AMD CURSO 2023-2024. PRÁCTICAS DE LA SEMANA 13. GEOMETRÍA AFÍN

Cuestiones teóricas previas

Una aplicación $f : \mathcal{A}^n(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^n(\mathbb{R})$ se dice **afín** si existen una matriz A de orden $n \times n$ y un punto $Q \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(P) = AP + Q$, lo cual se expresa con matrices del siguiente modo:

$$\left[\frac{1}{f(P)}\right] = \left[\frac{1 \mid 0}{Q \mid A}\right]\left[\frac{1}{Q}\right]$$

Entre las aplicaciones afines (en el plano y en el espacio), nos interesan especialmente un grupo de transformaciones geométricas que reciben el nombre de **transformaciones afines**, y son las siguientes:

- Transformaciones afines en el plano:
  - Giro alrededor de un punto.
  - Proyección ortogonal sobre una recta
  - Simetría ortogonal sobre una recta
  - Homotecia
- Transformaciones afines en el espacio:
  - Giro alrededor de un recta.
  - Proyección ortogonal sobre una recta o un plano
  - Simetría ortogonal sobre una recta o un plano
  - Homotecia

La matriz M_T asociada a cada una de estas transformaciones T tiene una forma especialmente sencilla (su expresión canónica) porque se toma respecto de un sistema de referencia afín R que se adapta especialmente bien a lo que hace la transformación afín T. Por ejemplo, si $T = G_\alpha$ es un giro en el plano de ángulo α, centrado en el punto Q, entonces

$$R = \left[\frac{1 \mid 0}{Q \mid C}\right],$$

donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y

$$M_{G_\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz asociada, $M(T)$, respecto del sistema de referencia canónico del espacio afín, se expresa en términos de M_T como:

$$M(T) = RM_TR^{-1}$$

En lo sucesivo, denotaremos como $M_{RR}(T)$ a la matriz M_T para dejar constancia, en cada caso, de cuál es el sistema de referencia afín especial, R, que se ha usado para obtener la expresión canónica de la transformación T -y que luego usamos para obtener la matriz $M(T)$, que es la asociada a T respecto del sistema de referencia canónico de $\mathcal{A}^n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.

a) *Calcula la matriz de la aplicación afín* $g : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ *correspondiente al* GIRO *de* $30°$ *alrededor del punto* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) *Sea* $C \subseteq \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ *el hexágono regular centrado en el punto* $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ *tal que uno de sus vértices es el punto* $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Calcula todos los vértices de* C *y* $g(C)$. *Dibuja los hexágonos* C, $g(C)$ *y las líneas que unen los centros de los hexágonos con el centro de giro.*

Solución:
a.

```
R = matrix(RR, [[1, 0, 0], [2, 1, 0], [-1, 0, 1]])
alpha = pi/6
MRRg = matrix(RR, [[1, 0, 0], [0, cos(alpha), -sin(alpha)], [0, sin(alpha), cos(alpha)]])

Mg = R * MRRg * R^-1
```

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{RR}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(30) & -sin(30) \\ 0 & sin(30) & cos(30) \end{bmatrix}$$

$$M = RM_{RR}(g)R^{-1} = \begin{pmatrix} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ -0.232050807568877 & 0.866025403784439 & -0.500000000000000 \\ -1.13397459621556 & 0.500000000000000 & 0.866025403784439 \end{pmatrix}$$

b.

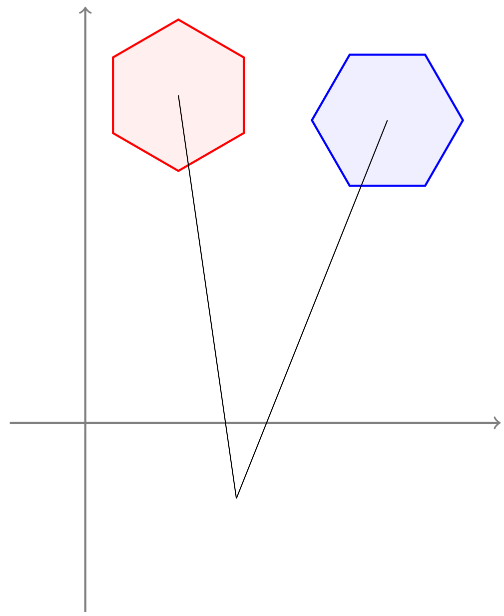
```
R1 = matrix(RR, [[1, 0, 0], [4, 1, 0], [4, 0, 1]])

b = pi/3
MRRg = matrix(RR, [[1, 0, 0], [0, cos(b), -sin(b)], [0, sin(b), cos(b)]])

Mg1 = R1 * MRRg * R1^-1

C = [Mg1^i * vector(RR, [1, 5, 4]) for i in range(6)]
gC = [Mg * v for v in C]
gCo = (Mg * vector(RR, [1, 4, 4]))[1:]

C = [v[1:] for v in C]
gC = [v[1:] for v in gC]
```



Ejercicio 2. *Sea $r \subseteq \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ la recta que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

a) *Calcula las matrices de las aplicaciones afines $p, s : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ correspondientes a la* PROYECCIÓN *y a la* SIMETRÍA *respecto de r.*

b) *Sea $C \subseteq \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ el cuadrado centrado en el punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ y con uno de sus vértices en $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.*
   - *Calcula todos los vértices de C y $s(C)$.*
   - *Dibuja r, C, $s(C)$, $p(C)$ y las líneas que unen los vértices del cuadrado C con su simétrico $s(C)$.*

Solución:

a) La recta r pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 2)$. El sistema de referencia que tomamos consta de uno de los puntos de la recta, por ejemplo el punto

$$P = (-1, 0)$$

y una base formada por un vector de la recta que sería el vector

$$v_1 = \vec{PQ} = Q - P = (2, 2) - (-1, 0) = (3, 2),$$

junto con un segundo vector que lo debemos tomar perpendicular a v_1 y de igual norma, por ejemplo

$$v_2 = (2, -3).$$

La matriz de este sistema de referencia es

```
R = matrix(RR,[[ 1,0, 0],
               [-1,3, 2],
               [ 0,2,-3]])
R.subdivide(1,1)
```

El sistema es:

$$R = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -1.00000000000000 & 3.00000000000000 & 2.00000000000000 \\ 0.000000000000000 & 2.00000000000000 & -3.00000000000000 \end{array}\right).$$

Utilizando este sistema de referencia, obtenemos las expresiones canónicas para las matrices de la proyección y la simetría:

```
sRR=matrix(RR,[[1,0, 0],
               [0,1, 0],
               [0,0,-1]])
pRR=matrix(RR,[[1,0,0],
               [0,1,0],
               [0,0,0]])
```

Las matrices asociadas al sistema de referencia canónico son, por tanto:

```
s=R*sRR*R^-1
p=R*pRR*R^-1
s.subdivide(1,1)
p.subdivide(1,1)
```

$$p = RP_{RR}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -0.307692307692308 & 0.692307692307692 & 0.461538461538462 \\ 0.461538461538462 & 0.461538461538462 & 0.307692307692308 \end{array}\right)$$

y

$$s = RS_{RR}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -0.615384615384615 & 0.384615384615385 & 0.923076923076923 \\ 0.923076923076923 & 0.923076923076923 & -0.384615384615385 \end{array}\right).$$

b) Los vértices del cuadrado se pueden calcular girando el vértice alrededor del punto central cuatro veces.

Para ello, comenzamos definiendo el sistema de referencia canónico sobre el punto (3,-3):

```
R1 = matrix(RR,[[ 1,0,0],
                [ 3,1,0],
                [-3,0,1]])
R1.subdivide(1,1)
```

$$R_1 = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 3.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ -3.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

y a continuación la matriz de giro

```
a = 2*pi/4
gR1R1 = matrix(RR,[[1, 0       ,  0],
               [0, cos(a), -sin(a)],
               [0, sin(a),  cos(a)]])
g=R1*gR1R1*R1^-1
g.subdivide(1,1)
```

$$g = R_1 G_{\frac{2\pi}{4}} R_1^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -1.00000000000000 \\ -6.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \end{array}\right)$$

Los vértices del cuadrado C en coordenadas homogéneas:

$$C_h = \{(1, 4, -2),\ g(1, 4, -2),\ g^2(1, 4, -2),\ g^3(1, 4, -2)\}$$

```
Ch = [g^i*vector(RR,[1,4,-2]) for i in range(4)]
C = [v[1:] for v in Ch]
```

Por lo que en coordenadas no homogéneas son:

$$C[0] = (4.00000000000000,\ -2.00000000000000)$$
$$C[1] = (2.00000000000000,\ -2.00000000000000)$$
$$C[2] = (2.00000000000000,\ -4.00000000000000)$$
$$C[3] = (4.00000000000000,\ -4.00000000000000)$$

Los vértices del simétrico $s(C)$ son

```
sCh = [s*v for v in Ch]
sC = [v[1:] for v in sCh]
```

$$s(C[0]) = (-0.923076923076923,\ 5.38461538461539)$$
$$s(C[1]) = (-1.69230769230769,\ 3.53846153846154)$$
$$s(C[2]) = (-3.53846153846154,\ 4.30769230769231)$$
$$s(C[3]) = (-2.76923076923077,\ 6.15384615384615)$$

Los vértices proyectados $p(C)$ son

```
pCh = [p*v for v in Ch]
pC = [v[1:] for v in pCh]
```

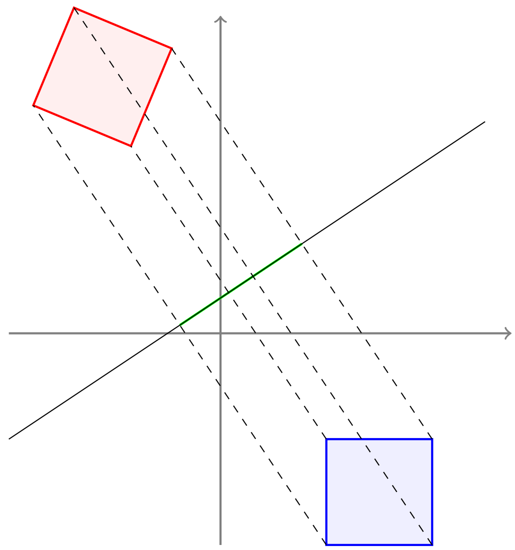
$$p(C[0]) = (1.53846153846154,\ 1.69230769230769)$$
$$p(C[1]) = (0.153846153846154,\ 0.769230769230769)$$
$$p(C[2]) = (-0.769230769230769,\ 0.153846153846154)$$
$$p(C[3]) = (0.615384615384615,\ 1.07692307692308)$$

Para hacer los dibujos pintamos los puntos, los polígonos y la recta usamos el siguiente código:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.7,
cara1/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
cara2/.style={thick, color = red, fill opacity = 0.3, fill = red!20},
cara3/.style={thick, color = green, fill opacity = 0.7}]
\draw[->,thick,gray] (-4,0) -- (5.5,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-4) -- (0,6); % Eje Y
\draw[cara1] !{C[0]} -- !{C[1]} -- !{C[2]} -- !{C[3]} -- cycle;
\draw[cara2] !{sC[0]} -- !{sC[1]} -- !{sC[2]} -- !{sC[3]} -- cycle;
\draw[cara3] !{pC[0]} -- !{pC[1]} -- !{pC[2]} -- !{pC[3]} -- cycle;
\draw[dashed] !{C[0]} -- !{pC[0]} -- !{sC[0]};
\draw[dashed] !{C[1]} -- !{pC[1]} -- !{sC[1]};
\draw[dashed] !{C[2]} -- !{pC[2]} -- !{sC[2]};
```

```
\draw[dashed] !{C[3]} -- !{pC[3]} -- !{sC[3]};
\draw[black] (-4,-2) -- (5,4);
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

que nos da el siguiente dibujo:



Ejercicio 3.

a) *Calcula la matriz de la aplicación afín* $h : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ *correspondiente a la* HOMOTECIA *con factor* 3 *y con centro en el punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) *Sea* $C \subseteq \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ *el triángulo isósceles contenido en el segundo cuadrante que tiene altura* 5 *y cuya base es el segmento con extremos* $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- *Calcula todos los vértices de* C *y* $h(C)$.
- *Dibuja* P, C *y* $h(C)$.

