PRÁCTICAS DE ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA.
INVERSAS LATERALES

Los ejercicios que debes realizar para completar esta tarea son al menos el Ejercicio 9, el Ejercicio 24 y el Ejercicio 52.

1. Inversas Laterales

Ejercicio 1. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 11 & 16 & 0 & 14 \\ 7 & 15 & 8 & 15 \\ 1 & 10 & 6 & 15 \\ 4 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{17})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(17),[[11,16,0,14],
[7,15,8,15],
[1,10,6,15],
[4,9,6,4]])
```

Ejercicio 2. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 28 & 10 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 19 & 14 & 15 & 14 & 22 & 10 \\ 28 & 8 & 20 & 24 & 17 & 28 \\ 10 & 16 & 16 & 3 & 25 & 20 \\ 13 & 14 & 23 & 13 & 25 & 16 \\ 27 & 4 & 28 & 18 & 9 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{Z}_{29})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(29),[[28,10,8,4,5,1],
[19,14,15,14,22,10],
[28,8,20,24,17,28],
[10,16,16,3,25,20],
[13,14,23,13,25,16],
[27,4,28,18,9,14]])
```

Ejercicio 3. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,-1,-1,-2,2,4],
[0,1,0,1,-3,-4],
[0,-1,1,2,6,-4],
[-1,-1,1,1,4,1]])
```

Ejercicio 4. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 3 & 0 \\ 13 & 17 & 38 & 39 \\ 17 & 12 & 15 & 36 \\ 16 & 30 & 37 & 40 \\ 36 & 10 & 5 & 14 \\ 38 & 15 & 19 & 16 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_{43})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(43),[[12,9,3,0],
[13,17,38,39],
[17,12,15,36],
[16,30,37,40],
[36,10,5,14],
[38,15,19,16]])
```

Ejercicio 5. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 28 & 8 & 22 & 14 \\ 22 & 0 & 26 & 2 \\ 11 & 21 & 17 & 2 \\ 28 & 2 & 20 & 21 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{29})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(29),[[28,8,22,14],
[22,0,26,2],
[11,21,17,2],
[28,2,20,21]])
```

Ejercicio 6. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & -1 & 9 & -6 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -6 & -3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[5,3,3,-1,9,-6],
[-2,-1,-1,0,-5,1],
[2,1,2,3,5,-8],
[1,0,0,2,7,3],
[0,0,0,2,3,1],
[2,2,2,-6,-3,-4]])
```

Ejercicio 7. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 7 & 34 & 28 & 30 \\ 31 & 30 & 31 & 13 \\ 29 & 12 & 6 & 17 \\ 8 & 28 & 11 & 23 \\ 1 & 0 & 17 & 22 \\ 17 & 35 & 31 & 4 \\ 14 & 32 & 0 & 29 \\ 9 & 17 & 15 & 32 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{8\times 4}(\mathbb{Z}_{37})$$

Solución:

```
A = matrix(Zmod(37),[[7,34,28,30],
[31,30,31,13],
[29,12,6,17],
[8,28,11,23],
[1,0,17,22],
[17,35,31,4],
[14,32,0,29],
[9,17,15,32]])

Ap = block_matrix([[A, 1]])
Ar = Ap.echelon_form()

Atp = block_matrix([[A.T, 1]])
Atr = Atp.echelon_form()
Atr = copy(Atr)
Atr.subdivide([3], [3])
```

Ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrrrrrr} 7 & 34 & 28 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 30 & 31 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 12 & 6 & 17 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 28 & 11 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 17 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 35 & 31 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 32 & 0 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 17 & 15 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reducida

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrrrrrr} 1 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 26 & 34 \\ 0 & 1 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 15 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 33 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 34 & 28 \end{array}\right)$$

No sale identidad por tanto no tiene inversa por la izquierda

Transpuesta ampliada

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccc} 7 & 31 & 29 & 8 & 1 & 17 & 14 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & 30 & 12 & 28 & 0 & 35 & 32 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 28 & 31 & 6 & 11 & 17 & 31 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 13 & 17 & 23 & 22 & 4 & 29 & 32 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reducida

