1)(\emptyset+1)\ \emptyset\emptyset)^+$

estaba mal.

c) " " " " " $\emptyset^*1\ (\emptyset+1\emptyset^*1)^*$

<u>Ejercicio</u>: Sea L_1 un conj. regular y sea $L_2 = \underbrace{\{w \in \Sigma^* / \exists y \in \Sigma^*,\ yw \in L_1\}}_{\text{los sufijos de } L_1}$ probar que L_2 es regular.

L_1 es un conj. regular $\Leftrightarrow \exists A_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F) \ / \ L_1 = L(A_1)$

Bastará considerar $A_2 := (Q, \Sigma, \delta_2, q_0, F)$ donde

$$\delta_2(q,a) := \delta_1(q,a), \quad \forall q \in Q,\ \forall a \in \Sigma$$

$$\delta_2(q_0, \varepsilon) := \{q \in Q,\ q \neq q_0\}$$

Esto es, añadimos una transición vacía desde q_0 a todos los otros estados de Q.

Trivialmente $L_2 = L(A_2)$.

Ejercicio: Dada la gramática $G: S \to AASB$
$\quad\quad | AAB$
$A \to a$
$B \to bbb$

demostrar que $L(G) = \{a^{2n} b^{3n},\ n > 0\}$

"$\supset$" Sea $x = a^{2n} b^{3n}, n > 0$ veremos que $S \overset{*}{\Rightarrow} x$

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} (AA)^{n-1} S B^{n-1} \Rightarrow A^n A^n B^n \overset{2n}{\Rightarrow} a^{2n} B^n \overset{n}{\Rightarrow} a^{2n} b^{3n} = x$$

mediante $S \to AASB$ por $S \to AAB$ por $A \to a$ por $B \to bbb$

demostrado

"$\subset$" Sea $w \in L(G)$, entonces $\underbrace{3n_w(a)}_{\text{nº de a's en w}} = \underbrace{2n_w(b)}_{\text{nº de b's en w}}$

resultado que se puede obtener directamente por inducción; a partir de la hipótesis $w \in L(G) \Leftrightarrow S \overset{k}{\Rightarrow} w, k \in \mathbb{N}$ mostrando que $3(n_w(a) + n_w(A)) = 2(n_w(b) + 3n_w(B))$

$k=1$ Hay dos casos:

$S \Rightarrow AASB \qquad 3(0+2) = 2(0+3) = 6$

$S \Rightarrow AAB \qquad 3(0+2) = 2(0+3) = 6$

$k \leq n$ Supuesto cierto

$k = n+1$ Entonces $S \overset{n}{\Rightarrow} \alpha \Rightarrow w$, con lo que

$3(n_\alpha(a) + n_\alpha(A)) = 2(n_\alpha(b) + 3n_\alpha(B))$, entonces

Forzosamente en la derivación $\alpha \overset{1}{\Rightarrow} w$ tendremos que habremos aplicado una y sólo una de las reglas siguientes $\begin{cases} A \to a \\ B \to bbb \end{cases}$

caso $A \to a$ $\quad 3(\underbrace{n_\alpha(a)+1}_{n_w(a)} + \underbrace{n_\alpha(A)-1}_{n_w(A)}) = 2(\underbrace{n_\alpha(b)}_{n_w(b)} + 3\underbrace{n_\alpha(B)}_{n_w(B)})$

caso $B \to bbb$ $\quad 3(\underbrace{n_\alpha(a)}_{n_w(a)} + \underbrace{n_\alpha(A)}_{n_w(A)}) = 2(\underbrace{n_\alpha(b)+3}_{n_w(b)} + 3\underbrace{(n_\alpha(B)-1)}_{n_w(B)})$

caso $S \to AASB$ $\quad 3(\underbrace{n_\alpha(a)}_{n_w(a)} + \underbrace{n_\alpha(A)+2}_{n_w(A)}) = 2(\underbrace{n_\alpha(b)}_{n_w(b)} + 3\underbrace{(n_\alpha(B)+1)}_{n_w(B)})$

caso $S \to AAB$ $\quad 3(\underbrace{n_\alpha(a)}_{n_w(a)} + \underbrace{n_\alpha(A)+2}_{n_w(A)}) = 2($ " " $)$

demostrado

Ejercicio: Demostrar que el lenguaje definido por la gramática

$$S \to aSb \mid ab$$

viene dado por $L(G) = \{a^n b^n, n > \emptyset\}$

"$\supset$" Sea $x = a^n b^n, n > \emptyset$ veremos que existe una derivación $S \overset{*}{\Rightarrow} x$.

