

Μεταπτυχιακό Υπολογιστικής Φυσικής, Ιανουάριος 2021

Εργασία στο μάθημα 'Ανάλυση Δεδομένων'

Δημήτρης Κουγιουμτζής

E-mail: dkugiu@auth.gr

4 Ιανουαρίου 2021

Οδηγίες: Σχετικά με την παράδοση της εργασίας θα πρέπει:

- Για κάθε ζήτημα θα δημιουργήσετε ένα ή περισσότερα προγράμματα και συναρτήσεις Matlab. Τα ονόματα τους θα είναι ως εξής, όπου ως παράδειγμα δίνεται το όνομα φοιτητή Koygioumtzhw και το ζήτημα 5. Για τα προγράμματα τα ονόματα των αρχείων θα είναι KoygioumtzhwExe5Prog1.m, KoygioumtzhwExe5Prog2.m κτλ. Για τις συναρτήσεις τα ονόματα των αρχείων θα είναι KoygioumtzhwExe5Fun1.m, KoygioumtzhwExe5Fun2.m κτλ. Στην αρχή κάθε προγράμματος θα υπάρχει (σε σχολιασμό) το ονοματεπώνυμο του/της φοιτητή/τριας.
- Τα προγράμματα θα πρέπει να είναι εκτελέσιμα και η εκτέλεση τους να δίνει τις απαντήσεις που ζητούνται σε κάθε ζήτημα. Επεξηγήσεις, σχολιασμοί αποτελεσμάτων και συμπεράσματα, όπου ζητούνται, θα δίνονται με μορφή σχολίων στο πρόγραμμα (τα συμπεράσματα στο τέλος του προγράμματος).
- Θα υποβληθούν μόνο τα αρχεία Matlab (μέσω του elearning).
- Η κάθε εργασία (σύνολο προγραμμάτων και συναρτήσεων Matlab) θα πρέπει να συντάσσεται αυτόνομα από τον/την φοιτητή/τρια. Ομοιότητες εργασιών θα οδηγούν σε μοίρασμα της βαθμολογίας (δύο 'όμοιες' άριστες εργασίες θα μοιράζονται το βαθμό δια δύο, τρεις δια τρία κτλ.).

Περιγραφή εργασίας

Η εργασία συμπεριλαμβάνει μια σειρά ζητημάτων που αφορούν την πανδημία του κορονοϊού. Τα δεδομένα που θα αναλύσετε είναι τα ημερήσια κρούσματα κορονοϊού και οι ημερήσιοι θάνατοι σχετικοί με κορονοϊό. Τα δεδομένα έχουν εξαχθεί από European Center for Disease Control (ECDC). Τα αρχεία Covid19Confirmed.xlsx και Covid19Deaths.xlsx που δίνονται στην ενότητα της εργασίας στο elearning έχουν τις τιμές των ημερήσιων νέων κρουσμάτων και θανάτων από την αρχή της πανδημίας και συγκεκριμένα την περίοδο 1/1/2020 ως 13/12/2020. Στην πρώτη στήλη είναι το όνομα της χώρας, στη δεύτερη στήλη η ήπειρος που ανήκει, στην τρίτη στήλη ο πληθυσμός της χώρας και στις υπόλοιπες στήλες οι τιμές για κάθε μέρα (η αντίστοιχη ημερομηνία δίνεται στην πρώτη γραμμή σε μορφή μέρα/μήνας/έτος). Στα δύο αρχεία υπάρχουν τα δεδομένα μόνο για χώρες με πληθυσμό πάνω από 1 εκ. και είναι 156 αυτές οι χώρες. Οι τρίτες πρώτες στήλες είναι ίδιες στα δύο αρχεία.

Θα αναλύσετε τους δύο τύπους δεδομένων από μια χώρα καθώς και από άλλες χώρες, όπως περιγράφεται στα ζητήματα της εργασίας. Η χώρα που αντιστοιχεί στην ομάδα δίνεται από το

υπόλοιπο της διαίρεσης του AEM του/της φοιτητή/τριας με το 156 αυξημένο κατά ένα, αν είναι Ευρωπαϊκή, και αν όχι η κοντινότερη Ευρωπαϊκή χώρα ως προς τον αύξοντα αριθμό. Υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί μια άλλη γειτονική Ευρωπαϊκή χώρα αν κριθεί πως δεν υπάρχουν ικανοποιητικά δεδομένα για τα ζητήματα της εργασίας από την Ευρωπαϊκή χώρα που αρχικά επιλέχθηκε. Για παράδειγμα για AEM=4600 ο αύξων αριθμός χώρας είναι 77 και αντιστοιχεί στη Λετονία που είναι Ευρωπαϊκή χώρα. Αν θεωρήσετε πως δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για τη Λετονία (υπάρχουν πολύ λίγοι θάνατοι στο πρώτο κύμα), η κοντινότερη χώρα με αύξοντα αριθμό είναι η Λιθουανία. Αν κρίνετε πως και για αυτήν τη χώρα τα στοιχεία δεν είναι ικανοποιητικά, τότε η επόμενη κοντινότερη χώρα είναι η Ιταλία με αύξοντα αριθμό 67. Άς ονομάσουμε τη χώρα που επιλέξατε ως χώρα Α.

Η μελέτη θα επικεντρωθεί στο λεγόμενο πρώτο κύμα, δηλαδή στην πρώτη έξαρση και πτώση της διασποράς του κορονοϊού. Ο χρόνος έναρξης και λήξης για το πρώτο κύμα ορίζεται από την ομάδα με κριτήρια που θέτει και μπορεί να διαφέρει για τα ημερήσια κρούσματα και τους ημερήσιους θανάτους. Μια καλή πρακτική είναι για την έναρξη η αρχή της ημερήσια αύξησης των κρουσμάτων / θανάτων και για τη λήξη η ισοπέδωση ή μηδενισμός μετά από πτώση του πλήθους κρουσμάτων / θανάτων. Η ομάδα μπορεί επίσης να επικαιροποιήσει και διορθώσει στοιχεία (για κρούσματα και θανάτους) από άλλες πηγές αν κρίνει πως κάποια στοιχεία (για χώρες και μέρες) δεν είναι ακριβή. Για άλλες πηγές δες π.χ. <https://www.worldometers.info/coronavirus> και COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University στη διεύθυνση <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>.

Ζητήματα εργασίας

Για όλα τα ζητήματα στην αρχή του κάθε προγράμματος θα φορτώνεται το σχετικό αρχείο δεδομένων. Υπάρχει ελεύθερη επιλογή στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων (γραφήματα, συμπεράσματα και αποτελέσματα στη γραμμή εντολών). Για κάποιες χώρες και μέρες μπορεί να υπάρχουν αρνητικές τιμές ή να μην υπάρχουν στοιχεία ημερήσιων κρουσμάτων ή θανάτων (κενά κελιά στο αρχείο δεδομένων και NaN στους αντίστοιχους πίνακες στο Matlab). Μπορείτε να επιλέξετε να τα αναπληρώσετε από στοιχεία που θα βρείτε σε άλλες πηγές ή να τα αφαιρέσετε (αν αφαιρέσετε αρνητική τιμή ή κενό για μια μεταβλητή π.χ. ημερήσια κρούσματα, σε κάποια μέρα θα πρέπει να αφαιρέσετε την τιμή στην αντίστοιχη ημέρα και για την άλλη μεταβλητή, π.χ. για τους ημερήσιους θανάτους). Μπορείτε επίσης να διορθώσετε τις τιμές με κάποιο αιτιολογημένο τρόπο. Για παράδειγμα για την Ισπανία, από μια ημερομηνία και μετά δίνονται μηδενικές τιμές ημερήσιων κρουσμάτων για το Σαββατοκύριακο και υψηλότερη τιμή τη Δευτέρα. Μπορείτε να επιλέξετε να μοιράσετε με κάποιο (εύλογο;) τρόπο την τιμή της Δευτέρας στις προηγούμενες δύο μέρες.

1. Θεώρησε πως οι τιμές ημερήσιων κρουσμάτων στις μέρες του πρώτου κύματος αντιστοιχούν σε συχνότητες εμφάνισης νέων κρουσμάτων για κάθε μέρα, δηλαδή το γράφημα των τιμών είναι το ραβδόγραμμα (καταχρηστικά ιστόγραμμα), όπου η τ.μ. είναι η μέρα του πρώτου κύματος. Με αυτήν την θεώρηση, βρες την παραμετρική κατανομή πιθανότητας με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα ημερήσιων κρουσμάτων του πρώτου κύματος για τη χώρα Α. Η επιλογή θα γίνει από 5 τουλάχιστον διαφορετικές υποψήφιες παραμετρικές κατανομές με ελεύθερη επιλογή. Για να δοκιμάσεις διαφορετικές παραμετρικές

κατανομές θα πρέπει να έχεις την εργαλειοθήκη `Statistics and Machine Learning Toolbox` και για να δεις τη λίστα των παραμετρικών κατανομών, δες π.χ. τη βοήθεια για την εντολή `fitdist`. Η καλή προσαρμογή κάποιας κατανομής πιθανότητας μπορεί να γίνει με έλεγχο καλής προσαρμογής X^2 (χρησιμοποιώντας ως κριτήριο την p -τιμή του ελέγχου). Λόγω των μεγάλων τιμών συχνοτήτων, ο έλεγχος καλής προσαρμογής X^2 ενδέχεται να δίνει πολύ χαμηλές p -τιμές. Για αυτό εναλλακτικά μπορείς να χρησιμοποιήσεις κάποιο στατιστικό σφάλματος προσαρμογής, π.χ. το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, και με βάση αυτό να επιλέξεις την παραμετρική κατανομή πιθανότητας με την καλύτερη προσαρμογή. Κάνε το ίδιο για τους ημερήσιους θανάτους. Είναι ίδια η πιο κατάλληλη κατανομή για ημερήσια κρούσματα και θανάτους; Αν όχι, θα μπορούσε η κατανομή που επιλέχτηκε για τα ημερήσια κρούσματα να είναι κατάλληλη και για τους ημερήσιους θανάτους, και το αντίθετο (όπου εφαρμόζεται);

2. Επίλεξε έναν ικανό αριθμό άλλων Ευρωπαϊκών χωρών (≥ 10) και προσάρμοσε την παραμετρική κατανομή πιθανότητας που βρέθηκε καλύτερη στο Ζήτημα 1, ξεχωριστά για ημερήσια κρούσματα και ημερήσιους θανάτους. Η χρονική περίοδος του πρώτου κύματος θα πρέπει να προσδιοριστεί ξεχωριστά για κάθε χώρα (και για κρούσματα και θανάτους). Κατάταξε τις χώρες ως προς την καλή προσαρμογή της παραμετρικής κατανομής στα δεδομένα της κάθε χώρας (ξεχωριστά για κρούσματα και θανάτους). Φαίνεται η παραμετρική κατανομή πιθανότητας που επιλέχτηκε στο Ζήτημα 1 να προσαρμόζεται γενικά καλά στα δεδομένα των Ευρωπαϊκών χωρών; Απάντησε ξεχωριστά για ημερήσια κρούσματα και ημερήσιους θανάτους.
3. Στο ζήτημα αυτό θέλουμε να εκτιμήσουμε το χρονικό διάστημα από την κορύφωση των ημερήσιων κρουσμάτων ως την κορύφωση των ημερήσιων θανάτων (θεωρώντας γενικά πως η κορύφωση θανάτων έπεται της κορύφωσης κρουσμάτων). Σε συνέχεια των Ζητημάτων 1 και 2, πρώτα κάνε μια συνάρτηση που θα εκτιμά την κορύφωση του πρώτου κύματος ως προς τα ημερήσια κρούσματα (την ίδια συνάρτηση θα καλέσεις και για τους θανάτους) για δεδομένη χώρα και με βάση τη μέγιστη τιμή της προσαρμοσμένης πιο κατάλληλης κατανομής πιθανότητας. Δηλαδή η συνάρτηση θα κάνει ότι έκανες στο πρόγραμμα στο Ζήτημα 1 και επιπλέον θα βρίσκει και την ημερομηνία της κορύφωσης. Στη συνέχεια θεώρησε το σύνολο των χωρών στο Ζήτημα 2, δηλαδή τη χώρα Α και τις άλλες (≥ 10) Ευρωπαϊκές χώρες. Κάνε ένα πρόγραμμα που θα καλεί τη συνάρτηση για κάθε μια από τις χώρες, τη μια φορά για τα ημερήσια κρούσματα και την άλλη φορά για τους ημερήσιους θανάτους, και θα υπολογίζει τις μέρες μεταξύ κορύφωσης κρουσμάτων και θανάτων. Με βάση το δείγμα των χρονικών υστερήσεων για το πλήθος των χωρών που θεώρησες θα υπολογίσεις 95% παραμετρικό και bootstrap διάστημα εμπιστοσύνης (δες άσκηση 5 στο Κεφάλαιο 5) για το μέσο χρόνο υστέρησης και θα ελέγξεις σε αυτό το επίπεδο εμπιστοσύνης αν ο χρόνος μεταξύ κορύφωσης ημερήσιων κρουσμάτων και θανάτων μπορεί να είναι 14 μέρες.
4. Στο ζήτημα αυτό θα υποθέσουμε πως η πορεία του κύματος είναι παρόμοια για τα ημερήσια κρούσματα και τους ημερήσιους θανάτους, αλλά αναμένουμε η πορεία των ημερήσιων θανάτων να έπεται αυτής των ημερήσιων κρουσμάτων με κάποια χρονική υστέρηση κάποιων ημερών (όπως για την κορύφωση στο Ζήτημα 3. Για αυτό θέλουμε να βρούμε την υστέρηση που οι δύο πορείες των ημερήσιων κρουσμάτων και θανάτων κατά τη διάρκεια

του πρώτου κύματος συσχετίζονται περισσότερο. Θα επιλέξεις τη χώρα Α και 5 άλλες χώρες (από αυτές που χρησιμοποίησες στα Ζητήματα 2 και 3) και θα κάνεις ένα πρόγραμμα που για κάθε χώρα θα βρίσκει εκείνη την υστέρηση τ για την οποία ο συντελεστής συσχέτισης Pearson μεταξύ ημερήσιων κρουσμάτων και θανάτων έχει τη μέγιστη τιμή, για τιμές υστέρησης σε ένα χρονικό παράθυρο, π.χ. $[-20,20]$. Πιο συγκεκριμένα, αν $x(t)$ και $y(t)$ είναι η τιμή νέων ημερήσιων κρουσμάτων και θανάτων την ημερομηνία t αντίστοιχα, θέλουμε να βρούμε την υστέρηση τ που δίνει τη μέγιστη τιμή στον συντελεστή συσχέτισης Pearson $r(x(t), y(t + \tau))$, όπου το δείγμα αποτελείται από τις ζευγαρωτές τιμές των $x(t)$ και $y(t + \tau)$ στις μέρες του πρώτου κύματος. Το πρόγραμμα θα βρίσκει την υστέρηση μέγιστης συσχέτισης για κάθε χώρα και θα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα (ελεύθερη χρήση μορφής αποτελεσμάτων στο παράθυρο εντολών και σχημάτων). Φαίνεται αυτή η προσέγγιση να εκτιμά σωστά την υστέρηση της πορείας των ημερήσιων θανάτων ως προς την πορεία των ημερήσιων κρουσμάτων; Συμφωνεί η εκτίμηση αυτής της υστέρησης με αυτήν στο Ζήτημα 3; Σχολίασε για τις τυχόν δυσκολίες και προβληματισμούς έχεις.

5. Στο ζήτημα αυτό θέλουμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα πρόβλεψης των ημερήσιων θανάτων από τα ημερήσια κρούσματα στο πρώτο κύμα μιας χώρας. Συγκεκριμένα θέλουμε να συγκρίνουμε μοντέλα απλής γραμμικής παλινδρόμησης των νέων θανάτων σε μια μέρα από τα νέα κρούσματα την ίδια μέρα, ή μιας μέρας πριν, δύο ημερών πριν κτλ. Θα κάνεις ένα πρόγραμμα που θα υλοποιεί αυτήν τη διερεύνηση για τις ίδιες χώρες που χρησιμοποίησες στο Ζήτημα 4. Για κάθε υστέρηση τ σε ένα χρονικό παράθυρο, π.χ. $[0,20]$, θα προσαρμόσεις το μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ. νέων θανάτων $y(t)$ την ημερομηνία t από τη μεταβλητή των κρουσμάτων $x(t - \tau)$ την ημερομηνία $t - \tau$. Θα συγκρίνεις την καλή προσαρμογή των μοντέλων για διαφορετικά τ και θα βρεις την υστέρηση τ που δίνει την καλύτερη προσαρμογή. Θα κάνεις επίσης διαγνωστικό έλεγχο (γράφημα τυποποιημένων σφαλμάτων) για κάθε υστέρηση. Το πρόγραμμα θα κάνει τα παραπάνω για κάθε χώρα και θα παρουσιάζει τα αποτελέσματα (ελεύθερη χρήση μορφής αποτελεσμάτων στο παράθυρο εντολών και σχημάτων). Φαίνεται η προσαρμογή να είναι το ίδιο καλή στις χώρες που δοκίμασες; Φαίνεται ο διαγνωστικός έλεγχος να υποδεικνύει καταλληλότητα του μοντέλου για τις διαφορετικές υστερήσεις και χώρες; Φαίνεται να είναι δυνατή η πρόβλεψη ημερήσιων θανάτων από τα ημερήσια κρούσματα; Συμφωνούν οι βέλτιστες υστερήσεις από την προσαρμογή μοντέλου με τις βέλτιστες υστερήσεις από τη συσχέτιση στο Ζήτημα 4 και τη διαφορά κορυφώσεων στο Ζήτημα 3 για τις χώρες που δοκίμασες; Σχολίασε για τις τυχόν δυσκολίες και προβληματισμούς που έχεις.
6. Θα επαναλάβεις το Ζήτημα 5 για 6 χώρες εκτός Ευρώπης, που έχουν αύξοντα αριθμό κοντά στον αύξοντα αριθμό της Ευρωπαϊκής χώρας που επέλεξες (μπορείς να εξαιρέσεις κάποια/ες χώρα/ες αν κριθεί πως τα δεδομένα για αυτήν/ές την/τις χώρα/ες δεν είναι ικανοποιητικά). Θα συγκρίνεις αν η προσαρμογή του μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης (της τ.μ. νέων θανάτων $y(t)$ την ημερομηνία t από τη μεταβλητή των κρουσμάτων $x(t - \tau)$ την ημερομηνία $t - \tau$) είναι ίδια για τις χώρες της Ευρώπης και για άλλες χώρες. Για αυτό θα κάνεις στατιστικό έλεγχο μέσης τιμής με βάση το δείγμα με παρατηρήσεις τις τιμές του στατιστικού καλής προσαρμογής για την Ευρώπη από το Ζήτημα 5 και το αντίστοιχο δείγμα για τις χώρες εκτός Ευρώπης. Με χρήση αντίστοιχου στατιστικού ελέγχου το πρόγραμμα θα συγκρίνει αν η μέση υστέρηση τ , για την μετα-

βλητή των κρουσμάτων $x(t - \tau)$ που δίνει την καλύτερη προσαρμογή, είναι ίδια για τις χώρες της Ευρώπης και τις χώρες εκτός Ευρώπης.

7. Σε συνέχεια του Ζητήματος 5 θέλουμε να διερευνήσουμε αν η πρόβλεψη των ημερήσιων θανάτων στο πρώτο κύμα βελτιώνεται αν αντί του μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης ως προς τα ημερήσια κρούσματα της ίδιας ή κάποιας προηγούμενης ημέρας (όπως έκανες στο Ζήτημα 5), χρησιμοποιήσουμε μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης ημερήσιων κρουσμάτων σε περισσότερες από μια υστερήσεις. Για τις ίδιες χώρες και τον ίδιο σχεδιασμό όπως στο Ζήτημα 5, θα βρεις το βέλτιστο μοντέλο με ανεξάρτητες μεταβλητές τα ημερήσια κρούσματα για υστερήσεις τ στο ίδιο χρονικό παράθυρο που χρησιμοποίησες στο Ζήτημα 5, π.χ. $[0,20]$, δηλαδή οι υποψήφιος ανεξάρτητες μεταβλητές για το μοντέλο στο παράδειγμα είναι $x(t), x(t - 1), \dots, x(t - 20)$. Για αυτό θα χρησιμοποιήσεις τη μέθοδο της βηματικής παλινδρόμησης. Θα συγκρίνεις το μοντέλο που δίνει η βηματική παλινδρόμηση με το βέλτιστο μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης που βρήκες στο Ζήτημα 5 (αν δεν είναι το ίδιο), καθώς και με το πλήρες μοντέλο όλων των μεταβλητών υστέρησης, δηλαδή το μοντέλο με όλες τις 21 μεταβλητές υστέρησης στο παραπάνω παράδειγμα. Θα κάνεις επίσης διαγνωστικό έλεγχο (γράφημα τυποποιημένων σφαλμάτων) για κάθε ένα από τα τρία μοντέλα (μοντέλο μιας μεταβλητής, όλων των μεταβλητών, και μοντέλο από τη βηματική παλινδρόμηση). Το πρόγραμμα που θα αναπτύξεις θα το κάνει αυτό για κάθε μια από τις χώρες που χρησιμοποίησες στο Ζήτημα 5 και θα παρουσιάζει τα αποτελέσματα (ελεύθερη χρήση μορφής αποτελεσμάτων στο παράθυρο εντολών και σχημάτων). Φαίνεται η προσαρμογή του βέλτιστου μοντέλου να είναι το ίδιο καλή στις χώρες που δοκίμασες; Φαίνεται να βελτιώνεται η πρόβλεψη ημερήσιων θανάτων όταν χρησιμοποιείται μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης σε σχέση με την πρόβλεψη με μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης; Σχολίασε για τις τυχόν δυσκολίες και προβληματισμούς που έχεις.
8. Σε συνέχεια του Ζητήματος 7, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το καλύτερο μοντέλο που βρήκαμε στο Ζήτημα 7 για την πρόβλεψη των ημερήσιων θανάτων από τα ημερήσια κρούσματα (την ίδια ή/και άλλες προηγούμενες ημέρες στο πρώτο κύμα) για να κάνουμε προβλέψεις σε χρονικές περιόδους μετά το πρώτο κύμα. Η περίοδος του πρώτου κύματος αποτελεί το σύνολο δεδομένων εκμάθησης (εκπαίδευσης) και η δεύτερη χρονική περίοδος αποτελεί το σύνολο αξιολόγησης. Θα ορίσετε τη δεύτερη χρονική περίοδο για κάθε χώρα να καλύπτει όσο το δυνατόν καλύτερα το δεύτερο κύμα, όπου αυτό εφαρμόζεται (αν υπάρχει κορύφωση του δεύτερου κύματος να την καλύπτει). Το πρόγραμμα θα χρησιμοποιεί το μοντέλο που βρέθηκε ως καλύτερο στο Ζήτημα 7 και θα κάνει προβλέψεις στο σύνολο αξιολόγησης. Θα συγκρίνει με κάποιο στατιστικό (π.χ. προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού) τα σφάλματα στο σύνολο εκμάθησης και στο σύνολο αξιολόγησης. Αυτό θα επαναλαμβάνεται για κάθε μια από τις χώρες που χρησιμοποίησες στα Ζητήματα 5 και 7. Για κάποιες χώρες το πεδίο τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών (ημερήσιων κρουσμάτων) και εξαρτημένης μεταβλητής (ημερήσιοι θάνατοι) διαφέρει στις δύο περιόδους (στο σύνολο εκμάθησης και αξιολόγησης). Για παράδειγμα για κάποια χώρα τα ημερήσια κρούσματα μπορεί να είναι σε πολύ υψηλότερο επίπεδο στη δεύτερη περίοδο. Μπορείς να το αντιμετωπίσεις με κάποιο τρόπο ώστε οι προβλέψεις στο σύνολο αξιολόγησης να είναι συγκρίσιμες με αυτές στο σύνολο εκμάθησης;