AMD - PRÁCTICA DE PRODUCTO ESCALAR

1. Ortogonalidad en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 1. *Para cada una de las rectas dadas, calcula un vector v_1 de la recta y un vector v_2 perpendicular a la recta de forma que la base $B = \{v_1, v_2\}$ tenga orientación positiva, normalízalos y pintalos en unos ejes coordenados y dibuja un cuadrado de tamaño 4×4 centrado en el origen con lados paralelos a las base calculada.*

(1) *La recta r dada por $2x + y = 0$, es decir $r = N([2\ 1])$.*

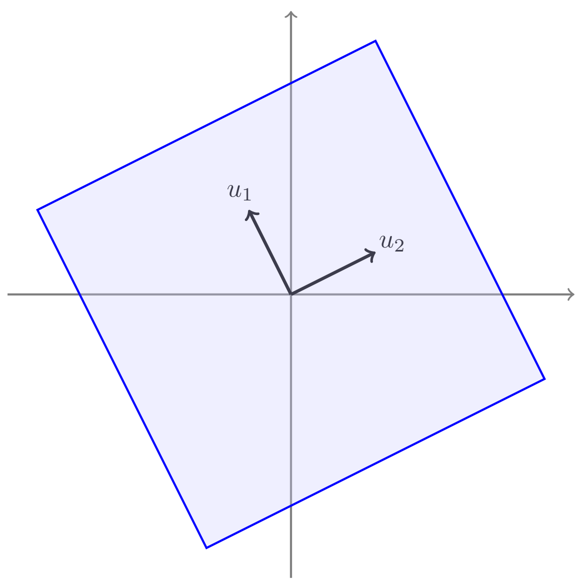
(2) *La recta r dada por $x = 2\lambda, y = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir $r = C\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.*

Solución:

1.

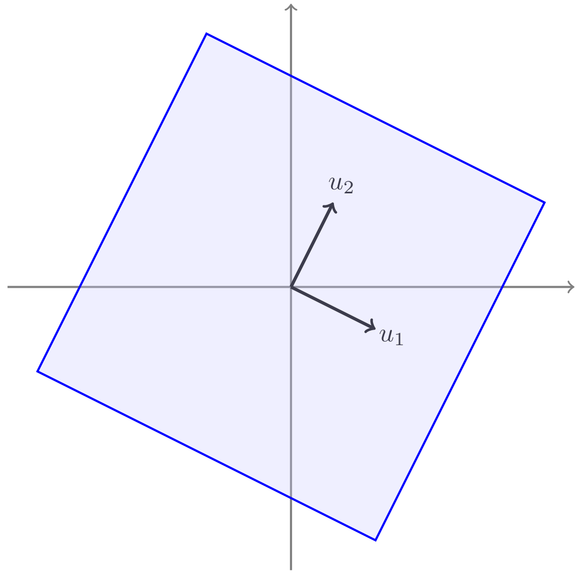
```
n = vector(RR, [2, 1])
v = vector(RR, [-n[1], n[0]])
v1 = v.normalized()
v2 = n.normalized()
B = column_matrix([v1, v2])

P1 = B * vector(RR, [-2, -2])
P2 = B * vector(RR, [2, -2])
P3 = B * vector(RR, [2, 2])
P4 = B * vector(RR, [-2, 2])
```




```
v = vector(RR, [2, -1])
n = vector(RR, [-v[1], v[0]])
v1 = v.normalized()
v2 = n.normalized()
B = column_matrix([v1, v2])

P1 = B * vector(RR, [-2, -2])
P2 = B * vector(RR, [2, -2])
P3 = B * vector(RR, [2, 2])
P4 = B * vector(RR, [-2, 2])
```



Ejercicio 2. *Para cada una de las rectas dadas, calcula un vector v_1 de la recta y un vector v_2 perpendicular a la recta de forma que la base $B = \{v_1, v_2\}$ tenga orientación positiva, normalízalos y pintalos en unos ejes coordenados y dibuja un cuadrado de tamaño 4×4 centrado en el origen con lados paralelos a las base calculada.*

(1) *La recta r dada por $3x - y = 0$.*
(2) *La recta r dada por $x = \lambda, y = 2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(3) *La recta r dada por $x + 2y = 0$.*
(4) *La recta r dada por $x = 2\lambda, y = -3\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(5) *La recta r dada por $x - y = 0$.*
(6) *La recta r dada por $x = -\lambda, y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(7) *La recta r dada por $-x + 2y = 0$.*
(8) *La recta r dada por $x = -2\lambda, y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Ejercicio 3. *Para cada una de las rectas dadas, calcula un vector v_1 de la recta y dos vectores v_2 y v_3 perpendiculares a la recta de forma que la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tenga orientación positiva, normalízalos, píntalos en unos ejes coordenados y dibuja un cuadrado de tamaño 4×4 centrado en el origen con lados paralelos a los vectores v_2 y v_3.*

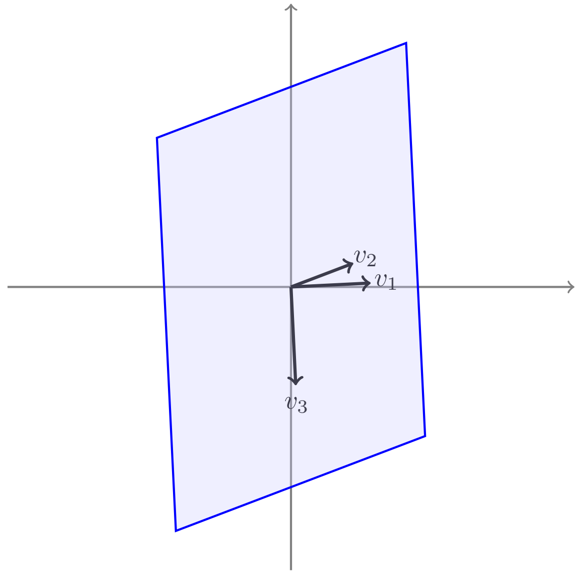
(1) *La recta r dada por* $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ *es decir* $r = N\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

(2) *La recta r dada por $x = 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir* $r = C\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Solución

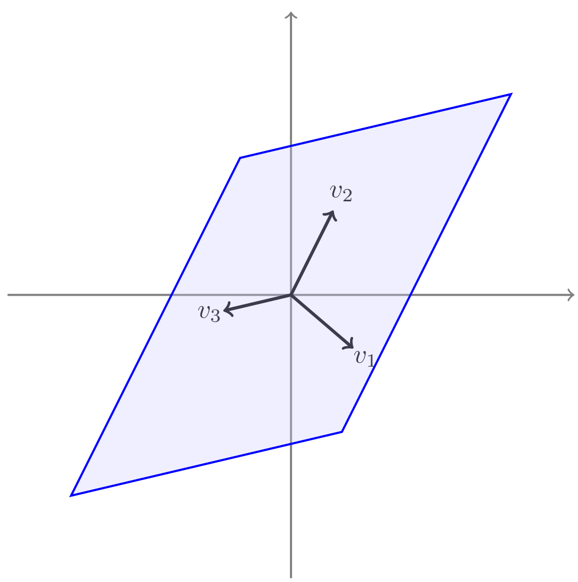
```
n1 = vector(RR, [2, 1, 1])
n2 = vector(RR, [1, -1, 1])
v = n1.cross_product(n2)
v1 = v.normalized()
v2 = n1.normalized()
v3 = v.cross_product(v2).normalized()
B = column_matrix([v1, v2, v3])

P1 = B * vector(RR, [0, -2, -2])
P2 = B * vector(RR, [0, 2, -2])
P3 = B * vector(RR, [0, 2, 2])
P4 = B * vector(RR, [0, -2, 2])
```




```
v = vector(RR, [2, -1, 1])
n1 = vector(RR, [-v[1], v[0], 0])
n2 = v.cross_product(n1)
v1 = v.normalized()
v2 = n1.normalized()
v3 = n2.normalized()
B = column_matrix([v1, v2, v3])

P1 = B * vector(RR, [0, -2, -2])
P2 = B * vector(RR, [0, 2, -2])
P3 = B * vector(RR, [0, 2, 2])
P4 = B * vector(RR, [0, -2, 2])
```



Ejercicio 4. *Para cada una de las rectas dadas, calcula un vector* v_1 *de la recta y dos vectores* v_2 *y* v_3 *perpendiculares a la recta de forma que la base* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *tenga orientación positiva, normalízalos, píntalos en unos ejes coordenados y dibuja un cuadrado de tamaño* 4×4 *centrado en el origen con lados paralelos a los vectores* v_2 *y* v_3*.*

(1) *La recta* r *dada por* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

(2) *La recta* r *dada por* $x = \lambda, y = \lambda, z = 0$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) *La recta r dada por* $\begin{cases} x+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$

(4) *La recta r dada por* $x = 2\lambda, y = -3\lambda, z = -\lambda$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(5) *La recta r dada por* $\begin{cases} -x-y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

(6) *La recta r dada por* $x = -\lambda, y = \lambda, z = 2\lambda$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(7) *La recta r dada por* $\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$

(8) *La recta r dada por* $x = 2\lambda, y = 0, z = -\lambda$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución

2. Proyección Ortogonal

Ejercicio 5. *Dado el espacio* $W = N(H)$ *y el vector* v, *donde*

```
H=matrix(QQ,[[1,-1,0,0],[0,0,1,0]])
v=column_matrix(QQ,[1,2,0,2])
```

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

expresar el vector v *como suma de un vector de* W *y otro vector de* $W^\perp$.

Solución 1:

Nos piden que expresemos $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^\perp$. Como $W = N(H)$ entonces tenemos los vectores que generan $W^\perp$ porque sabemos que $W^\perp = C(H^T)$. Si llamamos $A = H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, usando ese conjunto generador, podemos calcular directamente v_2, que es la proyección v sobre el espacio $W^\perp$ con la fórmula de la proyección y luego despejar v_1 a partir de la fórmula $v = v_1 + v_2$.

```
A=H.T
v2=A*(A.T*A)^-1*A.T*v
```

$$v_2 = A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = v - v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Solución 2:

Nos piden que hagamos $v = v_1 + v_2$ donde $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^\perp$. Obtenemos una base de W y calculamos en primer lugar la proyección de v sobre W.

```
M=block_matrix(1,2,[H.T,1])
R=copy(M.echelon_form())
R.subdivide(2,2)
D = R.subdivision(1,1).T
v1 = D*(D.T*D)^-1*D.T*v
```

Como $W = N(H)$ la base la obtenemos reduciendo por filas la matriz H ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La base de W es $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y entonces podemos calcular v_1 con la fórmula de la proyección sobre W y despejar v_2 de la igualdad $v = v_1 + v_2$:

$$v_1 = D \cdot (D^T \cdot D)^{-1} \cdot D^T \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = v - v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Método de Gram-Schmidt

Ejercicio 6. *Dado el espacio $W = N(H) \leq \mathbb{R}^4$, donde*

```
H=matrix(QQ,[[2,1,0,2],[1,-1,1,0],[2,0,1,-1]])
```

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinar una base ortogonal del espacio $W^\perp$.

Solución:

Como $W = N(H)$ entonces $W^\perp = C(H^T)$, las columnas de H^T son generadoras de $W^\perp$. Reduciendo la matriz también vemos que son linealmente independientes por lo que son una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ a la que le aplicaremos Gram-Schmidt.

$$H^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
u1,u2,u3 = H.T.columns() # Nos las da en formato vector y ahí podemos usar el producto escalar.
v1=u1
v2=u2-((u2*v1)/(v1*v1))*v1
v3=u3-((u3*v1)/(v1*v1))*v1-((u3*v2)/(v2*v2))*v2
B=column_matrix([v1,v2,v3])
```

El método de Gram-Schmidt nos dice que la base ortonormal es

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\ v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\ v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\ v_2 \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ 1 \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} \frac{21}{26} \\ \frac{11}{13} \\ \frac{1}{26} \\ -\frac{16}{13} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7. *Calcula una base ortonormal del subespacio $U = C(B) \leq \mathbb{R}^5$ y la proyección ortogonal sobre U del vector $v \in \mathbb{R}^5$ siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

```
B=matrix(QQ,[[2,1,1],[1,1,-1],[1,1,0],[1,3,1],[0,1,0]])
v=vector([1,0,1,-1,1])
R=B.echelon_form()
```

En primer lugar, comprobamos que las columnas de B son linealmente independientes (y, por tanto, una base de $U = C(B)$). Para ello calculamos la reducida completa por filas de B, que es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como hay 3 pivotes, el rango de B es 3 y las columnas son independientes.