$$\underset{\text{con } S \to aSb}{S \overset{n-1}{\Rightarrow} a^{n-1} S b^{n-1}} \underset{\text{con } S \to ab}{\Rightarrow} a^n b^n$$

"$\subset$" Veremos que $\forall w \in L(G)$, $n_w(a) = n_w(b)$ donde por inducción en el número de derivaciones aplicadas

$$n_w(a) + \cancel{n_w(S)} = \cancel{n_w(S)} + n_w(b)$$

$k=1$ Hay dos casos:

$S \Rightarrow aSb \qquad 1 = 1$

$S \Rightarrow ab \qquad 1 = 1$

$k \le n$ Supuesto cierto

$\underline{\underline{k = n+1}}$ $S \overset{n+1}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow S \overset{n}{\Rightarrow} \alpha \Rightarrow w$ donde por hipótesis de inducción

$n_\alpha(a) = n_\alpha(b)$

teniendo en cuenta que en la derivación $\alpha \overset{I}{\Rightarrow} w$ sólo hemos podido aplicar $\begin{cases} S \rightarrow ab \\ S \rightarrow aSb \end{cases}$ la nueva ecuación será $n_\alpha(a) + 1 = n_\alpha(b) + 1$ que trivialmente se verificará.

$\underline{\underline{\text{Ejercicio:}}}$ Demostrar que el lenguaje generado por la gramática

$$G : \begin{aligned} S &\rightarrow abSc \\ &\mid A \\ A &\rightarrow cAd \\ &\mid cd \end{aligned}$$

viene dado por $L(G) = \{(ab)^n c^m d^m c^n, n \geq \emptyset, m \geq 1\}$

"$\supset$" Sea $x = (ab)^n c^m d^m c^n$, $n \geq \emptyset$, $m \geq 1$, veremos que existe una derivación $S \Rightarrow w$ donde:

$$S \overset{n}{\underset{\text{con } S \rightarrow abSc}{\Rightarrow}} (ab)^n S c^n \underset{\text{con } S \rightarrow A}{\Rightarrow} (ab)^n A c^n \overset{m-1}{\underset{\text{con } A \rightarrow cAd}{\Rightarrow}} (ab)^n c^{m-1} A d^{m-1} c^n \Rightarrow$$

$$\underset{\text{con } A \rightarrow cd}{\Rightarrow} (ab)^n c^m d^m c^n$$

"$\subset$" Veremos que dado $w \in L(G)$, $n_w(ab) + n_w(d) = n_w(c)$ para lo cual bastará con demostrar que:

$$n_w(ab) + \cancel{n_w(A)} + n_w(d) = n_w(c) + \cancel{n_w(A)}$$

lo haremos por inducción en la longitud k de las derivaciones

$\underline{k = 1}$ Hay dos casos

$S \Rightarrow A$ $\quad \emptyset + \emptyset = \emptyset$

$S \Rightarrow abSc$ $\quad 1 + \emptyset = 1$

$k \leq n$ Supuesto cierto

$\underline{k = n+1}$ Entonces $S \overset{n}{\Rightarrow} \alpha \Rightarrow w$ y por inducción tendremos que:

$n_\alpha(ab) + n_\alpha(d) = n_\alpha(c)$

Además $\alpha \Rightarrow w$ sólo puede ser mediante aplicación de

$S \to abSc$ $\qquad \underbrace{n_\alpha(ab)+1} + n_\alpha(d) = \underbrace{n_\alpha(c)+1}$

$S \to A$ $\qquad n_\alpha(ab) + n_\alpha(d) = n_\alpha(c)$

$A \to cAd$ $\qquad n_\alpha(ab) + \underbrace{n_\alpha(d)+1} = \underbrace{n_\alpha(c)+1}$

$A \to cd$ $\qquad n_\alpha(ab) + \underbrace{n_\alpha(d)+1} = \underbrace{n_\alpha(c)+1}$

En cualquier caso, se verifica.