Solución:

a) Tomamos el sistema de referencia afín $\{P; e_1, e_2\}$ siendo P el centro de la homotecia y e_1, e_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

```
R = matrix(RR,[[1, 0, 0],
               [1, 1, 0],
               [1, 0, 1]])
R.subdivide(1,1)
```

La matriz del sistema de referencia es

$$R = \left(\begin{array}{c|cc} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Definimos la matriz de la homotecia de factor 3 en este sistema de referencia

```
hRR = matrix(RR,[[1, 0, 0],
                 [0, 3, 0],
                 [0, 0, 3]])
h = R*hRR*R^-1
h.subdivide(1,1)
```

La homotecia respecto del sistema canónico es

$$h = RH_3R^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -2.00000000000000 & 3.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ -2.00000000000000 & 0.000000000000000 & 3.00000000000000 \end{array}\right)$$

b) El punto medio de los extremos $(-4, 2)$ y $(-3, 2)$ es $(-7/2, 2)$. Y como la altura del triángulo es 5, el vértice que nos falta del triángulo es $(-7/2, 7)$. Introducimos entonces estos tres vértices en coordenadas homogéneas.

```
Ch = [vector(RR,[1,-3,2]),vector(RR,[1,-4,2]),vector(RR,[1,-7/2,7])]
```

Aplicamos la homotecia h a los tres vértices del triángulo:

```
hCh = [h*v for v in Ch]
```

$$h(1, -3, 2) = (1.00000000000000,\ -11.0000000000000,\ 4.00000000000000)$$
$$h(1, -4, 2) = (1.00000000000000,\ -14.0000000000000,\ 4.00000000000000)$$
$$h(1, -7/2, 7) = (1.00000000000000,\ -12.5000000000000,\ 19.0000000000000)$$

Nos quedamos con las coordenadas no homogéneas:

```
C = [v[1:] for v in Ch]
hC = [v[1:] for v in hCh]
```

de forma que el triángulo isósceles contenido en el segundo cuadrante y de altura 5 que tiene como vértices los puntos

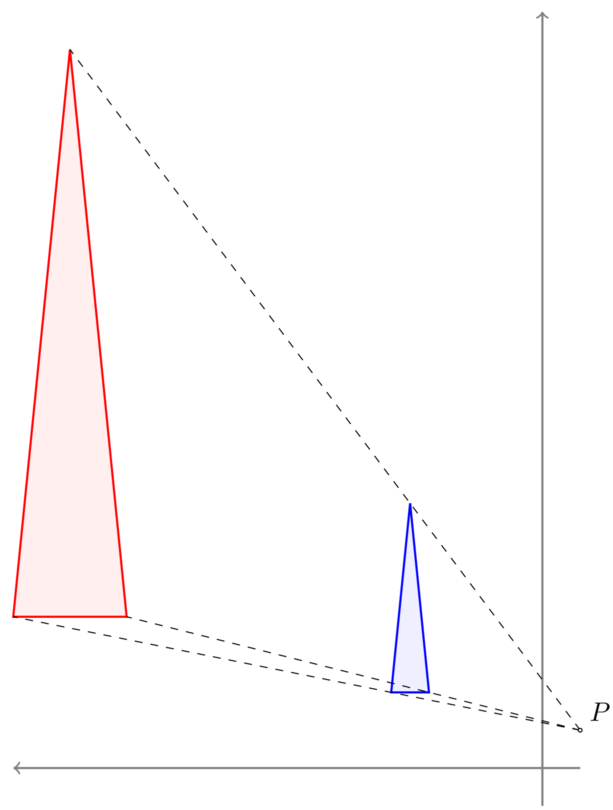
$$A_1 = (-3.00000000000000,\ 2.00000000000000)$$
$$A_2 = (-4.00000000000000,\ 2.00000000000000)$$
$$A_3 = (-3.50000000000000,\ 7.00000000000000)$$

transforma dichos vértices a través de la homotecia de factor 3 a:

$$h(A_1) = (-11.0000000000000,\ 4.00000000000000)$$
$$h(A_2) = (-14.0000000000000,\ 4.00000000000000)$$
$$h(A_3) = (-12.5000000000000,\ 19.0000000000000)\,.$$

Para hacer el dibujo pintamos el punto P y los triángulos C y $h(C)$ introduciendo los siguientes comandos:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.5,
cara1/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
cara2/.style={thick, color = red, fill opacity = 0.3, fill = red!20}]
\draw[->,thick,gray] (1,0) -- (-14,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-1) -- (0,20); % Eje Y
\draw[cara1] !{C[0]} -- !{C[1]} -- !{C[2]} -- cycle;
\draw[cara2] !{hC[0]} -- !{hC[1]} -- !{hC[2]} -- cycle;
\draw[dashed] (1,1) -- !{C[0]} -- !{hC[0]};
\draw[dashed] (1,1) -- !{C[1]} -- !{hC[1]};
\draw[dashed] (1,1) -- !{C[2]} -- !{hC[2]};
\draw[fill = white] (1,1) circle (0.5mm) node[above right] {$P$};
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```



Ejercicio 4. *Calcula los vértices de un octógono regular en $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ centrado en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, sabiendo que el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ es un vértice de dicho octógono. Pinta el octógono en color amarillo y sus vértices en color azul.*

Solución:

Tomamos como sistema de referencia afín un punto que es el centro $(1, 3)$, y como base la canónica e_1, e_2:

```
R = matrix(RR,[[1,0,0],
              [1,1,0],
              [3,0,1]])
R.subdivide(1,1)
```

La matriz del sistema de referencia es

$$R = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 3.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right).$$

Calculamos la matriz de giro:

```
b=2*pi/8
gRR=column_matrix(RR,[[1, 0,      0],
                      [0, cos(b), sin(b)],
                      [0,-sin(b), cos(b)]])
g=R*gRR*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

$$g = RG_{\frac{2\pi}{8}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 2.41421356237310 & 0.707106781186548 & -0.707106781186548 \\ 0.171572875253810 & 0.707106781186548 & 0.707106781186548 \end{array}\right)$$

Obtenemos los vértices del octógono en coordenadas homogéneas:

```
Vh=[g^k*vector(RR,[1,2,5]) for k in range(8)]
```

Para después obtenerlos sin la coordenada homogénea:

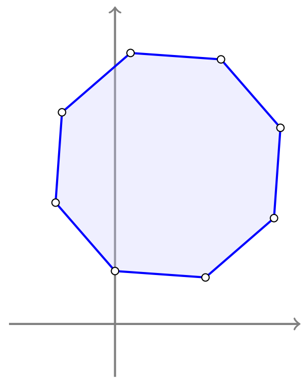
```
V=[v[1:] for v in Vh]
```

$$\begin{aligned} V[0] &= (2.00000000000000, 5.00000000000000) \\ V[1] &= (0.292893218813453, 5.12132034355964) \\ V[2] &= (-1.00000000000000, 4.00000000000000) \\ V[3] &= (-1.12132034355964, 2.29289321881345) \\ V[4] &= \left(-4.44089209850063 \times 10^{-16}, 1.00000000000000\right) \\ V[5] &= (1.70710678118655, 0.878679656440356) \\ V[6] &= (3.00000000000000, 2.00000000000000) \\ V[7] &= (3.12132034355964, 3.70710678118655) \end{aligned}$$

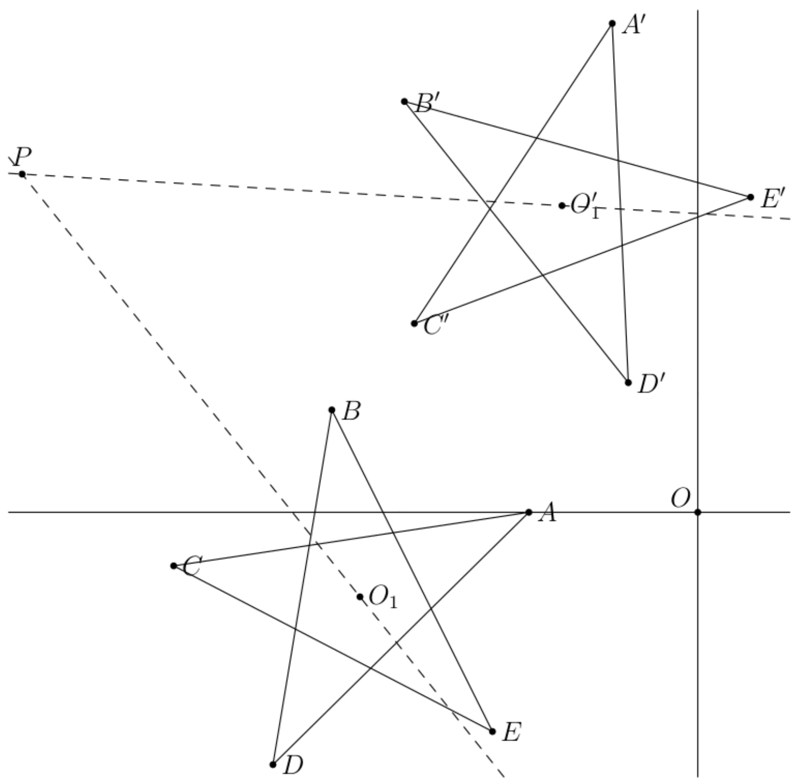
Pintamos el octógono usando el siguiente código:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.7,
cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20}]
\draw[->,thick,gray] (-2,0) -- (3.5,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-1) -- (0,6); % Eje Y
\draw[cara] !{V[0]} -- !{V[1]} -- !{V[2]} -- !{V[3]} -- !{V[4]} --
!{V[5]} -- !{V[6]} -- !{V[7]} -- cycle;
\draw[fill = white] !{V[0]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[1]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[2]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[3]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[4]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[5]} circle (0.7mm);
```

```
\draw[fill = white] !{V[6]} circle (0.7mm);
\draw[fill = white] !{V[7]} circle (0.7mm);
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```



Ejercicio 5. *Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto* $O_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y con vértice* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *El resto de los vértices se nombran* B, C, D *y* E *tal y como indica la figura. Posteriormente, se gira la estrella un ángulo de* $48°$ *alrededor del punto* $P = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$ *en sentido positivo.*



Determinar las coordenadas x *e* y *de los vértices* $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$ *y dibuja las estrellas y las líneas que unen los centros de dichas estrellas con el centro de giro.*

Solución:

Para determinar las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E debemos construir la matriz del giro de $\alpha = 2\pi/5$ grados, centrada en el punto $O_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ girando el vértice $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ cuatro veces. Para ello comenzamos creando el sistema de referencia de punto O_1 y base canónica e_1, e_2.

```
R = matrix(RR,[[ 1,0,0],
            [-4,1,0],
            [-1,0,1]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -4.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ -1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right).$$

La matriz de giro en este sistema de referencia es:

```
a = 2*pi/5
gRR = matrix(RR,[[1, 0      ,  0    ],
                   [0, cos(a), -sin(a)],
                   [0, sin(a),  cos(a)]])
```

Y la matriz de este giro asociada al sistema de referencia canónico del plano es:

```
g=R*gRR*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

$$g = RG_{\frac{2\pi}{5}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -3.71498853879536 & 0.309016994374947 & -0.951056516295154 \\ 3.11324305955556 & 0.951056516295154 & 0.309016994374947 \end{array}\right)$$

Las coordenadas de los vértices de la estrella son:

```
Vh = [g^i*vector(RR,[1,-2,0]) for i in range(5)]
V = [v[1:] for v in Vh]
```

En coordenadas homogéneas

$$A = (1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -2.00000000000000,\ 0.000000000000000)$$
$$B = g(1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -4.33302252754526,\ 1.21113002696525)$$
$$C = g^2(1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -6.20581924104237,\ -0.633446489790001)$$
$$D = g^3(1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -5.03024873645742,\ -2.98458749895989)$$
$$E = g^4(1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -2.43090949495495,\ -2.59309603821536)$$

Y en coordenadas no homogéneas:

$$A = V[0] = (-2.00000000000000,\ 0.000000000000000)$$
$$B = V[1] = (-4.33302252754526,\ 1.21113002696525)$$
$$C = V[2] = (-6.20581924104237,\ -0.633446489790001)$$
$$D = V[3] = (-5.03024873645742,\ -2.98458749895989)$$
$$E = V[4] = (-2.43090949495495,\ -2.59309603821536)$$

Para determinar las coordenadas de los puntos A', B', C', D' y E' debemos construir la matriz del giro de $\beta = 48\pi/180$ grados, alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Comenzamos construyendo el sistema de referencia en el punto P y base canónica e_1, e_2.

```
R1 = matrix(RR,[[ 1,0,0],
             [-8,1,0],
             [ 4,0,1]])
R1.subdivide(1,1)
```

$$R_1 = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -8.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 4.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

```
b = 48*pi/180
g1R1R1 = matrix(RR,[[1, 0,       0 ],
             [0, cos(b), -sin(b)],
             [0, sin(b),  cos(b)]])
g1=R1*g1R1R1*R1^-1
g1.subdivide(1,1)
```

La matriz de giro del sistema de referencia es:

$$g_1 = R_1G_{\frac{48\pi}{180}}R_1^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.325624152780442 & 0.669130606358858 & -0.743144825477394 \\ 7.26863617838372 & 0.743144825477394 & 0.669130606358858 \end{array}\right)$$

Las coordenadas de los vértices de la segunda estrella son:

```
V1h = [g1*v for v in Vh]
V1= [w[1:] for w in V1h]
```

En coordenadas homogéneas

$$A' = g_1(1, -2, 0) = (1.00000000000000,\ -1.01263705993727,\ 5.78234652742893)$$
$$B' = g_1(g(1, -2, 0)) = (1.00000000000000,\ -3.47377885096203,\ 4.85897707768416)$$
$$C' = g_1(g^2(1, -2, 0)) = (1.00000000000000,\ -3.35613695782745,\ 2.23295528774596)$$
$$D' = g_1(g^3(1, -2, 0)) = (1.00000000000000,\ -0.822288478344630,\ 1.53335401611108)$$
$$E' = g_1(g^4(1, -2, 0)) = (1.00000000000000,\ 0.626074111183405,\ 3.72699844160628)$$

Y en coordenadas no homogéneas:

$$A' = V_1[0] = (-1.01263705993727,\ 5.78234652742893)$$

$$B' = V_1[1] = (-3.47377885096203, 4.85897707768416)$$
$$C' = V_1[2] = (-3.35613695782745, 2.23295528774596)$$
$$D' = V_1[3] = (-0.822288478344630, 1.53335401611108)$$
$$E' = V_1[4] = (0.626074111183405, 3.72699844160628)$$

Por último, el centro de la estrella girada es:

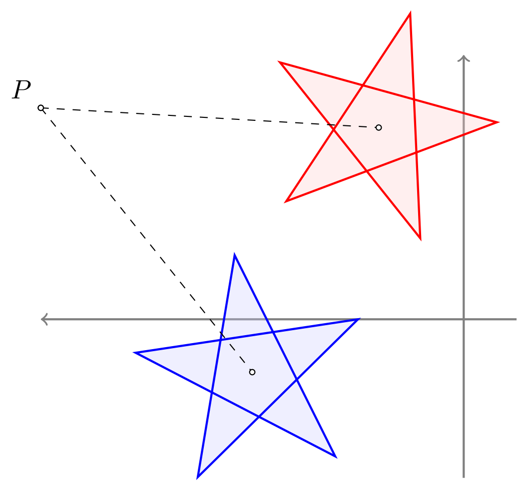
```
centro=(g1*vector(RR,[1,-4,-1]))[1:]  # centro de la estrella girada
```

$$g_1(O_1) = (-1.60775344717760, 3.62692627011528)$$

Para dibujarlo todo añadimos los siguientes comandos de Sagesub:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.7,
cara1/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
cara2/.style={thick, color = red, fill opacity = 0.3, fill = red!20}]
\draw[->,thick,gray] (1,0) -- (-8,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-3) -- (0,5); % Eje Y
\draw[cara1] !{V[0]} -- !{V[2]} -- !{V[4]} -- !{V[1]} -- !{V[3]} -- cycle; %Estrella 1
\draw[cara2] !{V1[0]} -- !{V1[2]} -- !{V1[4]} -- !{V1[1]} -- !{V1[3]} -- cycle; %Estrella 2
\draw[dashed] (-8,4) -- (-4,-1);
\draw[dashed] (-8,4) -- !{centro};
\draw[fill = white] (-8,4) circle (0.5mm);
\draw[fill = white] (-4,-1) circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{centro} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] (-8,4) circle (0.5mm) node[above left] {$P$};
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

obteniendo:



Cuestiones teóricas previas

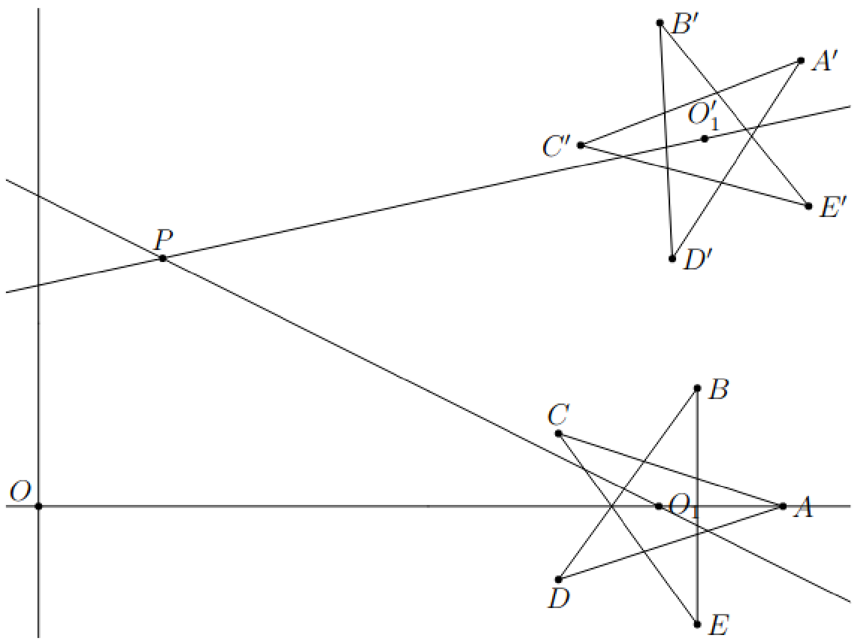
La recta en el plano que pasa por los puntos de coordenadas $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ se puede calcular de la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & c \\ y & b & d \end{vmatrix} = 0$$

La distancia de un punto $P=(x_0,x_1)$ sobre una recta r de ecuación $Ax+By+C=0$ es

$$d(P,r)=\frac{|Ax_0+Bx_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ejercicio 6. *Determina una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1=(5,0)$ y con vértice $A=(6,0)$. El resto de los vértices se nombran B,C,D y E tal y como indica la figura. Posteriormente gira la estrella un ángulo de $39°$ alrededor del punto $P=(1,2)$ en sentido positivo.*



Dibujar dicha estrella así como su girada, mostrando además los segmentos PO_1 y PO_1'. Además calcular los siguientes puntos y valores:

a) *La ecuación de la recta PO_1.*
b) *La distancia de A a la recta PO_1*
c) *Las coordenadas del punto B.*
d) *Las coordenadas del punto O_1' centro de la estrella girada.*
e) *Las coordenadas del punto B', vértice correspondiente con el vértice B de la estrella girada.*

Solución:

Introducimos el sistema de referencia canónico con punto (5,0) y base e_1, e_2, R:

```
R = matrix(RR,[[1,0,0],
              [5,1,0],
              [0,0,1]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R=\left(\begin{array}{c|cc} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 5.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

El sistema de referencia para realizar el giro y obtener las estrella de vértices A,B,C,D y E será g. Para obtener los vértices de la estrella, definimos el ángulo $\beta=2\pi/5$ y la matriz del giro de ángulo β en este sistema de referencia

```
beta = 2*pi/5
G = matrix(RR,[[1, 0        ,  0       ],
            [0, cos(beta), -sin(beta)],
            [0, sin(beta),  cos(beta)]])
g=R*G*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

La matriz del giro del sistema de referencia que resulta es

$$g = RG_{\frac{2\pi}{5}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 3.45491502812526 & 0.309016994374947 & -0.951056516295154 \\ -4.75528258147577 & 0.951056516295154 & 0.309016994374947 \end{array}\right).$$

Definimos los vértices del pentágono girando el vértice $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ en coordenadas homogéneas

```
V = [g^i*vector(RR,[1,6,0]) for i in range(5)]
```

Los vértices con coordenada homogénea son:

$$V[0] = (1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 6.00000000000000,\ 0.000000000000000)$$
$$V[1] = g(1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 5.30901699437495,\ 0.951056516295154)$$
$$V[2] = g^2(1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 4.19098300562505,\ 0.587785252292474)$$
$$V[3] = g^3(1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 4.19098300562505,\ -0.587785252292473)$$
$$V[4] = g^4(1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 5.30901699437495,\ -0.951056516295154)$$

Ahora debemos girar dichos vértices un ángulo de 39° centrado en el punto $P = (1, 2)$. Para eso introducimos como R_1 el sistema de referencia canónico en P.

```
R1 = matrix(RR,[[1,0,0],
             [1,1,0],
             [2,0,1]])
R1.subdivide(1,1)
```

Nuestro sistema de referencia ahora es

$$R_1 = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 2.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Definimos el ángulo $\alpha = 39\pi/180$ y la matriz del giro de ángulo α en este sistema de referencia

```
alpha = 39*pi/180
G1 = matrix(RR,[[1, 0         ,  0         ],
            [0, cos(alpha), -sin(alpha)],
            [0, sin(alpha),  cos(alpha)]])
g1=R1*G1*R1^-1
g1.subdivide(1,1)
```

La matriz del giro que resulta es

$$g_1 = R_1G_{\frac{39\pi}{180}}R_1^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.48149482064270 & 0.777145961456971 & -0.629320391049838 \\ -0.183612313963779 & 0.629320391049838 & 0.777145961456971 \end{array}\right).$$

Los vértices en coordenadas homogéneas de la estrella girada con centro en el punto P son

```
V1 = [g1*v for v in V]
```

$$V_1[0] = g_1(1, 6, 0) = (1.00000000000000,\ 6.14437058938453,\ 3.59231003233525)$$
$$V_1[1] = g_1(g(1, 6, 0)) = (1.00000000000000,\ 5.00885667838226,\ 3.89657006778261)$$
$$V_1[2] = g_1(g^2(1, 6, 0)) = (1.00000000000000,\ 4.36859509317298,\ 2.91065368504247)$$
$$V_1[3] = g_1(g^3(1, 6, 0)) = (1.00000000000000,\ 5.10840558282504,\ 1.99706381499634)$$
$$V_1[4] = g_1(g^4(1, 6, 0)) = (1.00000000000000,\ 6.20589519587298,\ 2.41835060627038)$$

Quitamos la coordenada homogénea para poder representar los puntos en el plano

```
V = [v[1:] for v in V]
V1 = [v[1:] for v in V1]
```

De esta forma los puntos ahora son Dibujamos las estrellas así como los puntos P, $O1$, $O'1$ y los segmentos PO_1 y PO_1'.

$$
\begin{array}{ll}
V[0] = (6.00000000000000, 0.000000000000000) & V_1[0] = (6.14437058938453, 3.59231003233525) \\
V[1] = (5.30901699437495, 0.951056516295154) & V_1[1] = (5.00885667838226, 3.89657006778261) \\
V[2] = (4.19098300562505, 0.587785252292474) & V_1[2] = (4.36859509317298, 2.91065368504247) \\
V[3] = (4.19098300562505, -0.587785252292473) & V_1[3] = (5.10840558282504, 1.99706381499634) \\
V[4] = (5.30901699437495, -0.951056516295154) & V_1[4] = (6.20589519587298, 2.41835060627038)
\end{array}
$$

Para introducir los comandos en Sagesub adecuadamente debemos introducir los siguientes puntos y vectores:

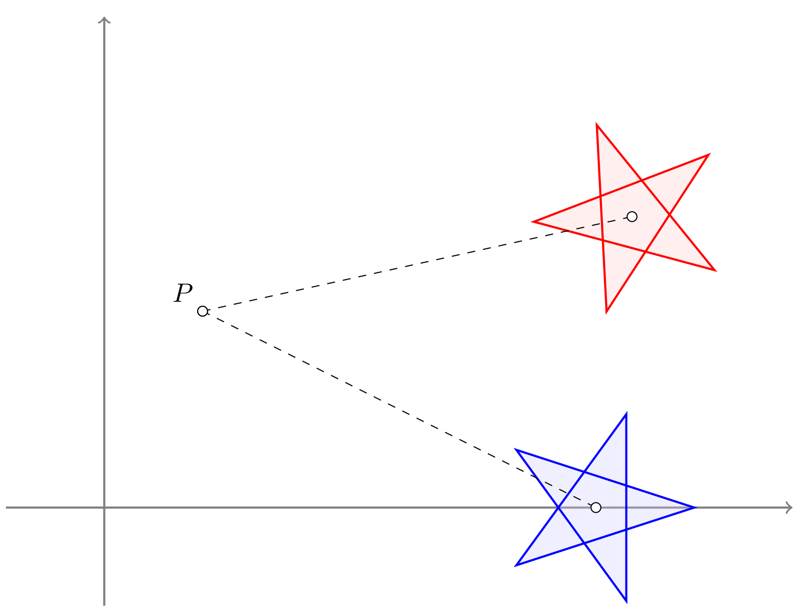
```
P=vector(RR,[1,2])
O1=vector(RR,[5,0])
g1O1=g1*vector(RR,[1,5,0])
g1O1=g1O1[1:]
```

$$
\begin{aligned}
P &= (1.00000000000000, 2.00000000000000) \\
O_1 &= (5.00000000000000, 0.000000000000000) \\
g_1(O_1) &= (5.36722462792756, 2.96298964128541)
\end{aligned}
$$

Introduciendo los siguientes comandos:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 1.3,
cara1/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
cara2/.style={thick, color = red, fill opacity = 0.3, fill = red!20}]
\draw[->,thick,gray] (-1,0) -- (7,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-1) -- (0,5); % Eje Y
\draw[cara1] !{V[0]} -- !{V[2]} -- !{V[4]} -- !{V[1]} -- !{V[3]} -- cycle;
\draw[cara2] !{V1[0]} -- !{V1[2]} -- !{V1[4]} -- !{V1[1]} -- !{V1[3]} -- cycle;
\draw[dashed] !{P} -- !{O1};
\draw[dashed] !{P} -- !{g1O1};
\draw[fill = white] !{P} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{P} circle (0.5mm) node[above left] {$P$};
\draw[fill = white] !{O1} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{g1O1} circle (0.5mm);
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

se obtiene:



Además

a) Ecuación de la recta PO_1.

```
Pol.<x,y> = PolynomialRing(RR)
A=matrix(Pol,[[1,1,1],
              [x,1,5],
              [y,2,0]])
```

La ecuación de la recta PO_1 es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 5 \\ y & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto

$$2.00000000000000x + 4.00000000000000y - 10.0000000000000 = 0$$

o equivalentemente

$$x + 2y - 5 = 0$$

b) Distancia de A a la recta PO_1

La distancia del punto $A = (6, 0)$ sobre la recta $x + 2y - 5 = 0$ por tanto es

$$\frac{|6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

c) Coordenadas del punto B.

Las coordenadas del punto B son

```
B=g*vector(RR,[1,6,0])
B=B[1:]
```

$$(5.30901699437495, 0.951056516295154)$$

Obtendríamos el mismo resultado tomando $B = V[1]$.

d) Las coordenadas del punto O'_1 centro de la estrella girada.

```
g1O1=g1*vector(RR,[1,5,0])
g1O1=g1O1[1:]
```

Las coordenadas del punto O'_1 son

$$O'_1 = (5.36722462792756, 2.96298964128541)$$

e) Las coordenadas del punto B', vértice correspondiente con el vértice B de la estrella girada.

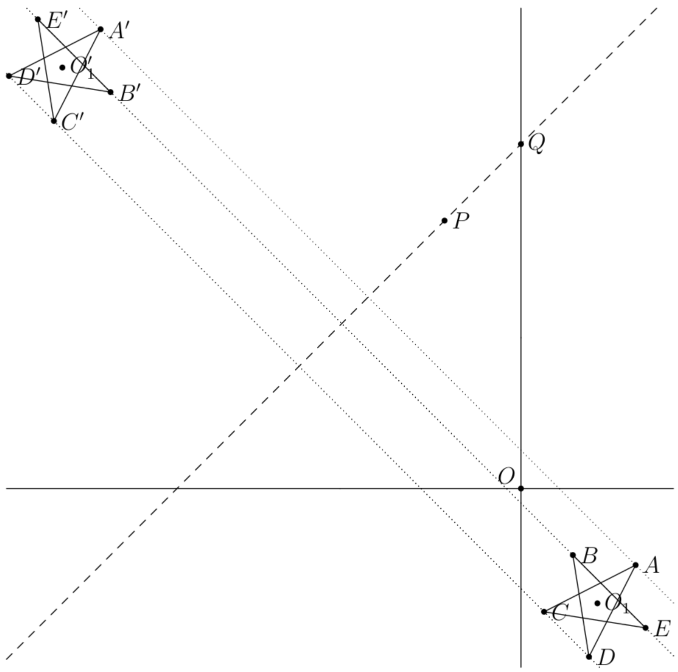
```
Bp=g1*g*vector(RR,[1,6,0])
Bp=Bp[1:]
```

Las coordenadas del punto B' son

$$B' = (5.00885667838226, 3.89657006778261)$$

Obtendríamos el mismo resultado tomando $B' = V_1[1]$.

Ejercicio 7. *Determina una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -3)$ y con vértice $A = (3, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-2, 7)$ y $Q = (0, 9)$.*



Dibujar dicha estrella así como su simétrica, mostrando además la recta que une los puntos P y Q. Además calcular los siguientes puntos y valores:

a) *La ecuación de la recta PQ.*
b) *La distancia de A a la recta PQ*
c) *Las coordenadas del punto B.*
d) *Las coordenadas del punto O_1' centro de la estrella simétrica a la dada.*
e) *Las coordenadas del punto B', vértice correspondiente con el vértice B de la estrella simétrica.*

Solución:

El sistema de referencia para realizar el giro y obtener las estrella de vértices A, B, C, D y E, es el que tiene como punto O_1 y base canónica e_1, e_2.

```
R = matrix(RR,[[ 1,0,0],
             [ 2,1,0],
             [-3,0,1]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 2.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ -3.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Para obtener los vértices de la estrella, definimos el ángulo $\beta = 2\pi/5$ y la matriz del giro de ángulo β en este sistema de referencia

```
beta = 2*pi/5
G = matrix(RR,[[1, 0        ,  0        ],
             [0, cos(beta), -sin(beta)],
             [0, sin(beta),  cos(beta)]])
g=R*G*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

La matriz del giro en sistema de referencia que resulta es

$$g = RG_{\frac{2\pi}{5}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -1.47120353763536 & 0.309016994374947 & -0.951056516295154 \\ -3.97506204946546 & 0.951056516295154 & 0.309016994374947 \end{array}\right).$$

Definimos los vértices en homogéneas del pentágono girando el vértice $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$V = \{(1,3,-2),\ g(1,3,-2),\ g^2(1,3,-2),\ g^3(1,3,-2),\ g^4(1,3,-2)\}$$

```
V = [g^i*vector(RR,[1,3,-2]) for i in range(5)]
```

$$V[0] = (1.00000000000000,\ 3.00000000000000,\ -2.00000000000000)$$
$$V[1] = (1.00000000000000,\ 1.35796047807979,\ -1.73992648932990)$$
$$V[2] = (1.00000000000000,\ 0.603197753332580,\ -3.22123174208247)$$
$$V[3] = (1.00000000000000,\ 1.77876825791753,\ -4.39680224666742)$$
$$V[4] = (1.00000000000000,\ 3.26007351067010,\ -3.64203952192021)$$

Ahora debemos determinar la simetría respecto de la recta que pasa por los puntos P y Q para obtener los vértices simétricos de los ya calculados.

Para ello tomamos como sistema de referencia un punto cualquiera de la recta junto con una base adecuada. Tomamos como punto, por ejemplo,

$$P = (-2,7).$$

El primer vector de la base lo tomamos sobre la recta, por ejemplo,

$$v_1 = \vec{PQ} = (0,9) - (-2,7) = (2,2)$$

y el segundo vector un ortogonal, por ejemplo

$$v_2 = (-2,2).$$

```
P=vector(RR,[-2,7])
Q=vector(RR,[0,9])
v1 = Q-P
v2=vector(RR,[-v1[1],v1[0]])
R=block_matrix(RR,[[       matrix([1,0,0])],
                [column_matrix([P,v1,v2])]])
R.subdivide(1,1)
```

El sistema de referencia es

$$R = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -2.00000000000000 & 2.00000000000000 & -2.00000000000000 \\ 7.00000000000000 & 2.00000000000000 & 2.00000000000000 \end{array}\right)$$

Introducimos la matriz de simetría:

```
sRR = matrix(RR,[[1,0, 0],
              [0,1, 0],
              [0,0,-1]])
sRR.subdivide(1,1)
s=R*sRR*R^-1
s.subdivide(1,1)
```

Respecto de dicho sistema de referencia la matriz de la simetría es

$$S_{RR} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Y respecto del sistema canónico es la matriz

$$s = RS_{RR}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -9.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \\ 9.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \end{array}\right)$$

Los vértices de la estrella simétrica son

$$V = \{s(1,3,-2),\ s(g(1,3,-2)),\ s(g^2(1,3,-2)),\ s(g^3(1,3,-2)),\ s(g^4(1,3,-2))\}$$

```
V1 = [s*v for v in V]
```

$$V_1[0] = (1.00000000000000, -11.0000000000000, 12.0000000000000)$$
$$V_1[1] = (1.00000000000000, -10.7399264893299, 10.3579604780798)$$
$$V_1[2] = (1.00000000000000, -12.2212317420825, 9.60319775333258)$$
$$V_1[3] = (1.00000000000000, -13.3968022466674, 10.7787682579175)$$
$$V_1[4] = (1.00000000000000, -12.6420395219202, 12.2600735106701)$$

Quitamos la coordenada homogénea para poder representar los puntos en el plano

