# MAKALAH

# HUKUM KONSERVASI PADA MEDAN ELEKTROMAGNETIK

Disusun untuk memenuhi tugas

Mata Kuliah: Medan Elektromagnetik II

Dosen Pengampu: Prof. Dr. Anto Sulaksono, M.Si.


Disusun oleh:

Ahmad Basyir Najwan – 1906285314

Juan de Bebetho – 1906347842

Marlo Emiliano Muktiono – 2006570315

Rayhan Ghifari Andika – 1906377031

Zidane Ahmad Kurniatama – 2006570302

**PROGRAM STUDI S1 FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS INDONESIA**


**2022**

# Daftar Isi

# 1. Muatan dan Energi

## 1.1. Persamaan Kontinuitas

Pahami bahwa kita meninjau hal fisis dengan memperhatikan aspek lokalitas sebagai keunikan dari tinjauan fisika tersebut. Sebagaimana topik utama dari bahasan ini adalah muatan dan energi, maka hukum konservasi harus dipenuhi untuk kedua hal tersebut yang memenuhi konsep kekekalan secara fisika. Lokalitas dari prinsip konservasi secara sederhana menyatakan bahwa perubahan jumlah muatan (dan energi, mengingat muatan mengkuantifikasi sejumlah energi) dalam suatu benda bervolume, harus disertai dengan kuantitas yang sama dengan muatan yang keluar atau masuk ke benda bervolume melalui permukaan benda tersebut. Perhatikan bahwa tinjauan saat ini yakni muatan yang berada dalam benda bervolume, dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$Q(t) = \int \rho(\vec{r}, t)\, d\tau \tag{1.1}$$

Jika mengikuti konsep yang diutarakan sebelumnya, maka perubahan muatan hanya bisa terjadi apabila ada muatan yang keluar atau masuk melalui permukaan benda, secara sederhana yakni ada arus yang keluar melalui permukaan. Hal ini dapat diperluas dengan memperhatikan perubahan jumlah muatan pada benda tiap waktunya yakni.

$$\frac{dQ}{dt} = -\int \vec{J} \cdot d\vec{a} \tag{1.2}$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa pengaruh arus yang keluar menyebabkan berkurangnya jumlah muatan di benda seiring dengan berjalannya waktu. Sekarang, fokus diarahkan untuk mencari tahu formulasi sederhana menggunakan konsep matematis yang sudah diketahui. Persamaan 1.2 untuk bagian kiri dapat ditulis menggunakan teorema divergensi, sedangkan untuk bagian kanan dapat dikaitkan dengan definisi pada persamaan 1.1 yang bisa ditulis sebagai berikut.

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau \tag{1.3}$$

Dikarenakan tinjauan pada persamaan 1.3 sudah dalam dimensi yang sama, maka persamaan kontinuitas sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya dapat dituliskan dengan lebih sederhana pada persamaan 1.4 berikut ini.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \tag{1.4}$$

### 1.2. Teorema Poynting

Kembali ingat bahwa kerja yang dihasilkan medan listrik dan medan magnet dengan memahami konsep kopel keduanya tak lain merupakan jumlah energi total yang disimpan pada medan elektromagnetik, sebagaimana yang dituliskan pada persamaan 1.5. Dikarenakan perluasan konsep sekarang dipengaruhi perubahan waktu, maka fokus permasalahan harus disertai dengan pengaruh waktu di dalamnya. Sehingga, menjadi pertanyaan tentang besaran energi yang dilakukan gaya elektromagnetik pada sebuah muatan di rentang waktu tertentu.

$$U_{EM} = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau \tag{1.5}$$

Hal ini menuntut kita untuk meninjau hukum gaya Lorentz serta kaitkan terhadap kerja yang dilakukan terhadap muatan tertentu tersebut.

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad (1.6) \\ &= q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\,dt \\ &= q\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)dt + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\,dt \\ &= q\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)dt + q(\vec{v}\times\vec{v})\cdot\vec{B}\,dt \\ dW &= q\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)dt \qquad (1.7) \end{aligned}$$

Pahami bahwa muatan yang ditinjau masih memakai basis yang sama pada benda bervolume, akan tetapi perhatikan bahwa muatannya memiliki kecepatan dengan besar v. Sehingga persamaan 1.7 bisa diperluas sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int \left(\vec{E}\cdot\rho\vec{v}\right)d\tau \\ \frac{dW}{dt} &= \int \left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)d\tau \qquad (1.8) \end{aligned}$$

Persamaan 1.8 hanya memperlihatkan kontribusi medan listrik, yang semestinya tidak benar jika kembali mengingat konsep kopling medan listrik dan medan magnet. Oleh karena itu, kontribusi medan magnet harus diperlihatkan secara matematis dengan mengganti suku J dengan suku-suku yang tersedia pada Hukum Maxwell-Ampere.

$$\frac{dW}{dt} = \int \left(\vec{E}\cdot\left[\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]\right) d\tau$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\tau \tag{1.9}$$

Selanjutnya, persamaan 1.9 dapat diturunkan dengan menerapkan konsep matematis secara kuat, baik dengan memanfaatkan konsep diferensiasi vektor maupun perkalian operator vektor sebagaimana yang ditunjukkan pada persamaan 1.10 dan 1.11.

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} = 2\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{dt} \tag{1.10}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A} \times \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) - \vec{A} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \tag{1.11}$$

Penurunan persamaan 1.9 secara matematis tidak akan dijelaskan dengan lebih detail sampai ditemukan keunikan matematis yang mengandung makna fisis.

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} = & \int \left( \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) \right] - \epsilon_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{dt} \right] \right) d\tau \\
= & \int \left( \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B} \cdot \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) \right] - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) d\tau \\
= & \int \left( - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) d\tau \\
\frac{dW}{dt} = & - \int \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \int \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) d\tau
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Setelah melakukan penurunan matematis secara detail, dapat ditemukan bahwa pada persamaan 1.12 memiliki kondisi yang memenuhi syarat sebelumnya yakni terdapat formulasi matematis dari makna fisis untuk energi dari medan elektromagnetik. Tetapi syarat ini belum sepenuhnya dapat dipenuhi mengingat bagian $\frac{1}{\mu_0} \int \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) d\tau$ sendiri belum memiliki terjemahan dalam makna fisisnya. Terdapat teorema bernama Teorema Poynting yang menjelaskan formulasi matematis dari separuh bagian persamaan 1.12 ini. Teorema Poynting menyatakan bahwa integral ini menunjukkan energi yang membawa muatan untuk melewati permukaan dari benda bervolume tadi. Mengingat bagian $\int \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) d\tau$ hanya merupakan energi yang disimpan oleh medan elektromagnetik di dalam benda bervolume tersebut. Sehingga, komponen vektor pada persamaan 1.13 yang dimiliki oleh formulasi dari teorema Poynting dapat disebut juga sebagai energi per satuan waktu - per satuan luas permukaan.

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) \tag{1.13}$$

Sehingga, persamaan 1.12 dapat ditulis dengan lebih sederhana sebagai berikut.

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{EM}}{dt} - \oint \vec{S} \cdot d\vec{a} \tag{1.14}$$

Kembali tinjau bahwa $\frac{dW}{dt}$ merupakan energi mekanik yang dimiliki medan elektromagnetik yang menggerakkan muatan tinjauan, sehingga bagian ini dapat diformulasikan yakni.

$$\frac{dW}{dt} = \int \frac{\partial U_{mekanik}}{\partial t} d\tau \tag{1.15}$$

Dengan melakukan sedikit proses aljabar sebagaimana yang disampaikan persamaan 1.16 dibawah ini, dapat diketahui bahwa konsep yang dimiliki dari bentuk diferensial dari teorema Poynting, memiliki konsep matematis yang sama seperti persamaan kontinuitas pada persamaan 1.4 sebelumnya.

$$\int \frac{\partial U_{mekanik}}{\partial t} d\tau = -\int \frac{\partial U_{EM}}{\partial t} d\tau - \oint \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

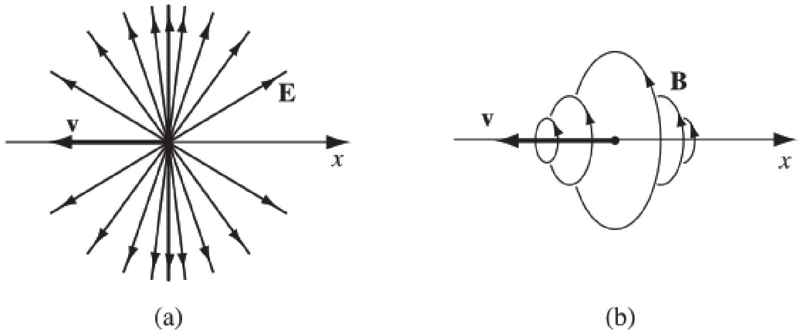
$$\int \left( \frac{\partial}{\partial t} (U_{mekanik} + U_{EM}) \right) d\tau = -\int \vec{\nabla} \cdot \vec{S}\, d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{mekanik} + U_{EM}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \tag{1.16}$$

## 2. Momentum

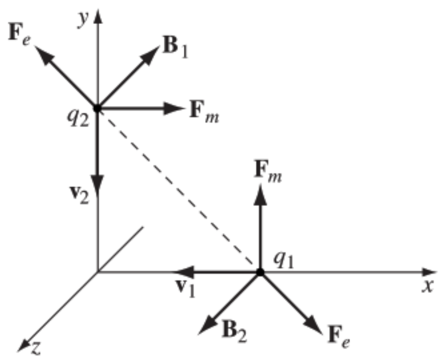
### 2.1. Hukum III Newton pada Elektrodinamika