Ejercicio Sea $\mathcal{G}$ la gramática regular dada por las reglas:

$$\begin{aligned} S &\to aS \\ &\mid bB \\ &\mid a \\ B &\to bB \\ &\mid \varepsilon \end{aligned}$$

construir el FA que reconoce $L(\mathcal{G})$.

Como habíamos visto en el th. correspondiente de teoría, dada $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ reg. bastaba construir el FA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

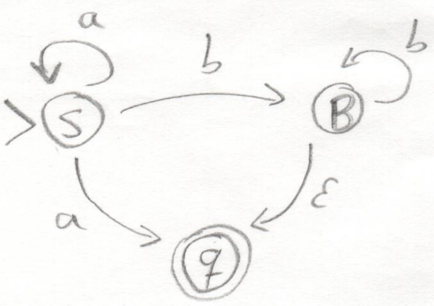
$Q := N \cup \{q\} \;/\; q \notin N \cup \Sigma$

$F := \{q\}$

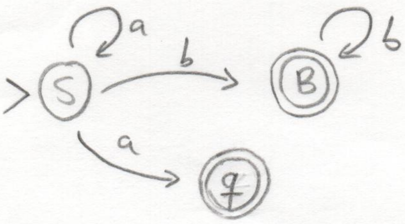
$\delta := \{(q_i, u, q_j) \;/\; q_i \to u\, q_j \in P\} \cup \{(q_i, u, q) \;/\; q_i \to u \in P\}$

$q_0 := S$

en nuestro caso



Ejercicio: Dado el FA cuyo grafo de estados es el siguiente



encontrar su correspondiente gramática regular.

La idea consiste en aplicar el razonamiento inverso al considerado en el ejercicio anterior. Construiremos $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, con

$S := q_0$

$N := Q$

$P := \{ q \to a\,\delta(q,a) \,/\, (q,a) \in Q \times \Sigma \} \cup \{ q \to \varepsilon \,/\, q \in F \}$

En nuestro caso, el conjunto de producciones será:

$$
\left.
\begin{array}{l}
S \to aS \\
S \to bB \\
S \to a \\
B \to bB \\
B \to \varepsilon \\
q \to \varepsilon
\end{array}
\right\}
$$

Ejercicio: Sea $L = \{a^i / i \text{ primo}\}$, ver si es un conj. regular.

Veremos que no lo es, por aplicación del lema del bombeo.

Supongamos que $\exists A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) / L = L(A)$

y supongamos $|Q| = n$.

Sea $w = a^m / |a^m| = m \geq n$, entonces por el th. de iteración en conj. regulares,

$$\exists\, x, y, z \in \Sigma^* \Big/ \begin{array}{l} y \neq \varepsilon \\ w = xyz \\ xy^k z \in L,\ \forall k \geq \emptyset. \end{array}$$

En particular, $\exists k = m+1$ tal que $\Rightarrow \underbrace{xy^{m+1}z}_{a^i,\ i \text{ primo}} \in L$, pero

$$\left.\begin{array}{l} |xy^{m+1}z| = |xyz| + |y^m| = m + m|y| = m(1+|y|) \\ xy^{m+1}z = a^i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow i$ no primo $\Rightarrow a^i \notin L$ <u>absurdo</u>

Ejercicio: Sea $L = \{ w \in \{a,b\}^* / w$ contiene "aa" pero no "bb" $\}$, ver si es un conj. regular.

$$\text{Sean } \left.\begin{array}{l} L_1 = (a+b)^* aa (a+b)^* \\ L_2 = (a+b)^* bb (a+b)^* \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_i,\ \text{reg. } i=1,2 \\ L = L_1 \cap \overline{L_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow L$ conj. reg.

