Το σύστημα διπλού αστεροειδή Δίδυμος-Δίμορφος

Αναστάσιος-Φαίδων Ρετσέλης (AEM: 4394)

4/7/2021

Περιεχόμενα

1 Ερώτημα α

1.1 Εκφώνηση

Το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος είναι ένας διπλός αστεροειδής. Η μάζα του Δίδυμου είναι $5.32 \times 10^{11}\ kg$ και η μάζα του Δίμορφου $4.94 \times 10^{11}\ kg$. Το σύστημα περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά με σχετική ακτίνα $r = 1.18\ km$ απόσταση των κέντρων των δύο σωμάτων). Θεωρούμε τα δύο σώματα σφαιρικά με ακτίνες $R_{Didymos} = 325\ m$ και $R_{Dimorphos} = 80\ m$. Χρησιμοποιώντας το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων, υπολογίστε τις θέσεις των σημείων Lagrange (σε κανονικοποιημένες μονάδες και σε φυσικές μονάδες) και βρείτε την ευστάθειά τους. Επίσης υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος ενέργειας h για κάθε σημείο.

1.2 Λύση

Αρχικά πραγματοποιούμε μια κανονικοποίηση μονάδων ούτως ώστε:

$$G(m_1 + m_2) = 1 \tag{1}$$

Τότε ορίζουμε το μέγεθος:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m2} \tag{2}$$

ώστε να ισχύει $\mu_1 = 1 - \mu$ και $\mu_2 = \mu$. Τα σημεία Lagrange που βρίσκονται στην ευθεία $y = 0$ θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$L_1:\ x = 1 - \mu - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{81}\alpha^4 \tag{3}$$

$$L_2:\ x = 1 - \mu + \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 \tag{4}$$

$$L_3:\ x = -1 - \mu + \frac{7\mu}{12(1-\mu)} - \frac{7}{12}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 + \frac{13223}{20736}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^3 \tag{5}$$

Ενώ τα σημεία L_4 και L_5 θα υπολογίζονται από:

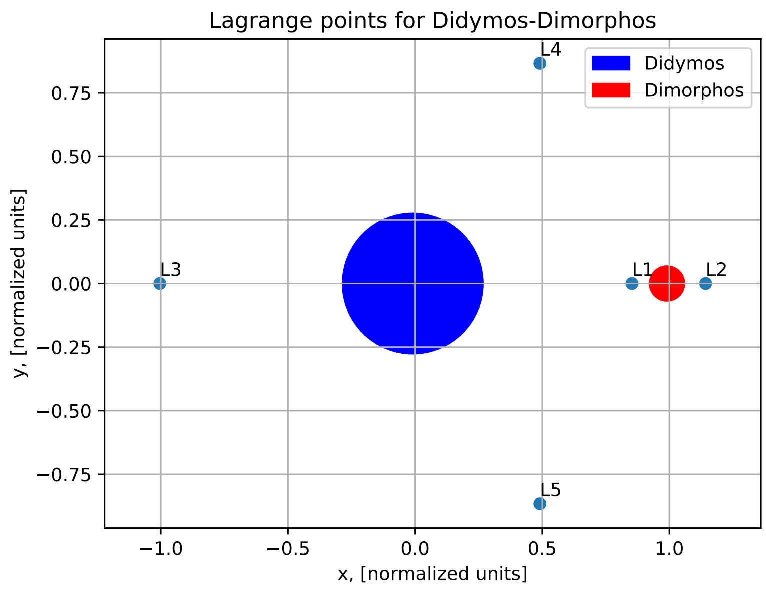
$$L_{4,5}:\ x = \frac{1}{2} - \mu \tag{6}$$

$$L_{4,5}:\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

Σε κανονικοποιημένες μονάδες, οι συντεταγμένες των σημείων Lagrange για το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος φαίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Συντεταγμένες σημείων Lagrange σε κανονικοποιημένες μονάδες

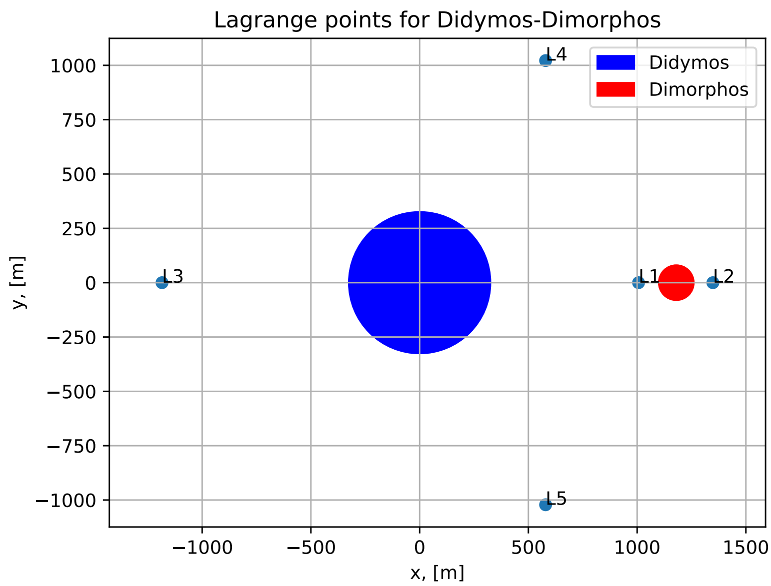
Σημείο	x [normalized]	y [normalized]
L1	0.85302	0.0
L2	1.14261	0.0
L3	-1.00383	0.0
L4	0.49080	0.86602
L5	0.49080	-0.86602



Σχήμα 1: Οι θέσεις των σημείων Lagrange στο X-Y επίπεδο σε κανονικοποιημένες μονάδες

Πίνακας 2: Συντεταγμένες σημείων Lagrange σε φυσικές μονάδες

Σημείο	**x [m]**	**y [m]**
L1	1006.55902	0.0
L2	1348.28158	0.0
L3	-1184.52342	0.0
L4	579.14366	1021.90998
L5	579.14366	-1021.90998



Σχήμα 2: Οι θέσεις των σημείων Lagrange στο X-Y επίπεδο σε φυσικές μονάδες

Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = 0$ δηλαδή τα L_1, L_2 και L_3 είναι ασταθή σημεία ισορρόπιας, ενώ εφόσον για το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος ισχύει:

$$\mu = \frac{m_{Dimorphos}}{m_{Dimorphos} + m_{Didymos}} = 0.00920028 < 0.0385 \tag{8}$$

τότε τα σημεία L_4 και L_5 θα είναι ευσταθή σημεία ισορρόπιας. Τέλος, υπολογίζουμε τις ενέργειες για κάθε σημείο από τις σχέσεις:

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 10\mu/3 \tag{9}$$

$$C_{L_2} \approx 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 14\mu/3 \tag{10}$$

$$C_{L_3} \approx 3 + \mu \tag{11}$$

$$C_{L_4} \approx 3 - \mu \tag{12}$$

$$C_{L_5} \approx 3 - \mu \tag{13}$$

Και γνωρίζωντας πως για την ενέργεια ισχύει: $h = -c/2$, υπολογίζουμε για κάθε σημείο Lagrange ξεχωριστά την τιμή της ενέργειας, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3: Ενέργεια για κάθε σημείο Lagrange

Σημείο	**h**
L1	-1.57965
L2	-1.57352
L3	-1.50460
L4	-1.49540
L5	-1.49540

Για τη λύση αυτού του υποερωτήματος, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα (**lagrange_points.py**)

2 Ερώτημα β

2.1 Εκφώνηση

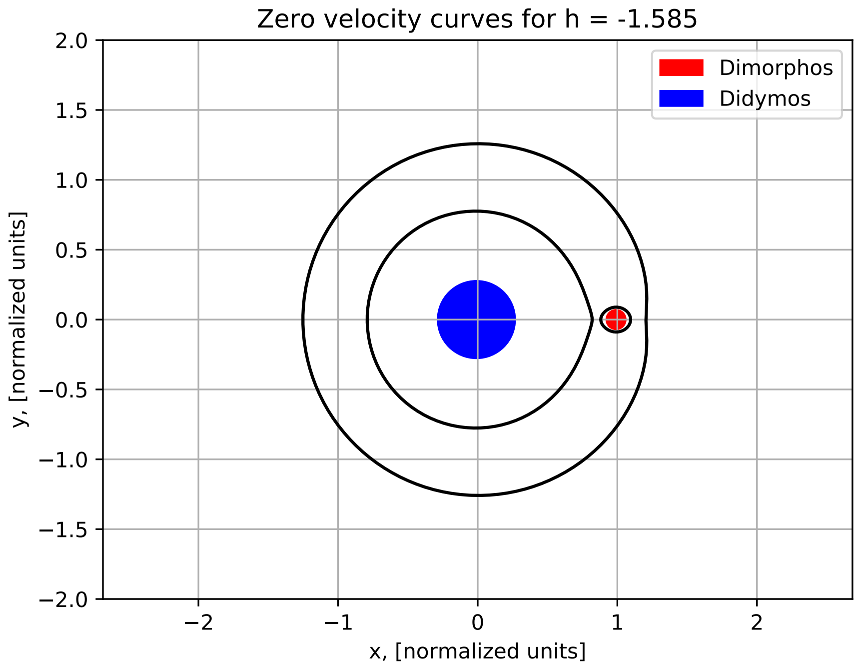
Υπάρχει ενέργεια h που να επιτρέπει να έχουμε τροχιές (ενός μικρού σκάφους) γύρω από τον Δίμορφο; Δικαιολογήστε την απάντηση σας. Άν ναι, δώστε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας τροχιάς.

2.2 Λύση

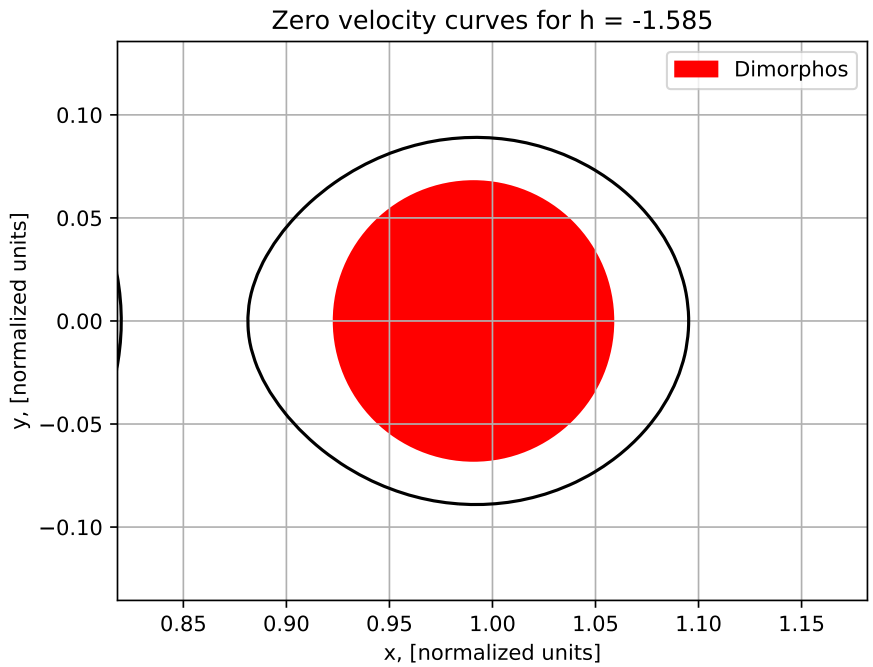
Ένας πρώτος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος θα ήταν να διερευνήσουμε τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, και συγκεκριμένα τις περιπτώσεις με χαμηλές ενέργειες όπου η μετάβαση από τον Δίδυμο στο Δίμορφο και το αντίστροφο δεν είναι δυνατή. Αν υπάρχει τέτοια περίπτωση, τότε μπορούμε θεωρητικά να βρούμε εύκολα αρχικές συνθήκες και μια τροχιά που να ικανοποιεί τη συνθήκη για τροχιά γύρω από το Δίμορφο. Οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$h + \left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 0 \tag{14}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις καμπύλες αυτές στην Python (**zvc_calculator.py**) για την περίπτωση που αναφέραμε παραπάνω. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 3.

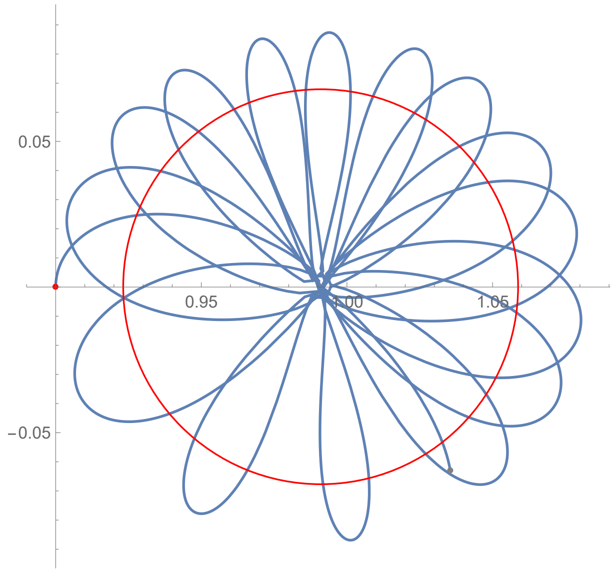


Σχήμα 3: Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος για ενέργεια $h = -1.585$



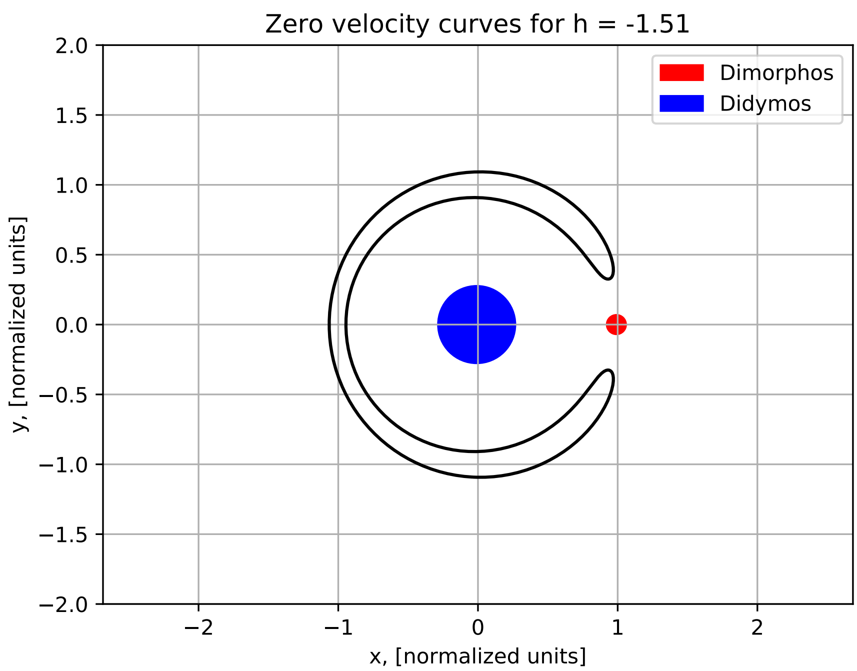
Σχήμα 4: Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας στην περιοχή του Δίμορφου για ενέργεια $h = -1.585$

Σύμφωνα με το Σχήμα 4, μπορούμε να παρατηρήσουμε μια στενή περιοχή στην οποία πιθανώς να υπάρχουν τροχίες γύρω απο τον Δίμορφο. Όμως, υπάρχει ένα βασικό πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση για ενέργεια $h = -1.585$, καθώς για ένα αρκετό μεγάλο πλήθος αρχικών συνθηκών που δοκιμάστηκαν ($N > 20$) στο notebook (**orbit_around_dimorphos.nb**), όλες οι τροχιές φαίνεται να καταλήγουν σε σύγκρουση με το Δίμορφο, δείχνοντας πως δεν είναι πραγματικές. Αυτό μπορεί να αντιληπτό παρατηρώντας το Σχήμα 5.

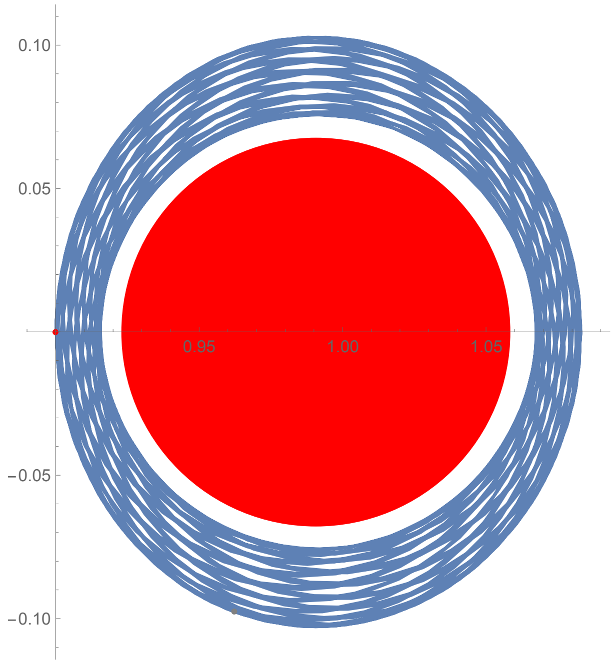


Σχήμα 5: Τροχιά ενός μικρού σώματος για ενέργεια $h = -1.585$ με αρχικές συνθήκες: $x_0 = 0.9$, $y_0 = 0$, $v_{x,0} = 0$, $v_{y,0} = 0.148819$. Με κόκκινο σημειώνεται η επιφάνεια του Δίμορφου, επομένως μπορούμε να καταλάβουμε πως ο δορυφόρος θα συγκρουστεί στην επιφάνεια του Δίμορφου.

Εφόσον δεν μπόρεσε να βρεθεί κάποια τροχιά που να μπορεί να αποφύγει τη σύγκρουση στην επιφάνεια του Δίμορφου, επόμενο βήμα για να βρούμε μια σταθερή τροχιά είναι να αυξήσουμε την τιμή της ενέργεια h, ούτως ώστε να έχουμε περισσότερο χώρο καθώς η καμπύλες μηδενικής ταχύτητας θα καταλαμβάνουν λιγότερο χώρο. Επιλέγοντας ενέργεια $h = -1.51$, παρατηρούμε στο Σχήμα 6, πως αυτή τη φορά ο δορυφόρος μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος από την πλευρά του Δίμορφου, και οι μεταβάσεις από το ένα σώμα στο άλλο είναι επιτρεπτές. Εμείς ενδιαφερόμαστε όμως για μια τροχιά γύρω από το Δίμορφο, και πράγματι με αυτή τη νέα τιμή ενέργειας μπορούμε να βρούμε μια γύρω απο το ζητούμενο σώμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 6: Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος για ενέργεια $h = -1.51$



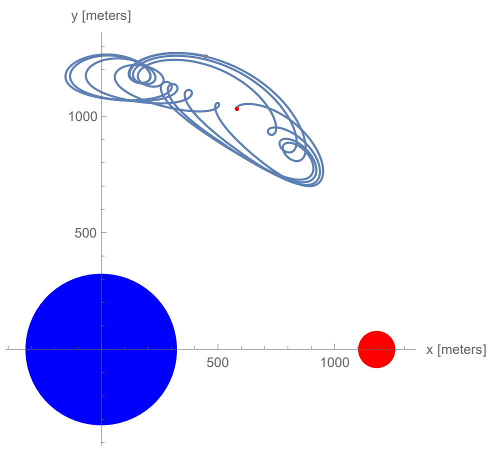
Σχήμα 7: Τροχιά ενός μικρού σώματος για ενέργεια $h = -1.51$ με αρχικές συνθήκες: $x_0 = 0.9$, $y_0 = 0$, $v_{x,0} = 0$, $v_{y,0} = 0.414906$. Με κόκκινο σημειώνεται ο Δίμορφος, και εφόσον η τροχιά δεν ακουμπάει στην επιφάνεια έχουμε βρει τη ζητούμενη τροχιά γύρω από το Δίμορφο.

3 Ερώτημα γ

3.1 Εκφώνηση

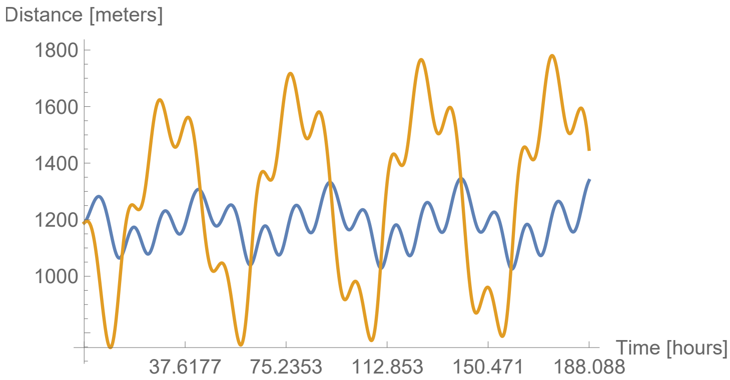
Βρείτε μια τροχιά ενός σκάφους που να εξελίσσεται κανονικά γύρω από το σημείο L_4 με όσο το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση από αυτό. Σχεδιάστε για ένα χρονικό διάστημα (πχ 100 ωρών) την απόσταση $r_1(t)$ και $r_2(t)$ του σκάφους από τα δύο σώματα σε φυσικές μονάδες (πχ αποστάσεις σε μέτρα, χρόνος σε ώρες). Υπάρχει τέτοια τροχιά που να συγκρούεται με την επιφάνεια του Δίδυμου ή του Δίμορφου;

3.2 Λύση



Σχήμα 8: Η τροχιά του σώματος γύρω από το L_4 στο X-Y επίπεδο

Επιλέγουμε τιμές ενέργειας κοντά σε αυτήν που αντιστοιχεί στο σημείο L_4 και διαλέγουμε αρχικές συνθήκες που μας οδηγούν σε κανονική τροχιά γύρω από το L_4. Η τροχιά αυτή φαίνεται στο Σχήμα 8. Οι αρχικές συνθήκες είναι: $x_0 = 0.4907997169$, $y_0 = 0.8745$, $v_{x0} = 0$ και $v_{y0} = 0.0156831$. Υπολογίζουμε και την απόσταση από το κάθε σώμα για ένα χρονικό διάστημα $t = 190\ hours$, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 9. Εφόσον μιλάμε για μια κανονική τροχιά γύρω από το L_4, δεν μπορεί να υπάρξει σύγκρουση είτε με το Δίδυμο είτε με το Δίμορφο. Τα σχήματα αυτά δημιουργήθηκαν με το notebook (**orbit_around_L4.nb**).



Σχήμα 9: Απόσταση του σώματος από τον Δίδυμο ($r_1(t)$, με γαλάζιο χρώμα) και το Δίμορφο ($r_2(t)$, με πορτοκαλί χρώμα) συναρτήσει του χρόνου για την τροχία γύρω από το L_4 σε φυσικές μονάδες.

4 Ερώτημα δ

4.1 Εκφώνηση

Υπολογίστε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχει στη θετική ιδιοτιμή το σημείου ισορροπίας L_3. Ξεκινήστε με αρχικές συνθήκες κοντά στο L_3 πάνω στη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος. Η τροχιά που ακολουθεί το σώμα προσεγγίζει την ασταθή πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου L_3. Δώστε τις τροχιές για τις δυο περιπτώσεις, του παραπάνω διανύσματος και του αντίθετου αυτού (το ιδιοδιάνυσμα εκφράζει μόνο διεύθυνση οπότε θεωρούμε και τις δύο περιπτώσεις φοράς) και σχολιάστε. Συγκρούονται οι τροχιές με κάποιο από τα δύο σώματα; Διαφεύγουν από το σύστημα;

4.2 Λύση

Οι ιδιοτιμές του συστήματος θα δίνονται από την:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

όπου για το σημείο L_3 θα ισχύει:

$$U_{xx} = 1 + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) \tag{16}$$

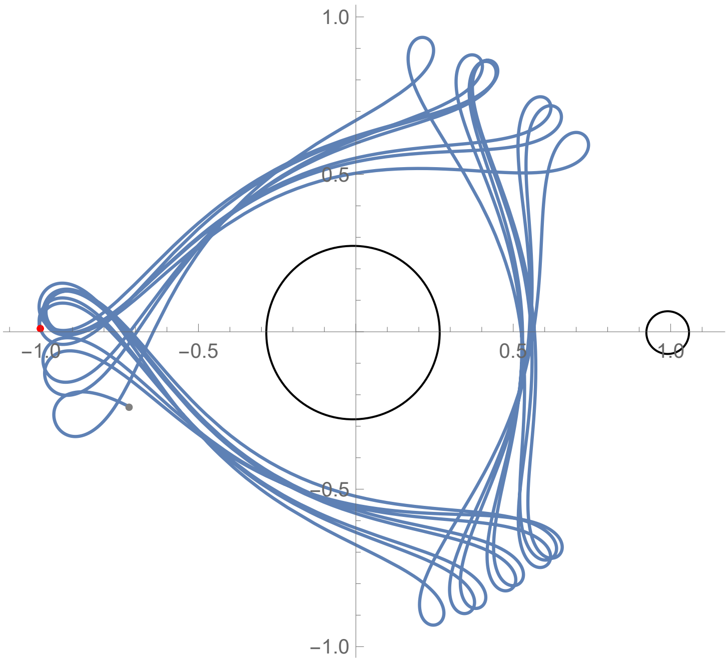
$$U_{yy} = 1 - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) \tag{17}$$

$$U_{xy} = 0 \tag{18}$$

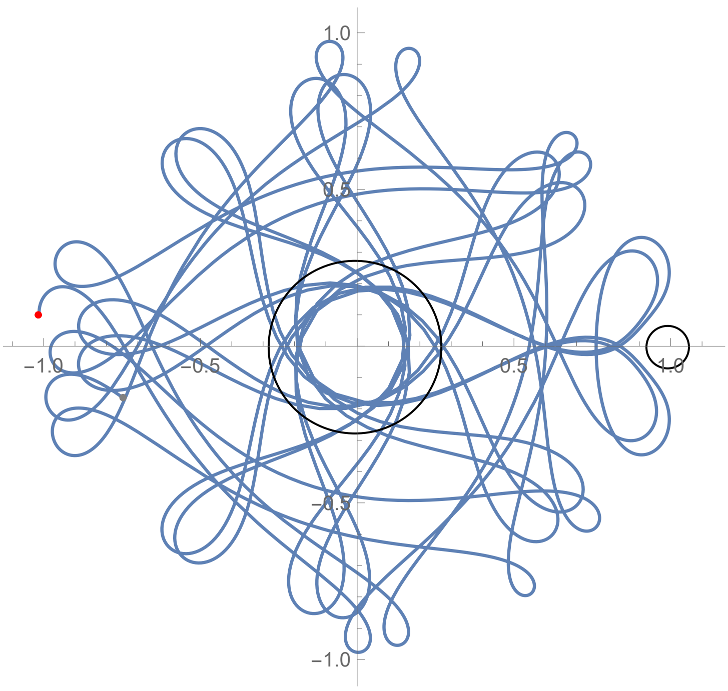
Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές με τη βοήθεια της Mathematica για συντομία, όπως φαίνεται στο notebook **orbit_around_L3.nb**. Έστω λ_1 η ζητούμενη θετική ιδιοτιμή, τότε το ιδιοδιάνυσμα που θα αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ιδιοτιμή θα είναι το u_1, και θα αποτελείται από 4 στοιχεία, τα $u_1(1)$, $u_1(2)$, $u_1(3)$ και $u_1(4)$. Διαλέγουμε αρχικές συνθήκες αρχικά κοντά στη θέση του L_3 στη διεύθυνση του u_1. Οι αρχικές συνθήκες θα είναι:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{L_3} + \beta u_1(1) \\ y_0 &= y_{L_3} + \beta u_1(2) \\ v_{x_0} &= u_1(3) \\ v_{y_0} &= u_1(4) \end{aligned} \tag{19}$$

όπου β μια μικρή θετική σταθερά, ούτως ώστε να παραμείνουμε κοντα στην περιοχή του L_3. Διαλέξαμε αρχικά $\beta = 0.01$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 10. Παρατηρούμε πως το σώμα απομακρύνεται από την περιοχή του L_3 και φαίνεται να πλησιάζει την περιοχή του L_4 και στη συνέχεια την περιοχή του L_5 πριν ξαναεπανέλθει στην περιοχή του L_3 και αρχίσει να επαναλαμβάνει αυτή την κίνηση, η οποία φαίνεται πως δεν οδηγεί σε σύγκρουση η διαφυγή του σώματος. Αν μεταβάλλουμε όμως την τιμή του β σε $\beta = 0.1$, τότε θα παρατηρήσουμε πως το σώμα συγκρούεται στο Δίδυμο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.



Σχήμα 10: Τροχία στην περιοχή του L_3 κατά τη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή του L_3 (κανονικοποιημένες μονάδες, $\beta = 0.01$)

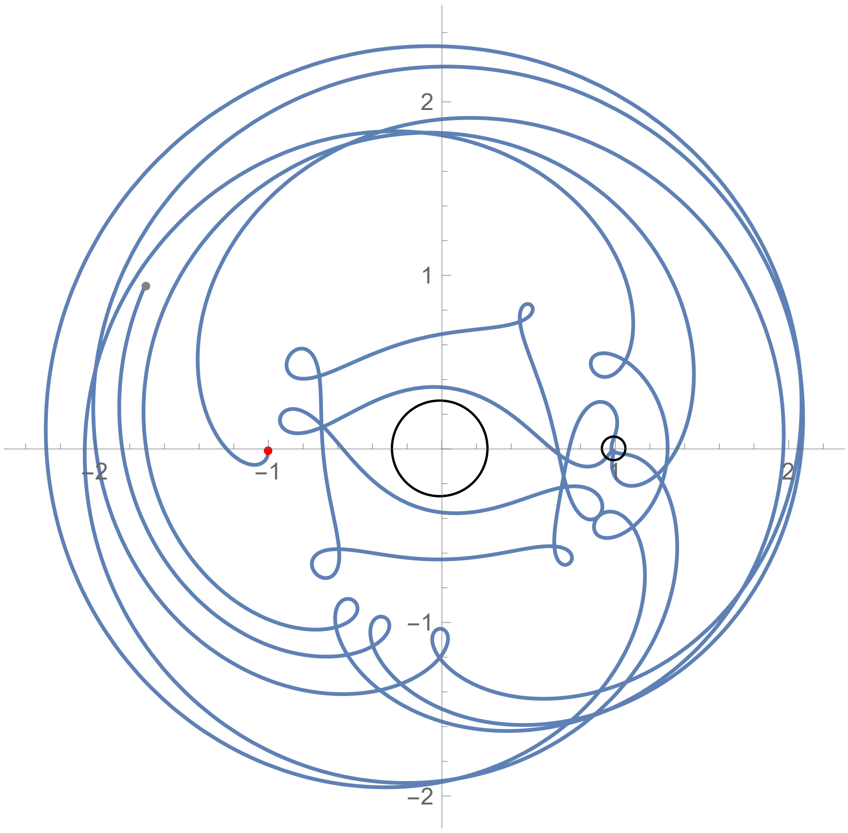


Σχήμα 11: Τροχία στην περιοχή του L_3 κατά τη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή του L_3 (κανονικοποιημένες μονάδες, $\beta = 0.1$)

Στη συνέχεια επιλέγουμε την αντίθετη διεύθυνση του παραπάνω ιδιοδιανύσματος, οπότε οι αρχικές μας συνθήκες τώρα θα είναι:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{L_3} - \beta u_1(1) \\ y_0 &= y_{L_3} - \beta u_1(2) \\ v_{x_0} &= -u_1(3) \\ v_{y_0} &= -u_1(4) \end{aligned} \tag{20}$$

Διατηρώντας και πάλι το $\beta = 0.01$, η νεα τροχιά θα φαίνεται στο Σχήμα 12. Παρατηρούμε πως σε αυτή την περίπτωση το σώμα θα συγκρουστεί με την επιφάνεια του Δίμορφου.



Σχήμα 12: Τροχία στην περιοχή του L_3 κατά την αντίθετη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή του L_3 (κανονικοποιημένες μονάδες)

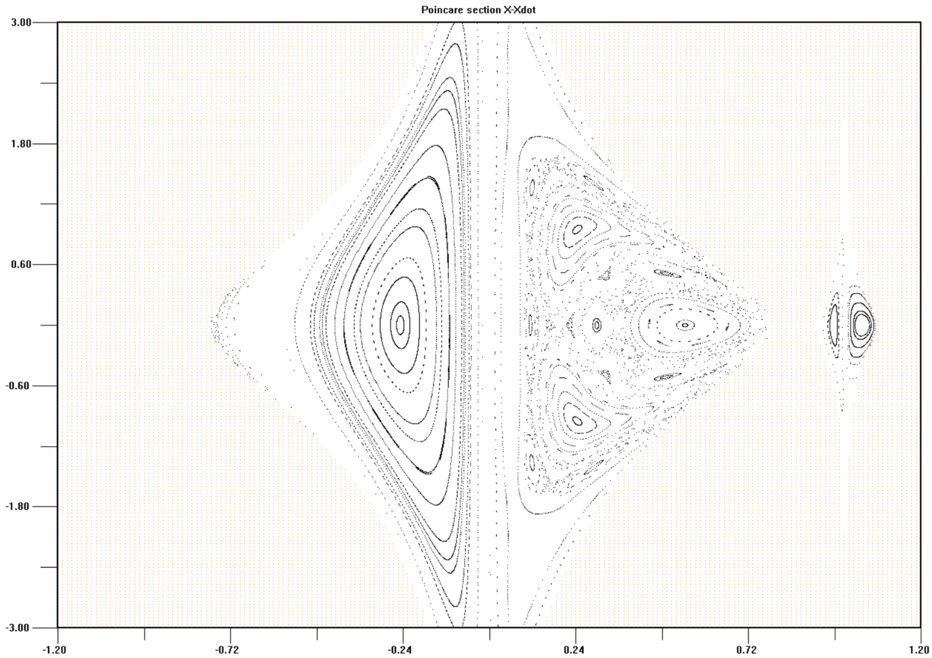
5 Ερώτημα ε

5.1 Εκφώνηση

Σχεδιάστε με τη βοήθεια του προγράμματος (**PoincareCRP.exe**) τομές ($y = 0, dy/dx > 0$) επιλέγοντας κάποιες τιμές ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές στα σημεία Lagrange. Δώστε 4-5 παραδείγματα (εικόνες).

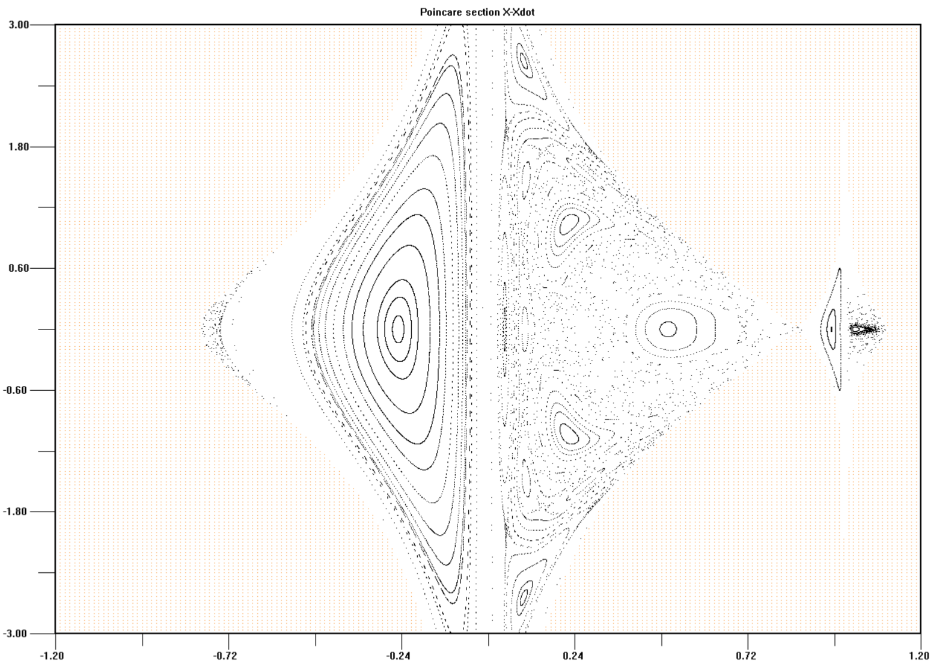
5.2 Λύση

Θέτοντας $dy/dx > 0$, εξετάζουμε πρώτα για ενέργεια $h = -1.6$ (Σχήμα 13). Παρατηρούμε πως δεν μπορεί να υπάρξει μετάβαση από τον Δίδυμο προς το Δίμορφο και το αντίστροφο, καθώς βρισκόμαστε σε χαμηλές ενέργειες, ενώ εντοπίζονται χαοτικές τροχιές δεξιά του Δίδυμου καθώς και νησίδες στην περιοχή του Δίμορφου.



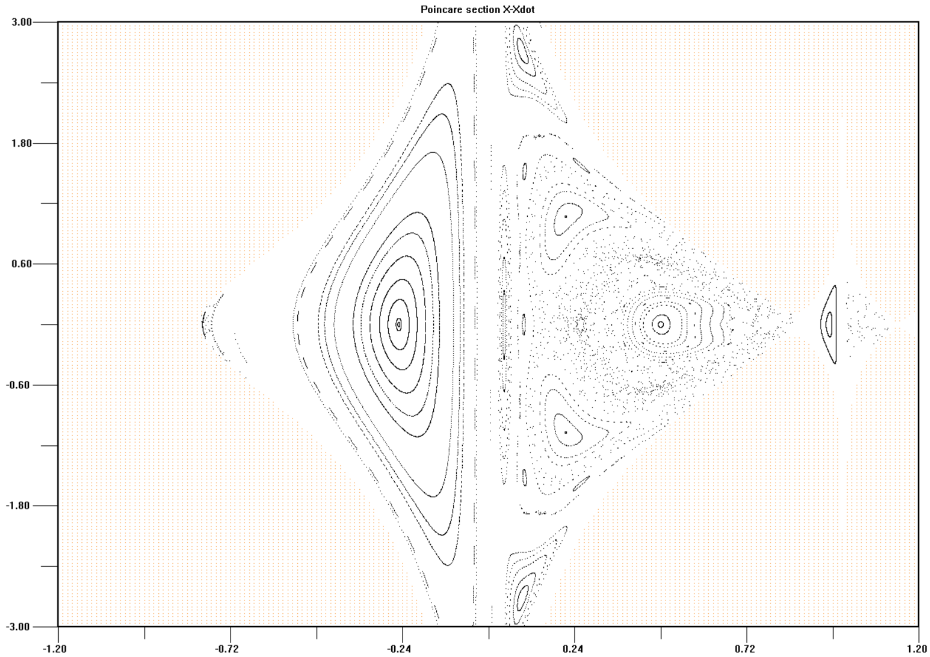
Σχήμα 13: Τομή Poincare για ενέργεια $h = -1.6$

Συνεχίζουμε με ενέργεια $h = -1.57966$, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας του L_1. Παρατηρούμε το άνοιγμα που επιτρέπει μετάβαση από και προς το Δίμορφο από τον Δίδυμο, καθώς και μεταβολή της εικόνας στα δεξιά του Δίμορφου.



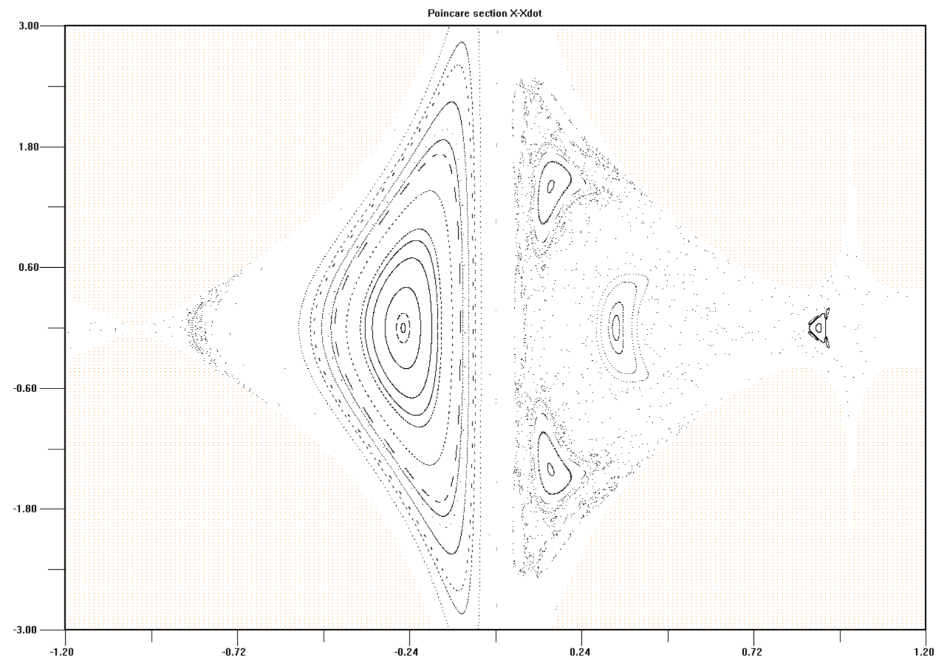
Σχήμα 14: Τομή Poincare για ενέργεια $h = -1.57965$

Συνεχίζουμε με ενέργεια $h = -1.57353$, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας του L_2. Οι βασικές νησίδες στα δεξιά του Δίδυμου φαίνεται να διατηρούνται, ενώ παρατηρούμε και πάλι χάος στα δεξιά του Δίμορφου.



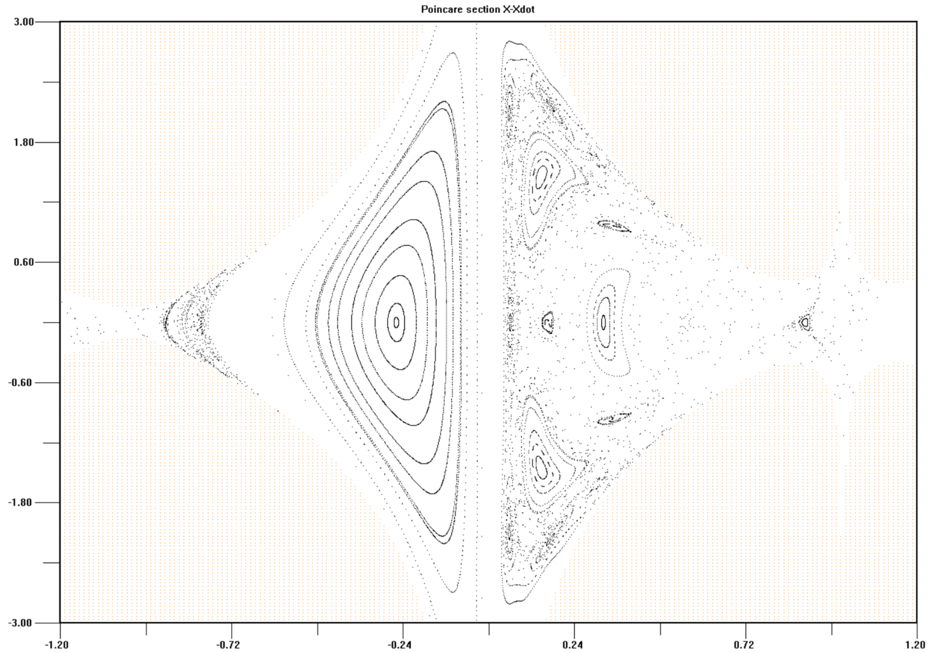
Σχήμα 15: Τομή Poincare για ενέργεια $h = -1.57353$

Συνεχίζουμε με ενέργεια $h = -1.50461$, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας του L_3. Παρατηρούμε το άνοιγμα που συμβαίνει στα αριστερά του Δίμορφου και μπορεί να ξεφύγει ένα τρίτο σώμα.



Σχήμα 16: Τομή Poincare για ενέργεια $h = -1.50461$

Συνεχίζουμε με ενέργεια $h = -1.495341$, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας των $L_{4,5}$. Παρατηρούμε την έντονη παρουσία του χάους στα δεξιά του Δίδυμου καθώς και πως οι νησίδες στην περιοχή του Δίμορφου έχουν πρακτικά εξαφανιστεί και απομένει μόνο μια.



Σχήμα 17: Τομή Poincare για ενέργεια $h = -1.495341$