Bayangkan sebuah muatan titik $q$ yang bergerak sepanjang sumbu $x$ dengan kecepatan konstan $v$. Karena dia bergerak, medan listrik yang dihasilkannya tidak bisa langsung kita hitung menggunakan Hukum Coulomb karena terdapat ketertinggalan atau retardasi terhadap sinyal medan yang dipancarkan muatan $q$ ini. Namun meski begitu, medan listrik $\vec{E}$ yang dihasilkan tetap berarah radial menjauhi muatan dari posisi sesaat muatan seperti ditunjukkan gambar 1a. Selain itu, muatan titik yang bergerak tidak menghasilkan aliran arus yang tetap, sehingga medan magnetik yang dihasilkannya tidak bisa kita langsung dapatkan dari Hukum Biot Savart dikarenakan terdapat ketertetinggalan atau retardasi seperti halnya pada medan listrik, dari sinyal medan yang dipancarkan muatan. Walaupun demikian, pada akhirnya, medan listrik $\vec{B}$ akan tetap memiliki arah yang sirkular terhadap sumbu gerak muatan seperti ditunjukkan gambar 1b.




**Gambar 1.** (a) Medan listrik, dan (b) medan magnet yang dihasilkan muatan titik bergerak $q$ sepanjang sumbu x.

Sekarang bayangkan muatan ini bertemu dengan muatan lain yang identik, bergerak dengan besar kecepatan yang sama sepanjang sumbu $y$, seperti ditunjukkan gambarx. Tentu saja gaya gaya elektromagnetik antar kedua muatan ini akan membuat mereka keluar dari sumbu gerak awalnya, namun sekarang asumsikan saja mereka tetap bisa bertahan di sumbu gerak tersebut dengan cara tertentu sedemikian hingga mereka tetap bergerak pada arah yang sama dengan kondisi awal dan dengan kecepatan yang sama.




**Gambar 2**. Interaksi dua buah muatan identik yang bergerak dengan kecepatan sama pada sumbu gerak yang saling tegak lurus.

Gaya listrik antara kedua muatan ini tentu akan tolak menolak satu sama lain dan memenuhi Hukum III Newton. Namun, gaya magnet antara keduanya tidak demikian. Seperti yang kita bahas sebelumnya, muatan pertama yang berada di sumbu x, akan memberikan medan magnet kearah sumbu z negatif, sehingga gaya magnet pada muatan kedua berada pada arah sumbu x positif. Kemudian jika kita tinjau muatan pertama, medan magnet yang diberikan muatan kedua akan berarah ke sumbu z positif, sehingga gaya magnet pada dirinya akan berada pada arah sumbu y negatif. Kedua gaya magnet ini memiliki besar yang sama, namun arahnya tidak berlawanan dan hal ini melanggar Hukum III Newton. Karena Hukum III Newton tidak terpenuhi, artinya resultan gaya pada sistem dua muatan ini tidak nol, dan mengisyaratkan bahwa momentum total sistem tidak kekal. Akan tetapi, kita ketahui bahwa interaksi elektromagnetik kedua muatan merupakan interaksi internal, bukan eksternal, sehingga hal yang seharusnya terjadi adalah momentum total sistem kekal. Terjadi sebuah kontradiksi disini. Kontardiksi ini sebenarnya tidak benar-benar terjadi atau momentum sistem tetap kekal. Hal ini dapat dijelaskan karena medan elektromagnetik sendiri membawa momentum. Tentunya hal ini tidak aneh karena sebelumnya medan elektromagnetik juga bisa membawa energi, maka demikian juga momentum. Berkurangan momentum pada kedua partikel akibat tidak terpenuhinya Hukum III Newton dibarengi juga dengan meningkatnya momentum yang dibawa oleh medan elektromagnetik, sehingga secara netto, momentum total sistem tetap terkonservasi.

### 2.2. Tensor Tegangan Maxwell (*Maxwell Stress Tensor*)

Gaya yang diakibatkan oleh medan elektromagnetik dapat dihitung dari sebuah besaran tensor yang disebut sebagai Tensor Tegangan Maxwell atau *Maxwell Stress Tensor*. Disini akan diberikan penjabaran mendetail tentang bagaimana besaran tensor ini didapatkan dan bagaimana dia digunakan.

Kita mulai dengan menghitung gaya elektromagnetik total pada muatan dalam volume $V$. Gaya ini dberikan oleh persamaan Gaya Lorenzt berikut:

$$\vec{F} = \int \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)\rho d\tau = \int \left(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right)d\tau.$$

Pada persamaan diatas digunakan rapat arus $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Definisikan $\vec{f} = d\vec{F}/dV$ sebagai gaya persatuan volume sehingga diperoleh

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}.$$

Tinjau kembali keempat persamaan maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ldots (i),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ldots (ii),$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \ldots (iii), \text{dan}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ldots (iv).$$

Dengan menggunakan persamaan (i) dan (iv), gaya persatuan volume $\vec{f}$ dapat dimodifikasi menjadi

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}.$$

Sekarang tinjau turunan parsial terhadap waktu dari perkalian silang antara vektor medan $\vec{E}$ dan $\vec{B}$. Akan kita dapatkan hasil berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Menggunakan Hukum Faraday (persamaan (iii)), persamaan diatas akan menjadi

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}).$$

Sehingga akan diperoleh

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Untuk membuat persamaan diatas menjadi lebih simetri, kita masukkan suku $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B}$, hal ini tidak akan mengubah persamaan tersebut karena $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Sekarang tinjau gradien dari kuadrat besar medan listrik $E$. Dari aturan kalkulus vektor, akan kita dapatkan persamaan berikut:

$$\vec{\nabla}(E^2) = 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + 2\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}),$$

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}.$$

Begitupula dengan gradien dari kuadrat besar medan magnet $\vec{B}$,

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(B^2) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}.$$

Dengan menggunakan hasil-hasil ini, gaya persatuan volume dapat dinyatakan ulang menjadi

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}] - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}).$$

Terlihat bahwa persamaan gaya ini menjadi sangat kompleks. Persamaan ini bisa disederhanakan dengan menggunakan sebuah besaran tensor yang disebut sebagai Tensor Tegangan Maxwell yang didefinisikan sebagai berikut:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right).$$

Indeks $i$ dan $j$ mengacu pada koordinat $x$, $y$, dan $z$, sehingga tensor tegangan ini memiliki total sembila komponen.

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}.$$

Simbol $\delta_{ij}$ disebut sebagai Delta Kronecker yang nilainya hanya antara 0 dan 1 dengan kondisi sebagai berikut:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika } i = j \\ 0, \text{jika } i \neq j \end{cases}.$$

Sebagai contoh, berikut adalah beberapa komponen dari Tensor Tegangan Maxwell

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2),$$

$$T_{xy} = \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0}B_x B_y,$$

dan seterusnya.

Tensor Tegangan Maxwell adalah tensor rank-2 dan untuk menghasilkan gaya yang merupakan tensor rank-1, maka Tensor Tegangan Maxwell ini harus dikalikan dengan titik dengan sebuah vektor. Pada kasus ini, operasi yang sesuai adalah divergensi dari $\overleftrightarrow{T}$. Divergensi dari $\overleftrightarrow{T}$ pada komponen ke-$j$ adalah

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_j = \epsilon_0\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})E_j + (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})B_j + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right].$$

Sehingga, gaya persatuan volume dapat dinyatakan ulang dengan lebih singkat menjadi

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t},$$

dimana $\vec{S}$ adalah vektor Poynting.

Total gaya elektromagnetik pada muatan volume V ini adalah

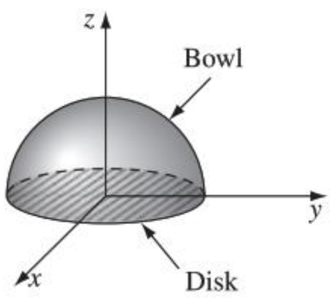
$$\vec{F} = \oint \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{a} - \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int \vec{S}d\tau.$$

Pada persamaan diatas telah digunakan teorema divergensi untuk mengubah integral terhadap volume menjadi integral permukaan yang melingkupi muatan volume V. Pada kondisi statik, vektor Poynting akan konstan sehingga suku kedua persamaan gaya akan nol. Dengan demikian, gaya elektromagnetik pada konfigurasi muatan bisa dinyatakan dalam suku-suku tensor tegangan di *boundary* saja:

$$\vec{F} = \oint \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{a}\ \text{(statik)}.$$

Secara fisis, $\overleftrightarrow{T}$ adalah gaya persatuan luas (atau tegangan) yang bekerja pada suatu permukaan. Lebih akuratnya, $T_{ij}$ adalah gaya (persatuan luas) pada arah ke-$i$ yang bekerja pada elemen luasan yang berorientasi pada arah ke-$j$. Elemen diagonal $\overleftrightarrow{T}$ ($T_{xx}$, $T_{yy}$, $T_{zz}$) adalah tekanan, dan elemen *off*-diagonalnya ($T_{xy}$, $T_{xz}$, dst.) adalah tegangan geser.

Sebagai contoh, berikut adalah penggunaan Tensor Tegangan Maxwell untuk mencari gaya elektromagnetik pada suatu distribusi muatan.




**Gambar 3.** Muatan berbentuk setengah bola.

Tinjau sebuah distribusi muatan homogen yang berbentuk setengah bola padat dengan jari-jari bola $R$ dan bermuatan $Q$. Kita akan mencari berapa besar gaya elektromagnetik yang dialami setengah bola ini. Karena muatan bola konstan, maka kita hanya perlu memperhatikan bagian statik saja dan mengabaikan suku berubah terhadap waktu. “Boundary” dari volume setengah bola ini adalah sebuah kulit setengah bola, yang akan kita sebut *bowl*, dan juga alas berbentuk lingkaran, yang akan kita sebut *disk*. Sekarang kita harus hitung dulu Tensor Tegangan Maxwell untuk masing-masing permukaan ini.

Untuk *bowl*, elemen luas permukaannya dapat dinyatakan sebagai

$$d\vec{a} = R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \, \hat{r}.$$

Karena muatannya diam, maka medan magnet di sekitar akan bernilai nol, $\vec{B} = 0$, dan medan listrik di permukaan *bowl* adalah

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \, \hat{r}$$

Untuk memudahkan mencari komponen medan listrik, kita ubah arah vektor radial ke dalam arah komponen kartesian,

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z}.$$

Sehingga akan diperoleh

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \sin\theta \cos\phi,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \sin\theta \sin\phi,$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \cos\theta,$$

$$da_x = R^2 \sin^2\theta \cos\phi \, d\theta d\phi,$$

$$da_y = R^2 \sin^2\theta \sin\phi \, d\theta d\phi,$$

$$da_z = R^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta d\phi.$$

Berdasarkan simetri, kita bisa lihat bahwa total gaya yang bekerja pada volume muatan setengah bola ini akan berada di sumbu z saja, sehingga kita hanya perlu mencari komponen tensor tegangan untuk orientasi permukaan z saja. Komponen tensor tegangan yang kita perlukan adalah sebagai berikut:

$$T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi,$$

$$T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi,$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Dengan demikian, besar gaya yang diberikan pada elemen permukaan $d\vec{a}$ untuk *bowl* adalah

$$d\vec{F}_{bowl} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} da_x \\ da_y \\ da_z \end{pmatrix},$$

$$d\vec{F}_{bowl} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z \end{pmatrix}.$$

Seperti yang sudah disinggung sebelumnya, bahwa berdasarkan simetri sistem, maka gaya resultannya ahanya memiliki komponen pada sumbu $z$. Mari kita hitung dulu besar gaya pada sumbu z.

$$dF_{bowl,z} = T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z,$$

$$dF_{bowl,z} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta d\phi.$$

Sehingga akan diperoleh

$$\vec{F}_{bowl} = \underbrace{\int \ldots \hat{x}}_{=0} + \underbrace{\int \ldots \hat{y}}_{=0} + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \hat{z},$$

$$\vec{F}_{bowl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{8R^2}\hat{z}.$$

Untuk *disk*, elemen permukaannya, seluruhnya berawah ke sumbu z negatif,

$$d\vec{a} = -r dr d\phi \hat{z},$$

dan medan listrik pada elemen permukaan tersebut adalah (didalam bola)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}).$$

Dengan demikian, komponen dan elemen permukaan adalah

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\cos\phi,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\sin\phi,$$

$$E_z = 0,$$

$$da_x = da_y = 0,$$

$$da_z = -rdrd\phi.$$

Karena resultan gayanya dari simetri berada di sumbu z, dan juga elemen luasan pada *disk* juga memiliki arah hanya di sumbu z saja, maka komponen tensor tegangan yang tersisa hanya komponen $T_{zz}$ yaitu

$$T_{zz} = \frac{\epsilon}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2 r^2.$$

Gaya elektromagnetik total pada elemen permukaan *disk* adalah

$$d\vec{F}_{disk} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ da_z \end{pmatrix},$$

$$d\vec{F}_{disk} = \cdots\hat{x} + \cdots\hat{y} + T_{zz}da_z\hat{z},$$

$$d\vec{F}_{disk} = \cdots\hat{x} + \cdots\hat{y} + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2 r^3drd\phi\hat{z}.$$

Gaya total pada disk adalah

$$\vec{F}_{disk} = \underbrace{\int \ldots\hat{x}}_{=0} + \underbrace{\int \ldots\hat{y}}_{=0} + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2 \int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi}d\phi\,\hat{z},$$

$$\vec{F}_{disk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2}\hat{z}.$$

Dengan demikian, gaya total pada muatan volume $Q$ akan menjadi

$$\vec{F} = \vec{F}_{bowl} + \hat{F}_{disk},$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{8R^2}\hat{z} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2}\hat{z},$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q^2}{16R^2}\hat{z}.$$

**2.3. Konservasi Momentum**

Menurut hukum Newton yang ke 2, gaya pada suatu objek akan sama dengan cepat bergantinya momentum.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mech}}{dt}$$

Digabungkan dengan persamaan momentum yang disimpan dalam medan elektromagnetik dari pembahasan sebelumnya mengenai *Maxwell Stress Tensor*,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{S} d\tau + \oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$$

$$\vec{p}_{em} = \epsilon_0\mu_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{S} d\tau$$

Integral pertama merepresentasikan momentum yang tersimpan di dalam medan elektromagnetik pada volume $\mathcal{V}$. Integral kedua menjelaskan momentum per unit waktu mengalir / melewati permukaan $\mathcal{S}$. Maka persamaan diatas sepenuhnya merupakan pernyataan umum mengenai konservasi momentum dalam elektrodinamika dimana suatu penambahan dalam momentum total (momentum mekanikal dan elektromagnetik) akan sama dengan momentum yang dibawa oleh medan tersebut. Jika $\mathcal{V}$ merangkup keseluruhan ruang, maka $\vec{p}_{mech} + \vec{p}_{em}$ akan memiliki nilai konstan.

Jika kita definisikan $\vec{\mathcal{P}}_{mech}$ sebagai densitas dari momentum mekanikal dan $\vec{\mathcal{P}}_{em}$ densitas momentum medan ditulis sebagai,

$$\vec{\mathcal{P}}_{em} = \mu_0\epsilon_0\vec{S}$$

Maka persamaan gaya diatas dapat dituliskan menjadi,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathcal{P}}_{em} + \vec{\mathcal{P}}_{mech}\right) = \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

Disini tensor tegangan Maxwell $-\overleftrightarrow{T}$ ekivalen atau memainkan peran $\vec{J}$ (*current density*) dalam persamaan kontinuitas atau $\vec{S}$ (*Poynting Vector*). Dimana $T_{ij}$ adalah momentum dalam arah *I* melewati permukaan *j*, per unit area dan waktu. $\vec{S}$ diketahui sebagai energi per unit area dan waktu yang dikirim melewati medan elektromagnetik sedangkan $\mu_0\epsilon_0\vec{S}$ merupakan momentum per unit volume dalam medan tersebut. Maka bisa disimpulkan bahwa $\overleftrightarrow{T}$ merupakan Tegangan Elektromagnetik pada suatu permukaan dan $\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}$ merupakan *flow* dari momentum yang dibawa oleh medan.

## 3. Usaha oleh Gaya Magnet

Persamaan gaya magnet dapat kita lihat dari persamaan gaya lorentz, yaitu:

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]$$

dimana suku pertama adalah gaya listrik dan suku kedua adalah gaya magnet.

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Usaha oleh gaya listrik dapat dengan mudah didapatkan dan nilainya tidak nol.

$$W_{el} = \int_a^b \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = q\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q[V(b) - V(a)]$$

Kemudian jika kita hitung usaha oleh gaya magnet, kita akan mendapatkan hasil yang menarik. Perpindahan yang diakibatkan dapat dihubungkan dengan kecepatan muatan yaitu

$$d\vec{l} = \vec{v}dt$$

Sehingga, akan kita peroleh

$$dW_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{l}$$

$$dW_{mag} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}dt$$

Perkalian antara vektor $\vec{v}$ dan $\vec{B}$ memiliki arah yang tegak lurus dengan $\vec{v}$, sehingga $\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0$, dan hal ini menyebabkan usaha yang dilakukan gaya magnetik bernilai nol. Kesimpulan sederhana yang bisa kita dapatkan dari hasil ini adalah gaya magnet atau medan magnet tidak melakukan usaha.

Namun, jika kita melihat beberapa fenomena yang berkaitan dengan pemanfaatan medan magnet, kita akan melihat seolah-olah medan magnet melakukan usahanya. Salah satunya adalah *Crane* Magnetik yang dapat kita jumpai di tempat pembuangan akhir. *Crane* tersebut menarik sampah-sampah metal seperti mobil bekas dll. dengan memanfaatkan magnet di kepala *crane*. Ketika mobil bekas terangkat, seolah-olah medan magnet dari kepala *crane* melakukan usaha untuk mengangkat mobil. Hal ini seolah menyalahi hal yang sudah kita bahas sebelumnya bahwa medan magnet tidak melakukan usaha. Ternyata, fenomena ini masih memenuhi kondisi tersebut dan kami berikan pembahasan detailnya di sini.


(a) (b)

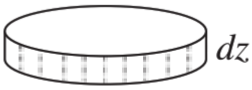
**Gambar 4.** (a) *Crane* Magnetik, (b) Pemodelan menjadi dipol intrinsik.

Tinjau interaksi antara magnet di kepala *crane* dan sebuah mobil bekas berbahan metal. Mobil dapat terbuat dari bahan ferromagnetik yang bisa kita sederhanakan sistemnya sebagai momen dipol intrinsik. Tinjau momen dipol intrinsik berbentuk cincin dengan muatan persatuan panjang $\lambda$ dan berotasi dengan kecepatan sudut $\omega$. Besar arus yang mengalir pada momen dipol cincin ini adalah $I = \lambda\omega a$, dengan $a$ adalah jejari momen dipol cincin. Misalkan komponen medan magnet arah radial adalah $B_s$, maka total gaya vertikal pada dipol listrik adalah $F_{ver} = 2\pi a I B_s$. Jika cincin momen dipol ini naik sejauh $dz$, maka usaha yang dilakukan gaya vertikal medan magnet adalah

$$dW_{ver} = F_{ver} dz$$

$$dW_{ver} = 2\pi a^2 \lambda\omega B_s dz$$

Usaha ini meningkatkan energi potensial cincin momen dipol. Siapa yang melakukan usaha ini? Secara naif kita akan mengatakan bahwa usaha ini dilakukan oleh medan magnet. Namun kita telah ketahui bersama bahwa medan magnet tidak melakukan usaha. Dengan demikian, bagaimana hal ini bisa dijelaskan? Hal ini bisa dijawab dengan meninjau juga ggl yang diberikan pada cincin momen dipol.




