

AD_Pend_4

Anastasios-Faidon Retselis (AEM: 4394)

9/5/2021

Εξετάζεται η περίπτωση 4, οπότε οι παράμετροι είναι:

$$f = \sin, \omega = 3, \epsilon = 0.1 \quad (1)$$

1 Άσκηση

Έστω εκκρεμές το οποίο του μετβάλλουμε το μήκος περιοδικά:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (2)$$

όπου:

$$l = l_0 + \epsilon f(\omega t) \quad (3)$$

όπου f είναι μια περιοδική συνάρτηση πλάτους 1 και γωνιακής συχνότητας ω και $\epsilon \ll l_0$.

1.1 Ερώτημα A

Γράψτε τη ΔΕ ως ένα ταλαντωτή στη μορφή:

$$\ddot{\theta} = f(\theta) + \epsilon g(\theta, t) + O(\epsilon^2) \quad (4)$$

1.1.1 Λύση

Η (2) γράφεται στη μορφή:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{(l_0 + \epsilon f(\omega, t))} \sin \theta \quad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0(1 + \frac{\epsilon f(\omega, t)}{l_0})} \sin \theta \quad (6)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0} \sin \theta \frac{1}{(1 + \frac{\epsilon f(\omega, t)}{l_0})} \quad (7)$$

Όπου μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα Taylor για τον τελευταίο όρο και έχουμε:

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0} \sin \theta (1 - \frac{\epsilon f(\omega, t)}{l_0}) + O(\epsilon^2) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0} \sin \theta + \frac{\epsilon g f(\omega, t) \sin \theta}{l_0^2} + O(\epsilon^2) \quad (9)$$

Σχέση η οποία είναι στην ζητούμενη μορφή της εκφώνησης.

1.2 Ερώτημα B

Σχεδιάστε την τομή Poincare του συστήματος για τις παραμέτρους που δίνονται.

1.2.1 Λύση

Για την περίπτωση 4, οι παράμετροι είναι:

$$f = \sin, \omega = 3, \epsilon = 0.1 \quad (10)$$

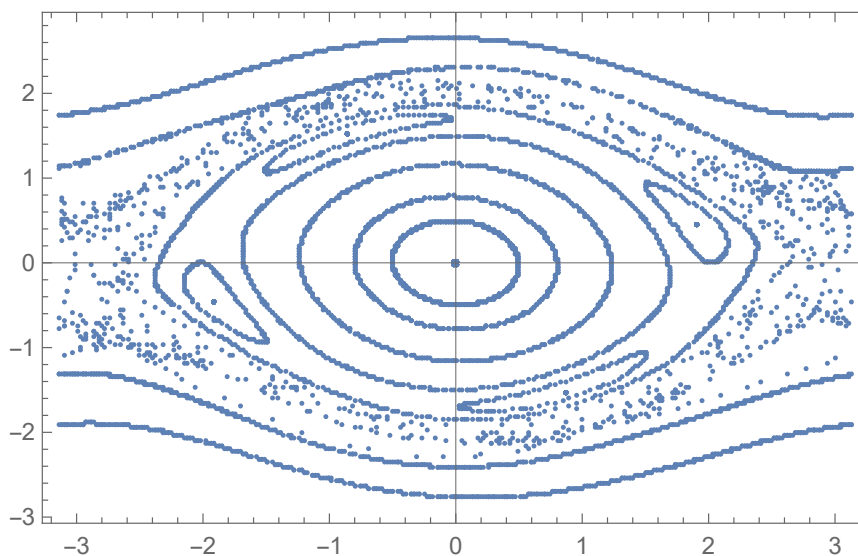
και επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{(1 + 0.1 \sin(3t))} \sin \theta \quad (11)$$

Θα λύσουμε την παραπάνω εξίσωση στη Mathematica χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες για να πάρουμε την τομή Poincare:

Πίνακας 1: Αρχικές συνθήκες για την τομή Poincare

$\theta(0)$	$\dot{\theta}(0)$
1.90845	0.4508
0.5	0
0.8	0
2.0	0
1.5	0.5
1.0	0.6
0.01	0.01
2.6	0.2
3.0	0.2
4.0	0.2
4.0	1.5
4.0	-1.5
4.0	2.0
4.0	-2.0



Σχήμα 1: Η τομή Poincare για διαφορετικές αρχικές συνθήκες

1.3 Ερώτημα Γ

Εντοπίστε και δώστε αρχικές συνθήκες για μια περιοδική προσεγγιστικά τροχιά (όχι κοντά στο $\theta = \dot{\theta} = 0$), μια ημιπεριοδική και μια χαοτική τροχιά και υπολογίστε τον δείκτη FLI για την κάθε μια (σε ένα διάγραμμα και για τις τρεις τροχιές)

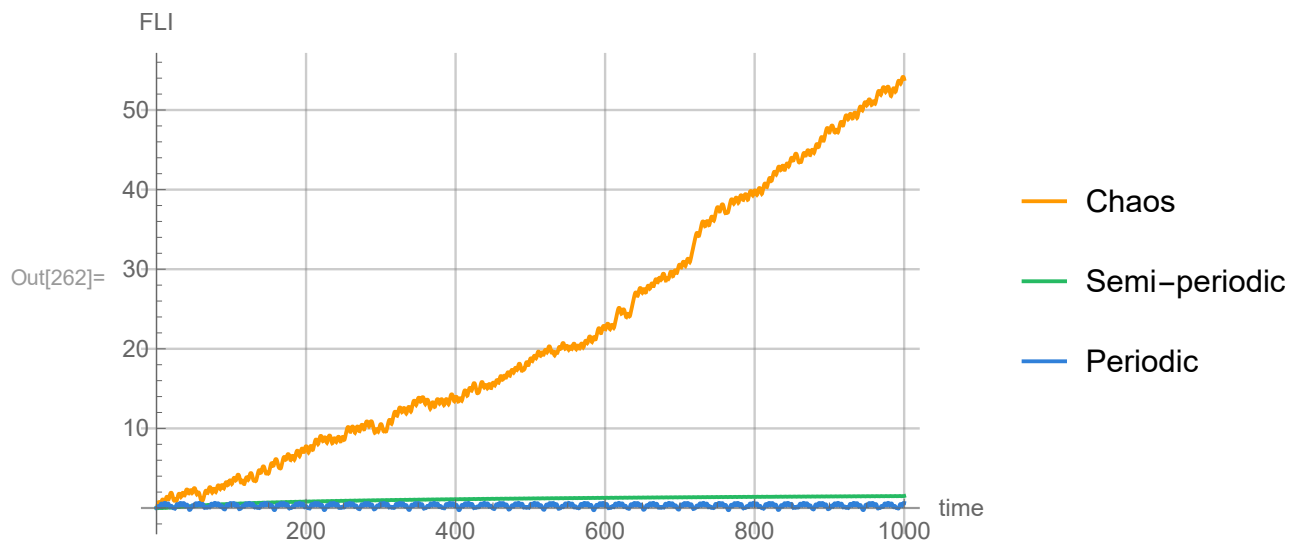
1.3.1 Λύση

Οι τροχίες που επιλέχθηκαν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2: Αρχικές συνθήκες για τις τρεις ζητούμενες τροχίες

Τύπος	$\theta(0)$	$\dot{\theta}(0)$
Περιοδική	1.90845	0.4508
Ημιπεριοδική	0.5	0
Χαοτική	2.6	0.2

Αξίζει να σημειώσουμε πως η για την περιοδική τροχιά παρατηρούμε τις λεγόμενες νησίδες και πως η ευσταθής τροχιά είναι πολλαπλότητας 4. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ξεχωριστά τον δείκτη FLI για κάθε τροχιά και συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματά μας σε ένα διάγραμμα.



Σχήμα 2: Δείκτης FLI συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρούμε πως ο δείκτης FLI για την χαοτική τροχιά αυξάνει με γραμμικό τρόπο, ενώ για την ημιπεριοδική και την περιοδική τροχιά η αύξηση είναι αρκετά πιο αργή (αυξάνει λογαριθμικά).

1.4 Ερώτημα Δ

Υπολογίστε για τις παραπάνω τροχίες τον εκθέτη Lyapunov (δες παράγραφο 7.6.2) (σε ένα διάγραμμα και για τις τρεις τροχίες).

1.4.1 Λύση

Για τον εκθέτη Lyapunov έχουμε τις αρχικές δυο εξισώσεις:

$$\dot{x}_1(t) = f_1 = x_2(t) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2 = -\frac{1}{(1 + 0.1 \sin(3t))} \sin x_1(t) \quad (13)$$

Για να βρούμε τις άλλες δύο εξισώσεις θα επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα:

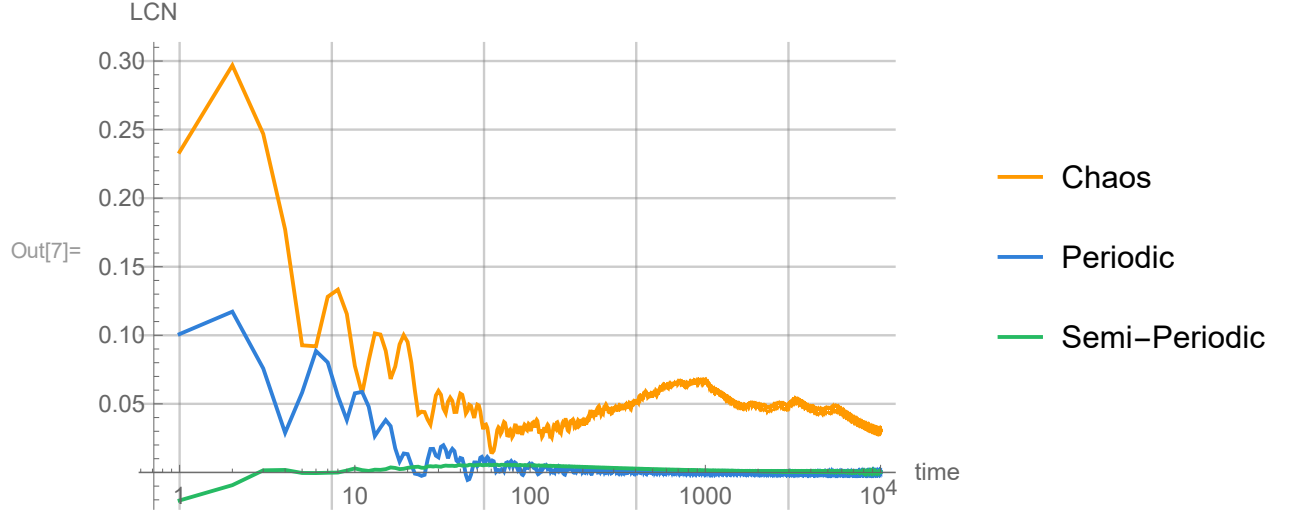
$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (14)$$

Το οποίο τελικά θα μας δώσει τις δύο τελευταίες εξισώσεις:

$$\dot{\xi} = \eta \quad (15)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\cos x_1(t)}{1 + 0.1 \sin 3t} \quad (16)$$

Οπότε έχουμε τις απαιτούμενες εξισώσεις για να υπολογίσουμε τον εκθέτη Lyapunov, και συγκεκριμένα τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov. Τρέχουμε το πρόγραμμα τρεις φορές για κάθε μια περίπτωση, αυξάνοντας τον χρόνο ολοκλήρωσης σε $t_{max} = 10000$.



Σχήμα 3: LCN συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρούμε πως ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov για την περιοδική και την ημιπεριοδική τροχιά τείνουν γρήγορα προς το μηδέν και παραμένουν πρακτικά μηδενικοί για μεγαλύτερους χρόνους, επιβεβαιώνοντας πως έχουμε να κάνουμε με κανονικές τροχίες. Αντιθέτως, ο χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov για την χαοτική τροχιά δεν φαίνεται να μηδενίζεται και για μεγαλύτερους χρόνους ολοκλήρωσης θα τείνει σε μια σταθερή τιμή.

1.5 Ερώτημα Ε

Υπάρχουν τροχίες κατά τις οποίες το εκκρεμές ταλαντώνεται γύρω από γωνία $\theta \neq 0$; Αν ναι, δώστε τις αρχικές συνθήκες και σχεδιάστε την ταλάντωση $\theta = \theta(t)$ για ένα ενδεικτικό διάστημα.

1.5.1 Λύση

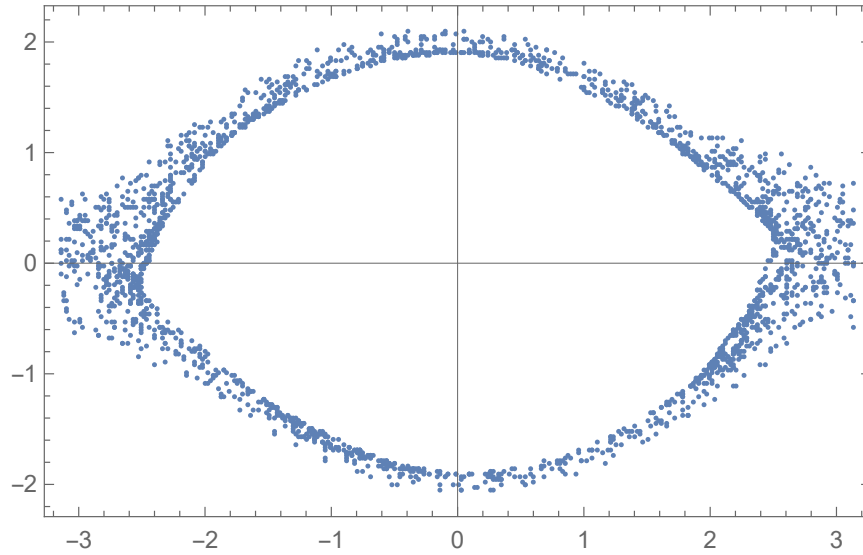
Δεν εντοπίστηκαν τροχίες για τις οποίες το εκκρεμές ταλαντώνεται σε γωνία διαφορετική του μηδενός.

1.6 Ερώτημα ΣΤ

Όπως στο ερώτημα Β (αλλά με λιγότερες αρχικές συνθήκες) σχεδιάστε την απεικόνιση Poincare για συχνότητα εξωτερικής διέγερσης 10πλάσια αυτής που δίνεται. Τι παρατηρείτε για τη χαοτική ζώνη γύρω από το σημείο $\theta = \pi$;

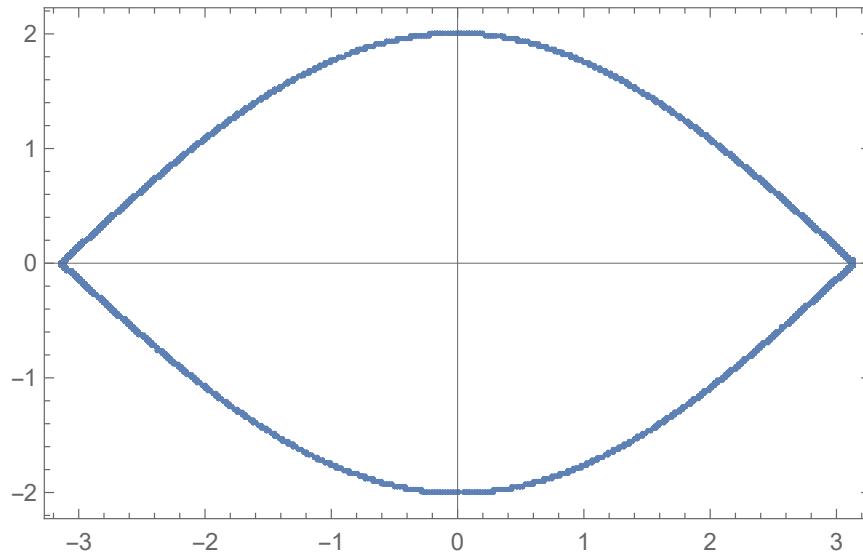
1.6.1 Λύση

Αρχικά θα δείξουμε την τομή Poincare για αρχικές συνθήκες $\theta = \pi$ και $\dot{\theta} = 0$:



Σχήμα 4: Τομή Poincare για $\omega = 3$ ($\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$)

Αυξάνουμε τώρα την συχνότητα σε $\omega = 30$ και σχεδιάζουμε εκ νέου την τομή Poincare:



Σχήμα 5: Τομή Poincare για $\omega = 30$ ($\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$)

Παρατηρούμε πως με την αύξηση της συχνότητας η χαοτική συμπεριφορά εξαφανίζεται και δίνει τη θέση της σε μια ημιπεριοδική τροχιά. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και μέσω του δείκτη FLI ο οποίος τώρα αυξάνει για τα πρώτα χρονικά βήματα αλλά στη συνέχεια παραμένει σταθερός και δεν παρατηρείται περαιτέρω αύξηση, η οποία είναι χαρακτηριστική της χαοτικής συμπεριφοράς.