Ejercicio: Sea $L = \{a^i b^j \,/\, \substack{i,j \geq \emptyset \\ i \neq j}\}$ ver si es regular.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Supongamos } L \text{ conj. reg.} \Rightarrow \overline{L} \text{ reg} \\ \qquad a^*b^* \text{ conj. reg} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{L} \cap a^*b^* = \{a^i b^i, i \geq \emptyset\}$ reg. absurdo

Ejercicio: Ver si es regular el conj. $L_1 = \{w \in \{\emptyset,1\}^* \,/\, \substack{w \text{ contiene más } \emptyset\text{'s} \\ \text{que } 1\text{'s}}\}$

$L_1 = \{\emptyset^m 1^n \,/\, m > n \geq \emptyset\}$

Supongamos L_1 conj. reg $\Rightarrow L_2 = \{1^m \emptyset^n \,/\, n > m \geq \emptyset\}$ conj. reg $\Rightarrow$

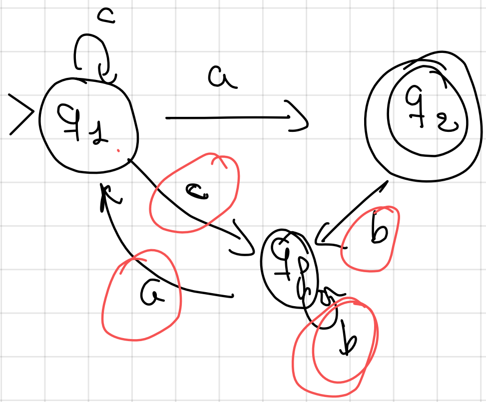
$\Rightarrow L_3 = \{\emptyset^m 1^n \,/\, n > m \geq \emptyset\}$ conj. reg $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 \cup L_3 = \{\emptyset^m 1^n \,/\, n \neq m\}$ conj. reg $\Rightarrow$

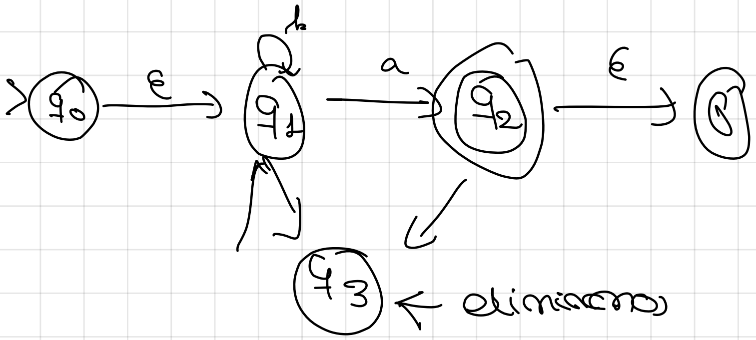
$\Rightarrow \{a^i b^j \,/\, i,j \geq \emptyset, i \neq j\}$ conj. reg

absurdo con el ejercicio anterior

Por tanto, L_1 no es un conj. regular.



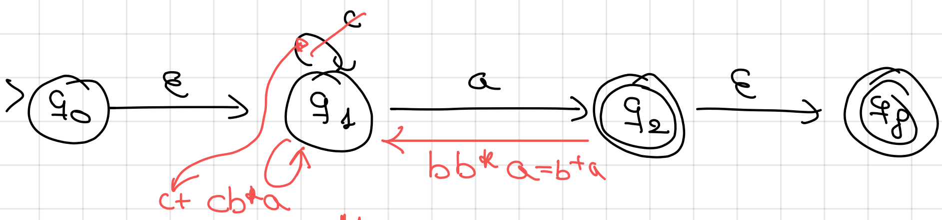
1:) Añadimos nuevos estados iniciales y finales



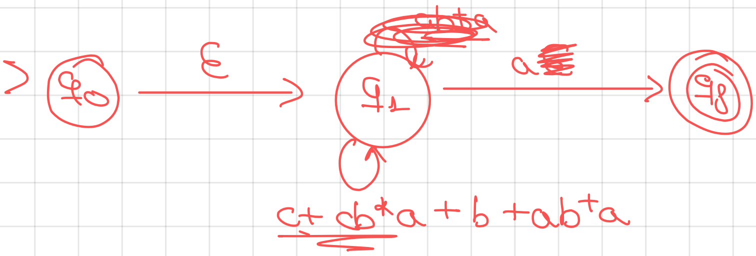
Ahora, se van eliminando estados, de manera que vamos pillando las expresiones

Eliminamos estados sustituyéndolos por los caminos que los atraviesan

Comenzamos por ejemplo por q_3



Ahora pasamos lo que había en q_3



$$\boxed{c + cb^*a + b + ab^+a + \varepsilon}$$