**Gambar 5.** “Selimut” cincin dipol.

Pada saat yang sama ketika cincin momen dipol mengalami kenaikan ketinggian, ggl diinduksikan kepada cincin, yang arahnya berlawanan dengan arus muatan, dan memperlambat kecepatan angular cincin momen dipol. Besar ggl tersebut adalah

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dimana $d\Phi$ adalah fluks yang melalui “selimut” cincin saat $t$ sampai $t + dt$.

$$d\Phi = B_s 2\pi a dz$$

Ggl induksi dapat dihubungkan dengan $\vec{f}$, yaitu gaya persatuan muatan yang arahnya tangensial terhadap “selimut” cincin pada bidang horizontal.

$$\varepsilon = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = f(2\pi a)$$

Sehingga akan kita peroleh

$$f(2\pi a) = -\frac{d}{dt}(B_s 2\pi a dz)$$

$$f = -B_s \frac{dz}{dt}$$

Gaya yang bekerja pada segmen cincin dengan panjang $dl$ adalah $f\lambda dl$, sehingga torsi total pada cincin dipol magnet adalah

$$dN = af\lambda dl$$

$$N = a\left(-B_s \frac{dz}{dt}\right)\lambda(2\pi a)$$

Usaha yang dilakukan oleh torsi ini untuk memperlambat rotasi cincin adalah

$$dW_{rot} = Nd\phi = N\omega dt$$

$$dW_{rot} = -2\pi a^2 \lambda \omega B_s dz$$

Sehingga usaha total pada cincin momen dipol adalah

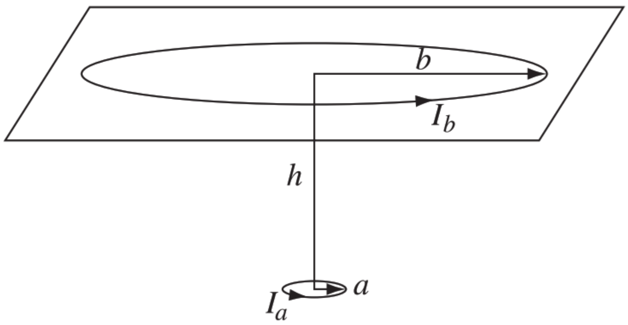
$$dW = dW_{ver} + dW_{rot}$$

$$dW = 0$$

Cincin melambat, dan energi rotasional yang hilang, $dW_{rot}$, besarnya persis sama dengan energi potensial yang didapat cincin, $dW_{ver}$. Dari sini dapat dilihat bahwa medan magnet tidak melakukan usaha, dalam artian tidak membuat energi internal sistem bertambah, melainkan hanya mengkonversi energi dari satu bentuk ke bentuk yang lain.

Bagaimana dengan magnet pada kepala *crane*? Apakah dia pasif saja pada proses ini? Tentu saja tidak, namun jika kita kita analisis dengan detail, kita akan sampai pada kesimpulan bahwa total usaha pada sistem yang mengikutsertakan magnet juga akan bernilai nol. Berikut kami berikan pemaparan detailnya.

Karena magnet di kepala *crane* harus menghasilkan medan yang cukup besar, dalam rangka untuk mampu mengkonversi energi yang cukup besar, maka kita dapat modelkan dia sebagai loop arus berjejari $b$ dan membawa arus $I_b$, yang cukup besar dibanding loop arus dari mobil bekas yang berjejari $a$ dan membawa arus $I_a$, yang pada pemodelan kita sebelumnya kita anggap sebagai momen dipol intrinsik. Loop arus magnet berjejari $b$ ini seolah diletakkan diatas meja yang diam, dimana meja disini berperan seperti penahan magnet di kepala *crane*. Loop arus magnet dan loop arus mobil ini memiliki arus yang paralel sehingga ketika keduanya berinteraksi, akan terdapat gaya tarik menarik diantara keduanya. Pada kasus ini, kita anggap arus pada kedua loop konstan, yang mana hal ini dicapai dengan cara menyediakan sumber daya listrik (*power supply*) pada kedua loop.




**Gambar 6.** Pemodelan sistem sebagai interaksi dua buah loop arus sejajar.

Mari kita mulai dengan kondisi bahwa loop arus kecil, yang menjadi pemodelan momen dipol intrinsik pada mobil, hanya sekedar mengambang saja pada jarak $h$ dibawah meja, yang mana gaya magnet dari loop arus di meja tepat melawan gaya berat loop kecil. Besar gaya magnet ini dapat kita peroleh dengan meninjau loop arus kecil sebagai momen dipol $\vec{m} = I_a \pi a^2 \hat{z}$ yang berinteraksi dengan medan magnet dari loop besar yaitu

$$\vec{B} = \frac{\mu I_b}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Gaya magnet yang dialami loop kecil $a$ adalah

$$\vec{F}_{mag} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{F}_{mag} = \nabla\left(I_a \pi a^2 \hat{z} \cdot \frac{\mu I_b}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}\right)$$

$$\vec{F}_{mag} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_a I_b}{2} \frac{\partial}{\partial z} (b^2 + z^2)^{-3/2} \hat{z}$$

$$\vec{F}_{mag} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_a I_b}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) (b^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2z) \hat{z}$$

Karena loop kecil $a$ ada di bawah loop besar sejauh $h$, maka $z = -h$, sehingga

$$\vec{F}_{mag} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{5/2}} \hat{z}$$

