# Apuntes de Geometría

Ángel Ruiz Fernández B2A

Abril 2023

## 1 Productos

Escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\alpha = \vec{v}_x\vec{u}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y + \vec{u}_z\vec{v}_z \tag{1}$$

Vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

Mixto Vectorial

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{w}_x & \vec{w}_y & \vec{w}_z \end{vmatrix} \tag{3}$$

## 2 Ecuaciones de la recta

Sea un punto $P$ y un vector director $\vec{d}$, la recta $r$:

Paramétrica

$$r : \begin{cases} x = P_x + \vec{d}_x\lambda \\ y = P_y + \vec{d}_y\lambda \\ z = P_z + \vec{d}_z\lambda \end{cases} \tag{4}$$

Punto genérico

$$G(\lambda) = (P_x + \vec{d}_x\lambda, P_y + \vec{d}_y\lambda, P_z + \vec{d}_z\lambda) \tag{5}$$

Vectorial

$$R(\lambda) = P + \vec{d}\lambda \tag{6}$$

Continua

$$\frac{x - P_x}{\vec{d}_x} = \frac{y - P_y}{\vec{d}_y} = \frac{z - P_z}{\vec{d}_z} \tag{7}$$

General

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

# 3 Ecuaciones del plano

Sea un punto $P$ y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ o vector normal $\vec{n}$, el plano $\pi$:

Con directores

$$\pi : \begin{cases} P \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{cases} \tag{9}$$

Con normal

$$\pi : \begin{cases} P \\ \vec{n} \end{cases} \tag{10}$$

Paramétrica

$$\pi : \begin{cases} x = P_x + \vec{u}_x\lambda + \vec{v}_x\mu \\ y = P_y + \vec{u}_y\lambda + \vec{v}_y\mu \\ z = P_z + \vec{u}_z\lambda + \vec{v}_z\mu \end{cases} \tag{11}$$

Implícita

$$\pi : \begin{vmatrix} x - P_x & y - P_y & z - P_z \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$\vec{n_x}x + \vec{n_y}y + \vec{n_z}z + D = 0 \quad \text{(sacar D con punto)} \tag{13}$$

$$= Ax + By + Cz + D = 0 \tag{14}$$

# 4 Posiciones relativas

punto-recta

$$P = P_r + \vec{d_r}\lambda = \begin{cases} \exists & P \in r \\ \nexists & P \notin r \end{cases} \tag{15}$$

recta-recta

$$\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} \begin{cases} 0 & \perp \\ \not{0} & \not\perp \end{cases} \tag{16}$$

$$\vec{d_r} \propto \vec{d_s} \begin{cases} // & P \in r \begin{cases} r \equiv s \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

$$rg(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{P_r P_s}) \begin{cases} 1 & r \equiv s \\ 2 & rg(\vec{d_r}, \vec{d_s}) \begin{cases} 1 & // \\ 2 & secantes \end{cases} \\ 3 & cruzadas \end{cases} \tag{18}$$

punto-plano

$$AP_x + BP_y + CP_z + D = 0 \begin{cases} 0 & P \in \pi \\ \not{0} & P \notin \pi \end{cases} \tag{19}$$

recta-plano

$$A = \begin{pmatrix} A_{r_1} & B_{r_1} & C_{r_1} \\ A_{r_2} & B_{r_2} & C_{r_2} \\ A_\pi & B_\pi & C_\pi \end{pmatrix} \quad (20) \qquad A' = \begin{pmatrix} A_{r_1} & B_{r_1} & C_{r_1} & D_{r_1} \\ A_{r_2} & B_{r_2} & C_{r_2} & D_{r_2} \\ A_\pi & B_\pi & C_\pi & D_\pi \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$rg(A), rg(A') \begin{cases} 2,2 & \text{SCI} \quad r \in \pi \\ 3,3 & \text{SCD} \quad secante \\ 2,3 & \text{SI} \quad // \end{cases} \tag{22}$$

o

$$A(P_{r_x} + \vec{d}_{rx})\lambda + B(P_{r_y} + \vec{d}_{ry})\lambda + C(P_{r_z} + \vec{d}_{rz})\lambda + D = 0 \begin{cases} 0 = 0 & r \in \pi \\ \exists \lambda & secante \\ \nexists \lambda & // \end{cases} \tag{23}$$

o

$$\begin{cases} \vec{d}_r \cdot \vec{n_\pi} = 0 \quad \text{y} \quad P_r \in \pi & r \in \pi \\ \vec{d}_r \cdot \vec{n_\pi} \neq 0 & secante \\ \vec{d}_r \cdot \vec{n_\pi} = 0 \quad \text{y} \quad P_r \notin \pi & // \end{cases} \tag{24}$$

# 5 Distancias

punto-punto

$$d(A, B) = \sqrt{\vec{AB}_x^2 + \vec{AB}_y^2 + \vec{AB}_z^2} \tag{25}$$

punto-recta

$$d(P, r(A, \vec{d}_r)) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{d}_r|} \tag{26}$$

punto-plano

$$d(P(x_0, y_0, z_0), \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{27}$$

recta-recta //

$$d(r, s) = d(P_r, s) = d(P_s, r) \tag{28}$$

recta-recta cruzadas

$$d(r, s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[\vec{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \tag{29}$$

recta-plano //

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) \tag{30}$$

# 6 Ángulos

vector-vector o recta-recta $d_r$ $d_s$

$$cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \tag{31}$$

plano-plano (sus normales)

$$\theta(\pi_1, \pi_2) = \theta(n_{\pi_1}, n_{\pi_2}) \tag{32}$$

recta-plano

$$\theta(r, \pi) = \theta(d_r, n_\pi) \tag{33}$$

# 7 Intersecciones

- recta-recta secantes: Igualar paramétricas
- recta-plano: Substituir la paramétrica de $r$ en implícita de $\pi$
- plano-plano: Simplemente juntas las dos implícitas y esa es la recta

# 8 Proyecciones

- punto en recta: Plano perpendicular a $r$ que contenga $P$: $\pi : P, \vec{d_r}$; Cortar $r$ con $\pi$; P'
- punto en plano: Perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$: $r : P, \vec{n_\pi}$; Cortar $r$ con $\pi$; P'
- recta en plano: Proyectar dos puntos de la recta en el plano y hacer recta proyectada; o Hacer plano perpendicular a $\pi$ que contenga a $r$ y intersección de planos

# 9 Áreas

Paralelogramo

$$A = |\vec{AB} \times \vec{AC}| \tag{34}$$

Triangulo

$$A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| \tag{35}$$

# 10 Volúmenes

Paralelepípedo

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| \tag{36}$$

Tetraedro

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| \tag{37}$$