ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA. GII - FIUM.
PARCIAL 1

Ejercicio 1. *Calcula el determinante de la siguiente matriz sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ realizando operaciones elementales.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Este problema hay que hacerlo a mano en el papel proporcionado en el examen.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(3)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(2)-3(1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(3)-2(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(2)-(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(1)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(2)-2(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to E_{(1)-(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(4)-2(2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(4)-4(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to E_{4(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(3)-3(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\to E_{(2)-(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to E_{(2)-(4)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4|I| = 4$$

Ejercicio 2. *Encuentra todos los valores enteros n que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:*

$$n \equiv 1 \pmod{25}$$
$$n \equiv 52 \pmod{108}$$
$$n \equiv 199 \pmod{201}$$

Solución:

$$n = 1 + 25x$$
$$n = 52 + 108y$$

$$1 + 25x = 52 + 108y$$

$$25x - 108y = 51$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 0 \\ 108 & 0 & 1 \end{array}\right] \to E_{(2)-4(1)} \left[\begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{array}\right] \to E_{(1)-3(2)} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 13 & -3 \\ 8 & -4 & 1 \end{array}\right] \to E_{(2)-8(1)} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -11 & -3 \\ 0 & -108 & 25 \end{array}\right]$$

mcd(25, 108) = 1, tiene solución, caso 1

$$25 \cdot (-11) + 108 \cdot (-3) = 1$$
$$25 \cdot 84 + 108 \cdot 25 = 0$$

$$25 \cdot (-11) \cdot 51 + 108 \cdot (-3) \cdot 51 = 1$$
$$25 \cdot 84t + 108 \cdot 25t = 0$$

$$x = -561 + 84t$$
$$y = -153 + 25t$$

Substituyendo la primera

$$n = 1 + 25(-561 + 84t)$$

$$n = -14025 + 2100t$$

$$n \equiv -14025 \pmod{2100} n \qquad \equiv -14025 \pmod{2100}$$

Ejercicio 3. *Sea $K = \mathbb{Z}_{43}$ y $f : K^4 \to K^3$ la aplicación lineal dada por la matriz*

$$M(f) = \begin{pmatrix} 24 & 23 & 11 & 26 \\ 9 & 17 & 33 & 22 \\ 16 & 16 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentra dos aplicaciones lineales diferentes $g_1, g_2 : K^3 \to K^4$ tales que $f \circ g_1 = \mathsf{id}_{K^3} = f \circ g_2$.

Solución:

```
Mf = matrix(Zmod(43), [[24, 23, 11, 26], [9, 17, 33, 22], [16, 16, 13, 4]])
Mftp = block_matrix([[Mf.T, 1]])
Mftr = Mftp.echelon_form()
Mftr = copy(Mftr)
Mftr.subdivide([3], [3])
g1 = Mftr.subdivision(0, 1).T

T = column_matrix(Zmod(43), [1, 24, 14, 5])
X = matrix(Zmod(43), [[0, 0, 1]])
g2 = g1 + T * X
```

Dos inversas por la derecha de $M(f)$, al no ser cuadrada hay infinitas

$$M(f) \cdot M(g_1) = I \to M(g_1) = M(f)^{-1}_{R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 24 & 9 & 16 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 17 & 16 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 33 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 22 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 32 & 13 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 21 & 10 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 24 & 14 & 5 \end{array}\right)$$

$$M(g_1) = M(f)^{-1}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 21 \\ 4 & 13 & 10 \\ 9 & 34 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$M(f)^{-1}_{R_x} = M(f)^{-1}_{R_1} + T \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 21 \\ 4 & 13 & 10 \\ 9 & 34 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} (x)$$

$$M(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 21 \\ 4 & 13 & 10 \\ 9 & 34 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 16 & 32 & 2 \\ 4 & 13 & 24 \\ 9 & 34 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Sea $K = \mathbb{Z}_7$ y consideremos las bases de K^3 dadas por $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ siendo*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$, responde a las siguientes preguntas:

- *Calcula la matriz de cambio de base B_1 a la base canónica.*
- *Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de v en base canónica.*

- *Calcula la matriz de cambio de base B_1 a B_2.*
- *Utiliza la matriz anterior para calcular las coordenadas de v en base B_2.*
- *Determina si los vectores $\{w_1, w_2, v\}$ forman una base de K^3.*

Solución:

```
B1 = matrix(Zmod(7), [[0, 1, 5], [0, 0, 5], [5, 0, 5]])
B2 = matrix(Zmod(7), [[4, 3, 2], [0, 1, 5], [1, 1, 2]])
B1B2 = block_matrix([[B1, B2]])
B1B2r = B1B2.echelon_form()

v = column_matrix(Zmod(7), [0, 1, 2])
vC = B1 * v

MB1B2 = B2.inverse() * B1
vB2 = MB1B2 * v

w1w2v = matrix(Zmod(7), [[4, 3, 0], [0, 1, 1], [4, 3, 3]])
w1w2vr = w1w2v.echelon_form()
```

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[B_1|B_2] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

B_1 y B_2 son la misma base

Cualquiera de las matrices B_1 y B_2 son matrices de cambio de base a canónica.

$$v_C = B_1 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_C$$

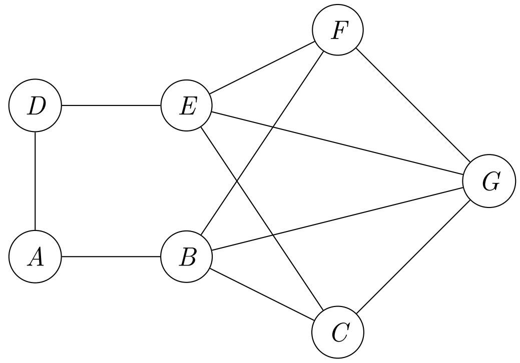
$$M_{B_1B_2} = B_2^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$v_{B_2} = M_{B_1B_2} \cdot v_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}_{B2}$$

$$w_1, w_2, v = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

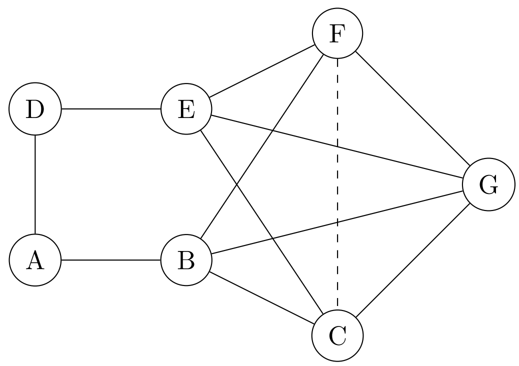
$\{w_1, w_2, v\}$ son en efecto una base, pues el vector v es linealmente independiente de w_1 y w_2.

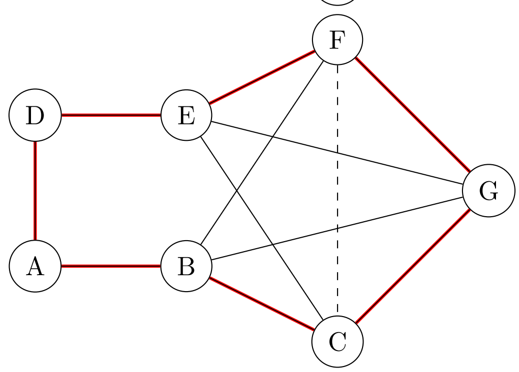
Ejercicio 5. *De termina si existe un camino abierto euleriano en el siguiente grafo. En caso de existir, calcúlalo:*



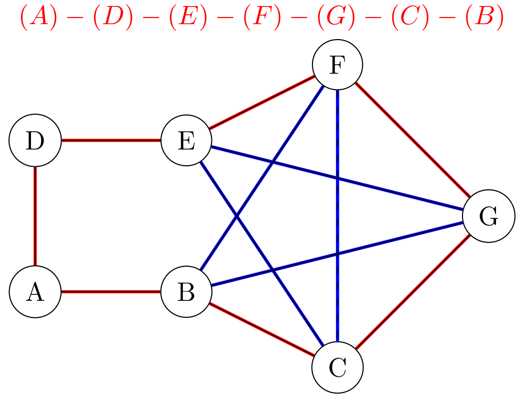
Solución:

No existe un camino euleriano cerrado en el grafo, ya que el nodo F y C es de grado impar. Pero si abierto ya que solo F y C son impares. Para calcularlo juntamos F y C





$$(A) - (D) - (E) - (F) - (G) - (C) - (B)$$



$$(B) - (F) - -(C) - (E) - (G)$$