ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA. GII - FIUM.
PARCIAL 1

Ejercicio 1. *Calcula el determinante de la siguiente matriz sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ realizando operaciones elementales.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Este problema hay que hacerlo a mano en el papel proporcionado en el examen.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(3)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(2)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(3)-2(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(2)-(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(4)-2(2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to E_{(1)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to E_{(4)-(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(4)-4(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(3)-3(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(2)-2(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(2)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(1)-4(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2. *Encuentra todos los valores enteros n que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:*

$$n \equiv 1 \pmod{25}$$
$$n \equiv 52 \pmod{108}$$
$$n \equiv 199 \pmod{201}$$

Solución:

Ejercicio 3. *Sea $K = \mathbb{Z}_{43}$ y $f : K^4 \to K^3$ la aplicación lineal dada por la matriz*

$$M(f) = \begin{pmatrix} 24 & 23 & 11 & 26 \\ 9 & 17 & 33 & 22 \\ 16 & 16 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentra dos aplicaciones lineales diferentes $g_1, g_2 : K^3 \to K^4$ tales que $f \circ g_1 = \mathsf{id}_{K^3} = f \circ g_2$.

Solución:

Ejercicio 4. *Sea $K = \mathbb{Z}_7$ y consideremos las bases de K^3 dadas por $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ siendo*

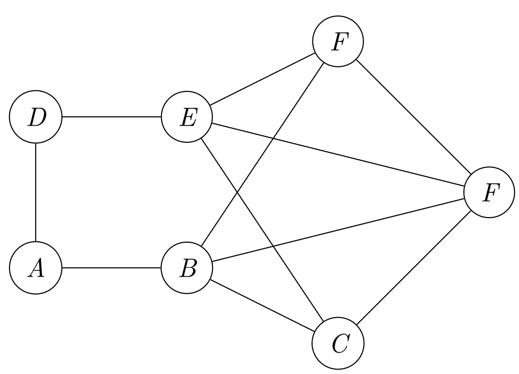
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$, responde a las siguientes preguntas:

- *Calcula la matriz de cambio de base B a la base canónica.*
- *Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de v en base canónica.*
- *Calcula la matriz de cambio de base B a B'.*
- *Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de v en base B'.*
- *Determina si los vectores $\{w_1, w_2, v\}$ forman una base de K^3.*

Solución:

Ejercicio 5. *De termina si existe un camino abierto euleriano en el siguiente grafo. En caso de existir, calcúlalo:*



Solución: