AMD Curso 2023-2024

Prácticas Semana 2

Ejercicio 1. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$ *:*

$$x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 6$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$-x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5$$
$$x_4 = -2$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[1,-1,-5,-5],[-1,-1,2,1],[0,-1,-2,-3],[0,0,0,1]])
B = matrix(QQ,[[6],[1],[5],[-2]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 4 = rg(A') = 4 = A_{rows} = 4$, por tanto es un sistema compatile determinado cuya solución es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

o $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y $x_4 = -2$

Ejercicio 2. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$ *:*

$$2x_1 - x_2 = 8$$
$$x_1 - x_3 = -3$$
$$x_2 = -5$$
$$x_1 = 2$$
$$x_3 = 8$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[2,-1,0],[1,0,-1],[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]])
B = matrix(QQ,[[8],[-3],[-5],[2],[8]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 3 \neq rg(A') = 4 \neq A_{rows} = 5$, por tanto es un sistema incompatible sin solución.

Ejercicio 3. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_7$ *:*

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3$$
$$3x_3 + 3x_4 + x_5 = 1$$
$$4x_5 = 12$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(7),[[3,1,3,5,2],[0,0,3,3,1],[0,0,0,0,4]])
B=matrix(Zmod(7),[[3],[1],[12]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
```

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 3 = rg(A') = 3 = A_{rows} = 3$, por tanto es un sistema compatile determinado cuya solución es

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es decir $x_1 = 2$, $x_1 = 0$, $x_1 = 4$, $x_1 = 0$, $x_1 = 3$

Ejercicio 4. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$-x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 5$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[0,-1,3],[1,-2,5],[1,-3,9],[1,-2,3],[2,-3,9]])
B = matrix(QQ,[[3],[3],[7],[1],[5]])
Ap = A.augment(B, subdivide=True)
sol = A.solve_right(B)
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 9 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

La matriz ampliada reducida forma identidad, por tanto es un sistema compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Y la solución resulta

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -1$$

$$x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

Solución.-

```
A = matrix(QQ,[[1,-1,1,2],[0,1,-2,-5],[0,1,-1,-2]])
B = matrix(QQ,[[2],[-1],[0]])
```

Ejercicio 6. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$0 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(5),[[0,0,0],[1,3,2],[4,1,1],[4,3,0],[4,3,0]])
B = matrix(Zmod(5),[[0],[0],[1],[3],[0]])
```

Ejercicio 7. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{gathered}$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(5),[[1,4,0,3],[0,1,0,4],[2,2,1,2],[2,2,3,3],[2,2,3,0]])
B = matrix(Zmod(5),[[0],[3],[4],[3],[3]])
```

Ejercicio 8. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_{11}$*:*

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{gathered}$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(11),[[2,-1,1,1],[2,1,0,-1],[0,1,2,3]])
B=matrix(Zmod(11),[1,2,0])
```

Ejercicio 9. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \end{gathered}$$

Solución.-

```
A = matrix(Zmod(7),[[1,0,1,2],[2,1,2,1],[0,1,1,2],[1,0,2,2]])
B = matrix(Zmod(7),[[2],[2],[2],[2]])
```

Ejercicio 10. *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{gathered} -x_1 - 5x_3 + x_6 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_4 = 3 \end{gathered}$$

Solución.-

```
A=matrix(QQ,[[-1,0,-5,0,0,1],[3,1,1,0,1,0],[-2,0,0,1,0,0]])
B=matrix(QQ,[-1,0,3])
```

Ejercicio 11. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad en\ \mathbb{Z}_2.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(2),[[2,3,1],[1,4,3],[2,5,1]])
```

Ejercicio 12. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ en\ \mathbb{Z}_7.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(7),[[1,2],[3,4]])
```

Ejercicio 13. *Encuentra cuando sea posible la inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ en\ \mathbb{Z}_5.$$

Solución.-

```
A=matrix(Zmod(5),[[1,2,3],[4,6,0],[3,0,0]])
```