

**ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA. GII - FIUM.**  
**PARCIAL 1**

**Ejercicio 1.** *Calcula el determinante de la siguiente matriz sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_5$  realizando operaciones elementales.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Este problema hay que hacerlo a mano en el papel proporcionado en el examen.

*Solución:*

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(3)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(2)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(3)-2(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ & \rightarrow E_{(2)-(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(1)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(2)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(1)-(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ & \rightarrow E_{(4)-2(2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(4)-4(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow E_{4(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(3)-3(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & \rightarrow E_{(2)-(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow E_{(2)-(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4|I| = 4 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** Encuentra todos los valores enteros  $n$  que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}n &\equiv 1 \pmod{25} \\n &\equiv 52 \pmod{108} \\n &\equiv 199 \pmod{201}\end{aligned}$$

*Solución:*

$$\begin{aligned}n &= 1 + 25x \\n &= 52 + 108y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + 25x &= 52 + 108y \\25x - 108y &= 51\end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 25 & 1 & 0 & & & \\ 108 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] \rightarrow E_{(2)-4(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 25 & 1 & 0 & & & \\ 8 & -4 & 1 & & & \end{array} \right] \rightarrow E_{(1)-3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 13 & -3 & & & \\ 8 & -4 & 1 & & & \end{array} \right] \rightarrow E_{(2)-8(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & -3 & & & \\ 0 & -108 & 25 & & & \end{array} \right]$$

$\text{mcd}(25, 108) = 1$ , tiene solución, caso 1

$$\begin{aligned}25 \cdot (-11) + 108 \cdot (-3) &= 1 \\25 \cdot 84 + 108 \cdot 25 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25 \cdot (-11) \cdot 51 + 108 \cdot (-3) \cdot 51 &= 1 \\25 \cdot 84t + 108 \cdot 25t &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= -561 + 84t \\y &= -153 + 25t\end{aligned}$$

Substituyendo la primera

$$n = 1 + 25(-561 + 84t)$$

$$n = -14025 + 2100t$$

$$n \equiv -14025 \pmod{2100}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $K = \mathbb{Z}_{43}$  y  $f : K^4 \rightarrow K^3$  la aplicación lineal dada por la matriz

$$M(f) = \begin{pmatrix} 24 & 23 & 11 & 26 \\ 9 & 17 & 33 & 22 \\ 16 & 16 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentra dos aplicaciones lineales diferentes  $g_1, g_2 : K^3 \rightarrow K^4$  tales que  $f \circ g_1 = \text{id}_{K^3} = f \circ g_2$ .

*Solución:*

```
Mf = matrix(Zmod(43), [[24, 23, 11, 26], [9, 17, 33, 22], [16, 16, 13, 4]])
Mfp = block_matrix([[Mf, 1]])
Mfr = Mfp.echelon_form()
```

$$M(f) \cdot M(g) = I \rightarrow M(g) = M(f)^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 24 & 23 & 11 & 26 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 17 & 33 & 22 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 16 & 13 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17 & 24 & 19 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 21 & 33 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 23 & 39 & 21 & 13 \end{array} \right)$$

**Ejercicio 4.** Sea  $K = \mathbb{Z}_7$  y consideremos las bases de  $K^3$  dadas por  $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$  siendo

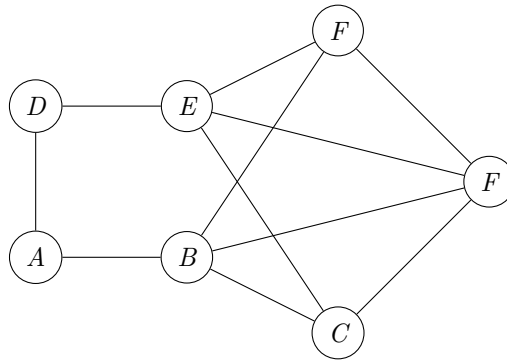
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$ , responde a las siguientes preguntas:

- Calcula la matriz de cambio de base  $B$  a la base canónica.
- Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de  $v$  en base canónica.
- Calcula la matriz de cambio de base  $B$  a  $B'$ .
- Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de  $v$  en base  $B'$ .
- Determina si los vectores  $\{w_1, w_2, v\}$  forman una base de  $K^3$ .

*Solución:*

**Ejercicio 5.** De termina si existe un camino abierto euleriano en el siguiente grafo. En caso de existir, calcúlalo:



*Solución:*