```
V = [vector(v[1:]) for v in V]
V1 = [vector(v[1:]) for v in V1]
```

$$V[0] = (3.00000000000000, -2.00000000000000) \quad V_1[0] = (-11.0000000000000, 12.0000000000000)$$
$$V[1] = (1.35796047807979, -1.73992648932990) \quad V_1[1] = (-10.7399264893299, 10.3579604780798)$$
$$V[2] = (0.603197753332580, -3.22123174208247) \quad V_1[2] = (-12.2212317420825, 9.60319775333258)$$
$$V[3] = (1.77876825791753, -4.39680224666742) \quad V_1[3] = (-13.3968022466674, 10.7787682579175)$$
$$V[4] = (3.26007351067010, -3.64203952192021) \quad V_1[4] = (-12.6420395219202, 12.2600735106701)$$

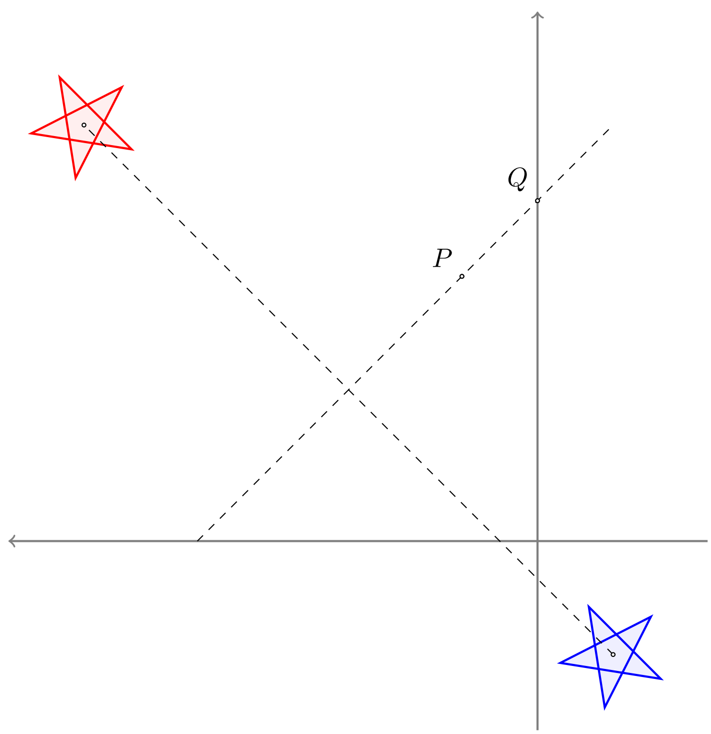
Dibujamos las estrellas así como los puntos P y Q, el segmento que los une y los centros O_1 y O_1'.

```
O1=vector(RR,[2,-3])
sO1=s*vector(RR,[1,2,-3])
sO1=sO1[1:]
```

De esta forma,

$$O_1 = (2.00000000000000, -3.00000000000000)$$
$$O_1' = s(O_1) = (-12.0000000000000, 11.0000000000000)$$

Obteniendo:



El código que hay tras el dibujo es el siguiente:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.5,
cara1/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
cara2/.style={thick, color = red, fill opacity = 0.3, fill = red!20}]
\draw[->,thick,gray] (4.5,0) -- (-14,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-5) -- (0,14); % Eje Y
```

```
\draw[cara1] !{V[0]} -- !{V[2]} -- !{V[4]} -- !{V[1]} -- !{V[3]} -- cycle;
\draw[cara2] !{V1[0]} -- !{V1[2]} -- !{V1[4]} -- !{V1[1]} -- !{V1[3]} -- cycle;
\draw[dashed] (-9,0) -- (2,11);
\draw[dashed] !{O1} -- !{sO1};
\draw[fill = white] !{P} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{Q} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{P} circle (0.5mm) node[above left] {$P$};
\draw[fill = white] !{Q} circle (0.5mm) node[above left] {$Q$};
\draw[fill = white] !{O1} circle (0.5mm);
\draw[fill = white] !{sO1} circle (0.5mm);
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

Además

a) Ecuación de la recta PQ.

```
Pol.<x,y>=PolynomialRing(RR)
A=matrix(Pol,[[1,1,1],
              [x,-2,0],
              [y,7,9]])
```

La ecuación de la recta PQ es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 0 \\ y & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto

$$-2.00000000000000x + 2.00000000000000y - 18.0000000000000 = 0$$

o equivalentemente

$$-x + y - 9 = 0$$

b) Distancia de A a la recta PQ

La distancia del punto $A = (3, -2)$ sobre la recta $-x + y - 9 = 0$ por tanto es

$$\frac{|-(3) + (-2) - 9|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

c) Coordenadas del punto B.

Las coordenadas del punto B son

```
B=g*vector(RR,[1,3,-2])
B=B[1:]
```

$$B = (1.35796047807979, -1.73992648932990)$$

Obtendríamos el mismo resultado tomando $B = V[1]$.

d) Las coordenadas del punto O_1' centro de la estrella simétrica a la dada.

```
sO1=s*vector(RR,[1,2,-3])
sO1=sO1[1:]
```

Las coordenadas del punto O_1' son

$$O_1' = (-12.0000000000000, 11.0000000000000)$$

e) Las coordenadas del punto B', vértice correspondiente con el vértice B de la estrella simétrica.

```
Bp=s*g*vector(RR,[1,3,-2])
Bp=Bp[1:]
```

Las coordenadas del punto B' son

$$B' = (-10.7399264893299, 10.3579604780798)$$

Obtendríamos el mismo resultado tomando $B' = V_1[1]$.

Ejercicio 8. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Nuestro objetivo es calcular la matriz de simetría con respecto al plano que pasa por los puntos:

```
A=vector(RR,[1,2,-1])
B=vector(RR,[2,1,1])
C=vector(RR,[-1,3,1])
```

Comenzamos calculando el sistema de referencia que nos proporciona la expresión canónica de la simetría. Para ello, tomamos un punto cualquiera del plano, por ejemplo $P = A$, como punto base de nuestro sistema de referencia. La base vectorial estará formada por dos vectores linealmente independientes del plano, por ejemplo

$$v_1 = \vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } v_2 = \vec{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

```
v1=B-A
v2=C-A
```

El tercer vector de la base debe ser perpendicular a ambos, por lo que podemos tomarlo como $v_3 = v_1 \times v_2$.

```
v3=v1.cross_product(v2)
```

Nuestro sistema de referencia es

```
R=block_matrix(RR,[[       matrix([1,0,0,0])],
                [column_matrix([A,v1,v2,v3])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 1.00000000000000 & -2.00000000000000 & -4.00000000000000 \\ 2.00000000000000 & -1.00000000000000 & 1.00000000000000 & -6.00000000000000 \\ -1.00000000000000 & 2.00000000000000 & 2.00000000000000 & -1.00000000000000 \end{array}\right)$$

La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es

```
sRR = matrix(RR,[[1,0,0, 0],
              [0,1,0, 0],
              [0,0,1, 0],
              [0,0,0,-1]])
sRR.subdivide(1,1)
```

$$S_{RR} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Para pasar al sistema de referencia canónico, procedemos como siempre:

```
sRR.subdivide(1,1)
s=R*sRR*R^-1
s.subdivide(1,1)
```

$$s = R{\cdot}S_{RR}{\cdot}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 2.26415094339623 & 0.396226415094340 & -0.905660377358490 & -0.150943396226415 \\ 3.39622641509434 & -0.905660377358491 & -0.358490566037736 & -0.226415094339623 \\ 0.566037735849057 & -0.150943396226415 & -0.226415094339623 & 0.962264150943396 \end{array}\right).$$

Ejercicio 9. *Calcula la matriz de la homotecia con factor* $\frac{1}{2}$ *y con centro en el punto* $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solución:

Para hacer una homotecia con centro en un punto, podremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y como base la canónica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$. La matriz del sistema de referencia es en este caso:

```
R = matrix(RR,[[ 1,0,0,0],
               [-2,1,0,0],
               [ 2,0,1,0],
               [ 1,0,0,1]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -2.00000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 2.00000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

La matriz de la homotecia afín, respecto del sistema de referencia afín R, centrada en el origen y de factor $\frac{1}{2}$ tiene como matriz asociada su expresión canónica:

```
hRR = matrix(RR,[[1,0,0,0],
                 [0,1/2,0,0],
                 [0,0,1/2,0],
                 [0,0,0,1/2]])
hRR.subdivide(1,1)
```

$$H_{1/2} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 0.500000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.500000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.500000000000000 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz en el sistema canónico del espacio afín es

```
h=R*hRR*R^-1
h.subdivide(1,1)
```

$$h = R \cdot H_{1/2} \cdot R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -1.00000000000000 & 0.500000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.500000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.500000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.500000000000000 \end{array}\right)$$

Ejercicio 10. *Calcula los vértices de un heptágono regular en $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$, sabiendo que están contenidos en el plano $3x+y-z=1$, que su centro está en el punto $P=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, y que uno de dichos vértices es el punto $Q=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$.*

Solución.-

Para construir el heptágono regular que nos piden debemos usar el giro de ángulo $2\pi/7$ respecto de la recta perpendicular al plano que pasa por P, el centro del heptágono. Procedemos, pues, a calcular la matriz asociada a dicho giro en la referencia canónica del espacio. Como siempre, comenzamos calculando el sistema de referencia afín, R, que nos da la expresión canónica del giro. El punto base de dicho sistema de referencia es el centro del giro, $P=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$,

```
P=vector(RR,[1,0,2])
```

La base $\{u,v,w\}$ estará formada una base ortonormal del espacio de direcciones del plano, $\{u,v\}$, y un vector w perpendicular a ambos y de norma 1. Primero hacemos los cálculos sin normalizar, luego forzamos la ortonormalidad de la base calculada. Por tanto, podemos tomar $u=\vec{PQ}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ y, utilizando el vector perpendicular del espacio de direcciones $w=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$,

```
u=vector(RR,[0,1,1])
w=vector(RR,[3,1,-1])
```

el segundo vector del plano sería $v=u\times w$.

```
v=u.cross_product(w)
```

$$v=(-2.00000000000000,\ 3.00000000000000,\ -3.00000000000000)\,.$$

El tercer vector (vector perpendicular a ambos) es el propio

$$w=(3.00000000000000,\ 1.00000000000000,\ -1.00000000000000)\,.$$

A continuación, normalizamos la base ortogonal:

```
u=u/norm(u)
v=v/norm(v)
w=w/norm(w)
```

para construir nuestro sistema de referencia

```
R=block_matrix(RR,[[matrix([1,0,0,0])],
                  [column_matrix([P,u,v,w])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R=\left(\begin{array}{r|rrr}1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000\\ \hline 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & -0.426401432711221 & 0.904534033733291\\ 0.000000000000000 & 0.707106781186547 & 0.639602149066831 & 0.301511344577764\\ 2.00000000000000 & 0.707106781186547 & -0.639602149066831 & -0.301511344577764\end{array}\right)$$

La matriz asociada al giro respecto de este sistema de referencia es, por tanto:

```
b=2*pi/7
G=matrix(RR,[[1,0,0,0],
             [0,cos(b),-sin(b),0],
             [0,sin(b),cos(b),0],
             [0,0,0,1]])
```

$$G_{2\pi/7}=\begin{pmatrix}1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000\\ 0.000000000000000 & 0.623489801858734 & -0.781831482468030 & 0.000000000000000\\ 0.000000000000000 & 0.781831482468030 & 0.623489801858734 & 0.000000000000000\\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000\end{pmatrix}$$

Y la matriz asociada respecto del sistema de referencia canónico del espacio es:

```
g=R*G*R^(-1)
```

$$g = \begin{pmatrix} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.745287721672517 & 0.931543600337951 & -0.133046462019089 & -0.338415661005235 \\ -1.68434563041616 & 0.338415661005235 & 0.657718001689758 & 0.672964984705461 \\ 0.551517534601395 & 0.133046462019089 & -0.741421384367510 & 0.657718001689758 \end{pmatrix}$$

