Tarea 3

Alejandro Restrepo Giraldo CC: 1001389709

El oscilador masa resorte es uno de los sistemas más básicos y fundamentales de la física. Consiste en una masa que se mueve sobre una línea unida a un resorte que cumple la ley de Hooke $F(x) = -kx$, en donde x es la coordenada de la masa y k es una constante propia del resorte que mide su resistencia al comprimirse o estirarse. La energía potencial de este sistema es la primera aproximación a cualquier forma de potencial con un mínimo en alguna posición del espacio, de ahí su importancia.

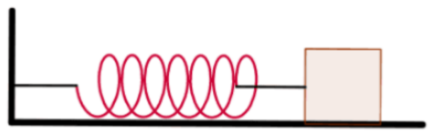

Figure 1: Sistema masa resorte.

La ecuación diferencial que rige el movimiento es:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

con $\omega^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La solución con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es:

$$x(t) = x_0 cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} sin(\omega t)$$

Esta solución analítica fue implementada en el código *MasaResorte.py* para la clase *Oscilador*. Con condiciones iniciales $x_0 = 1.0m$ y $v_0 = -2.0m/s$ para diferentes valores de masa y constante de resorte se obtuvieron las gráficas de las figuras 2 y 3.

Se evidencia la influencia de los parámtros en la frecuancia y amplitud del sistema, a mayor masa menor frecuencia y mayor amplitd debido a que la inercia de esta causa que el resorte requiera mayor desplazamiento y tiempo para devolverla al punto de equilibrio $x = 0$. A mayor constante k menor amplitud y mayor frecuencia, esto debido a que la rigidez del resorte causa desplazamientos menores y fuerza de recuperación mayor. Esto también se observa en las elipses del espacio de fase en donde a mayor razón k/m el eje vertical es mayor que el horizontal y sucede lo contrario a mayor razón m/k.

Si se considera un oscilador masa resorte amortiguado con una fuerza amortiguadora de la forma $F_f = -b\dot{x}$, la ecuación diferencial sería

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

con $\alpha = \frac{b}{2m}$. La ecuación característica de este sistema tiene por raíces $\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. El caso $\alpha^2 - \omega^2 < 0$ se denomina subamortuguado y consiste en oscilaciones de amplitud con decrecimiento exponencial de la forma

$$x(t) = e^{-\alpha t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

con $A = \frac{v_0 + \alpha x_0 - i\omega x_0}{-2i\omega}$ y $B = x_0 - A$. En la calse *OsciladorAmortiguado* se implementó la solución numérica a este sistema considerando parámetros que cumplieran la condición de subamortiguamiento. Las gráficas obtenidas se observan en las figuras 4 y 5. Se observa el mismo comportamiento respecto a la frecuencia y para la amplitud, a mayor valor de b, más rápido decrece y se alcanza el equilibrio el sistema.

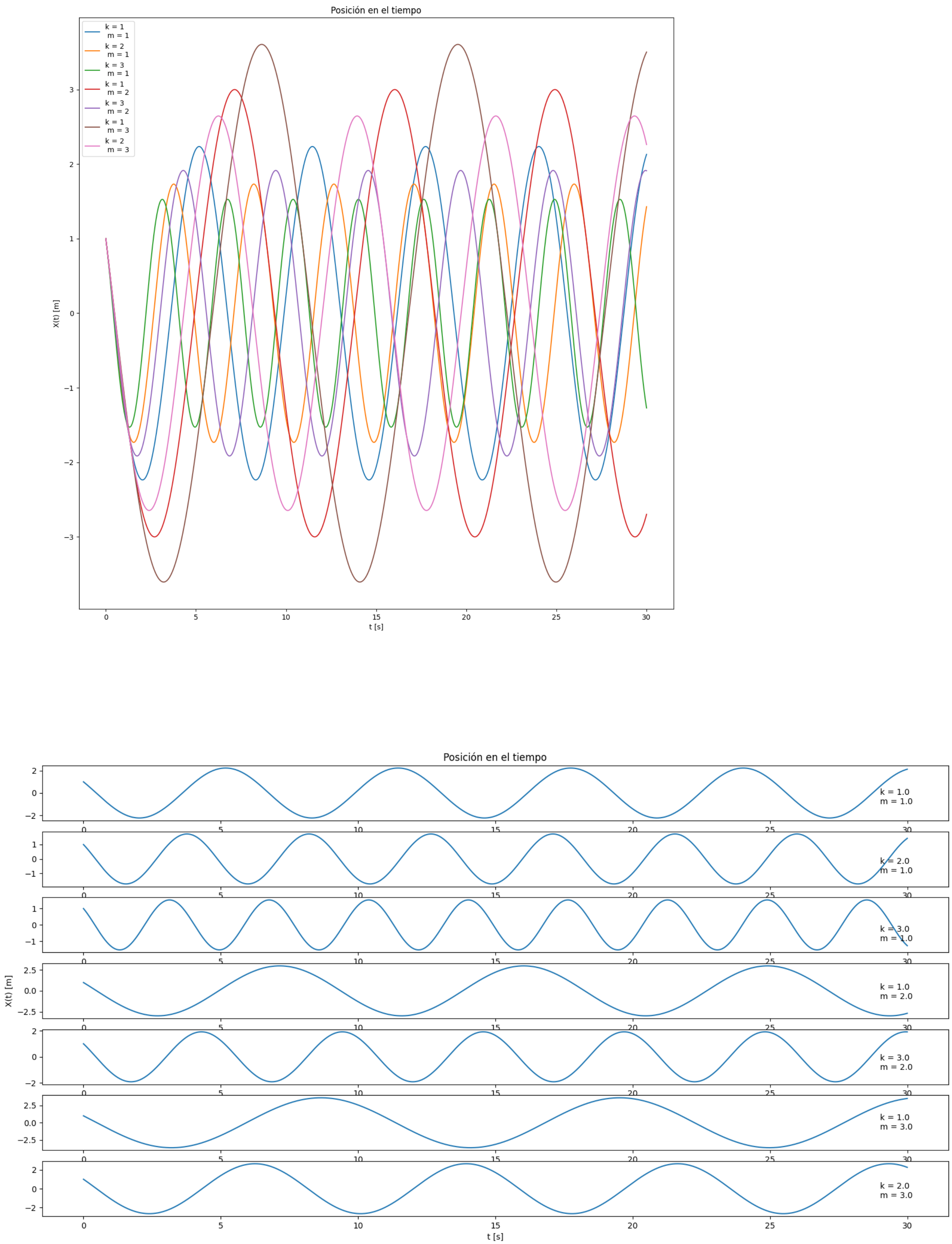
Posición en el tiempo
k = 1
m = 1
k = 2
m = 1
k = 3
m = 1
k = 1
m = 2
k = 3
m = 2
k = 1
m = 3
k = 2
m = 3
X(t) [m]
t [s]
Posición en el tiempo
k = 1.0
m = 1.0
k = 2.0
m = 1.0
k = 3.0
m = 1.0
k = 1.0
m = 2.0
k = 3.0
m = 2.0
k = 1.0
m = 3.0
k = 2.0
m = 3.0
X(t) [m]
t [s]

Figure 2: $x(t)$

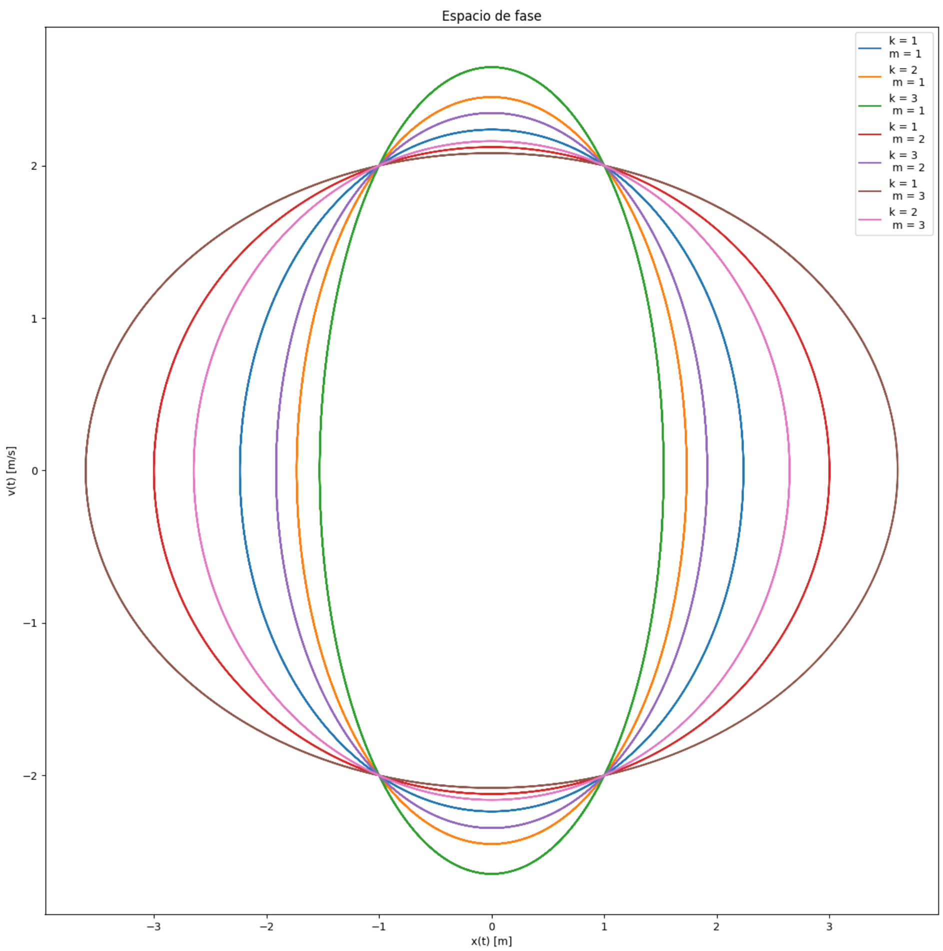

Figure 3: Espacio de fase, $x(t)$ vs $v(t)$.

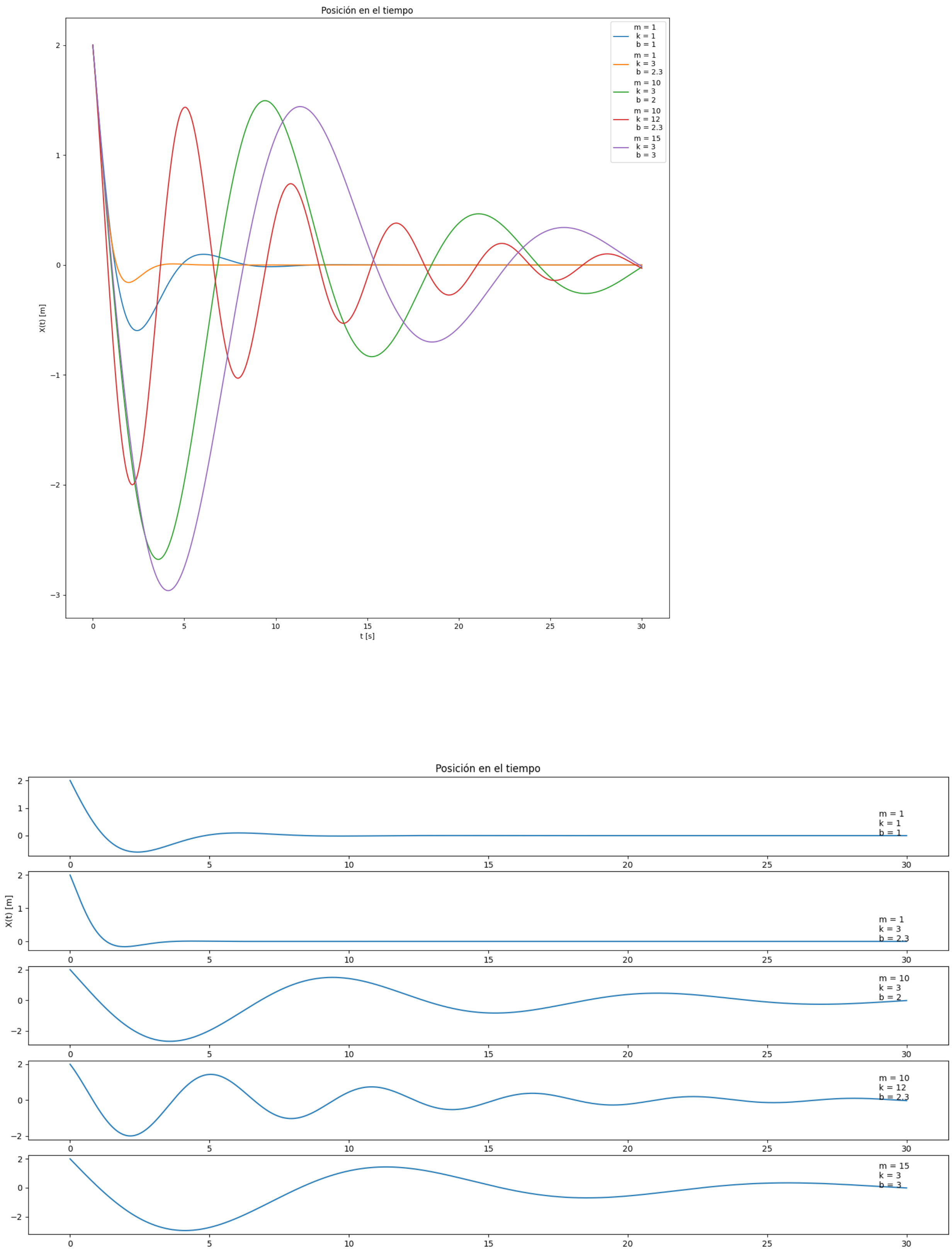
Posición en el tiempo
m = 1
k = 1
b = 1
m = 1
k = 3
b = 2.3
m = 10
k = 3
b = 2
m = 10
k = 12
b = 2.3
m = 15
k = 3
b = 3
X(t) [m]
t [s]
Posición en el tiempo
m = 1
k = 1
b = 1
m = 1
k = 3
b = 2.3
m = 10
k = 3
b = 2
m = 10
k = 12
b = 2.3
m = 15
k = 3
b = 3
X(t) [m]
t [s]