Gaya magnet ini akan melawan gaya berat loop kecil $a$ sehingga

$$F_{mag} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{5/2}} = m_a g$$

Sekarang, anggap loop arus kecil naik setinggi $dz$, maka usaha yang dilakukan ini akan sama dengan kenaikan energi potensial sistem, yaitu

$$dW_g = m_a g dz = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2 + h^2)^{5/2}} dz$$

Siapa yang melakukan gaya ini? Apakah medan magent? Bukan! Usaha ini dilakukan oleh *power supply* untuk mempertahankan arus pada loop $a$. Ketika loop naik, ggl diinduksikan pada dirinya. Total fluks yang melalui loop $a$ adalah

$$\Phi_a = M I_b$$

dimana $M$ adalah induktansi bersama loop $a$ dan loop $b$. Besar induktansi bersama ini adalah

$$M = \frac{\pi\mu_0}{2}\frac{a^2b^2}{(b^2+h^2)^{3/2}}$$

Dengan demikian, ggl induksi pada loop $a$ adalah

$$\varepsilon_a = -\frac{d\Phi_a}{dt} = -I_b\frac{dM}{dt} = -I_b\frac{dM}{dh}\frac{dh}{dt}$$

$$\varepsilon_a = -I_b\frac{d}{dh}\left(\frac{\pi\mu_0}{2}\frac{a^2b^2}{(b^2+h^2)^{3/2}}\right)\frac{d}{dt}(-z)$$

$$\varepsilon_a = -\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_a I_b\frac{a^2b^2h}{(b^2+h^2)^{5/2}}\frac{dz}{dt}$$

Usaha yang dilakukan *powe supply* untuk melawan ggl induksi ini adalah

$$dW_a = -\varepsilon_a I_a dt = \frac{3\pi}{2}\mu_0 I_a I_b\frac{a^2b^2h}{(b^2+h^2)^{5/2}}dz$$

yang mana besarnya sama dengan usaha untuk mengangkat loop kecil $a$. Disamping itu, ggl induksi juga diinduksikan pada loop $b$ (loop besar), akibat perubahan fluks yang terjadi pada loop $a$.

$$\Phi_b = MI_a \Longrightarrow \varepsilon_b = -I_a\frac{dM}{dt}$$

dan usaha yang dilakukan *power supply* pada loop $b$ untuk mempertahankan arusnya adalah

$$dW_b = -\varepsilon_b I_b dt = \frac{3\pi}{2}\mu_0 I_a I_b\frac{a^2b^2h}{(b^2+h^2)^{5/2}}dz$$

tepat sama dengan usaha $dW_a$. Dari sini dapat dilihat bahwa *power supply* melakukan usaha dua kali lipat dari total kenaikan energi sistem, yaitu kenaikan energi potensial loop $a$. Kemana "kelebihan" usaha ini pergi? Jawabannya adalah menjadi kenaikan energi didalam medan. Energi dari dua buah sistem loop arus adalah sebagai berikut

$$U = \frac{1}{2}L_a I_a^2 + \frac{1}{2}L_b I_b^2 + MI_a I_b$$

sehingga, kita dapat peroleha kenaikan energi dalam medan $dU$ yaitu

$$dU = I_a I_b\frac{dM}{dt}\,dt = dW_b$$

Pada akhirnya kita dapatkan hasil bahwa medan magnet tidak melakukan usaha dan hanya mengkonversi energi dari satu bentuk ke bentuk yang lainnya.

Fakta bahwa medan magnet tidak melakukan usaha kita dapatkan dari gaya lorenzt. Jika terdapat koreksi pada gaya lorenzt, maka bisa saja suku gaya magnetik berubah dan bisa menghasilkan usaha seperti halnya medan listrik. Kemungkinan pertama yang bisa jadi koreksi untuk gaya lorenzt adalah adanya monopol magnet yang berupa muatan magnetik $q_m$. Jika kita notasikan $q_e$ sebagai muatan listrik, maka gaya lorenzt sekarang akan menjadi

$$\vec{F} = q_e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) + q_m\left(\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\vec{v} \times \vec{E}\right)$$

Pada kasus ini, medan magnet dapat melakukan usaha, namun perlu diingat bahwa hal ini hanya akan terjadi jika monopol magnet eksis, akan tetapi sampai sekarang belum ditemukan eksis sama sekali. Kemungkinan kedua adalah jika saja dipol titik eksis, yang mana dirinya tidak terasosiasi dengan loop arus internal seperti arus elektron dan sebagainya, sehingga tidak ada fluks yang melaluinya, dan tidak ada ggl yang diinduksikan. Pada kasus ini, gaya lorenzt akan terkoreksi sebagai berikut.

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) + \nabla\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right)$$

dengan tidak adanya ggl yang diinduksikan, maka medan magnet tidak dapat mengubah energi menjadi energi untuk melawan ggl induksi, atau dengan kata lain akan meningkatkan energi internal sistem. Namun perlu dicatat juga bahwa hal ini hanya mungkin jika dipol titik eksis.

## Referensi


- Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press.