

# Apuntes de Geometría

Ángel Ruiz Fernández B2A

Abril 2023

## 1 Productos

Escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \vec{v}_x \vec{u}_x + \vec{u}_y \vec{v}_y + \vec{u}_z \vec{v}_z \quad (1)$$

Vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix} \quad (2)$$

Mixto Vectorial

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{w}_x & \vec{w}_y & \vec{w}_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

## 2 Ecuaciones de la recta

Sea un punto  $P$  y un vector director  $\vec{d}$ , la recta  $r$ :

Paramétrica

$$r : \begin{cases} x = P_x + \vec{d}_x \lambda \\ y = P_y + \vec{d}_y \lambda \\ z = P_z + \vec{d}_z \lambda \end{cases} \quad (4)$$

Punto genérico

$$G(\lambda) = (P_x + \vec{d}_x \lambda, P_y + \vec{d}_y \lambda, P_z + \vec{d}_z \lambda) \quad (5)$$

Vectorial

$$R(\lambda) = P + \vec{d} \lambda \quad (6)$$

Continua

$$\frac{x - P_x}{\vec{d}_x} = \frac{y - P_y}{\vec{d}_y} = \frac{z - P_z}{\vec{d}_z} \quad (7)$$

General

$$r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

### 3 Ecuaciones del plano

Sea un punto  $P$  y dos vectores directores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  o vector normal  $\vec{n}$ , el plano  $\pi$ :

Con directores

$$\pi : \begin{cases} P \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{cases} \quad (9)$$

Con normal

$$\pi : \begin{cases} P \\ \vec{n} \end{cases} \quad (10)$$

Paramétrica

$$\pi : \begin{cases} x = P_x + \vec{u}_x\lambda + \vec{v}_x\mu \\ y = P_y + \vec{u}_y\lambda + \vec{v}_y\mu \\ z = P_z + \vec{u}_z\lambda + \vec{v}_z\mu \end{cases} \quad (11)$$

Implícita

$$\pi : \begin{vmatrix} x - P_x & y - P_y & z - P_z \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$= Ax + By + Cz + D = 0 \quad (13)$$

### 4 Posiciones relativas

punto-recta

$$P = P_r + \vec{d}_r\lambda = \begin{cases} \exists & P \in r \\ \nexists & P \notin r \end{cases} \quad (14)$$

recta-recta

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s \begin{cases} 0 & \perp \\ \neq 0 & \not\perp \end{cases} \quad (15)$$

$$\vec{d}_r \propto \vec{d}_s \begin{cases} // & P \in r \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} r \equiv s \end{array} \right. \quad (16)$$

$$rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s, P_r \vec{P}_s) \begin{cases} 1 & r \equiv s \\ 2 & rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s) \begin{cases} 1 & // \\ 2 & secantes \end{cases} \\ 3 & cruzadas \end{cases} \quad (17)$$

punto-plano

$$AP_x + BP_y + CP_z + D = 0 \begin{cases} 0 & P \in \pi \\ \neq 0 & P \notin \pi \end{cases} \quad (18)$$

recta-plano

$$A = \begin{pmatrix} A_{r_1} & B_{r_1} & C_{r_1} \\ A_{r_2} & B_{r_2} & C_{r_2} \\ A_\pi & B_\pi & C_\pi \end{pmatrix} \quad (19) \quad A' = \begin{pmatrix} A_{r_1} & B_{r_1} & C_{r_1} & D_{r_1} \\ A_{r_2} & B_{r_2} & C_{r_2} & D_{r_2} \\ A_\pi & B_\pi & C_\pi & D_\pi \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$rg(A), rg(A') \begin{cases} 2, 2 & \text{SCI} & r \in \pi \\ 3, 3 & \text{SCD} & \text{secante} \\ 2, 3 & \text{SI} & // \end{cases} \quad (21)$$

o

$$A(P_{r_x} + \vec{d}_{r_x})\lambda + B(P_{r_y} + \vec{d}_{r_y})\lambda + C(P_{r_z} + \vec{d}_{r_z})\lambda + D = 0 \begin{cases} 0 = 0 & r \in \pi \\ \exists \lambda & \text{secante} \\ \nexists \lambda & // \end{cases} \quad (22)$$

o

$$\begin{cases} \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 & \text{y} & P_r \in \pi & r \in \pi \\ \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 & & & \text{secante} \\ \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 & \text{y} & P_r \notin \pi & // \end{cases} \quad (23)$$

## 5 Distancias

punto-punto

$$d(A, B) = \sqrt{A\vec{B}_x^2 + A\vec{B}_y^2 + A\vec{B}_z^2} \quad (24)$$

punto-recta

$$d(P, r(A, \vec{d}_r)) = \frac{|\vec{d}_r \times A\vec{P}|}{|\vec{d}_r|} \quad (25)$$

punto-plano

$$d(P(x_0, y_0, z_0), \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (26)$$

recta-recta //

$$d(r, s) = d(P_r, s) = d(P_s, r) \quad (27)$$

recta-recta cruzadas

$$d(r, s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[P_r\vec{P}_s, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \quad (28)$$

recta-plano //

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) \quad (29)$$

## 6 Ángulos

vector-vector o recta-recta  $d_r$   $d_s$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (30)$$

plano-plano (sus normales)

$$\theta(\pi_1, \pi_2) = \theta(n_{\pi_1}, n_{\pi_2}) \quad (31)$$

recta-plano

$$\theta(r, \pi) = \theta(d_r, n_\pi) \quad (32)$$

## 7 Intersecciones

- recta-recta secantes: Igualar paramétricas
- recta-plano: Substituir la paramétrica de  $r$  en implícita de  $\pi$
- plano-plano: Simplemente juntas las dos implícitas y esa es la recta

## 8 Proyecciones

- punto en recta: Plano perpendicular a  $r$  que contenga  $P$ :  $\pi : P, \vec{d}_r$ ; Cortar  $r$  con  $\pi$ ;  $P'$
- punto en plano: Perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P$ :  $r : P, \vec{n}_\pi$ ; Cortar  $r$  con  $\pi$ ;  $P'$
- recta en plano: Proyectar dos puntos de la recta en el plano y hacer recta proyectada; o Hacer plano perpendicular a  $\pi$  que contenga a  $r$  y intersección de planos

## 9 Volúmenes

Paralelepípedo

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| \quad (33)$$

Tetraedro

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| \quad (34)$$

## 10 Áreas

Paralelogramo

$$A = |\vec{AB} \times \vec{AC}| \quad (35)$$

Triangulo

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \quad (36)$$