**PRÁCTICAS DE ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA.**
**INVERSAS LATERALES**

Los ejercicios que debes realizar para completar esta tarea son al menos el Ejercicio 7, el Ejercicio 24 y el Ejercicio 52.

## 1. Inversas Laterales

**Ejercicio 1.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 11 & 16 & 0 & 14 \\ 7 & 15 & 8 & 15 \\ 1 & 10 & 6 & 15 \\ 4 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{17})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(17),[[11,16,0,14],
[7,15,8,15],
[1,10,6,15],
[4,9,6,4]])
```

**Ejercicio 2.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 28 & 10 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 19 & 14 & 15 & 14 & 22 & 10 \\ 28 & 8 & 20 & 24 & 17 & 28 \\ 10 & 16 & 16 & 3 & 25 & 20 \\ 13 & 14 & 23 & 13 & 25 & 16 \\ 27 & 4 & 28 & 18 & 9 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{Z}_{29})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(29),[[28,10,8,4,5,1],
[19,14,15,14,22,10],
[28,8,20,24,17,28],
[10,16,16,3,25,20],
[13,14,23,13,25,16],
[27,4,28,18,9,14]])
```

**Ejercicio 3.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,-1,-1,-2,2,4],
[0,1,0,1,-3,-4],
[0,-1,1,2,6,-4],
[-1,-1,1,1,4,1]])
```

**Ejercicio 4.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 3 & 0 \\ 13 & 17 & 38 & 39 \\ 17 & 12 & 15 & 36 \\ 16 & 30 & 37 & 40 \\ 36 & 10 & 5 & 14 \\ 38 & 15 & 19 & 16 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_{43})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(43),[[12,9,3,0],
[13,17,38,39],
[17,12,15,36],
[16,30,37,40],
[36,10,5,14],
[38,15,19,16]])
```

**Ejercicio 5.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 28 & 8 & 22 & 14 \\ 22 & 0 & 26 & 2 \\ 11 & 21 & 17 & 2 \\ 28 & 2 & 20 & 21 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{29})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(29),[[28,8,22,14],
[22,0,26,2],
[11,21,17,2],
[28,2,20,21]])
```

**Ejercicio 6.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & -1 & 9 & -6 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -6 & -3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[5,3,3,-1,9,-6],
[-2,-1,-1,0,-5,1],
[2,1,2,3,5,-8],
[1,0,0,2,7,3],
[0,0,0,2,3,1],
[2,2,2,-6,-3,-4]])
```

**Ejercicio 7.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 7 & 34 & 28 & 30 \\ 31 & 30 & 31 & 13 \\ 29 & 12 & 6 & 17 \\ 8 & 28 & 11 & 23 \\ 1 & 0 & 17 & 22 \\ 17 & 35 & 31 & 4 \\ 14 & 32 & 0 & 29 \\ 9 & 17 & 15 & 32 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{8\times 4}(\mathbb{Z}_{37})$$

*Solución:*

```
A = matrix(Zmod(37),[[7,34,28,30],
[31,30,31,13],
[29,12,6,17],
[8,28,11,23],
[1,0,17,22],
[17,35,31,4],
[14,32,0,29],
[9,17,15,32]])

Ap = block_matrix([[A, 1]])
Ar = Ap.echelon_form()

Atp = block_matrix([[A.T, 1]])
Atr = Atp.echelon_form()
Atr = copy(Atr)
Atr.subdivide([3], [8])

B = Atr.subdivision(1, 1).T
```

Ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrrrrrr} 7 & 34 & 28 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 30 & 31 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 12 & 6 & 17 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 28 & 11 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 17 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 35 & 31 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 32 & 0 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 17 & 15 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reducida

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrrrrrr} 1 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 26 & 34 \\ 0 & 1 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 15 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 33 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 34 & 28 \end{array}\right)$$

No sale identidad por tanto no tiene inversa por la izquierda

Transpuesta ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|rrrr} 7 & 31 & 29 & 8 & 1 & 17 & 14 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & 30 & 12 & 28 & 0 & 35 & 32 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 28 & 31 & 6 & 11 & 17 & 31 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 13 & 17 & 23 & 22 & 4 & 29 & 32 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reducida

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 7 & 7 & 14 & 31 & 27 & 0 & 5 & 16 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 32 & 24 & 34 & 17 & 20 & 0 & 0 & 33 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 32 & 25 & 17 & 8 & 26 & 0 & 26 & 14 & 29 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 & 13 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} I & B^t \\ 0 & H^t \end{bmatrix}$$

Sale identidad, por tanto existe matriz inversa lateral por la izquierda, que es $B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 25 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(5),[[3,3,2,4],
[4,0,0,3],
[4,0,1,3],
[3,4,0,4],
[1,1,2,2],
[0,0,3,4]])
```

**Ejercicio 9.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -6 & -7 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,-2,1,3,3,4],
[-1,3,-1,-6,-7,-7],
[-2,1,-1,0,2,-1],
[-2,3,-1,-5,-5,-6]])
```

**Ejercicio 10.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & 27 & 35 & 2 \\ 3 & 16 & 31 & 6 \\ 8 & 6 & 26 & 13 \\ 33 & 15 & 33 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{37})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(37),[[5,27,35,2],
[3,16,31,6],
[8,6,26,13],
[33,15,33,14]])
```

**Ejercicio 11.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 8}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,0,-1,-1,-1,-4,-2,3],
[1,2,-1,0,-1,-4,2,2],
[0,0,0,1,2,4,2,-8],
[0,0,-1,-2,-2,-6,-4,7]])
```

**Ejercicio 12.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,1,2,0,1,7],
[-1,0,-1,-1,3,-5],
[-1,-1,-1,-2,5,-4],
[-1,1,0,-1,4,-3]])
```

**Ejercicio 13.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ -4 & 4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & -6 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{8\times 4}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[5,-5,-6,-1],
[0,1,2,-8],
[-4,4,5,0],
[-3,2,3,4],
[4,-4,-6,5],
[-4,5,5,-2],
[0,0,-3,9],
[-2,2,0,6]])
```

**Ejercicio 14.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & -9 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & -4 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,1,0,-2,1,5],
[0,1,1,-3,6,6],
[0,-2,-1,3,-9,-5],
[-1,-2,0,3,-4,-7]])
```

**Ejercicio 15.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,1,2,4,2,9],
[-1,0,0,1,1,-1],
[1,-1,-1,-3,0,1],
[1,0,0,0,-1,4],
[0,2,2,6,-1,7],
[0,-1,-2,-3,-4,-2]])
```

**Ejercicio 16.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 15 & 22 \\ 20 & 0 & 1 & 13 \\ 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 14 & 15 \\ 21 & 11 & 9 & 12 \\ 12 & 16 & 13 & 11 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 4}(\mathbb{Z}_{23})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(23),[[10,15,15,22],
[20,0,1,13],
[7,8,10,3],
[3,6,14,15],
[21,11,9,12],
[12,16,13,11]])
```

**Ejercicio 17.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 6 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(11),[[6,6,5,4],
[10,6,1,9],
[4,0,1,6],
[3,7,10,4]])
```

**Ejercicio 18.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{7})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(7),[[6,6,0,6],
[1,0,1,6],
[1,2,0,2],
[6,1,5,3]])
```

**Ejercicio 19.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 27 & 35 & 31 & 10 & 37 & 19 \\ 11 & 30 & 46 & 38 & 27 & 34 \\ 35 & 13 & 20 & 3 & 23 & 38 \\ 6 & 45 & 40 & 25 & 23 & 19 \\ 28 & 1 & 11 & 40 & 6 & 20 \\ 7 & 37 & 15 & 15 & 32 & 27 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 6}(\mathbb{Z}_{47})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(47),[[27,35,31,10,37,19],
[11,30,46,38,27,34],
[35,13,20,3,23,38],
[6,45,40,25,23,19],
[28,1,11,40,6,20],
[7,37,15,15,32,27]])
```

**Ejercicio 20.** *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(11),[[3,10,9,8],
[5,0,2,8],
[2,8,9,10],
[2,8,9,0]])
```

## 2. Vectores Linealmente Independientes y Generadores de $K^n$

**Ejercicio 21.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^6$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[2,1,-5,9],
[1,1,-1,2],
[0,-1,-2,2],
[1,2,2,-2],
[0,-1,1,-4],
[-1,1,5,-4]])
```

**Ejercicio 22.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,2,8,1],
[0,1,3,1],
[1,1,0,2],
[0,-1,2,-1],
[0,1,5,1]])
```

**Ejercicio 23.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,2,2,-1,-3,7],
[0,1,3,-2,1,7],
[0,0,1,-1,0,3],
[1,-1,-1,0,-5,2],
[0,1,2,-1,2,3]])
```

**Ejercicio 24.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^6$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
A = matrix(QQ,[[3,1,7,8,6],
[2,1,6,6,3],
[0,2,9,5,-5],
[3,2,6,6,3],
[0,1,8,4,-8],
[1,-1,-7,-4,2]])

Ar = A.echelon_form()
```

Al reducir la matriz, sale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyo rango (n de pivotes) es 5. El rango coincide con el numero de columnas (5) pero no con el numero de filas (6), por tanto los vectores columnas son linealmente independientes, es decir, inyectiva.

**Ejercicio 25.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{29}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 24 & 11 \\ 2 & 2 & 20 \\ 11 & 5 & 0 \\ 11 & 13 & 16 \\ 6 & 16 & 12 \\ 28 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(29),[[10,24,11],
[2,2,20],
[11,5,0],
[11,13,16],
[6,16,12],
[28,20,25]])
```

**Ejercicio 26.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{13}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 10 & 11 & 1 & 3 \\ 11 & 3 & 11 & 12 & 2 & 3 \\ 11 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 8 & 12 & 12 & 6 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 5 & 12 & 12 & 11 \\ 10 & 4 & 10 & 7 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(13),[[12,2,10,11,1,3],
[11,3,11,12,2,3],
[11,1,6,4,3,8],
[8,12,12,6,3,10],
[3,2,5,12,12,11],
[10,4,10,7,12,9]])
```

**Ejercicio 27.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,0,3],
[0,1,-3],
[-1,-3,9],
[1,1,-4],
```

```
[0,-3,6],
[0,-2,8],
[-1,-3,9],
[0,-3,4]])
```

**Ejercicio 28.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_7}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(7),[[3,5,4,1],
[2,6,1,0],
[6,1,5,5],
[0,5,2,6],
[2,2,4,2],
[5,1,5,4],
[2,6,6,4]])
```

**Ejercicio 29.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,1,-2,4,-2],
[0,1,-2,8,-6],
[0,1,-1,4,-4],
[0,0,-1,5,-2],
[-1,0,0,-1,3]])
```

**Ejercicio 30.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(5),[[4,1,4],
[2,2,2],
[3,0,4],
[0,3,0],
[4,3,3],
[0,0,0],
[3,0,2]])
```

**Ejercicio 31.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{13}}^6$,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 & 8 & 10 \\ 12 & 11 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(13),[[6,0,10,8,10],
[12,11,5,7,6],
[1,2,9,9,7],
[7,8,7,4,3],
[1,5,1,6,2],
[8,8,10,8,7]])
```

**Ejercicio 32.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{17}}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 8 \\ 5 & 10 & 4 \\ 5 & 15 & 15 \\ 3 & 11 & 11 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 15 & 12 \\ 11 & 2 & 13 \\ 0 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(17),[[12,9,8],
[5,10,4],
[5,15,15],
[3,11,11],
[4,2,4],
[0,15,12],
[11,2,13],
[0,11,4]])
```

**Ejercicio 33.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{43}}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 40 & 42 & 1 & 5 \\ 12 & 30 & 13 & 8 & 31 \\ 3 & 33 & 4 & 41 & 9 \\ 15 & 5 & 21 & 28 & 19 \\ 0 & 36 & 18 & 33 & 19 \\ 41 & 29 & 5 & 22 & 28 \\ 5 & 32 & 10 & 19 & 31 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(43),[[8,40,42,1,5],
[12,30,13,8,31],
[3,33,4,41,9],
[15,5,21,28,19],
[0,36,18,33,19],
[41,29,5,22,28],
[5,32,10,19,31]])
```

**Ejercicio 34.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-5,-4,-1,2],
[-3,-5,-4,-8],
[0,0,1,5],
[-2,-3,-3,-7],
[2,3,3,5],
[0,-2,-3,-5],
[2,2,1,1],
[-1,-2,-2,-6]])
```

**Ejercicio 35.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^8$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & 8 \\ 2 & -6 & -2 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -7 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[2,-5,-5],
[1,-2,-2],
[-4,7,8],
[2,-6,-2],
[3,-5,-5],
[0,-2,-7],
[3,-8,-5],
[0,-5,-9]])
```

**Ejercicio 36.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^7$,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-2,-1,4,-8],
[1,0,-2,-5],
[1,0,-1,0],
[-1,-2,3,5],
[-2,1,2,8],
[-1,0,2,0],
[0,2,1,8]])
```

**Ejercicio 37.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -3 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -1 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,-2,-1,1,-6,1],
[-1,0,-4,-3,-5,2],
[-2,-1,-4,-1,-7,-1],
[2,3,2,-2,9,1],
[0,2,-3,-6,-2,8]])
```

**Ejercicio 38.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{47}}^5$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 44 & 29 & 24 & 16 \\ 1 & 20 & 42 & 44 & 39 \\ 27 & 34 & 17 & 34 & 33 \\ 17 & 29 & 5 & 10 & 28 \\ 11 & 9 & 30 & 41 & 45 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(47),[[42,44,29,24,16],
[1,20,42,44,39],
[27,34,17,34,33],
[17,29,5,10,28],
[11,9,30,41,45]])
```

**Ejercicio 39.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{23}}^6$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 15 & 8 & 4 & 20 \\ 15 & 8 & 6 & 8 & 18 & 14 \\ 13 & 7 & 10 & 6 & 9 & 3 \\ 16 & 10 & 14 & 15 & 2 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & 22 & 15 & 11 \\ 22 & 12 & 7 & 2 & 18 & 1 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(23),[[2,2,15,8,4,20],
[15,8,6,8,18,14],
[13,7,10,6,9,3],
[16,10,14,15,2,10],
[4,0,0,22,15,11],
[22,12,7,2,18,1]])
```

**Ejercicio 40.** *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_{43}}^8$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 39 & 3 & 6 \\ 25 & 24 & 38 \\ 17 & 20 & 18 \\ 12 & 1 & 28 \\ 27 & 30 & 34 \\ 24 & 41 & 26 \\ 0 & 19 & 32 \\ 5 & 15 & 35 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

```
matrix(Zmod(43),[[39,3,6],
[25,24,38],
[17,20,18],
[12,1,28],
[27,30,34],
[24,41,26],
```

```
[0,19,32],
[5,15,35]])
```

## 3. Formas Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial

**Ejercicio 41.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -83 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[2,-83,-2],
[2,3,-1],
[-3,1,-1],
[-3,1,3],
[1,1,-1],
[1,3,0]])
```

**Ejercicio 42.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & -8 \\ -7 & 1 & -33 & -1 \\ -8 & 8 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,0,-5,1],
[2,3,-1,-1],
[-1,2,-1,1],
[2,0,-1,-3],
[2,-1,0,-2],
[3,-1,-4,-8],
[-7,1,-33,-1],
[-8,8,19,0]])
```

**Ejercicio 43.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -235857 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,1,0],
[-2,1,-1],
[-3,3,-2],
[4,-1,0],
[0,1,-235857]])
```

**Ejercicio 44.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -2 & 40 \\ -5 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,3,2,-2,40],
[-5,0,-4,1,1],
[-2,-1,1,1,0],
[-2,0,-1,5,1],
[8,-3,2,0,1],
[0,-5,0,1,1],
[-1,1,1,0,-1],
[1,-1,-1,0,-9]])
```

**Ejercicio 45.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 27 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[2,6,8],
[0,3,1],
[0,2,1],
[0,-1,1],
[-1,0,2],
[27,14,3]])
```

**Ejercicio 46.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 293 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 10 & -1 \\ -1 & -18 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,293,1,-3],
[-1,-1,1,-1],
[0,0,1,2],
[-2,3,-2,5],
[-1,0,10,-1],
[-1,-18,0,1],
[2,-1,1,1],
[1,-4,0,26]])
```

**Ejercicio 47.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & 13 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-3,5,-1,-1],
[1,-1,-2,-4],
[-1,-1,-7,-3],
[1,-1,-1,-6],
[-1,13,3,2],
[1,1,7,0],
[0,-2,-2,-1],
[-2,2,0,2]])
```

**Ejercicio 48.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 75 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,-2,0],
[1,-2,-1],
[75,-3,1],
[0,-1,15],
[0,0,1],
[0,0,1],
[1,1,0]])
```

**Ejercicio 49.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,1,3,0],
[0,0,-2,0],
[0,-6,1,-2],
[1,5,-1,0],
[-1,1,-1,-2],
[-10,0,0,0],
[19,-1,-2,-2],
[1,-11,1,1]])
```

**Ejercicio 50.** *Sea $V$ el espacio vectorial sobre los números reales generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

*Escribe $V$ en forma implícita*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,0,-2],
[2,0,-1],
[2,3,-1],
[0,-6,1],
[0,-3,0],
[0,2,-1]])
```

**Ejercicio 51.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-6,0,-1,0,-2],
[0,-2,1,2,0],
[1,0,0,0,-3]])
```

**Ejercicio 52.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 20 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -43 & -2 & 1 & -1 \\ 10 & 62 & 1 & 1 & 0 & -9 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
A = matrix(QQ,[[-1,0,1,0,0,0,0,6],
[20,2,1,0,0,-1,0,-1],
[0,1,-2,1,-2,1,0,0],
[-1,-2,-1,-1,-43,-2,1,-1],
[10,62,1,1,0,-9,1,0]])

Atp = block_matrix([[A.T, 1]])
Atr = Ap.echelon_form()
Atr = copy(Atr)
Atr.subdivide([4], [5])
H = Atr.subdivision(1, 1).T
```

El espacio que nos dan es $W = N(A)$, calcular una matriz H tal que $W = C(B)$. Para ello ampliamos la matriz A transpuesta (por ser de tipo A) por la identidad

$$[A^t|I] = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrr} -1 & 20 & 0 & -1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 62 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y se reduce

$$\left(\begin{array}{rrrrr|rrrrrrr} 1 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 26 & 34 \\ 0 & 1 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 15 & 34 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 33 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 34 & 28 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} I & B^t \\ 0 & H^t \end{bmatrix}$$

y por la derecha de los 0s queda

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 33 & 11 & 13 & 5 \\ 5 & 19 & 22 & 34 \\ 21 & 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 53.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 21 & 1 & 2 & 1 & 1 & 26 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -8 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-2,-1,1,-2,3,1],
[21,1,2,1,1,26],
[1,1,1,5,3,-1],
[-1,-8,0,3,0,7]])
```

**Ejercicio 54.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -197 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & -86 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -8 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -10 & -1 & 0 & 1 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,-197,0,1,9,0,0,0,-86],
[-1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,1],
[-3,-8,1,1,-1,-1,1,0,-1],
[4,0,-10,-1,0,1,1,7,5],
[0,1,0,-4,2,0,-2,0,-4]])
```

**Ejercicio 55.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 137 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -61 & -2 & 182 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & -13 & -1 \\ 13 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 11 \\ 2 & 10 & 1 & 2 & -1 & 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,0,0,-3,-1,-1,137,1,3],
[-2,-3,-61,-2,182,-3,4,0,0],
[1,1,2,1,-1,1,1,-13,-1],
[13,0,-7,0,0,1,-6,-7,11],
[2,10,1,2,-1,1,7,-5,-1]])
```

**Ejercicio 56.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -11 & 28 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -7 & -12 & -1 & -9 & 1 & 1 \\ 61 & 0 & 0 & 11 & -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,0,1,-1,14,-2,0,-1,-1],
[-1,-1,-1,0,1,-1,-1,1,-5],
[1,-11,28,-3,2,1,1,1,1],
[-1,1,-1,-7,-12,-1,-9,1,1],
[61,0,0,11,-2,-1,1,-1,-1]])
```

**Ejercicio 57.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -13 & -84 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -18 & 5 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[-1,1,-1,-1,-2,4,7],
[0,0,-3,-13,-84,2,-1],
[1,1,0,0,1,-18,5]])
```

**Ejercicio 58.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -19 & -1 & -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 64 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & -47 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,-19,-1,-1,-2,1,-2,2,8],
[-1,-1,0,-2,1,0,-1,1,-4],
[3,64,0,2,1,0,1,0,0],
[-1,4,1,2,2,2,1,-1,-5],
[-2,8,1,1,0,0,-47,2,-1]])
```

**Ejercicio 59.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -8 & 1 & 0 & -68 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[0,0,-1,1,-4,1,2],
[6,0,-8,1,0,-68,-1],
[-3,0,-1,2,1,2,2],
[0,1,-1,-1,-1,-1,1]])
```

**Ejercicio 60.** *Sea $W$ el espacio vectorial sobre los números reales dado como anulador por la derecha de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 10 & -5 & -1 \\ -1 & -8 & 2 & -7 & -17 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -11 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

*es decir, $W = N(A)$. Escribe $W$ en forma paramétrica.*

*Solución:*

```
matrix(QQ,[[1,-1,2,2,10,-5,-1],
[-1,-8,2,-7,-17,-2,0],
[4,3,-1,-11,1,1,-1],
[1,4,1,1,-1,2,1],
[1,-2,-1,2,1,5,-2]])
```