AMD Curso 2023-2024

Prácticas Semana 2

Ejercicio 1. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$ *:*

$$x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 6$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$-x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5$$
$$x_4 = -2$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[1,-1,-5,-5],[-1,-1,2,1],[0,-1,-2,-3],[0,0,0,1]])
B = matrix(QQ,[[6],[1],[5],[-2]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
S = R[:, 4:]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = [I|S]$$

La matriz A reducida es la identidad por tanto el Sistema es Compatible Determinado, por tanto la solución S es

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = -2$$

Ejercicio 2. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 8 \\ x_1 - x_3 &= -3 \\ x_2 &= -5 \\ x_1 &= 2 \\ x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[2,-1,0],[1,0,-1],[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]])
B = matrix(QQ,[[8],[-3],[-5],[2],[8]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En la cuarta fila de la matriz aumentada reducida, $0 = 1$ es un absurdo, por tanto esto es un Sistema Incompatible.

Ejercicio 3. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_7$ *:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 1 \\ 4x_5 &= 12 \end{aligned}$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(7),[[3,1,3,5,2],[0,0,3,3,1],[0,0,0,0,4]])
B=matrix(Zmod(7),[3,1,12]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matriz aumentada reducida no tiene identidad, y no contiene absurdos, por tanto debe ser un Sistema Compatible Indeterminado:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 + 3x_4 &= 2 \\
x_3 + x_4 &= 4 \\
x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

Que parametrizando quedan dos parametros libres

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 2 - 3\alpha - 5\beta \\
&x_2 = \beta \\
&x_3 = 4 - \alpha \\
&x_4 = \alpha \\
&x_5 = 3
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$
\begin{gathered}
-x_2 + 3x_3 = 3 \\
x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\
x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 7 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\
2x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 5
\end{gathered}
$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[0,-1,3],[1,-2,5],[1,-3,9],[1,-2,3],[2,-3,9]])
B = matrix(QQ,[[3],[3],[7],[1],[5]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$
A' = [A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 9 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & 5 \end{array}\right)
$$

$$
R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

La matriz de A reducida queda como identidad, y las filas extra no son absurdos, por tanto esto es un SCD, cuya solución es

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -2 \\
&x_2 = 0 \\
&x_3 = 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -1$$

$$x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[1,-1,1,2],[0,1,-2,-5],[0,1,-1,-2]])
B = matrix(QQ,[[2],[-1],[0]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Es SCI:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 - \alpha \\ x_3 &= 1 - 3\alpha \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$0 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(5),[[0,0,0],[1,3,2],[4,1,1],[4,3,0],[4,3,0]])
B = matrix(Zmod(5),[[0],[0],[1],[3],[0]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$0 = 0$ es un absurdo por tanto es SI.

Ejercicio 7. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(5),[[1,4,0,3],[0,1,0,4],[2,2,1,2],[2,2,3,3],[2,2,3,0]])
B = matrix(Zmod(5),[[0],[3],[4],[3],[3]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz reducida resulta la identidad sin absurdos y por tanto es SCD:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 0$$

Ejercicio 8. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_{11}$*:*

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + x - x_4 = 2$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(11),[[2,-1,1,1],[2,1,0,-1],[0,1,2,3]])
B=matrix(Zmod(11),[1,2,0]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Matriz reducida es parte identidad sin absurdos, SCI, parametrización:

$$x_1 = 3 - 4\alpha$$
$$x_2 = 7 - 2\alpha$$
$$x_3 = 2 - 6\alpha$$
$$x_4 = \alpha$$

Ejercicio 9. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$x_1 + x_3 - x_4 = 2$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 - x_4 = 2$$
$$x_1 - x_3 - x_4 = 2$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(7),[[1,0,1,2],[2,1,2,1],[0,1,1,2],[1,0,2,2]])
B = matrix(Zmod(7),[[2],[2],[2],[2]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Matriz reducida es identidad, SCD:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicio 10. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$-x_1 - 5x_3 + x_6 = -1$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-2x_1 + x_4 = 3$$

Solución.-

```
A=matrix(QQ,[[-1,0,-5,0,0,1],[3,1,1,0,1,0],[-2,0,0,1,0,0]])
B=matrix(QQ,[-1,0,3]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} -1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La matriz reducida es en parte identidad por tanto SCI, parametrización:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma \\ x_2 &= 4 - \frac{7}{5}\gamma - \beta - \frac{1}{5}\alpha \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\gamma + \frac{1}{5}\alpha \\ x_4 &= \gamma \\ x_5 &= \beta \\ x_6 &= \alpha \end{aligned}$$

Ejercicio 11. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad en\ \mathbb{Z}_2.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(2),[[2,3,1],[1,4,3],[2,5,1]])
AI = A.augment(matrix.identity(3), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz reducida de $[A|I]$ no queda como identidad por tanto no es invertible (regular)

Ejercicio 12. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_7.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(7),[[1,2],[3,4]])
AI = A.augment(matrix.identity(2), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

La matriz reducida de $[A|I]$ queda $[I|A^{-1}]$, así que A^{-1} es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_5.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(5),[[1,2,3],[4,6,0],[3,0,0]])
AI = A.augment(matrix.identity(3), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matriz reducida de $[A|I]$ queda $[I|A^{-1}]$, así que A^{-1} es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$