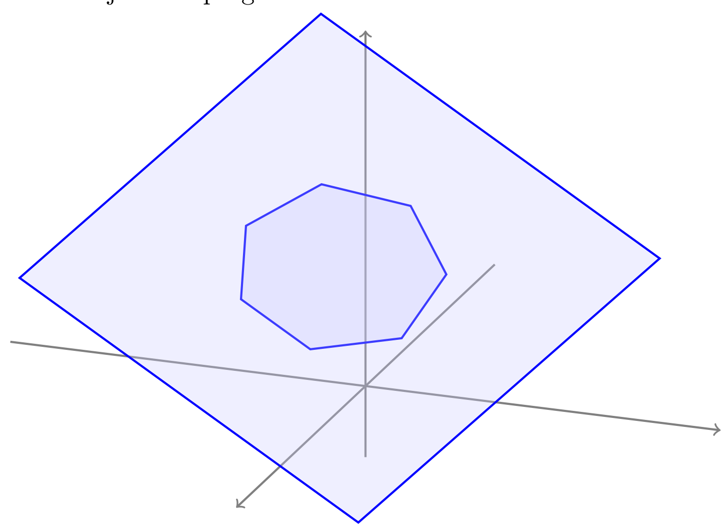
Determinamos ahora los vértices del heptágono, girando el vértice dado Q. Utilizamos dicho vértice en coordenadas homogéneas para obtener el resto de los vértices.

```
g=R*G*R^(-1)
V=[g^i*vector(RR,[1,1,1,3]) for i in range(7)]
W=[v[1:] for v in V]
```

Los vértices del héptagono quitando la coordenada homogénea son:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1.00000000000000, 1.00000000000000, 3.00000000000000) \\ v_2 &= (0.528537876975676, 1.33068298639522, 1.91629661732225) \\ v_3 &= (0.412096348663333, 0.659334543048687, 0.895623589038685) \\ v_4 &= (0.738358260856474, -0.508506259187131, 0.706568523382292) \\ v_5 &= (1.26164173914352, -1.29343147661771, 1.49149374081287) \\ v_6 &= (1.58790365133667, -1.10437641096132, 2.65933454304869) \\ v_7 &= (1.47146212302432, -0.0837033826777529, 3.33068298639522) \end{aligned}$$

Aunque no lo piden, podemos dibujar el heptágono:



El código que hay tras el dibujo es:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\tdplotsetmaincoords{70}{110}
\begin{tikzpicture}[scale = 1, tdplot_main_coords,
  cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20}]
\draw[->,thick,gray] (-5,0,0) -- (5,0,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-5,0) -- (0,5,0); % Eje Y
\draw[->,thick,gray] (0,0,-1) -- (0,0,5); % Eje Z

\draw[cara] !{W[0]} -- !{W[1]} -- !{W[2]} -- !{W[3]} -- !{W[4]} -- !{W[5]}
-- !{W[6]} -- cycle;
\draw[cara] !{P+3*u+3*v} -- !{P+3*u-3*v} -- !{P-3*u-3*v} -- !{P-3*u+3*v} -- cycle;
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

Ejercicio 11. *Calcula el simétrico de cada uno de los puntos*

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\-1\\-3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\3\\-1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\-6\\10\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\10\\-15\end{bmatrix}$$

respecto del plano $x+y=1$. Dibuja todos los puntos, sus simétricos y el plano.

Solución:

Para resolver el problema, debemos usar la simetría ortogonal respecto del plano $x+y=1$. Procedemos, pues, a calcular la matriz asociada a dicha simetría en la referencia canónica del espacio. Como siempre, comenzamos calculando el sistema de referencia afín, R, que nos da la expresión canónica de la simetría. El punto base de dicho sistema de referencia es un punto P cualquiera del plano $x+y=1$. Por ejemplo, podemos tomar $P=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, como punto base de nuestro sistema de referencia R.

```
P=vector(RR,[1,0,0])
```

La base estará formada por dos vectores del espacio de direcciones del plano, por ejemplo $u=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ y, utilizando el vector perpendicular del espacio de direcciones del plano, $w=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, el segundo vector del plano sería $v=u\times w$. El tercer vector (vector perpendicular a ambos) es el propio w.

```
u=vector(RR,[0,0,1])
w=vector(RR,[1,1,0])
v=u.cross_product(w)
```

Después, normalizamos la base ortogonal

```
u=u/norm(u)
v=v/norm(v)
w=w/norm(w)
```

Nuestro sistema de referencia es

```
R=block_matrix(RR,[[matrix([1,0,0,0])],
                   [column_matrix([P,u,v,w])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R=\left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000\\ \hline 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & -0.707106781186547 & 0.707106781186547\\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.707106781186547 & 0.707106781186547\\ 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \end{array}\right).$$

A continuación determinamos la matriz de la simetría respecto del sistema canónico

```
SRR=column_matrix(RR,[[1,0,0,0],
                      [0,1,0,0],
                      [0,0,1,0],
                      [0,0,0,-1]])
s=R*SRR*R^-1
s.subdivide(1,1)
```

$$s=RS_{RR}R^{-1}=\left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000\\ \hline 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & -1.00000000000000 & 0.000000000000000\\ 1.00000000000000 & -1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000\\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Seguidamente obtenemos los simétricos de los puntos dados

```
Dh=[vector(RR,[1,1,1,0]),vector(RR,[1,2,-1,-3]),vector(RR,[1,3,3,-1]),vector(RR,[1,2,3,1]),
vector(RR,[1,4,-6,10]),vector(RR,[1,5,10,-15])]
```

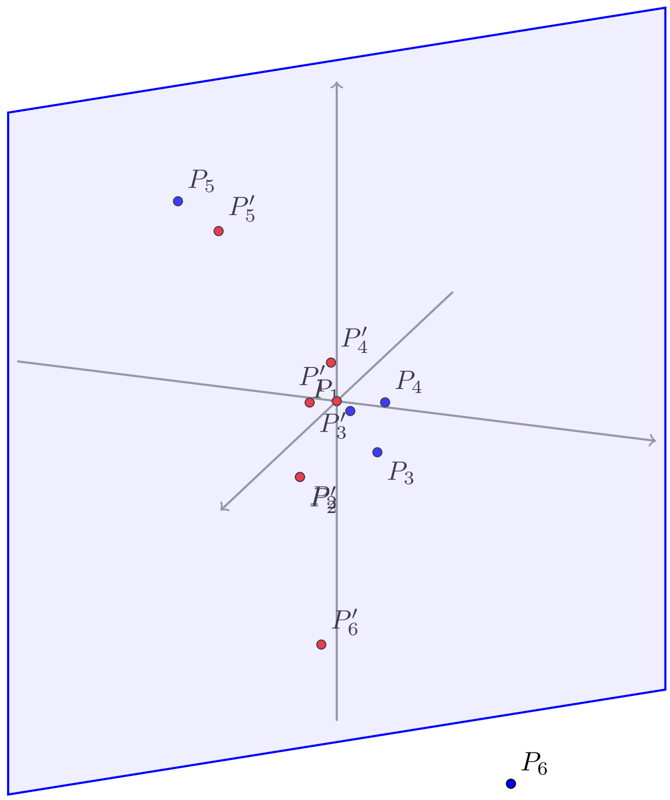
Se aplica la simetría a cada uno de los puntos y eliminamos la coordenada homogénea de los puntos para poder representarlos

```
simeh=[s*A for A in Dh]
D=[v[1:] for v in Dh]
sime=[w[1:] for w in simeh]
```

Los puntos son

$$(0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)$$
$$(2.00000000000000, -1.00000000000000, -3.00000000000000)$$
$$(-2.00000000000000, -2.00000000000000, -1.00000000000000)$$
$$(-2.00000000000000, -1.00000000000000, 1.00000000000000)$$
$$(7.00000000000000, -3.00000000000000, 10.0000000000000)$$

Su representación gráfica es:



El código que hay tras el dibujo es:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\tdplotsetmaincoords{70}{110}
\begin{tikzpicture}[scale = 0.3, tdplot_main_coords,
  cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20}]
\draw[->,thick,gray] (-15,0,0) -- (15,0,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-15,0) -- (0,15,0); % Eje Y
\draw[->,thick,gray] (0,0,-15) -- (0,0,15); % Eje Z
\draw[fill = blue] !{D[0]} circle (2mm) node[above left] {$P_1$};
\draw[fill = blue] !{D[1]} circle (2mm) node[below right] {$P_2$};
\draw[fill = blue] !{D[2]} circle (2mm) node[below right] {$P_3$};
\draw[fill = blue] !{D[3]} circle (2mm) node[above right] {$P_4$};
\draw[fill = blue] !{D[4]} circle (2mm) node[above right] {$P_5$};
\draw[fill = blue] !{D[5]} circle (2mm) node[above right] {$P_6$};
\draw[fill = red] !{sime[0]} circle (2mm) node[above left] {$P'_1$};
\draw[fill = red] !{sime[1]} circle (2mm) node[below right] {$P'_2$};
\draw[fill = red] !{sime[2]} circle (2mm) node[below right] {$P'_3$};
\draw[fill = red] !{sime[3]} circle (2mm) node[above right] {$P'_4$};
\draw[fill = red] !{sime[4]} circle (2mm) node[above right] {$P'_5$};
```

```
\draw[fill = red] !{sime[5]} circle (2mm) node[above right] {$P'_6$};
\draw[cara] !{16*u+16*v} -- !{16*u-16*v} -- !{-16*u-16*v} -- !{-16*u+16*v} -- cycle;
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

Ejercicio 12. *Sabiendo que la simetría ortogonal $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ respecto a un cierto plano cumple*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcula un sistema de referencia afín de dicho plano y la matriz de f respecto del sistema de referencia canónico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$.

Solución:

Comenzamos calculando la matriz de f respecto del sistema de referencia canónico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$. Para ello, primero debemos calcular el sistema de referencia R respecto del cual f tiene su expresión canónica. Como el punto $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el simétrico del punto $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces el vector $\vec{TQ} = Q - T$ es el vector normal al plano de simetría. Tomamos como punto base del sistema de referencia R al punto medio entre Q y T, punto que está en dicho plano de simetría; esto es, $P = \dfrac{Q+T}{2}$

```
Q=vector(RR,[3,2,1])
T=vector(RR,[1,3,-1])
P=(Q+T)/2
```

La base estará formada por el vector ortogonal al plano $w = \vec{TQ} = Q - T$ junto con una base ortogonal de dicho plano. Tomamos el vector u como un ortogonal a w y el v el producto vectorial de u y de w

```
w=Q-T
u=vector(RR,[-w[1],w[0],0])
v=u.cross_product(w)
```

Normalizamos la base ortogonal

```
u=u/norm(u)
v=v/norm(v)
w=w/norm(w)
```

El sistema de referencia R es, por tanto:

```
R=block_matrix(RR,[[matrix([1,0,0,0])],
                   [column_matrix([P,u,v,w])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 2.00000000000000 & 0.447213595499958 & 0.596284793999944 & 0.666666666666667 \\ 2.50000000000000 & 0.894427190999916 & -0.298142396999972 & -0.333333333333333 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -0.745355992499930 & 0.666666666666667 \end{array}\right)$$

La matriz de simetría (es decir, la matriz de f respecto del sistema de referencia R) es:

```
S=column_matrix(RR,[[1,0,0,0],
                    [0,1,0,0],
                    [0,0,1,0],
                    [0,0,0,-1]])
S.subdivide(1,1)
```

$$S_{RR} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -1.00000000000000 \end{array}\right)$$

Y, por tanto, la matriz de la simetría f respecto del sistema de referencia canónico es

```
s=R*S*R^(-1)
s.subdivide(1,1)
```

$$s = RS_{RR}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.666666666666667 & 0.111111111111111 & 0.444444444444444 & -0.888888888888889 \\ -0.333333333333333 & 0.444444444444444 & 0.777777777777778 & 0.444444444444444 \\ 0.666666666666667 & -0.888888888888889 & 0.444444444444444 & 0.111111111111111 \end{array}\right)$$

Ahora, nos han pedido un sistema de referencia afín R_Π para el plano Π respecto del cual se ha hecho la simetría. Obviamente, este está dado por el punto P y la base $\{u, v\}$:

```
Rpi=block_matrix(RR,[[matrix([1,0,0])],
                    [column_matrix([P,u,v])]])
Rpi.subdivide(1,1)
```

$$R_\Pi = \left(\begin{array}{r|rr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 2.00000000000000 & 0.447213595499958 & 0.596284793999944 \\ 2.50000000000000 & 0.894427190999916 & -0.298142396999972 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -0.745355992499930 \end{array}\right)$$

Ejercicio 13. *Dibuja un prisma en $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ con centro de gravedad el origen de coordenadas y bases pentagonales regulares en planos paralelos al plano $\Pi \equiv x + y + 2z = 0$, y que tenga al punto $A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ como uno de sus vértices.*

Solución:

Lo primero que hacemos es observar que el punto A que nos dan no pertenece al plano Π (que es, en realidad evidente: basta sustituir las coordenadas de A en la ecuación del plano y ver que no se satisface), por lo que pertenece a cierto plano Π_1 paralelo a Π. Evidentemente, el giro del plano Π con centro en $P = (0, 0, 0)$ y de ángulo $2\pi/5$ nos sirve para calcular el resto de vértices de una de las bases del prisma (la que vive en Π_1): basta aplicarlo reiteradas veces al punto A. Luego, para calcular los vértices de la otra base del prisma, bastará aplicar a estos la simetría ortogonal respecto del plano Π. Obsérvese que el sistema de referencia R que nos proporciona la expresión canónica del giro coincide con el sistema de referencia que proporciona la simetría ortogonal que vamos a usar.

Calculemos R: Tomamos como punto base el punto $P = (0, 0, 0)$, el origen de coordenadas, que es el centro de la base del prisma, y como base tomamos la normalización de la que se obtiene con el vector ortogonal al plano $x + y + 2z = 0$ junto con una base ortogonal de dicho plano.

```
P=vector(RR,[0,0,0])
```

Tomamos el vector w como un vector perpendicular al plano:

```
w=vector(RR,[1,1,2])
```

$$w = (1.00000000000000,\ 1.00000000000000,\ 2.00000000000000)$$

Tomamos un vector que esté dentro de plano u

```
u=vector(RR,[1,-1,0])
```

$$u = (1.00000000000000,\ -1.00000000000000,\ 0.000000000000000)$$

Se toma $v = u \times w$ como vector ortogonal a ambos vectores

```
v=u.cross_product(w)
```

$$v = (-2.00000000000000,\ -2.00000000000000,\ 2.00000000000000)$$

Normalizamos la base ortogonal:

```
u=u/norm(u)
v=v/norm(v)
w=w/norm(w)
```

El sistema de referencia R es, por tanto:

```
R=block_matrix(RR,[[matrix([1,0,0,0])],
                  [column_matrix([P,u,v,w])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 0.707106781186547 & -0.577350269189626 & 0.408248290463863 \\ 0.000000000000000 & -0.707106781186547 & -0.577350269189626 & 0.408248290463863 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.577350269189626 & 0.816496580927726 \end{array}\right).$$

Obtenemos la base del prisma usando la matriz de giro de ángulo $\beta = 2\pi/5$.

```
beta=2*pi/5
G=column_matrix(RR,[[1, 0,          0,          0],
                    [0, cos(beta),sin(beta),0],
                    [0,-sin(beta),cos(beta),0],
                    [0, 0,          0,          1]])
g=R*G*R^(-1)
g.subdivide(1,1)
```

$$g = RG_{\frac{2\pi}{5}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 0.424180828645789 & 0.891698228094869 & -0.157939528370329 \\ 0.000000000000000 & -0.661370559553185 & 0.424180828645790 & 0.618594865453698 \\ 0.000000000000000 & 0.618594865453698 & -0.157939528370329 & 0.769672331458316 \end{array}\right)$$

De esta forma obtenemos los vértices en coordenadas homogéneas del pentágono de la base del prisma:

$$\{(1, 0.5, 0.1, 0.4),\ g(1, 0.5, 0.1, 0.4),\ g^2(1, 0.5, 0.1, 0.4),\ g^3(1, 0.5, 0.1, 0.4),\ g^4(1, 0.5, 0.1, 0.4)\}$$

```
vb1h=[g^i*vector(RR,[1,0.5,0.1,0.4]) for i in range(5)]
```

Los vértices de la segunda base del prisma se obtienen aplicando la simetría ortogonal respecto del plano Π a los vértices de la primera base

```
S=column_matrix(RR,[[1,0,0,0],
                    [0,1,0,0],
                    [0,0,1,0],
                    [0,0,0,-1]])
s=R*S*R^(-1)
s.subdivide(1,1)
```

$$s = RS_{RR}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 0.000000000000000 & 0.666666666666667 & -0.333333333333333 & -0.666666666666667 \\ 0.000000000000000 & -0.333333333333333 & 0.666666666666667 & -0.666666666666667 \\ 0.000000000000000 & -0.666666666666667 & -0.666666666666667 & -0.333333333333333 \end{array}\right)$$

De esta forma obtenemos los vértices en coordenadas homogéneas del segundo pentágono de la otra base del prisma:

$$\{s(1,0.5,0.1,0.4),\ s(g(1,0.5,0.1,0.4)),\ s(g^2(1,0.5,0.1,0.4)),\ s(g^3(1,0.5,0.1,0.4)),\ s(g^4(1,0.5,0.1,0.4))\}$$

```
vb2h=[s*v for v in vb1h]
```

Eliminamos la coordenada homogénea:

```
vb1=[v[1:] for v in vb1h]
vb2=[w[1:] for w in vb2h]
```

Los vértices de la primera base son:

$$v_{base1}[0] = (0.500000000000000, 0.100000000000000, 0.400000000000000)$$
$$v_{base1}[1] = (0.238084425784250, -0.0408292507305345, 0.601372412473142)$$
$$v_{base1}[2] = (-0.0303969967149739, 0.197224871271696, 0.616586062721639)$$
$$v_{base1}[3] = (0.0655879330483352, 0.485179660561623, 0.424616203195021)$$
$$v_{base1}[4] = (0.393391304549055, 0.425091385563882, 0.290758654943531)$$

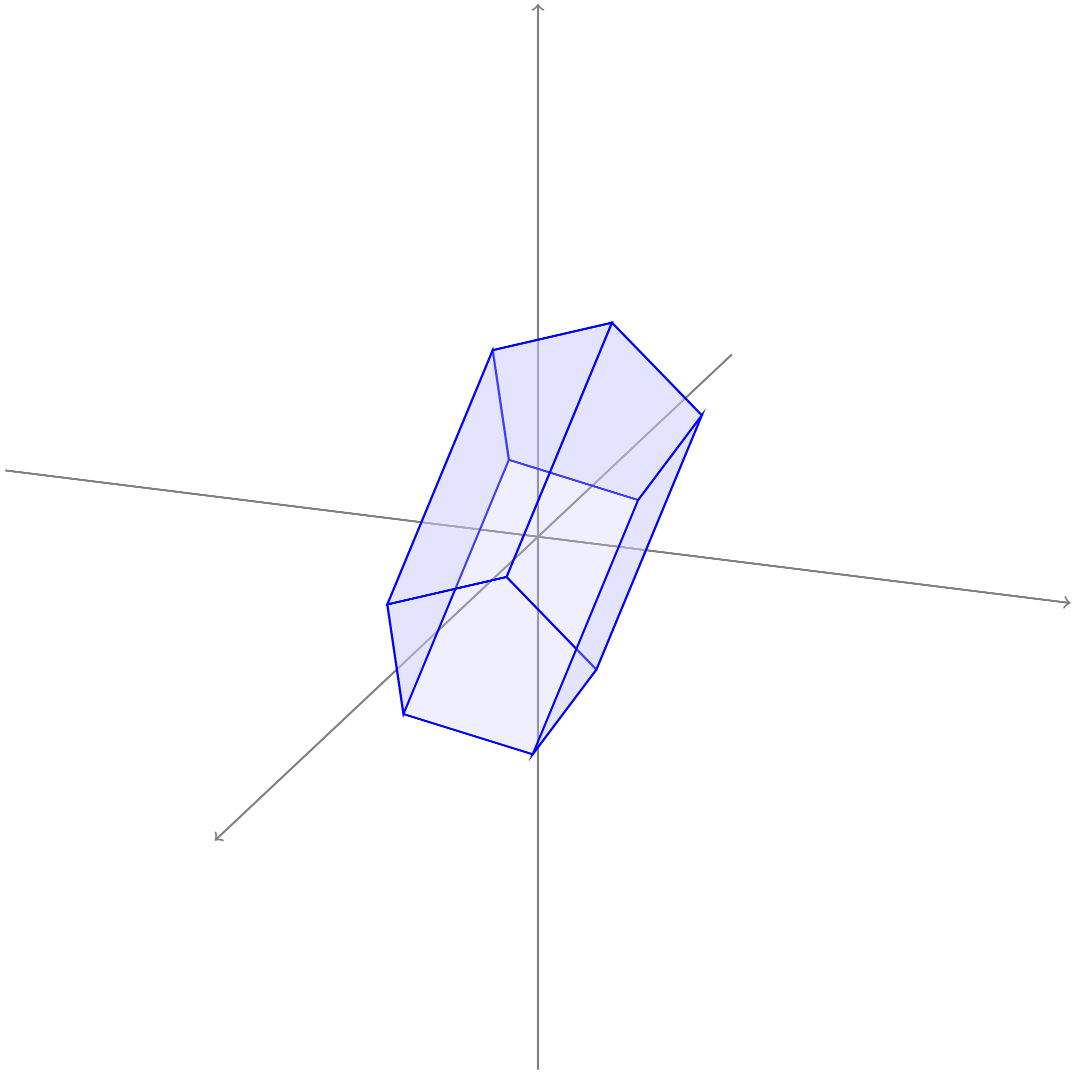
Los vértices de la segunda base son:

$$v_{base2}[0] = (0.0333333333333335, -0.366666666666667, -0.533333333333333)$$
$$v_{base2}[1] = (-0.228582240882417, -0.507495917397201, -0.331960920860191)$$
$$v_{base2}[2] = (-0.497063663381640, -0.269441795394970, -0.316747270611694)$$
$$v_{base2}[3] = (-0.401078733618331, 0.0185129938949565, -0.508717130138313)$$
$$v_{base2}[4] = (-0.0732753621176110, -0.0415752811027850, -0.642574678389802)$$

Finalmente escribimos el código en Sagesub

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\tdplotsetmaincoords{70}{110}
\begin{tikzpicture}[scale = 5, tdplot_main_coords,
  cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
  ]
\draw[->,thick,gray] (-1.5,0,0) -- (2.5,0,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-1.5,0) -- (0,1.5,0); % Eje Y
\draw[->,thick,gray] (0,0,-1.5) -- (0,0,1.5); % Eje Z
\draw[cara] !{vb1[0]} -- !{vb1[1]} -- !{vb1[2]} -- !{vb1[3]} -- !{vb1[4]}  --cycle;
\draw[cara] !{vb2[0]} -- !{vb2[1]} -- !{vb2[2]} -- !{vb2[3]} -- !{vb2[4]}  --cycle;
\draw[cara] !{vb1[0]} -- !{vb2[0]} -- !{vb2[1]} -- !{vb1[1]} -- cycle;
\draw[cara] !{vb1[1]} -- !{vb2[1]} -- !{vb2[2]} -- !{vb1[2]} -- cycle;
\draw[cara] !{vb1[2]} -- !{vb2[2]} -- !{vb2[3]} -- !{vb1[3]} -- cycle;
\draw[cara] !{vb1[3]} -- !{vb2[3]} -- !{vb2[4]} -- !{vb1[4]} -- cycle;
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

obteniendo



Ejercicio 14. *Calcula los vértices de una* PIRÁMIDE $C \subseteq \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ *de altura 5 cuya base sea un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 que esté contenido en el plano de ecuación* $x - y + z = 2$.

Solución:

Tomamos como punto base, un punto del plano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y como base, una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde $\{v_1, v_2\}$ sea una base ortonormal del espacio de dirección del plano y el vector v_3 un vector unitario ortogonal al plano.

```
P=vector(RR,[1,0,1])
v3 = vector(RR,[1,-1,1])
v1 = vector(RR,[1,1,0])
v2 = v1.cross_product(v3)
v1=v1/norm(v1)
v2=v2/norm(v2)
v3=v3/norm(v3)
```

Sistema de referencia R:

```
R = block_matrix(RR,[[       matrix([1, 0, 0, 0])],
                    [column_matrix([P,v1,v2,v3])]])
R.subdivide(1,1)
```

De donde

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 0.707106781186547 & 0.408248290463863 & 0.577350269189626 \\ 0.000000000000000 & 0.707106781186547 & -0.408248290463863 & -0.577350269189626 \\ 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & -0.816496580927726 & 0.577350269189626 \end{array}\right).$$

Para calcular los puntos de la base de la pirámide construimos la matriz del giro de ángulo $2\pi/5$ y la pasamos al nuevo sistema de referencia.

```
a = 2*pi/5
G = column_matrix(RR,[[1,    0,      0,  0],
                    [0,cos(a),sin(a), 0],
                    [0,-sin(a),cos(a),0],
                    [0,    0,      0,  1]])
g = R*G*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

$$g = RG_{\frac{2\pi}{5}}R^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -0.318765067155870 & 0.539344662916632 & 0.318765067155871 & 0.779420404239239 \\ 0.460655337083368 & -0.779420404239239 & 0.539344662916632 & 0.318765067155870 \\ 0.779420404239239 & -0.318765067155871 & -0.779420404239239 & 0.539344662916632 \end{array}\right)$$

Los vértices de la pirámide, pentágono regular, está inscrito en una circunferencia de radio 1. Nuestra base es ortonormal. Por tanto, $||v_1|| = 1$. Así que podemos suponer por tanto que el punto que debemos girar es aquel que tiene como coordenadas $[1, 1, 0, 0]$ en el sistema de referencia R. Dicho punto en el sistema de referencia canónico es

$$R * vector(RR, [1, 1, 0, 0])$$

o equivalentemente el punto $P + v_1$.

Los puntos de la base de la pirámide serán los que corresponden a girar dicho punto cinco veces.

```
puntogiro=R*vector(RR,[1,1,0,0])
BasePiramideh = [g^i*puntogiro for i in range(5)]
```

El vértice de la pirámide, es el punto que tiene como coordenadas $[1, 0, 0, 5]$ respecto del sistema de referencia R (punto de altura 5). Dicho punto en el sistema de referencia canónico es

$$R * vector(RR, [1, 0, 0, 5])$$

```
Verticeh = R*vector(RR,[1,0,0,5])
```

Para poder dibujar la pirámide eliminamos la coordenada homogénea y unimos las aristas de la base y las que unen el vértice con los vértices de la base. Finalmente generamos el dibujo.

```
BP = [v[1:] for v in BasePiramideh]
Vertice = Verticeh[1:]
```

Los vértices base de la pirámide son:

$$BP[0] = (1.70710678118655, 0.707106781186547, 1.00000000000000)$$
$$BP[1] = (1.60677520913642, -0.169759184687603, 0.223465606175973)$$
$$BP[2] = (0.667900921590589, -0.812023727225957, 0.520075351183455)$$
$$BP[3] = (0.187976272774043, -0.332099078409412, 1.47992464881655)$$
$$BP[4] = (0.830240815312397, 0.606775209136423, 1.77653439382403)$$

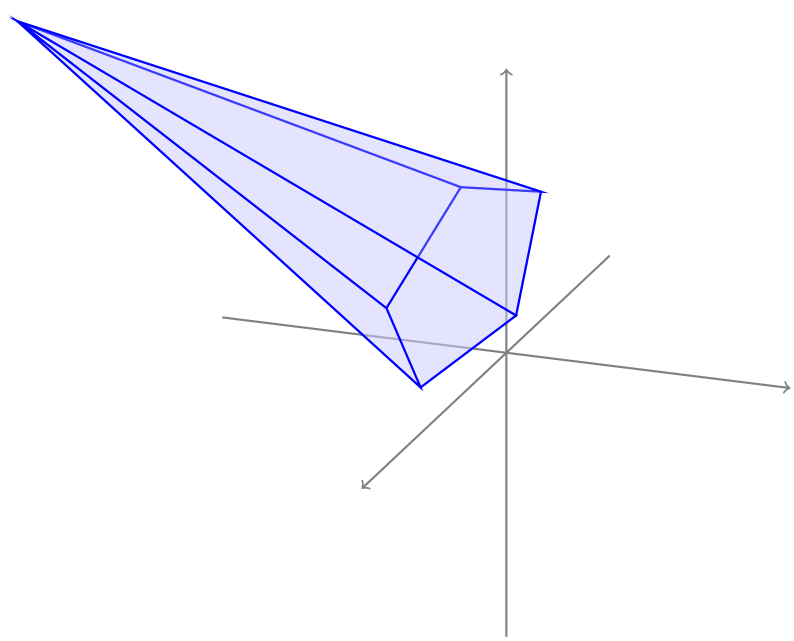
Y el vértice de la pirámide es:

$$Vertice = (3.88675134594813, -2.88675134594813, 3.88675134594813)$$

Si ejecutamos el siguiente código de Sagesub:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\tdplotsetmaincoords{70}{110}
\begin{tikzpicture}[scale = 1.6, tdplot_main_coords,
  cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
  ]
\draw[->,thick,gray] (-2.5,0,0) -- (3.5,0,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-2.5,0) -- (0,2.5,0); % Eje Y
\draw[->,thick,gray] (0,0,-2.5) -- (0,0,2.5); % Eje Z
\draw[cara] !{BP[0]} -- !{BP[1]} -- !{BP[2]} -- !{BP[3]} -- !{BP[4]} --cycle;
\draw[cara] !{BP[0]} -- !{Vertice} -- !{BP[1]} -- cycle;
\draw[cara] !{BP[1]} -- !{Vertice} -- !{BP[2]} -- cycle;
\draw[cara] !{BP[2]} -- !{Vertice} -- !{BP[3]} -- cycle;
\draw[cara] !{BP[3]} -- !{Vertice} -- !{BP[4]} -- cycle;
\draw[cara] !{BP[4]} -- !{Vertice} -- !{BP[0]} -- cycle;
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

obtenemos:



Ejercicio 15. *Calcula los vértices de una* TORRE $C \subseteq \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ *de altura 3 cuya base sea un hexágono regular de lado 1 que esté contenido en el plano de ecuación* $2x - y + z = 1$.

Solución.-

Para construir los vectores de la base, tomaremos v_3 el vector normal al plano y $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal del espacio de direcciones del plano.

```
v3 = vector(RR,[2,-1,1])
v1 = vector(RR,[1,2,0])
v2 = v1.cross_product(v3)
v1=v1/norm(v1)
v2=v2/norm(v2)
v3=v3/norm(v3)
```

El sistema de referencia que debemos tomar tiene como punto base, un punto del plano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y como vectores los que hemos calculado, v_1, v_2 y v_3.

```
P = vector(RR,[1,1,0])
R = block_matrix(RR,[[       matrix([1, 0, 0, 0])],
                     [column_matrix([P,v1,v2,v3])]])
R.subdivide(1,1)
```

$$R = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline 1.00000000000000 & 0.447213595499958 & 0.365148371670111 & 0.816496580927726 \\ 1.00000000000000 & 0.894427190999916 & -0.182574185835055 & -0.408248290463863 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & -0.912870929175277 & 0.408248290463863 \end{array}\right)$$

Para calcular los puntos de la base de la torre construimos la matriz del giro de ángulo $2\pi/6$ y la pasamos al nuevo sistema de referencia.

```
a = 2*pi/6
G = column_matrix(RR,[[1,    0,      0,  0],
                      [0,cos(a),sin(a), 0],
                      [0,-sin(a),cos(a),0],
                      [0,    0,      0,  1]])
g = R*G*R^-1
g.subdivide(1,1)
```

$$g = RG_{\frac{2\pi}{6}}R^{-1} = \left(\begin{array}{r|rrr} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ \hline -0.0202200572599402 & 0.833333333333333 & 0.186886723926607 & 0.520220057259940 \\ 0.936886723926607 & -0.520220057259941 & 0.583333333333333 & 0.623773447853214 \\ 0.977326838446488 & -0.186886723926607 & -0.790440114519881 & 0.583333333333333 \end{array}\right)$$

Los vértices de la base de la torre, hexágono regular, está inscrito en una circunferencia de radio 1. Los hexágonos regulares tienen la propiedad de que la distancia del centro del hexágono a cualquier vértice del mismo mide lo mismo que la arista. Por lo tanto, podemos suponer por tanto que el punto que debemos girar es aquel que tiene como coordenadas $[1, 1, 0, 0]$ en el sistema de referencia R. Dicho punto en el sistema de referencia canónico es

$$R * vector(RR, [1, 1, 0, 0])$$

o equivalentemente el punto $P + v_1$.

```
BaseTorreh = [g^i*R*vector(RR,[1,1,0,0]) for i in range(6)]
```

Los puntos de la base de la torre serán los que corresponden a girar el primero de los puntos seis veces.

Para obtener la tapa de la torre, sumamos a cada punto de la base de la torre el vector de coordenadas $[1, 0, 0, 3]$ en el sistema de referencia R (vector de altura 3). Es decir le sumamos el vector

$$R * vector[1, 0, 0, 3]$$

```
TapaTorreh = [v+R*vector(RR,[1,0,0,3]) for v in BaseTorreh]
```

Seguidamente eliminamos la coordenada homogénea y unimos las aristas de la base, las aristas de la tapa además de las aristas laterales de la torre. Finalmente generamos el dibujo.

```
BT = [v[1:] for v in BaseTorreh]
TT = [w[1:] for w in TapaTorreh]
```

Podemos entonces introducir el siguiente código en sagesub:

```
\begin{sagesub}
\begin{center}
\tdplotsetmaincoords{70}{110}
\begin{tikzpicture}[scale = 2.4, tdplot_main_coords,
  cara/.style={thick, color = blue, fill opacity = 0.3, fill = blue!20},
  ]
\draw[->,thick,gray] (-2.5,0,0) -- (3.5,0,0); % Eje X
\draw[->,thick,gray] (0,-2.5,0) -- (0,2.5,0); % Eje Y
\draw[->,thick,gray] (0,0,-2.5) -- (0,0,2.5); % Eje Z
\draw[cara] !{BT[0]} -- !{BT[1]} -- !{BT[2]} -- !{BT[3]} -- !{BT[4]} -- !{BT[5]} --cycle;
\draw[cara] !{TT[0]} -- !{TT[1]} -- !{TT[2]} -- !{TT[3]} -- !{TT[4]} -- !{TT[5]} --cycle;
\draw[cara] !{BT[0]} -- !{TT[0]} -- !{TT[1]} -- !{BT[1]} -- cycle;
\draw[cara] !{BT[1]} -- !{TT[1]} -- !{TT[2]} -- !{BT[2]} -- cycle;
\draw[cara] !{BT[2]} -- !{TT[2]} -- !{TT[3]} -- !{BT[3]} -- cycle;
\draw[cara] !{BT[3]} -- !{TT[3]} -- !{TT[4]} -- !{BT[4]} -- cycle;
\draw[cara] !{BT[4]} -- !{TT[4]} -- !{TT[5]} -- !{BT[5]} -- cycle;
\draw[cara] !{BT[5]} -- !{TT[5]} -- !{TT[0]} -- !{BT[0]} -- cycle;
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{sagesub}
```

para realizar el dibujo que nos piden: