

## AMD Curso 2023-2024

### Prácticas Semana 2

**Ejercicio 1.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{R}$  :*

$$x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 6$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$-x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5$$

$$x_4 = -2$$

*Solución.-*

```
A = matrix(QQ, [[1,-1,-5,-5], [-1,-1,2,1], [0,-1,-2,-3], [0,0,0,1]])
B = matrix(QQ, [[6], [1], [5], [-2]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
S = R[:, 4:]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) = [I|S]$$

La matriz  $A$  reducida es la identidad por tanto el Sistema es Compatible Determinado, por tanto la solución  $S$  es

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = -2$$

**Ejercicio 2.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{R}$  :*

$$2x_1 - x_2 = 8$$

$$x_1 - x_3 = -3$$

$$x_2 = -5$$

$$x_1 = 2$$

$$x_3 = 8$$

*Solución.-*

```
A = matrix(QQ, [[2,-1,0],[1,0,-1],[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]])
B = matrix(QQ, [[8],[-3],[-5],[2],[8]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En la cuarta fila de la matriz aumentada reducida,  $0 = 1$  es un absurdo, por tanto esto es un Sistema Incompatible.

**Ejercicio 3.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{Z}_7$  :*

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3$$

$$3x_3 + 3x_4 + x_5 = 1$$

$$4x_5 = 12$$

*Solución.-*

```
A=matrix(Zmod(7), [[3,1,3,5,2],[0,0,3,3,1],[0,0,0,0,4]])
B=matrix(Zmod(7), [3,1,12]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

La matriz aumentada reducida no tiene identidad, y no contiene absurdos, por tanto debe ser un Sistema Compatible Indeterminado:

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 + 3x_4 &= 2 \\x_3 + x_4 &= 4 \\x_5 &= 3\end{aligned}$$

Que parametrizando quedan dos parametros libres

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 3\alpha - 5\beta \\x_2 &= \beta \\x_3 &= 4 - \alpha \\x_4 &= \alpha \\x_5 &= 3\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{R}$ :*

$$\begin{aligned}-x_2 + 3x_3 &= 3 \\x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 7 \\x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 5\end{aligned}$$

*Solución.-*

```
A = matrix(QQ, [[0,-1,3],[1,-2,5],[1,-3,9],[1,-2,3],[2,-3,9]])
B = matrix(QQ, [[3],[3],[7],[1],[5]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 9 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & 5 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz de A reducida queda como identidad, y las filas extra no son absurdos, por tanto esto es un SCD, cuya solución es

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 \\x_2 &= 0 \\x_3 &= 1\end{aligned}$$

**Ejercicio 5.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{R}$ :*

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -1$$

$$x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

*Solución.-*

```
A = matrix(QQ,[[1,-1,1,2],[0,1,-2,-5],[0,1,-1,-2]])
B = matrix(QQ,[[2],[-1],[0]])
Ap = A.augment(B,subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Es SCI:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1 - \alpha$$

$$x_3 = 1 - 3\alpha$$

$$x_4 = \alpha$$

**Ejercicio 6.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{Z}_5$ :*

$$0 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

*Solución.-*

```
A = matrix(Zmod(5),[[0,0,0],[1,3,2],[4,1,1],[4,3,0],[4,3,0]])
B = matrix(Zmod(5),[[0],[0],[1],[3],[0]])
Ap = A.augment(B,subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$0 = 0$  es un absurdo por tanto es SI.

**Ejercicio 7.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{Z}_5$ :*

$$x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

*Solución.-*

```
A = matrix(Zmod(5), [[1,4,0,3], [0,1,0,4], [2,2,1,2], [2,2,3,3], [2,2,3,0]])
B = matrix(Zmod(5), [[0], [3], [4], [3], [3]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz reducida resulta la identidad sin absurdos y por tanto es SCD:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 0$$

**Ejercicio 8.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{Z}_{11}$ :*

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + x - x_4 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

*Solución.-*

```
A=matrix(Zmod(11),[[2,-1,1,1],[2,1,0,-1],[0,1,2,3]])
B=matrix(Zmod(11),[1,2,0]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

Matriz reducida es parte identidad sin absurdos, SCI, parametrización:

$$x_1 = 3 - 4\alpha$$

$$x_2 = 7 - 2\alpha$$

$$x_3 = 2 - 6\alpha$$

$$x_4 = \alpha$$

**Ejercicio 9.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{Z}_7$ :*

$$x_1 + x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 - x_3 - x_4 = 2$$

*Solución.-*

```
A = matrix(Zmod(7),[[1,0,1,2],[2,1,2,1],[0,1,1,2],[1,0,2,2]])
B = matrix(Zmod(7),[[2],[2],[2],[2]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Matriz reducida es identidad, SCD:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 6$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 5$$

**Ejercicio 10.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre  $\mathbb{R}$ :*

$$-x_1 - 5x_3 + x_6 = -1$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-2x_1 + x_4 = 3$$

*Solución.-*

```
A=matrix(QQ, [[-1,0,-5,0,0,1],[3,1,1,0,1,0],[-2,0,0,1,0,0]])
B=matrix(QQ, [-1,0,3]).T
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
R = Ap.echelon_form()
```

$$A' = [A|B] = \left( \begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

La matriz reducida es en parte identidad por tanto SCI, parametrización:

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma$$

$$x_2 = 4 - \frac{7}{5}\gamma - \beta - \frac{1}{5}\alpha$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\gamma + \frac{1}{5}\alpha$$

$$x_4 = \gamma$$

$$x_5 = \beta$$

$$x_6 = \alpha$$

**Ejercicio 11.** *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_2.$$

*Solución.-*

```
A=matrix(Zmod(2), [[2,3,1],[1,4,3],[2,5,1]])
AI = A.augment(matrix.identity(3), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz reducida de  $[A|I]$  no queda como identidad por tanto no es invertible (regular)

**Ejercicio 12.** Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_7.$$

*Solución.-*

```
A=matrix(Zmod(7),[[1,2],[3,4]])
AI = A.augment(matrix.identity(2), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

La matriz reducida de  $[A|I]$  queda  $[I|A^{-1}]$ , así que  $A^{-1}$  es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 13.** Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{Z}_5.$$

*Solución.-*

```
A=matrix(Zmod(5),[[1,2,3],[4,6,0],[3,0,0]])
AI = A.augment(matrix.identity(3), subdivide=True)
R = AI.echelon_form()
```

$$[A|I] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

La matriz reducida de  $[A|I]$  queda  $[I|A^{-1}]$ , así que  $A^{-1}$  es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$