Ejercicios Hoja 2

Curso 2023/2024

Ejercicio 1. *Hallar una base $\mathcal{B}$ d el espacio $\mathbb{R}^3$ tal que se verifiquen las siguientes igualdades:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

```
AC = matrix(QQ, [[1, 1, 0], [-1, 0, 1], [1, 1, 1]])
AB = matrix(QQ, [[2, 1, -1], [3, -2, 1], [-1, 2, 0]])
B = AC * AB.inverse()
```

$$B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. *Dadas las aplicaciones*

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *definida por* $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$ *definida por* $f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ *definida por* $f_4(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$.

Estudiar si son aplicaciones lineales y, en su caso determinar su matriz asociada $\mathcal{M}(f)$.

```
Mf1 = matrix(QQ, [[1, -1], [2, 1], [1, 2], [3, 0]])
Mf2 = matrix(QQ, [[1, -2, 1, 2], [2, 0, 1, -1]])
Mf4 = matrix(QQ, [[1, 2, 3, 0]])
```

a.

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c. No es lineal porque tiene elementos no x d.

$$M(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema de vectores, sobre el cuerpo* $\mathbb{Z}_5$*,*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y caso de serlo calcular las matrices de paso $\mathcal{P}_{\mathcal{B}C_3}$ *y* $\mathcal{P}_{C_3\mathcal{B}}$ *(***Nota.-** *La matriz* C_3 *denota la base canónica de* $\mathbb{Z}_5^3$*.)*

```
B = matrix(Zmod(5), [[1, 1, 0], [1, 1, 1], [-1, 1, 1]])
Br = B.echelon_form()
Bi = B.inverse()
```

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B es base.

$$P_{BC_3} = C_3^{-1}B = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{C_3B} = B^{-1}C_3 = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dados los siguientes conjuntos de vectores, sobre el cuerpo* $\mathbb{Z}_5$*,*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y, caso de serlo calcula la matriz de paso $\mathcal{P}_{B_1B_2}$*.*

```
B1 = matrix(Zmod(5), [[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]])
B2 = matrix(Zmod(5), [[0, -1, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 1]])
B1r = B1.echelon_form()
B2r = B2.echelon_form()
B1i = B1.inverse()
B2i = B2.inverse()
PB1B2 = B2i * B1
```

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los dos son bases.

$$\mathcal{P}_{B_1 B_2} = B_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Sea la aplicación lineal:*

$$f : \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4 \quad \textit{definida por} \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y las bases:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{de } \mathbb{Z}_5^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \textit{ de } \mathbb{Z}_5^4$$

Calcular las siguientes matrices:

a) $\mathcal{M}_{B_1 C_4}(f)$.
b) $\mathcal{M}_{C_2 B_2}(f)$.
c) $\mathcal{M}_{B_1 B_2}(f)$.

(**Nota.-** *Las matrices C_2 y C_4 denotan las bases canónicas de $\mathbb{Z}_5^2$ y $\mathbb{Z}_5^4$ respectivamente.)*

Ejercicio 6. *Dadas las aplicaciones lineales:*

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \quad y \ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

definidas por:

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad y \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{de } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad de\ \mathbb{R}^3$$

Calcular:

a) $\mathcal{M}_{B_1 B_2}(f)$
b) $\mathcal{M}_{B_3 B_1}(g)$
c) $\mathcal{M}_{B_2 B_3}(f \circ g)$

Ejercicio 7. *Calcular el núcleo, Ker(f), y el espacio imagen, Im(f), de las siguientes aplicaciones lineales:*

a) *la aplicación dada por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

b) *la aplicación lineal $f : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:*

$$f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$$

*(***Nota.** *$p(x)$ denota en general al polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$)*

Ejercicio 8. *Sean las bases de $\mathbb{Z}_5^3$,*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \ y\ \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ cuya matriz asociada en bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *Calcula la matriz del cambio de base $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$*
b) *Dado el espacio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Hallar una base de U cuyos vectores estén expresados en base canónica.*
c) *Calcular $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$*

Ejercicio 9. *Dado el espacio $V = C(B)$ siendo B la matriz, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$,*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a) *Estudia si los vectores son generadores, linealmente independientes o base.*
b) *Si no son base extrae una base de entre ellos.*
c) *Calcula unas ecuaciones implícitas de V.*

d) *Ampliar la base del espacio V, encontrada en el apartado b), añadiéndole los vectores que se necesiten para obtener una base del espacio $\mathbb{R}^4$.*

Ejercicio 10. *Dados los espacios $U = N(B)$ y $V = N(C)$ siendo B y C las matrices, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5^5$,*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *Estudiar si ambos espacios son iguales o si alguno está contenido en el otro.*
b) *Ecuaciones implícitas del espacio suma $U + V$ y del espacio intersección $U \cap V$.*
c) *Bases de los espacios $U + V$ y $U \cap V$.*

Ejercicio 11. *Dados los espacios de $P_3(\mathbb{R})$*

$$U = < 1 - x + x^2 + x^3, x - x^2, -1 + x^2, 2 + x - 2x^2 + x^3 >$$

y

$$V = < 1 - x - x^2 + 2x^3, 2x - 2x^2, 3 - 3x^2, 3 + 2x - 5x^2 > .$$

Se pide:

a) *Base y dimensión de U y V.*
b) *Ecuaciones implícitas de U y V.*
c) *Estudia si son iguales o si alguno está contenido en el otro.*
d) *Encuentra un polinomio que esté en V pero no en U. Comprueba que ese polinomio junto con los de la base de U forman una base de $P_3(\mathbb{R})$.*
e) *Ecuaciones paramétricas de $U + V$ y de $U \cap V$.*