Figure 4: $x(t)$

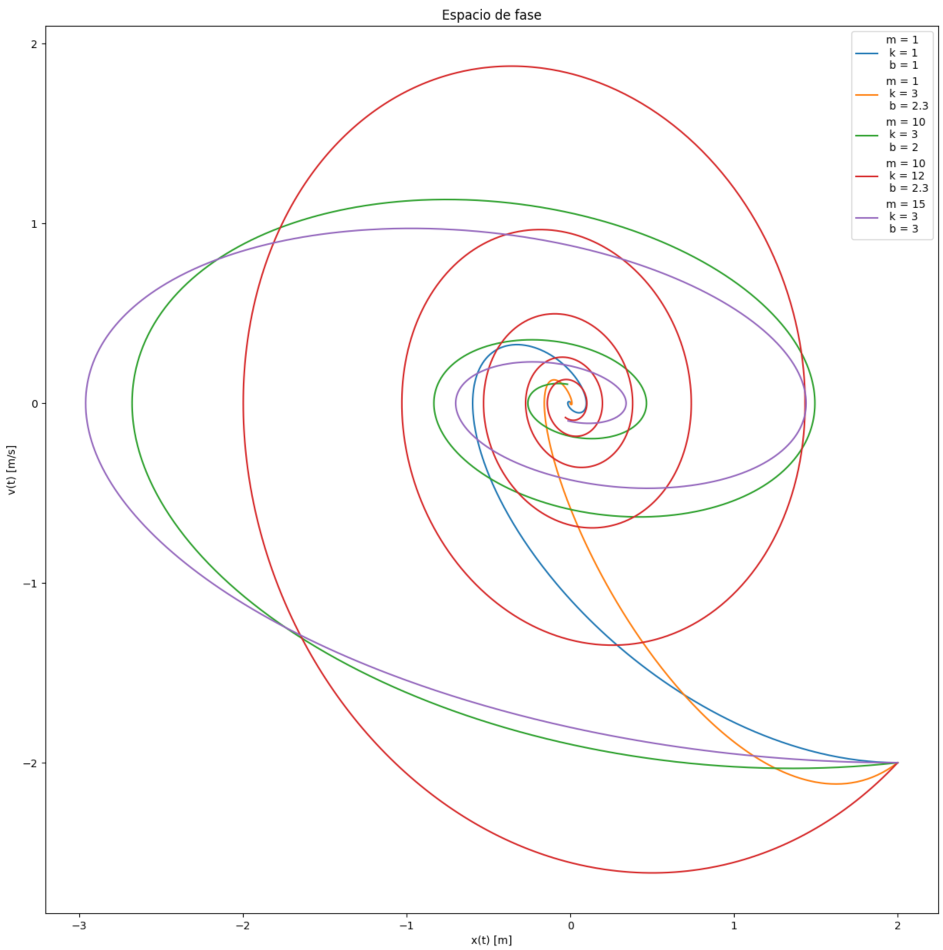

Figure 5: Espacio de fase, $x(t)$ vs $v(t)$ del sistema amortiguado.