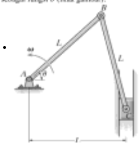
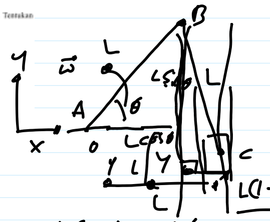
Friday, 21 June 2024 16:23

1. Batang AB berotasi terhadap titik A dengan kecepatan angular konstan ω. Tentukan Percepatan balok C sebagai fungsi θ (lihat gambar)!

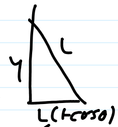




$A(0,0)$ $B(L\sin\theta, L\cos\theta)$

$C\left(L, L\sqrt{\cos\theta(2-\cos\theta)}\right)$

$Y^2 + (L(1-\cos\theta))^2 = L^2$



$Y^2 + L^2(1+\cos^2 - 2\cos\theta) = L^2$

$Y^2 = L^2\cos\theta(2-\cos\theta)$

$Y = L\sqrt{\cos\theta(2-\cos\theta)}$

$Y = L\sqrt{\cos\theta(2-\cos\theta)} - L\sin\theta$

$-L\dot\theta\cos\theta$

$+L\dot\theta^2\sin\theta$

$\dot\theta = \vec{\omega}$

$\ddot\theta = 0$

$Y_c = L\sqrt{\cos\theta}\sqrt{2-\cos\theta}$

$\dot Y_c = L\left(\frac{1}{2}\cos\theta^{-1/2}(-\sin\theta)\dot\theta\sqrt{2-\cos\theta} + \frac{1}{2}(2-\cos\theta)^{-1/2}(\sin\theta)\sqrt{\cos\theta}\right)$

$= \frac{L\sin\theta}{2}\left(-\sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}} + \sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}}\right)\dot\theta$

$\frac{u}{v} \rightarrow \frac{\dot u v - \dot v u}{v^2}$

$\ddot Y_c = \frac{L\dot\theta}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}}\right)(+\cos\theta)\dot\theta + \frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}(-\sin\theta)\sqrt{2-\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{2-\cos\theta}}(\sin\theta)\sqrt{\cos\theta}}{(2-\cos\theta)}\dot\theta\right.\right.$

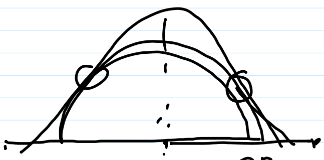
$\left.\left. - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2-\cos\theta}}(\sin\theta)\sqrt{\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}(-\sin\theta)\sqrt{2-\cos\theta}}{\cos\theta}\right)\dot\theta\right)\right)$

$\frac{L\dot\theta^2}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}}\right)(+\cos\theta) + \frac{\sin^2\theta}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}} - \sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}}\right)\frac{1}{2-\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}}\right)\right)\right)$

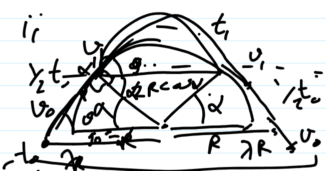
$\frac{L\dot\theta^2}{2}\left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}}\right)\left(\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\left(\frac{1}{2-\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\right)$

2. Sebuah target berada pada jarak λR ($\lambda > 1$) dari pusat sebuah bangunan berbentuk setengah silinder berjari-jari R. Gambar berikut menunjukkan penampang bangunan dengan sumbu silinder tegak lurus permukaan gambar. Seseorang ingin menembak target dari sisi berlawanan bangunan. Dalam lintasannya, peluru tidak boleh mendapat impuls dari kubah. Anggap tembakan dilakukan dari tanah dengan posisi awal bebas. Terdapat dua kemungkinan kasus yang ditinjau yaitu jika target cukup dekat dengan permukaan kubah ($1 < \lambda < \lambda c$) dan jika jarak target cukup jauh dengan permukaan kubah ($\lambda > \lambda c$).

a. Tinjau kasus pertama, di mana jarak target cukup dekat
   i. Apa syarat lintasan peluru agar kecepatan peluru minimal pada kasus λ kecil? Sketsa lintasan peluru!
   ii. Kecepatan minimal untuk mengenai target dapat ditulis dalam bentuk $v_0^2 = gRf_{(\lambda)}$. Tentukan $f_{(\lambda)}$
b. Tinjau kasus kedua, di mana jarak target cukup jauh
   i. Apa syarat lintasan peluru agar kecepatan peluru minimal pada kasus λ besar!? Sketsa lintasan peluru!
   ii. Hitung berapa kecepatan minimal untuk mengenai target jika $\lambda = \frac{13}{7}$



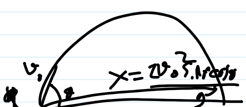
i. menyinggung silinder



θ, α, v_1, t_1

Saat $y = R\sin\alpha$ v_0 min

v_1 min



$\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$

$\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = 2\lambda R$

$v_0^2 = \frac{g\lambda R}{\sin\theta\cos\theta}$

$X_1 = 2R\cos\alpha$

$\sin\alpha\, v_1 t_1 = 2R\cos\alpha \longrightarrow$ GLB x_1

GLBB $0 = v_1\cos\alpha\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$

$t_1 = \frac{2v_1\cos\alpha}{g}$

$\frac{g^2R^2}{v_1^2}\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{g\lambda R}{\sin\theta\cos\theta}$

v_1

$\frac{2v_1^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = 2R\cos\alpha$

$\tan\theta = \frac{\lambda v_1^2}{gR}$

$v_0\cos\theta = v_1\sin\alpha$

$v_0\cos\theta = \frac{gR}{v_1}$

$\sin\alpha = \frac{gR}{v_1^2} \longrightarrow v_1^2 = \frac{gR}{\sin\alpha}$

$\tan\theta = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$

$\longrightarrow$ GLBB $\longrightarrow v_1^2\cos^2\alpha = v_0^2\sin^2\theta - 2g(R\sin\alpha)$

$\frac{gR}{\sin\alpha}\cos^2\alpha = \frac{\lambda gR}{\sin\theta\cos\theta}\sin^2\theta - 2gR\sin\alpha$

$v_0^2 = \frac{g\lambda R}{\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{gR}{\sin\alpha}\cos^2\alpha = \lambda gR\left(\frac{\lambda v_1^2}{gR}\right) - 2gR\sin\alpha$

$v_0 = \frac{gR\lambda(\lambda^2+\sin^2\alpha)}{(\lambda)(\sin\alpha)}$

$\left(\frac{gR}{\sin\alpha}\cos^2\alpha = \lambda^2\frac{gR}{\sin\alpha} - 2gR\sin\alpha\right)\sin\alpha$

$= gR\left(\frac{\lambda^2+1-(2-\lambda^2)}{\sqrt{1-(2-\lambda^2)}}\right)$

$gR\cos^2\alpha = \lambda^2 gR - 2gR(1-\cos^2\alpha)$

$= gR\left(\frac{2\lambda^2-1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)$

$$\cancel{gk}\cos^2\alpha = \lambda^2\cancel{gk} - 2\cancel{gk}(1-\cos^2\alpha)$$

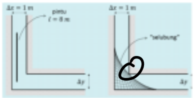
$$\cos^2\alpha = \lambda^2 - 2 + 2\cos^2\alpha$$

$$2-\lambda^2 = \cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{2-\lambda^2}$$

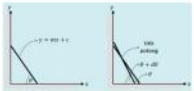
$$= gk\left(\frac{2\lambda^2-1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)$$

3. Sebuah daun pintu besar akan dibawa melewati suatu jalan berbelok sudut siku-siku yang tampak atasnya terlihat pada ilustrasi kiri Gambar 5.



Gambar 5: Soal no. 3

Anggap selama dipindah daun pintu selalu vertikal, akan ada suatu nilai Δy minimum agar pintu tersebut dapat lewat. Salah satu cara untuk menentukan Δy minimum ini adalah dengan mencari persamaan "selubung" dari semua kemungkinan posisi pintu seperti terlihat di ilustrasi kanan Gambar 5. Untuk mendapatkan persamaan "selubung" tinjau ilustrasi kiri Gambar 6.



Gambar 6: Soal no. 3

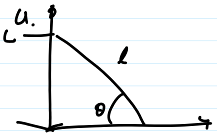
(a) Persamaan posisi pintu adalah $y = mx + c$ tentukan m dan c dalam suku l dan θ.

(b) Persamaan "selubung" adalah persamaan semua titik potong antara batang saat sudutnya θ dan $(\theta + d\theta)$ (ilustrasi kanan Gambar 6). Gunakan persamaan dari bagian (a) untuk menentukan persamaan "selubung" $y(x)$ ini (nyatakan y dalam suku x dan l).

(c) Jika $\delta x = 1$ m dan $l = 8$ m, gunakan persamaan pada bagian (b) untuk menentukan nilai Δy minimum (dalam meter) agar pintu dapat lewat.

Gambar 7: Soal no. 3

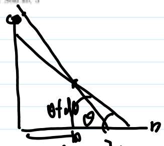
a.



$c = \ell\sin\theta$

$m = -\tan\theta$

b.



$\ell\cos^3\theta$

$$y' = -\tan(\theta+d\theta)x + \ell\sin(\theta+d\theta)$$

$$y = -\tan\theta x + \ell\sin\theta$$

$x \ll 1$

$\sin x \approx x$

$\tan x \approx x$

$$\tan(\theta+d\theta) = \frac{\tan\theta + \tan(d\theta)}{1-\tan\theta\tan d\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + d\theta}{(1-\tan\theta\, d\theta)}$$

$(1+x)^n = 1 + nx$

$$= (\tan\theta + d\theta)(1 + (+1)(\tan\theta\, d\theta))$$

$$= (\tan\theta + d\theta + \tan^2\theta\, d\theta)$$

$$\tan(\theta+d\theta) = (\tan\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta)$$

$$\sin(\theta+d\theta) = \sin\theta(1) + d\theta\cos\theta$$

$y = y'$

$$-(\tan(\theta) + \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta)x + \ell(\sin\theta + d\theta\cos\theta) = -\tan\theta x + \ell\sin\theta$$

$$d\theta\left(-\frac{x}{\cos^2\theta} + \ell\cos\theta\right) = 0$$

$$x = \ell\cos^3\theta \rightarrow \cos = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{1/3}$$

$$y = -\sin\theta\cos^2\theta\,\ell + \ell\sin\theta$$

$$y = \ell\sin^3\theta$$

$$\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)^{3/2}$$

$$\sin^3\theta = \left(1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$y = \ell\left(1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2/3}\right)^{3/2}$$

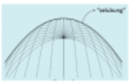
$$y = 8\left(1-\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3/2}$$

$$8\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}$$

$$\frac{\cancel{8}(3)^{3/2}}{\cancel{8}}$$

$$\Delta y = (3)^{3/2} \approx 5.19\text{ m}$$



Gambar 7: Soal no. 3

(d) Sekarang tinjau suatu air mancur yang memancarkan air ke arah setengah bola bagian atas, "selubung" yang terbentuk ditunjukkan pada Gambar 7. Tinjau air pada bidang XY, asumsikan air ditembakkan dari titik $(0,0)$ dengan kelajuan v_0, gunakan persamaan parabola:

$$y = x\tan\phi - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\phi}$$

Carilah persamaan "selubung" $y(x)$ air mancur ini (nyatakan y dalam suku x, g, dan v_0.

d. $$y = x\tan\phi - \frac{g}{2}x^2\frac{1}{v_0^2}(1+\tan^2\phi)$$

$$0 = -\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2\phi + x\tan\phi - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y$$

$D \geq 0$

$$x^2 - 4\left(-\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)\left(-\left(\frac{gx^2}{2v_0^2}+y\right)\right) \geq 0$$

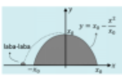
$x^2 \geq 0$

$$\cancel{x^2} \geq \frac{2g\cancel{x^2}}{v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2}+y\right)$$

$$\frac{v_0^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2v_0^2} + y$$

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

(e) Titik-titik pada selubung adalah titik terjauh yang dapat dicapai dengan kelajuan v_0, sehingga kelajuan v_0 menjadi kelajuan minimum yang diperlukan untuk mencapai titik-titik tersebut. Gunakan persamaan "selubung" untuk menentukan kuadrat dari kelajuan minimum yang dibutuhkan untuk air mencapai $y = h$ dan $x = l$ jika air ditembakkan dari $(0,0)$. Nyatakan jawaban dalam suku g, h, dan l.



Gambar 8: Soal no. 3

(f) Seekor laba-laba ingin mencapai puncak sebuah bukit yang persamaannya $y = x_0 - \frac{x^2}{x_0}$ dalam satu kali loncatan seperti ditunjukkan oleh Gambar 8. Laba-laba ini tidak menggunakan bantuan jaring, sehingga hanya dapat bergerak parabola. Gunakan hasil dari bagian (e), tentukan kuadrat kelajuan awal minimum yang harus dimiliki si laba-laba jika laba-laba ini hanya boleh menyentuh bukit di puncaknya. Nyatakan jawaban dalam suku g dan x_0.

(g) Berapa kuadrat kelajuan awal minimum laba-laba jika bentuk bukit adalah $y = x_0 - \frac{x^4}{x_0^3}$? Nyatakan jawaban dalam suku g dan x_0.

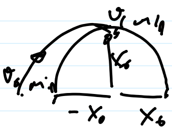
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$\left(h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\ell^2}{2v_0^2}\right)v_0^2$$

$$v_0^2 h = \frac{(v_0^2)^2}{2g} - \frac{g\ell^2}{2}$$

$$0 = \frac{(v_0^2)^2}{2g} - v_0^2 h - \frac{g\ell^2}{2}$$

$$v_0^2 = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4\left(\frac{1}{2g}\right)\left(+\frac{g\ell^2}{2}\right)}}{1/g}$$



$$v_0^2 = g\left(h \pm \sqrt{h^2+\ell^2}\right)$$

$$v_0^2 = g\left(x_0 \pm \sqrt{x_0^2+x^2}\right)$$

x_0

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g} - h$$

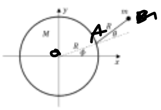
$$v_0^2 = 2gx_0$$

$$x^2 = \frac{v_0^4}{g^2} - \frac{2hv_0^2}{g}$$

$$\cancel{v_0^2 = g(x_0}$$

$$\frac{v_0^2}{g} = x_0 + \sqrt{x_0^2+x^2}$$

5. Sebuah silinder dengan massa M diletakkan pada suatu permukaan datar licin. Silinder bebas berputar terhadap pusatnya. Pada permukaan silinder diikat sebuah tali tak bermassa yang terhubung dengan massa m. Panjang tali sama dengan jari-jari silinder yaitu R. Pada soal ini, anda TIDAK perlu memperhitungkan efek Gravitasi.



Gambar 10: Soal no. 5

(a) Saat $t = 0$ sistem diberi suatu kecepatan sudut Ω_0 dan tali membentuk suatu sudut kecil θ_0 terhadap arah radial dengan $\dot{\theta} = 0$. Tentukan periode osilasi sistem.

(b) Sekarang tinjau kasus jika silinder dipaksa berputar pada kecepatan sudut konstan Ω_0, tentukan periode osilasi sistem.

$$-M \longrightarrow \phi$$

$$-m \longrightarrow \left(y_m = R\sin\phi + R\sin(\theta+\phi)\right)$$

$$x_m = R\cos\phi + R\cos(\theta+\phi)$$

$$y_m = R\left(\sin\phi + \sin(\theta+\phi)\right) \quad \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta\sin\phi}$$

$$x_m = R\left(\cos\phi + \cos(\theta+\phi)\right) \quad \begin{matrix}\cos\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi\end{matrix}$$

$$\dot{y}_m = R\left(\cos\phi\,\dot{\phi} + \cos\theta\,\dot{\theta}\cos\phi - \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta - \sin\theta\,\dot{\theta}\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\,\dot{\phi}\right.$$

$$\cos\phi\,\dot{\phi} + \cos(\theta+\phi)\,\dot{\theta} + \cos(\theta+\phi)\,\dot{\phi}$$

$$\cancel{\vec{r}_M = \vec{r}_M}$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AM}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{OA} + \dot{\vec{r}}_{AM}$$

$$\vec{r}_{OA} = R\hat{r}$$

$$\dot{r} = \dot{\phi}R\hat{\phi} + \cancel{R} \quad \dot{\theta}$$

$$\vec{r}_{AM} = R\cos\theta\,\hat{r} + R\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$\dot{\vec{r}} = R\cos\theta\,\dot{\phi}\hat{\phi} + R(-\sin\theta\,\dot{\theta})\hat{r}$$

$$R\sin\theta(-\dot{\phi}\hat{r}) + R\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi}$$

$$\hat{r} \longrightarrow \dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\hat{\phi} \longrightarrow -\dot{\phi}\hat{r}$$

$$\dot{\phi}(\cos\theta)(\dot{\phi}+\dot{\theta}) \qquad \sin\theta(\dot{\theta}+\dot{\phi})$$

$$\dot{\vec{r}} = R\left(\left(\dot{\phi} + \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi} - \left(\sin\theta\,\dot{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{r}\right)$$

$$E = EK = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R^2)\left(\dot{\phi}^2 + \cos^2\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2 + 2\dot{\phi}\cos\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})\right)\right)$$

$$EM =$$

$$\frac{dEM}{dt} = 0 = \frac{1}{2}MR^2(\dot{\phi}\ddot{\phi}) + \frac{1}{2}mR^2\left(\cancel{2}\dot{\phi}\ddot{\phi} + \cancel{2}(\dot{\theta}+\dot{\phi})(\ddot{\theta}+\ddot{\phi})\right.$$

$$+ 2\ddot{\phi}\cos\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})$$

$$- 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})$$

$$+ 2\dot{\phi}\cos\theta(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})$$

$$\sin\theta \longrightarrow \theta \qquad \cos\theta \longrightarrow 1$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\dot{\phi}\ddot{\phi} + mR^2\left((\dot{\theta}+\dot{\phi})(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}) + \cos\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})\ddot{\phi}\right.$$

$$\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}(\dot{\phi}+\dot{\theta})$$

$$\dot{\phi}\cos\theta(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})$$

$$\cancel{(\dot{\theta}+\dot{\phi})(\ddot{\theta}+\ddot{\phi}) + \cos\theta(\dot{\phi}+\dot{\theta})\ddot{\phi}}$$

$$\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}(\dot{\phi}+\dot{\theta})$$

$$\dot{\phi}\cos\theta(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})$$

$$\theta \ll \phi$$

$$\dot{\theta} \ll \dot{\phi}$$

$$\cancel{\dot{\phi}}\ddot{\phi} + \dot{\phi}\ddot{\phi} + \theta\dot{\theta}\cancel{\dot{\phi}}$$

$$2\ddot{\phi} + \theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\phi}$$

$$3\ddot{\phi} + \theta\dot{\theta}\dot{\phi}$$