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 7 & 14 & 31 & 27 & 0 & 5 & 16 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 32 & 24 & 34 & 17 & 20 & 0 & 0 & 33 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 32 & 25 & 17 & 8 & 26 & 0 & 26 & 14 & 29 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 & 13 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

Sale identidad, por tanto existe matriz inversa lateral por la izquierda, que es B

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 14 & 31 & 27 & 0 & 5 & 16 & 30 \\ 32 & 24 & 34 & 17 & 20 & 0 & 0 & 33 & 21 \\ 32 & 25 & 17 & 8 & 26 & 0 & 26 & 14 & 29 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

```
matrix(Zmod(5),[[3,3,2,4],
[4,0,0,3],
[4,0,1,3],
[3,4,0,4],
[1,1,2,2],
[0,0,3,4]])
```

Ejercicio 9. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -6 & -7 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,-2,1,3,3,4],
[-1,3,-1,-6,-7,-7],
[-2,1,-1,0,2,-1],
[-2,3,-1,-5,-5,-6]])
```

Ejercicio 10. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & 27 & 35 & 2 \\ 3 & 16 & 31 & 6 \\ 8 & 6 & 26 & 13 \\ 33 & 15 & 33 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{37})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(37),[[5,27,35,2],
[3,16,31,6],
[8,6,26,13],
[33,15,33,14]])
```

Ejercicio 11. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 8}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,0,-1,-1,-1,-4,-2,3],
[1,2,-1,0,-1,-4,2,2],
[0,0,0,1,2,4,2,-8],
[0,0,-1,-2,-2,-6,-4,7]])
```

Ejercicio 12. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,1,2,0,1,7],
[-1,0,-1,-1,3,-5],
[-1,-1,-1,-2,5,-4],
[-1,1,0,-1,4,-3]])
```

Ejercicio 13. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ -4 & 4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & -6 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{8\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[5,-5,-6,-1],
[0,1,2,-8],
[-4,4,5,0],
[-3,2,3,4],
[4,-4,-6,5],
[-4,5,5,-2],
[0,0,-3,9],
[-2,2,0,6]])
```

Ejercicio 14. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & -9 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & -4 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,1,0,-2,1,5],
[0,1,1,-3,6,6],
[0,-2,-1,3,-9,-5],
[-1,-2,0,3,-4,-7]])
```

Ejercicio 15. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,1,2,4,2,9],
[-1,0,0,1,1,-1],
[1,-1,-1,-3,0,1],
[1,0,0,0,-1,4],
[0,2,2,6,-1,7],
[0,-1,-2,-3,-4,-2]])
```

Ejercicio 16. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 15 & 22 \\ 20 & 0 & 1 & 13 \\ 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 14 & 15 \\ 21 & 11 & 9 & 12 \\ 12 & 16 & 13 & 11 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_{23})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(23),[[10,15,15,22],
[20,0,1,13],
[7,8,10,3],
[3,6,14,15],
[21,11,9,12],
[12,16,13,11]])
```

Ejercicio 17. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 6 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(11),[[6,6,5,4],
[10,6,1,9],
[4,0,1,6],
[3,7,10,4]])
```

Ejercicio 18. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{7})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(7),[[6,6,0,6],
[1,0,1,6],
[1,2,0,2],
[6,1,5,3]])
```

Ejercicio 19. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 27 & 35 & 31 & 10 & 37 & 19 \\ 11 & 30 & 46 & 38 & 27 & 34 \\ 35 & 13 & 20 & 3 & 23 & 38 \\ 6 & 45 & 40 & 25 & 23 & 19 \\ 28 & 1 & 11 & 40 & 6 & 20 \\ 7 & 37 & 15 & 15 & 32 & 27 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{Z}_{47})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(47),[[27,35,31,10,37,19],
[11,30,46,38,27,34],
[35,13,20,3,23,38],
[6,45,40,25,23,19],
[28,1,11,40,6,20],
[7,37,15,15,32,27]])
```

Ejercicio 20. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$$

Solución:

```
matrix(Zmod(11),[[3,10,9,8],
[5,0,2,8],
[2,8,9,10],
[2,8,9,0]])
```

2. Vectores Linealmente Independientes y Generadores de K^n

Ejercicio 21. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^6$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[2,1,-5,9],
[1,1,-1,2],
[0,-1,-2,2],
[1,2,2,-2],
[0,-1,1,-4],
[-1,1,5,-4]])
```

Ejercicio 22. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,2,8,1],
[0,1,3,1],
[1,1,0,2],
[0,-1,2,-1],
[0,1,5,1]])
```

Ejercicio 23. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,2,2,-1,-3,7],
[0,1,3,-2,1,7],
[0,0,1,-1,0,3],
[1,-1,-1,0,-5,2],
[0,1,2,-1,2,3]])
```

Ejercicio 24. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[3,1,7,8,6],
[2,1,6,6,3],
[0,2,9,5,-5],
[3,2,6,6,3],
[0,1,8,4,-8],
[1,-1,-7,-4,2]])
```

Ejercicio 25. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{29}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 24 & 11 \\ 2 & 2 & 20 \\ 11 & 5 & 0 \\ 11 & 13 & 16 \\ 6 & 16 & 12 \\ 28 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(29),[[10,24,11],
[2,2,20],
[11,5,0],
[11,13,16],
[6,16,12],
[28,20,25]])
```

Ejercicio 26. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{13}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 10 & 11 & 1 & 3 \\ 11 & 3 & 11 & 12 & 2 & 3 \\ 11 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 8 & 12 & 12 & 6 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 5 & 12 & 12 & 11 \\ 10 & 4 & 10 & 7 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(13),[[12,2,10,11,1,3],
[11,3,11,12,2,3],
[11,1,6,4,3,8],
[8,12,12,6,3,10],
[3,2,5,12,12,11],
[10,4,10,7,12,9]])
```

Ejercicio 27. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,0,3],
[0,1,-3],
[-1,-3,9],
[1,1,-4],
[0,-3,6],
[0,-2,8],
[-1,-3,9],
[0,-3,4]])
```

Ejercicio 28. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_7}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(7),[[3,5,4,1],
[2,6,1,0],
[6,1,5,5],
[0,5,2,6],
[2,2,4,2],
[5,1,5,4],
[2,6,6,4]])
```

Ejercicio 29. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,1,-2,4,-2],
[0,1,-2,8,-6],
[0,1,-1,4,-4],
[0,0,-1,5,-2],
[-1,0,0,-1,3]])
```

Ejercicio 30. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(5),[[4,1,4],
[2,2,2],
[3,0,4],
[0,3,0],
[4,3,3],
[0,0,0],
[3,0,2]])
```

Ejercicio 31. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{13}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 & 8 & 10 \\ 12 & 11 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(13),[[6,0,10,8,10],
[12,11,5,7,6],
[1,2,9,9,7],
[7,8,7,4,3],
[1,5,1,6,2],
[8,8,10,8,7]])
```

Ejercicio 32. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{17}}^8$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 8 \\ 5 & 10 & 4 \\ 5 & 15 & 15 \\ 3 & 11 & 11 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 15 & 12 \\ 11 & 2 & 13 \\ 0 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(17),[[12,9,8],
[5,10,4],
[5,15,15],
[3,11,11],
[4,2,4],
[0,15,12],
[11,2,13],
[0,11,4]])
```

Ejercicio 33. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{43}}^7$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 40 & 42 & 1 & 5 \\ 12 & 30 & 13 & 8 & 31 \\ 3 & 33 & 4 & 41 & 9 \\ 15 & 5 & 21 & 28 & 19 \\ 0 & 36 & 18 & 33 & 19 \\ 41 & 29 & 5 & 22 & 28 \\ 5 & 32 & 10 & 19 & 31 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(43),[[8,40,42,1,5],
[12,30,13,8,31],
[3,33,4,41,9],
[15,5,21,28,19],
[0,36,18,33,19],
[41,29,5,22,28],
[5,32,10,19,31]])
```

Ejercicio 34. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-5,-4,-1,2],
[-3,-5,-4,-8],
[0,0,1,5],
[-2,-3,-3,-7],
[2,3,3,5],
[0,-2,-3,-5],
[2,2,1,1],
[-1,-2,-2,-6]])
```

Ejercicio 35. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & 8 \\ 2 & -6 & -2 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -7 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[2,-5,-5],
[1,-2,-2],
[-4,7,8],
[2,-6,-2],
[3,-5,-5],
[0,-2,-7],
[3,-8,-5],
[0,-5,-9]])
```

Ejercicio 36. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-2,-1,4,-8],
[1,0,-2,-5],
[1,0,-1,0],
[-1,-2,3,5],
[-2,1,2,8],
[-1,0,2,0],
[0,2,1,8]])
```

Ejercicio 37. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -3 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -1 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,-2,-1,1,-6,1],
[-1,0,-4,-3,-5,2],
[-2,-1,-4,-1,-7,-1],
[2,3,2,-2,9,1],
[0,2,-3,-6,-2,8]])
```

Ejercicio 38. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{47}}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 44 & 29 & 24 & 16 \\ 1 & 20 & 42 & 44 & 39 \\ 27 & 34 & 17 & 34 & 33 \\ 17 & 29 & 5 & 10 & 28 \\ 11 & 9 & 30 & 41 & 45 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(47),[[42,44,29,24,16],
[1,20,42,44,39],
[27,34,17,34,33],
[17,29,5,10,28],
[11,9,30,41,45]])
```

Ejercicio 39. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{23}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 15 & 8 & 4 & 20 \\ 15 & 8 & 6 & 8 & 18 & 14 \\ 13 & 7 & 10 & 6 & 9 & 3 \\ 16 & 10 & 14 & 15 & 2 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & 22 & 15 & 11 \\ 22 & 12 & 7 & 2 & 18 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(23),[[2,2,15,8,4,20],
[15,8,6,8,18,14],
[13,7,10,6,9,3],
[16,10,14,15,2,10],
[4,0,0,22,15,11],
[22,12,7,2,18,1]])
```

Ejercicio 40. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{43}}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} 39 & 3 & 6 \\ 25 & 24 & 38 \\ 17 & 20 & 18 \\ 12 & 1 & 28 \\ 27 & 30 & 34 \\ 24 & 41 & 26 \\ 0 & 19 & 32 \\ 5 & 15 & 35 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
matrix(Zmod(43),[[39,3,6],
[25,24,38],
[17,20,18],
[12,1,28],
[27,30,34],
[24,41,26],
[0,19,32],
[5,15,35]])
```

3. Formas Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial

Ejercicio 41. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -83 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[2,-83,-2],
[2,3,-1],
[-3,1,-1],
[-3,1,3],
[1,1,-1],
[1,3,0]])
```

Ejercicio 42. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & -8 \\ -7 & 1 & -33 & -1 \\ -8 & 8 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,0,-5,1],
[2,3,-1,-1],
[-1,2,-1,1],
[2,0,-1,-3],
[2,-1,0,-2],
[3,-1,-4,-8],
[-7,1,-33,-1],
[-8,8,19,0]])
```

Ejercicio 43. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -235857 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,1,0],
[-2,1,-1],
[-3,3,-2],
[4,-1,0],
[0,1,-235857]])
```

Ejercicio 44. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -2 & 40 \\ -5 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,3,2,-2,40],
[-5,0,-4,1,1],
[-2,-1,1,1,0],
[-2,0,-1,5,1],
[8,-3,2,0,1],
[0,-5,0,1,1],
[-1,1,1,0,-1],
[1,-1,-1,0,-9]])
```

Ejercicio 45. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 27 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[2,6,8],
[0,3,1],
[0,2,1],
[0,-1,1],
[-1,0,2],
[27,14,3]])
```

Ejercicio 46. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 293 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 10 & -1 \\ -1 & -18 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,293,1,-3],
[-1,-1,1,-1],
[0,0,1,2],
[-2,3,-2,5],
[-1,0,10,-1],
[-1,-18,0,1],
[2,-1,1,1],
[1,-4,0,26]])
```

Ejercicio 47. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & 13 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[-3,5,-1,-1],
[1,-1,-2,-4],
[-1,-1,-7,-3],
[1,-1,-1,-6],
[-1,13,3,2],
[1,1,7,0],
[0,-2,-2,-1],
[-2,2,0,2]])
```

Ejercicio 48. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 75 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,-2,0],
[1,-2,-1],
[75,-3,1],
[0,-1,15],
```

```
[0,0,1],
[0,0,1],
[1,1,0]])
```

Ejercicio 49. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,1,3,0],
[0,0,-2,0],
[0,-6,1,-2],
[1,5,-1,0],
[-1,1,-1,-2],
[-10,0,0,0],
[19,-1,-2,-2],
[1,-11,1,1]])
```

Ejercicio 50. *Sea V el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribe V en forma implícita

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,0,-2],
[2,0,-1],
[2,3,-1],
[0,-6,1],
[0,-3,0],
[0,2,-1]])
```

Ejercicio 51. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-6,0,-1,0,-2],
[0,-2,1,2,0],
[1,0,0,0,-3]])
```

Ejercicio 52. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 20 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -43 & -2 & 1 & -1 \\ 10 & 62 & 1 & 1 & 0 & -9 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,0,1,0,0,0,0,6],
[20,2,1,0,0,-1,0,-1],
[0,1,-2,1,-2,1,0,0],
[-1,-2,-1,-1,-43,-2,1,-1],
[10,62,1,1,0,-9,1,0]])
```

Ejercicio 53. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 21 & 1 & 2 & 1 & 1 & 26 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -8 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-2,-1,1,-2,3,1],
[21,1,2,1,1,26],
[1,1,1,5,3,-1],
[-1,-8,0,3,0,7]])
```

Ejercicio 54. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -197 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & -86 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -8 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -10 & -1 & 0 & 1 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,-197,0,1,9,0,0,0,-86],
[-1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,1],
[-3,-8,1,1,-1,-1,1,0,-1],
[4,0,-10,-1,0,1,1,7,5],
[0,1,0,-4,2,0,-2,0,-4]])
```

Ejercicio 55. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 137 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -61 & -2 & 182 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & -13 & -1 \\ 13 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 11 \\ 2 & 10 & 1 & 2 & -1 & 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,0,0,-3,-1,-1,137,1,3],
[-2,-3,-61,-2,182,-3,4,0,0],
[1,1,2,1,-1,1,1,-13,-1],
[13,0,-7,0,0,1,-6,-7,11],
[2,10,1,2,-1,1,7,-5,-1]])
```

Ejercicio 56. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -11 & 28 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -7 & -12 & -1 & -9 & 1 & 1 \\ 61 & 0 & 0 & 11 & -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,0,1,-1,14,-2,0,-1,-1],
[-1,-1,-1,0,1,-1,-1,1,-5],
[1,-11,28,-3,2,1,1,1,1],
[-1,1,-1,-7,-12,-1,-9,1,1],
[61,0,0,11,-2,-1,1,-1,-1]])
```

Ejercicio 57. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -13 & -84 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -18 & 5 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[-1,1,-1,-1,-2,4,7],
[0,0,-3,-13,-84,2,-1],
[1,1,0,0,1,-18,5]])
```

Ejercicio 58. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -19 & -1 & -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 64 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & -47 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,-19,-1,-1,-2,1,-2,2,8],
[-1,-1,0,-2,1,0,-1,1,-4],
[3,64,0,2,1,0,1,0,0],
[-1,4,1,2,2,2,1,-1,-5],
[-2,8,1,1,0,0,-47,2,-1]])
```

Ejercicio 59. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -8 & 1 & 0 & -68 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[0,0,-1,1,-4,1,2],
[6,0,-8,1,0,-68,-1],
[-3,0,-1,2,1,2,2],
[0,1,-1,-1,-1,-1,1]])
```

Ejercicio 60. *Sea W el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 10 & -5 & -1 \\ -1 & -8 & 2 & -7 & -17 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -11 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

es decir, $W = N(A)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución:

```
matrix(QQ,[[1,-1,2,2,10,-5,-1],
[-1,-8,2,-7,-17,-2,0],
[4,3,-1,-11,1,1,-1],
[1,4,1,1,-1,2,1],
[1,-2,-1,2,1,5,-2]])
```