

# PRÁCTICAS DE ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA. BASES Y COORDENADAS

`latex.matrix_delimiters("[", ""])`

**Ejercicio 1.** Sea  $V$  el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 6}(\mathbb{Z}_7)$$

Determina si el vector  $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  está en  $V$  y en caso de estarlo, calcula sus

coordenadas en base  $B$ .

*Solución:*

```
B=matrix(Zmod(7),[[0,2,2,2,3,1],[4,0,4,6,6,6],
[6,1,5,1,2,3],[4,3,0,2,6,1],
[2,6,6,4,4,0],[4,3,5,3,5,5]])
y=column_matrix(Zmod(7),[2,2,1,5,0,4])
By = block_matrix(1,2,[B,y])
R=By.echelon_form()
```

El vector  $y$  está en  $V = C(B)$  si es combinación lineal de las columnas de la matriz  $B$ . Ello equivale a que el sistema de ecuaciones  $B \cdot x = y$  es compatible.

Determinamos la matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{array} \right]$$

Reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Como la columna de términos independientes no es pivote, el sistema es compatible y el vector  $y$  está en  $V$ . Además se tiene que

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}_B$$

**Ejercicio 2.** Sea  $V$  el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector  $y = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$  está en  $V$  y en caso de estarlo, calcula sus

coordenadas en base  $B$ .

*Solución:*

```
B = matrix(QQ, [[1, -2, -5], [0, 1, 3], [3, -4, -8], [-1, 0, 4], [1, -4, -6]])
y = column_matrix(QQ, [-5, 3, -8, 4, -5])
```

```
By = block_matrix([[B, y]])
Byr = By.echelon_form()
```

$$[B|y] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -8 & -8 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -6 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La columna de términos independientes de la matriz  $B$  ampliada por  $y$  reducida, es pivote, y por tanto no está en  $V$ , y por tanto el sistema es incompatible.

**Ejercicio 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial del cual conocemos dos bases,  $B$  y  $B'$  que corresponden a las columnas de las siguientes matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 15 & -8 & -38 \\ 2 & -1 & -6 \\ -10 & 5 & 31 \\ 4 & -2 & -14 \\ 8 & -4 & -23 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base  $P_{B'B}$ .

*Solución:*

Dadas las bases  $B$  y  $B'$  sabemos que la matriz del cambio  $P_{B'B}$  es la matriz  $A \cdot B'$  donde  $A$  es una inversa lateral por la izquierda de  $B$ .

```
B=matrix(QQ,[[1,7,-1],[0,1,-1],
[0,-5,6],[0,2,-4],
[0,4,-3],[0,0,-3]])
B1=matrix(QQ,[[15,-8,-38],[2,-1,-6],
[-10,5,31],[4,-2,-14],
[8,-4,-23],[0,0,-3]])
BI = block_matrix(1,2,[B,1])
R=BI.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(3,3)
A=R.subdivision(0,1)
```

Pasamos a determinar una inversa lateral por la izquierda de la matriz  $B$ . Para ello ampliamos a la derecha de la matriz  $B$  con la identidad

$$\left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Reducimos por filas dicha matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{17}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \end{array} \right]$$

Una inversa lateral por la izquierda de  $B$  es la matriz  $A$ , donde

$$A = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

Por tanto

$$P_{B'B} = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{ccc} 15 & -8 & -38 \\ 2 & -1 & -6 \\ -10 & 5 & 31 \\ 4 & -2 & -14 \\ 8 & -4 & -23 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Este problema es equivalente a calcular la matriz de la aplicación lineal

$$V_{B'} \xrightarrow{id} V_B$$

y podemos aplicar la fórmula

$$P_{B'B} = M_{B'B}(id) = A \, id(B') = AB' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 4.** Sea  $V$  un espacio vectorial del cual conocemos la base  $B$  que corresponden a las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_7)$$

Calcula la matriz de cambio de base  $P_{C_4 B}$ .

*Solución:*

```
B=matrix(Zmod(7),[[1,7,-1,2],[0,1,-1,-1],
[0,-5,6,-4],[0,2,-4,-1]])
```

Tenemos el siguiente diagrama:

$$V_{C_4} \xrightarrow{id} V_B$$

En general, la matriz del cambio de base es la inversa por la izquierda de  $B$  por la matriz de  $C_4$ . Como  $B$  es cuadrada, su inversa por la izquierda es su inversa normal y la matriz asociada a la base canónica es la identidad, por tanto

$$P_{C_4 B} = B^{-1}I = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -8 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Si  $B'$  y  $B$  son bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Calcula  $M_{B'B}(f)$ .

*Solución:*

```
Mf = matrix(QQ,[[1,2,3],[-3,-5,-8],[-1,-5,-6]])
B1=matrix(QQ,[[1,1,6],[-1,0,-2],[0,0,1]])
B=matrix(QQ,[[ -2,7,3],[1,-4,-1],[0,0,1]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}_{B'}^3 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}_C^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_C^3 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}_B^3 \\
& \searrow M_{B'C}(id) & & \searrow M_{CC}(f) & & \searrow M_{CB}(id) & \\
& & & \searrow f & & & \\
& & & M_{B'B}(f) & & & 
\end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{CB}(id) = P_{CB} = B^{-1}I = B^{-1}$  porque  $B$  es cuadrada y su inversa por la izquierda es su inversa.
- $M_{CC}(f) = M(f)$  nos la dan.
- $M_{B'C}(id) = P_{B'C} = I^{-1}B' = B'$  porque la matriz asociada a la base canónica es la matriz identidad, que es cuadrada y su inversa es ella misma.

Por lo tanto

$$M_{B'B}(f) = B^{-1}M(f)B' = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -8 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 82 \\ 1 & 4 & 25 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** Sea la aplicación  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo  $B'$  y  $B$  las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix},$$

Calcula  $M(f)$ .

*Solución:*

```

MB1Bf = matrix(QQ, [[-2,-6,2,0],[-3,-9,3,0]])
B1=matrix(QQ, [[6,-4,0,3],[-1,2,-4,-7],[0,2,-5,-7],[5,-3,-1,1]])
B=matrix(QQ, [[-1,5],[-2,9]])

```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}_C^4 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}_{B'}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_B^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}_C^2 \\
& \searrow M_{CB'}(id) & & \searrow M_{B'B}(f) & & \searrow M_{BC}(id) & \\
& & & \searrow f & & & \\
& & & M_{CC}(f) & & & 
\end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{CB'}(id) = P_{CB'} = (B')^{-1}I = (B')^{-1}$ .
- $M_{B'B}(f)$  nos la dan.
- $M_{BC}(id) = P_{BC} = I^{-1}B = B$ .

De donde

$$M(f) = M_{CC}(f) = M_{BC}(id) M_{B'B}(f) M_{CB'}(id) = B M_{B'B}(f) (B')^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 3 & 2 & -22 \\ 23 & 3 & 3 & -27 \\ 19 & 4 & 1 & -22 \\ -7 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -897 & -104 & -130 & 1053 \\ -1587 & -184 & -230 & 1863 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 7.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$M_{C_2B_1}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcula  $M_{C_2B_2}(f)$  siendo  $B_1$  y  $B_2$  las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

*Solución:*

Para pintar el diagrama puedes usar como base el siguiente dibujo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_C^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}_{B_1}^4 & \xrightarrow{\quad id \quad} & \mathbb{R}_{B_2}^4 \\ & \searrow \quad M_{C_2B_1}(f) \quad & & \searrow \quad M_{B_1B_2}(id) \quad & \\ & & & \nearrow \quad f \quad & \\ & & & \nearrow \quad M_{C_2B_2} \quad & \end{array}$$

```
MC2B1 = matrix(QQ, [[-2, -8], [2, 9], [-1, -4], [-1, -1]])
B1 = matrix(QQ, [[1, 1, -2, -2], [1, 2, -3, -4], [1, -1, 1, 5], [-4, -1, 7, 9]])
B2 = matrix(QQ, [[1, 2, -1, 8], [0, 1, -1, 0], [0, 5, -4, 5], [0, 5, -6, -4]])
MCB2 = B2.inverse() * B1 * MC2B1
```

Si calculamos las matrices de cada de esas aplicaciones tenemos

- $M_{C_2B_1}(f)$  nos la dan
- $M_{B_1B_2}(id) = P_{B_1B_2} = B_2^{-1}B_1$

Entonces

$$M(f) = M_{C_2B_2}(f) = M_{B_1B_2}(id)M_{C_2B_1}(f) = B_2^{-1}B_1M_{C_2B_1}(f)$$

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 33 & -4 & -3 \\ 0 & 46 & -4 & -5 \\ 0 & 45 & -4 & -5 \\ 0 & -10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 371 & 1015 \\ 504 & 1370 \\ 495 & 1344 \\ -110 & -300 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$M_{B_1 C}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcula  $M_{B_2 C}(f)$  siendo  $B_1$  y  $B_2$  las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

*Solución:*

```
MB11C2f = matrix(QQ, [[4,0,8],[3,0,6]])
B11=matrix(QQ, [[-2,3,-5],[3,-5,8],[0,-4,5]])
B12=matrix(QQ, [[1,1,-2],[3,4,-8],[-5,-3,7]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_{B_2}^3 & \xrightarrow[id]{M_{B_2 B_1}(id)} & \mathbb{R}_{B_1}^3 & \xrightarrow[M_{B_1 C}(f)]{f} & \mathbb{R}_C^2 \\ & \searrow f & & \nearrow & \\ & M_{B_2 C}(f) & & & \end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{B_2 B_1}(id) = B_1^{-1} B_2$  porque  $B_1$  es cuadrada y su inversa por la izquierda es su inversa.
- $M_{B_1 C}(f)$  nos la dan.

Entonces

$$\begin{aligned} M_{B_2 C}(f) &= M_{B_1 C}(f) M_{B_2 B_1}(id) = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -220 & -256 & 516 \\ -165 & -192 & 387 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 9.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$M_{B' B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

siendo  $B'$  y  $B$  las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcula  $M(f)$ .

*Solución:*

```
MB1Bf = matrix(QQ, [[-2,2],[-1,1]])
B1=matrix(QQ, [[6,-5],[5,-4]])
B=matrix(QQ, [[-1,-5],[2,9]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_C^2 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} id \\ M_{CB'}(id) \end{smallmatrix}} & \mathbb{R}_{B'}^2 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} f \\ M_{B'B}(f) \end{smallmatrix}} & \mathbb{R}_B^2 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} id \\ M_{BC}(id) \end{smallmatrix}} & \mathbb{R}_C^2 \\ & \searrow \quad \quad \quad \nearrow & & & & & \\ & & & f & & & \\ & & & M_{CC}(f) & & & \end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{CB'}(id) = P_{CB'} = (B')^{-1}I = (B')^{-1}$  porque  $B'$  es cuadrada y su inversa por la izquierda es su inversa.
- $M_{B'B}(f)$  nos la dan.
- $M_{BC}(id) = P_{BC} = I^{-1}B = B$ .

De donde

$$\begin{aligned} M(f) = M_{CC}(f) &= M_{CC}(id \circ f \circ id) = M_{BC}(id) M_{B'B}(f) M_{CB'}(id) = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -13 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 10.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$  tal que

$$M_{B'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Calcula  $M_{C_2B}(f)$ . siendo  $B'$  y  $B$  las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Solución:*

```
MB1C3f = matrix(Zmod(5), [[2,3],[4,4],[1,3]])
B1=matrix(Zmod(5), [[6,-5],[5,-4]])
B=matrix(Zmod(5), [[2,3,4],[0,-3,4],[0,0,3]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_{5C}^2 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} id \\ M_{CB'}(id) \end{smallmatrix}} & \mathbb{Z}_{5B'}^2 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} f \\ M_{B'C}(f) \end{smallmatrix}} & \mathbb{Z}_{5C}^3 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} id \\ M_{CB}(id) \end{smallmatrix}} & \mathbb{Z}_{5B}^3 \\ & \searrow \quad \quad \quad \nearrow & & & & & \\ & & & f & & & \\ & & & M_{CB}(f) & & & \end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{CB'}(id) = P_{CB'} = (B')^{-1}I = (B')^{-1}$ .
- $M_{B'C}(f)$  nos la dan.
- $M_{CB}(id) = P_{CB} = B^{-1}I = B^{-1}$ .

De donde

$$M_{CB}(f) = M_{CB}(id \circ f \circ id) = M_{CB}(id) M_{B'C}(f) M_{CB'}(id)$$



$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 11.** *Calcula una base del espacio  $N(A)$ , anulador por la derecha de  $A$  siendo  $A$  la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

*Solución:*

```
A=matrix(Zmod(3),[[1,1,1,2],[1,0,2,0],[0,1,2,2]])
R = A.echelon_form()
P = PolynomialRing(Zmod(3),4,'x')
X = matrix(P,4,1,P.gens())
Ecuaciones = A*X
EcuacionesR = R*X
v1 = column_matrix(Zmod(3),[1,1,1,0])
v2 = column_matrix(Zmod(3),[0,1,0,1])
```

$N(A)$  es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

que escrito en forma de ecuaciones es

$$x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_0 - x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Si reducimos por filas obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde al sistema de ecuaciones

$$x_0 - x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

Si tomamos como parámetros las variables  $x_2 = a$  y  $x_3 = b$  podemos escribir las soluciones como

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto nos da la base que buscamos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 12.** *Calcula una base de  $C(A)$ , espacio generado por las columnas de  $A$  siendo  $A$  la matriz*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:*

```
A = matrix(Zmod(5), [[4,4,2],[2,1,0],[2,2,2]])
R = A.echelon_form()
```

Debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Reducimos la matriz  $A$  (bastaría con triangularizar) y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Todas las columnas son columnas pivote. Las columnas de la matriz original forman la base buscada:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 13.** *Calcula una base de  $C(A^T)$ , espacio generado por las filas de  $A$ , siendo  $A$  la matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:*

```
A=matrix(Zmod(5), [[0,4,3,1],[1,0,2,0],[3,3,3,0]])
B=A.echelon_form()
```

Para ello vamos a combinar las filas de  $A$  para conseguir vectores linealmente independientes. Obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La base es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 14.** *Calcula una base de  $N(A^T)$ , espacio anulador por la izquierda de  $A$ , siendo  $A$  la matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:*

```
A=matrix(Zmod(3),[[0,2],[0,1],[2,0],[2,1]])
B=block_matrix(1,2,[A,1])
R=B.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(2,2)
H = R.subdivision(1,1)
```

Para ello vamos y puesto que sólo nos interesa detectar las filas de ceros reducimos la matriz extendida con la matriz identidad:

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Si nos quedamos con las filas a la derecha de las filas nulas de la reducción, la base es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 15.** *Sea  $V = C(B)$  el espacio generado por las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

*Extrae una base de entre los vectores columna de  $B$ .*

*Solución:*

```
B=matrix(Zmod(5),[[3,4,4,0],[1,0,0,0],[4,2,3,3]])
C=B.echelon_form()
```

Para encontrar la base debemos encontrar el máximo número de columnas libres es decir pivote. Reducimos  $B$  (bastaría con triangularizar) y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Las columnas pivote son 1, 2 y 3, por lo tanto la base es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 16.** Sea  $V$  un espacio vectorial con base  $B$  y consideremos los vectores linealmente independientes de  $V$  dados por las columnas de  $B'$ . Extiende  $B'$  usando columnas de  $B$  para formar una base de  $V$ , siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \\ -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R}) \quad B' = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$$

*Solución:*

```
B=matrix(QQ,[[1,-4],[-1,5],[-3,7],[1,-2]])
B1=column_matrix(QQ,[5,-6,-10,3])
B1B=block_matrix(1,2,[B1,B])
C=B1B.echelon_form()
```

La base que nos piden la obtendremos a través del conjunto generador de  $V$  dado por los vectores  $[B'|B]$ . Al reducirla (bastaría con triangularizar) obtenemos

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Las columnas pivote son 1 y 2, por lo que esas son precisamente las columnas de  $[B'|B]$  que son base buscada:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Ejercicio 17.** Sea  $V = C(B)$  y  $U = C(B')$ . Determina si el espacio  $U$  es un subespacio de  $V$ , siendo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 4}(\mathbb{Z}_5) \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:* Si  $V = C(B)$  y  $U = C(B')$ , entonces  $U \subseteq V$  si y sólo si todas las columnas de  $B'$  se pueden expresar como combinación lineal de las columnas de  $B$ , lo que equivale a que al reducir por filas la matriz  $[B|B']$ , las columnas de  $B'$  no son columnas pivote.

```
B=matrix(Zmod(5),[[0,3,2,4],[3,1,0,1],
[3,0,2,4],[0,0,3,3],[2,4,2,1]])
B1=matrix(Zmod(5),[[2,4],[2,4],
[0,2],[1,3],[2,3]])
BB1 = block_matrix(1,2,[B,B1])
R=BB1.echelon_form()
```

Ampliamos la matriz  $B$  a su derecha con la matriz  $B'$ .

$$[B|B'] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Reduciendo por filas obtenemos la matriz (sobraría con triangularizar)

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vemos que ninguna columna de la matriz  $B'$  es pivote, por lo tanto todos los vectores de  $B'$  están en  $V$  y  $U \leq V$ .

**Ejercicio 18.** Sea  $V = C(B)$  y  $U = C(B')$ . Determina si el espacio  $U$  es un subespacio de  $V$ , siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 5}(\mathbb{Z}_7) \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 5}(\mathbb{Z}_7)$$

*Solución:*

```
B = matrix(Zmod(7), [[3, 0, 4, 1, 3], [6, 6, 4, 4, 2], [4, 0, 5, 0, 0], [6, 3, 1, 0, 1],
Bp = matrix(Zmod(7), [[2, 3, 2, 3, 6], [6, 6, 1, 3, 1], [0, 2, 6, 0, 5], [4, 5, 4, 3, 5],
BBp = block_matrix([[B, Bp]])
BBpr = BBp.echelon_form()
```

$$[B|B'] = \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

No es subespacio porque hay columnas pivote en  $B'$ , no se puede representar como combinación lineal de  $B$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $V = N(H)$  y  $U = N(H')$ . Determina si el espacio  $V$  es un subespacio de  $U$ , siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 5}(\mathbb{Z}_5) \quad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2 \times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

*Solución:*

```

H=matrix(Zmod(5),[[1,4,4,2,0],[0,2,4,2,4],
[2,1,4,2,1],[2,2,1,3,3]])
H1=matrix(Zmod(5),[[4,2,3,4,2],[1,1,3,4,4]])
HTI = block_matrix(1,2,[H.T,1])
R=HTI.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(2,4)
A=R.subdivision(1,1)

```

Para ver si  $V$  es un subespacio de  $U$ , pasamos  $V$  a paramétricas,  $V = C(A)$ .  
Entonces como  $V = C(A)$  y  $U = N(H')$ ,  $V \leq U$  si y sólo si  $H' \cdot A = 0$ .  
Determinamos la matriz  $[H^T|I]$

$$[H^T|I] = \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Las paramétricas de  $V$  son  $V = C(A)$  donde  $A$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H' \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que  $V \leq U$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $V = N(H)$  y  $U = N(H')$ . Determina si el espacio  $V$  es un subespacio de  $U$ , siendo

$$H = \begin{bmatrix} 12 & 19 & 9 & 30 & 0 \\ 30 & 14 & 29 & 4 & 19 \\ 28 & 14 & 11 & 29 & 28 \\ 3 & 1 & 12 & 25 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 5}(\mathbb{Z}_{31}) \quad H' = \begin{bmatrix} 26 & 24 & 4 & 20 & 0 \\ 10 & 6 & 15 & 7 & 4 \\ 22 & 0 & 2 & 25 & 26 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 5}(\mathbb{Z}_{31})$$

*Solución:*

```

H=matrix(Zmod(31),[[12,19,9,30,0],[30,14,29,4,19],
[28,14,11,29,28],[3,1,12,25,13]])
H1=matrix(Zmod(31),[[26,24,4,20,0],[10,6,15,7,4],
[22,0,2,25,26]])
HTI = block_matrix(1,2,[H.T,1])

```

```

R=HTI.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(2,4)
A=R.subdivision(1,1)

```

Para ver si  $V$  es un subespacio de  $U$ , pasamos  $V$  a paramétricas,  $V = C(A)$ . Entonces como  $V = C(A)$  y  $U = N(H')$ ,  $V \leq U$  si y sólo si  $H' \cdot A = 0$ .

Determinamos la matriz  $[H^T|I]$

$$[H^T|I] = \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 12 & 30 & 28 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 14 & 14 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 29 & 11 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 4 & 29 & 25 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 28 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 8 \end{array} \right]$$

Las paramétricas de  $V$  son  $V = C(A)$  donde  $A$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 19 & 9 \\ 22 & 23 & 8 \end{bmatrix}$$

$$H' \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 24 & 4 & 20 & 0 \\ 10 & 6 & 15 & 7 & 4 \\ 22 & 0 & 2 & 25 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 1 & 29 \\ 27 & 14 & 17 \\ 26 & 19 & 1 \end{bmatrix}$$

Dicho producto no es la matriz nula, por tanto  $V$  no está contenido en  $U$ .

**Ejercicio 21.** Sea  $V = C(B)$  y  $U = N(H')$ . Determina el espacio  $U + V$  en paramétricas, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 14 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_{19}) \quad H' = \begin{bmatrix} 17 & 6 & 15 & 5 & 3 \\ 13 & 6 & 12 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2 \times 5}(\mathbb{Z}_{19})$$

*Solución:*

```

B=column_matrix(Zmod(19),[1,8,14,0,18])
H1=matrix(Zmod(19),[[17,6,15,5,3],[13,6,12,4,0]])
H1TI = block_matrix(1,2,[H1.T,1])
R=H1TI.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(2,2)
A=R.subdivision(1,1)

```

D=block\_matrix(1,2,[A.T,B])

Para determinar el espacio  $U + V$  en paramétricas, debemos en primer lugar determinar las paramétricas del espacio  $U$ , para ello reducimos la matriz  $[H'^T|I]$ .

$$[H'^T|I] = \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 17 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 17 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 0 \end{array} \right]$$

Las paramétricas de  $U$  son  $U = C(A)$  donde  $A$  es la matriz

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 11 & 8 & 16 \\ 14 & 10 & 0 \end{array} \right]$$

Unas ecuaciones paramétricas de  $U + V$  son

$$U + V = C \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 11 & 8 & 16 & 0 \\ 14 & 10 & 0 & 18 \end{array} \right]$$

**Ejercicio 22.** Sea  $V = C(B)$  y  $U = N(H')$ . Determina el espacio  $U \cap V$  en implícitas, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 15 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_{19}) \quad H' = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 15 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2 \times 5}(\mathbb{Z}_{19})$$

*Solución:*

```
B = column_matrix(Zmod(19), [1, 8, 15, 2, 16])
Hp = matrix(Zmod(19), [[1, 11, 0, 10, 0], [5, 15, 6, 2, 4]])
HpTI = block_matrix([[Hp.T, 1]])
HpTIr = HpTI.echelon_form()
HpTIr = copy(HpTIr)
HpTIr.subdivide(2,2)
A = HpTIr.subdivision(1,1)
BAT = block_matrix(2,1,[B.T,A])
BATr = BAT.echelon_form()
```



```

BAtTr = copy(BAtTr)
BAtTr.subdivide(None,4)

```

$$[H'^T|I] = \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{array} \right]$$

Las paramétricas de  $U$  es  $U = C(A)$  donde  $A$  es

$$A = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 17 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{array} \right]$$

$U \cap V$  es

$$U \cap V = N\left(\frac{B}{A}\right) = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 8 & 15 & 2 & 16 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 17 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \end{array} \right]$$

Que en implícitas sería

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 12$$

$$x_4 = 16$$