```
v1=B.column(0)
v2=B.column(1)
v3=B.column(2)
u1=v1
u2=v2-((v2*u1)/(u1*u1))*u1
u3=v3-((v3*u1)/(u1*u1))*u1-((v3*u2)/(u2*u2))*u2
w1=u1/norm(u1)
w2=u2/norm(u2)
w3=u3/norm(u3)
B1=column_matrix([u1,u2,u3])
B2=column_matrix([w1,w2,w3])
```

Aplicamos el método de Gram-Schmidt a los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obteniendo una base ortogonal formada por las columnas de la matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{25}{42} \\ 1 & 0 & -\frac{9}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 1 & 2 & \frac{8}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Una vez normalizada se obtiene la base ortonormal dada por las columnas de la matriz:

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}\sqrt{7} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{5}{19}\sqrt{\frac{95}{42}} \\ \frac{1}{7}\sqrt{7} & 0 & -\frac{54}{95}\sqrt{\frac{95}{42}} \\ \frac{1}{7}\sqrt{7} & 0 & -\frac{12}{95}\sqrt{\frac{95}{42}} \\ \frac{1}{7}\sqrt{7} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{16}{95}\sqrt{\frac{95}{42}} \\ 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{7}{95}\sqrt{\frac{95}{42}} \end{bmatrix}$$

Como mera comprobación B_2 es una matriz ortogonal:

$$B_2^T \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La proyección de v sobre U es

$$\mathrm{proy}_U(v) = B\cdot((B^T\cdot B)^{-1}\cdot B^T)\cdot v = \begin{bmatrix} \frac{16}{19} \\ \frac{8}{19} \\ \frac{6}{19} \\ -\frac{8}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}$$

Si utilizamos la base ortonormal B_2 en vez de la base B, de manera alternativa también se puede calcular la proyección así:

$$\mathrm{proy}_U(v) = B_2\cdot B_2^T\cdot v = (v*w_1)w_1 + (v*w_2)w_2 + (v*w_3)w_3 = \begin{bmatrix} \frac{16}{19} \\ \frac{8}{19} \\ \frac{6}{19} \\ -\frac{8}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *Calcula una base ortonormal del subespacio $U = N(H) \leq \mathbb{R}^6$ y la proyección ortogonal sobre U del vector $v \in \mathbb{R}^6$ siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

```
H=matrix(QQ,[[1,0,0,0,1,1],[0,1,-1,1,0,0]])
HTI=block_matrix(1,2,[H.T,1])
R=HTI.echelon_form()
R=copy(R)
R.subdivide(2,2)
B=R.subdivision(1,1).T
```

Debemos obtener una base del espacio $U = N(H)$, para ello obtenemos unas ecuaciones paramétricas de U. Ampliamos la traspuesta de H con la matriz identidad

$$[H^T|I] = \left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Reducimos por filas y obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Una base del espacio U son las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
v1=B.column(0)
v2=B.column(1)
v3=B.column(2)
v4=B.column(3)
u1=v1
u2=v2-((v2*u1)/(u1*u1))*u1
u3=v3-((v3*u1)/(u1*u1))*u1-((v3*u2)/(u2*u2))*u2
u4=v4-((v4*u1)/(u1*u1))*u1-((v4*u2)/(u2*u2))*u2-((v4*u3)/(u3*u3))*u3
w1=u1/norm(u1)
w2=u2/norm(u2)
w3=u3/norm(u3)
w4=u4/norm(u4)
B1=column_matrix([u1,u2,u3,u4])
B2=column_matrix([w1,w2,w3,w4])
v=vector([1,2,0,1,0,-1])
```

Aplicamos el método de Gram-Schmidt a los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y obtenemos la base ortogonal dada por las columnas de la matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Una vez normalizada se obtiene la base ortonormal dada por las columnas de la matriz:

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

Como mera comprobación B_2 es una matriz ortogonal:

$$B_2^T \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La proyección de v sobre U es

$$\text{proy}_U(v) = B \cdot ((B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T) \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si utilizamos la base ortonormal B_2 en vez de la base B, de manera alternativa también se puede calcular la proyección así:

$$\text{proy}_U(v) = B_2 \cdot B_2^T \cdot v = (v * w_1)w_1 + (v * w_2)w_2 + (v * w_3)w_3 + (v * w_4)w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

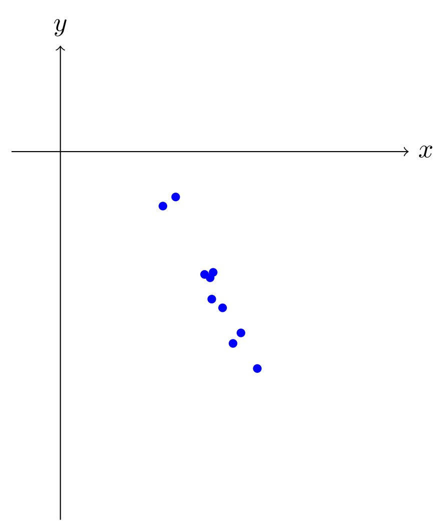
4. Mínimos Cuadrados

Ejercicio 9. *Calcula la recta de regresión asociada a los datos que se proporcionan a continuación:*

```
XY = matrix(RR,[[ 2.385560477076296 ,  -2.395822899318959 ],
                [ 1.905248601109367 ,  -1.6229129728676281 ],
                [ 2.1431869782379556 ,  -2.0645676597180205 ],
                [ 1.3544213528768796 ,  -0.7196308967482228 ],
                [ 1.523305672725867 ,  -0.5993214201342096 ],
                [ 1.9786571047006658 ,  -1.6669634951798296 ],
                [ 2.6018225949955114 ,  -2.866463639001059 ],
                [ 2.000064502538637 ,  -1.9491976003788676 ],
                [ 2.018559544597864 ,  -1.5956613748963764 ],
                [ 2.2810102232428395 ,  -2.5347565098507556 ]])

X = XY.column(0)
Y = XY.column(1)
```

La representación gráfica de estos puntos es:



Solución:

```
B = matrix([[1 for x in X],
            [x for x in X]]).T
C = (B.T*B)^-1 * B.T * Y
```

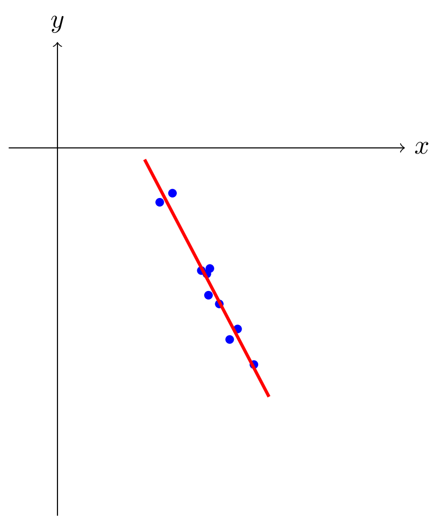
Vamos a construir una solución del tipo $y = c_0 + c_1 x$, para ello tomamos la matriz que tiene como columnas 1 y x, es decir

$$B = \begin{bmatrix} 1.00000000000000 & 2.38556047707630 \\ 1.00000000000000 & 1.90524860110937 \\ 1.00000000000000 & 2.14318697823796 \\ 1.00000000000000 & 1.35442135287688 \\ 1.00000000000000 & 1.52330567272587 \\ 1.00000000000000 & 1.97865710470067 \\ 1.00000000000000 & 2.60182259499551 \\ 1.00000000000000 & 2.00006450253864 \\ 1.00000000000000 & 2.01855954459786 \\ 1.00000000000000 & 2.28101022324284 \end{bmatrix}$$

Si tomamos C la columna con las variables c_0 y c_1, tenemos un sistema de ecuaciones $BC = Y$ que podemos resolver por mínimos cuadrados con la fórmula $C = (B^T B)^{-1} B^T Y$. De esta forma obtenemos

$$C = (2.04527120517431, \, -1.90512683024216) \, .$$

Si representamos gráficamente la solución obtenemos:

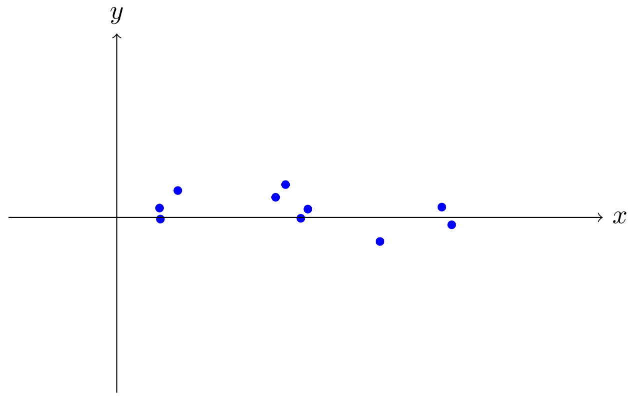


Ejercicio 10. *Calcula la recta de regresión asociada a los datos que se proporcionan a continuación:*

```
XY = matrix(RR,[[ 0.577634973301552 ,  -0.0218923535169986 ],
                [ 2.2346179266047286 ,  0.4344125028412995 ],
                [ 3.4846606572341514 ,  -0.3181800856916049 ],
                [ 0.8085216507157904 ,  0.3558535279864201 ],
                [ 2.436171618880355 ,  -0.0110070290394387 6 ],
                [ 2.529682379873726 ,  0.11015658313238955 ],
                [ 4.303663555225892 ,  0.13678910258637164 ],
                [ 4.434181331472274 ,  -0.09759478810728146 ],
                [ 2.1031791958182837 ,  0.2667520474182835 ],
                [ 0.5662953947120373 ,  0.12428487018538861 ]])

X = XY.column(0)
Y = XY.column(1)
```

La representación gráfica de estos puntos es:



Solución:

```
B = matrix([[1 for x in X],
            [x for x in X]]).T
C = (B.T*B)^-1 * B.T * Y
```

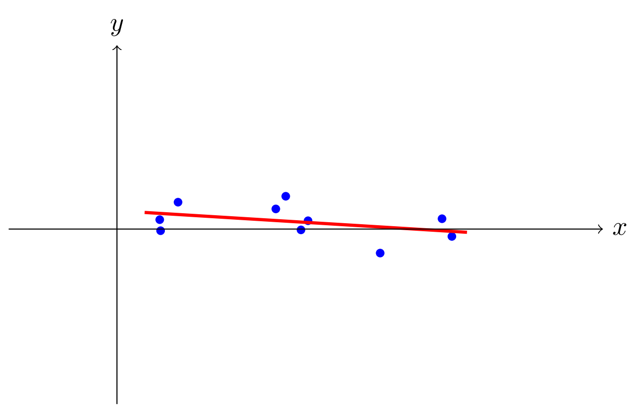
Vamos a construir una solución del tipo $y = c_0 + c_1 x$, para ello tomamos la matriz que tiene como columnas 1 y x, es decir

$$B = \begin{bmatrix} 1.00000000000000 & 0.577634973301552 \\ 1.00000000000000 & 2.23461792660473 \\ 1.00000000000000 & 3.48466065723415 \\ 1.00000000000000 & 0.808521650715790 \\ 1.00000000000000 & 2.43617161888035 \\ 1.00000000000000 & 2.52968237987373 \\ 1.00000000000000 & 4.30366355522589 \\ 1.00000000000000 & 4.43418133147227 \\ 1.00000000000000 & 2.10317919581828 \\ 1.00000000000000 & 0.566295394712037 \end{bmatrix}$$

Si tomamos C la columna con las variables c_0 y c_1, tenemos un sistema de ecuaciones $BC = Y$ que podemos resolver por mínimos cuadrados con la fórmula $C = (B^T B)^{-1} B^T Y$. De esta forma obtenemos

$$C = (0.242426754186693, \, -0.0615323157997235) \, .$$

Si representamos gráficamente la solución obtenemos:



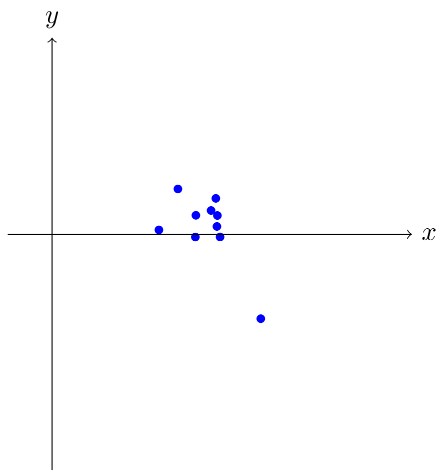
Ejercicio 11. *Calcula la parábola que mejor se ajusta a los datos que se proporcionan a continuación:*

```
XY = matrix(RR,[[ 2.7612642659418345 ,  -1.1156708175321115 ],
                [ 2.103443783724906 ,  0.313832311575572405 ],
                [ 1.902670552753022 ,  0.25032326843590824 ],
                [ 2.1869201945783363 ,  0.24762559905865678 ],
                [ 1.6648725595631342 ,  0.5985413716434942 ],
                [ 2.180936578280802 ,  0.10312969275192364 ],
                [ 2.166571283712363 ,  0.47415888561041936 ],
                [ 1.4134229078250833 ,  0.05736296276262719 ],
```

```
        [ 1.895504173706609 ,  -0.036508422559938136 ],
        [ 2.2224525503221937 ,  -0.03560723558130427 ]])

X = XY.column(0)
Y = XY.column(1)
```

La representación gráfica de estos puntos es:



Solución:

```
B = matrix([[1 for x in X],
            [x for x in X],
            [x^2 for x in X]]).T
C = (B.T*B)^-1 * B.T * Y
```

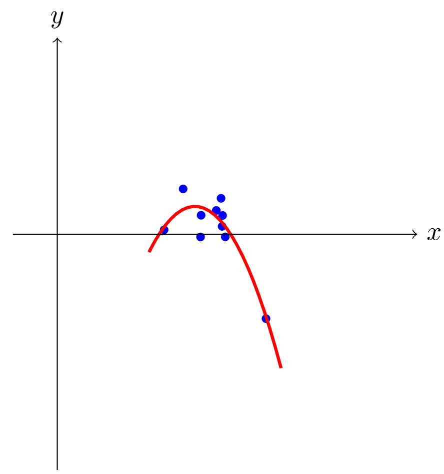
Vamos a construir una solución del tipo $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, para ello tomamos la matriz que tiene como columnas $1, x$ y x^2, es decir

$$B = \begin{bmatrix} 1.00000000000000 & 2.76126426594183 & 7.62458034636730 \\ 1.00000000000000 & 2.10344378372491 & 4.42447575129095 \\ 1.00000000000000 & 1.90267055275302 & 3.62015523231349 \\ 1.00000000000000 & 2.18692019457834 & 4.78261993745455 \\ 1.00000000000000 & 1.66487255956313 & 2.77180063958630 \\ 1.00000000000000 & 2.18093657828080 & 4.75648435848317 \\ 1.00000000000000 & 2.16657128371236 & 4.69403112740704 \\ 1.00000000000000 & 1.41342290782508 & 1.99776431636471 \\ 1.00000000000000 & 1.89550417370661 & 3.59293607253917 \\ 1.00000000000000 & 2.22245255032219 & 4.93929533843362 \end{bmatrix}$$

Si tomamos C la columna con las variables c_0, c_1 y c_2, tenemos un sistema de ecuaciones $BC = Y$ que podemos resolver por mínimos cuadrados con la fórmula $C = (B^T B)^{-1} B^T Y$. De esta forma obtenemos

$$C = (-5.07391891349993,\ 5.97915439767926,\ -1.64254344243427)\,.$$

Si representamos gráficamente la solución obtenemos:

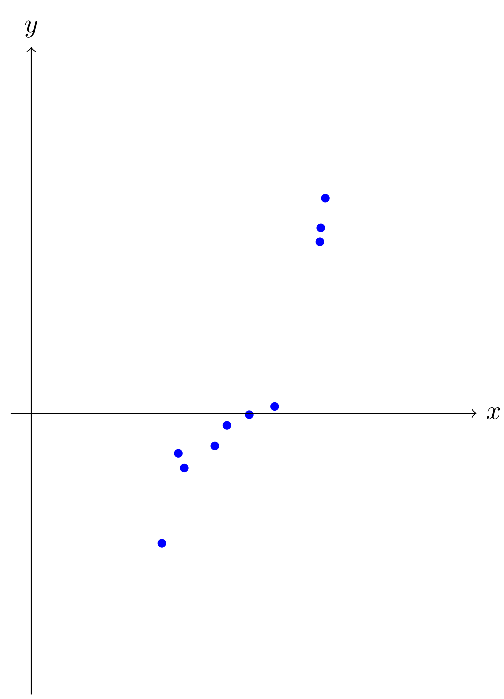


Ejercicio 12. *Calcula el polinomio cúbico que mejor se ajusta a los datos que se proporcionan a continuación:*

```
XY = matrix(RR,[[ 2.4287087204306785 ,  -0.43197724654693614 ],
                [ 2.5890848700434073 ,  -0.15941242672422222 ],
                [ 3.818747862986166 ,  2.2687403350956052 ],
                [ 2.884116866851538 ,  -0.019315878916267435 ],
                [ 3.890299468309755 ,  2.8459293720843775 ],
                [ 3.219690337713705 ,  0.09004858390854256 ],
                [ 2.023838230298453 ,  -0.7236683135884444 ],
                [ 1.728399800189709 ,  -1.719850517119307 ],
                [ 3.830415822389739 ,  2.4528159160605782 ],
                [ 1.94577565082535 ,  -0.5302661204039961 ]])

X = XY.column(0)
Y = XY.column(1)
```

La representación gráfica de estos puntos es:



Solución:

```
B = matrix([[1 for x in X],
            [x for x in X],
```

```
              [x^2 for x in X],
              [x^3 for x in X]]).T
C = (B.T*B)^-1 * B.T * Y
```

Vamos a construir una solución del tipo $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, para ello tomamos la matriz que tiene como columnas $1, x, x^2$ y x^3, es decir

$$B = \begin{bmatrix} 1.00000000000000 & 2.42870872043068 & 5.89862604869602 & 14.3260445230276 \\ 1.00000000000000 & 2.58908487004341 & 6.70336046428769 & 17.3555691565344 \\ 1.00000000000000 & 3.81874786298617 & 14.5828352410614 & 55.6881709130826 \\ 1.00000000000000 & 2.88411686685154 & 8.31813010165753 & 23.9904593268560 \\ 1.00000000000000 & 3.89029946830976 & 15.1344299531312 & 58.8774647998374 \\ 1.00000000000000 & 3.21969033771370 & 10.3664058707670 & 33.3766168189271 \\ 1.00000000000000 & 2.02383823029845 & 4.09592118241757 & 8.28948187726593 \\ 1.00000000000000 & 1.72839980018971 & 2.98736586929583 & 5.16336257158446 \\ 1.00000000000000 & 3.83041582238974 & 14.6720853724137 & 56.2001879579463 \\ 1.00000000000000 & 1.94577565082535 & 3.78604288334481 & 7.36679005539294 \end{bmatrix}$$

Si tomamos C la columna con las variables c_0, c_1, c_2 y c_3, tenemos un sistema de ecuaciones $BC = Y$ que podemos resolver por mínimos cuadrados con la fórmula $C = (B^T B)^{-1} B^T Y$. De esta forma obtenemos

$$C = (-31.6675346812556,\ 35.2558708683032,\ -13.1701706470458,\ 1.64177990081880)\,.$$

Si representamos gráficamente la solución obtenemos: