

FISIKA DASAR

Jilid I: Mekanika

Muhammad Farchani Rosyid
Eko Firmansah
Yusuf Dyan Prabowo



FISIKA DASAR

Jilid I: Mekanika

Muhammad Farchani Rosyid
Eko Firmansah
Yusuf Dyan Prabowo



Penerbit Periuk
Yogyakarta, 2014

FISIKA DASAR

Jilid I: Mekanika

Penulis:

Muhammad Farchani Rosyid

Eko Firmansah

Yusuf Dyan Prabowo

Proofreader:

Siti Wahyuni

Layout Design:

Yusuf Dyan Prabowo

Buku ini diedit menggunakan \LaTeX
engine MiKTeX 2.9, editor TeXstudio 2.8.4.

Penerbit Periuk

Puri Margomulyo Asri 41, Sleman Yogyakarta

email: penerbitperiuk@gmail.com

 **Copyleft.**

Hak cipta hanya Allah yang memiliki. Dipersilakan memperbanyak sebagian atau seluruh buku ini dalam bentuk apapun, baik secara elektronis maupun mekanis, termasuk memfotocopy, merekam, atau dengan sistem penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Dilarang mengomersialkan atau menjualnya dalam bentuk apapun tanpa izin penerbit.

ISBN:

978-602-71257-0-4 (no.jil.lengkap)

978-602-71257-1-1 (jil.1)

Edisi Pertama, 2014

Pengantar

Fisika adalah upaya memahami perilaku alam dan membingkainya menjadi bagan berpikir yang logis. Bagan berpikir itu disusun dari konsep-konsep dan kaitan-kaitan logis antara konsep-konsep itu. Konsep-konsep itu terus berkembang, yakni dimunculkan sesuai kebutuhan. Bagan berpikir itu terus disangskakan sehingga harus dihadapkan dengan pengujian-pengujian melalui eksperimen dan pengamatan. Eksperimen dan pengamatan digunakan terutama untuk membuktikan kesalahan bagan berpikir itu yang pada akhirnya untuk meyakinkan diri kita akan kekokohan bagan berpikir itu. Bagan berpikir itu disebut teori. Kebenaran teori tidak dapat dibuktikan karena memang tidak ada cara untuk membuktikannya.

Fisika sebenarnya bukan hanya urusan sekolah atau kuliah sehingga harus terpenjara di ruang-ruang kelas atau laboratorium-laboratorium jurusan Fisika. Fisika ada di mana-mana. Fisika adalah salah satu jalan yang ditempuh manusia untuk mengenal Tuhan yang menciptakan mereka dan alam tempat mereka tinggal. Fisika adalah upaya memahami perilaku alam dan merumuskan hukum-hukum yang mengatur perilaku itu. Dalam praktiknya, fisika juga merupakan pioner bagi hampir semua pengembangan teknologi yang telah ada maupun yang sedang dirancang. Untuk mampu membangun teknologi secara mandiri, maka suatu bangsa harus memiliki ilmuwan-ilmuwan dan insinyur-insinyur yang berkualitas. Untuk dapat memiliki ilmuwan dan insinyur yang berkualitas, maka pendidikan untuk mereka harus dilakukan secara sungguh-sungguh. Salah satu cerminan keseriusan dalam melangsungkan pendidikan secara sungguh-sungguh adalah menyediakan buku teks atau referensi yang berkualitas, berkarakter, dan mencerminkan kearifan serta keunggulan lokal.

Ada banyak hal dalam buku ini yang berbeda dari buku-buku fisika dasar yang sudah mashur. Salah satunya adalah pembahasan seluk-beluk eksperimen dan metodologinya yang sedemikian rinci sehingga persoalan ralat dan perambatannya disajikan secara mendalam. Hal ini penulis pandang perlu untuk menekankan peran penting pengukuran dan eksperimen dalam fisika. Selain itu, ruh dan semangat dalam pengukuran dan eksperimen juga dibicarakan. Selanjutnya, beberapa hal yang selama ini dipandang terlalu lanjut untuk mahasiswa semester satu dan dua juga telah dibicarakan, tentu saja dengan bahasa yang sederhana. Salah satu contoh untuk hal ini adalah gravitasi Eintein. Dalam bab gravitasi, gravitasi Eintein dibahas sebagai penutup yang diharapkan akan menambah wawasan bagi para pembaca. Tidak dimungkiri, bahwa buku ini memancarkan warna dan aroma astrofisika dalam penyajiannya. Hal itu tidak bermasalah, yang penting essensi fisis tersampaikan dengan baik dan jelas.

Hingga saat buku ini ditulis, belum terdapat referensi Fisika Dasar lain yang asli Indonesia. Maksudnya, belum ada buku Fisika Dasar yang disusun sendiri secara serius oleh fisikawan Indonesia, buku yang memiliki rasa Indonesia. Sejauh ini hanya terdapat buku-buku terjemahan, atau buku saduran dari buku-buku terbitan asing, atau buku yang

Pengantar

ditulis seadanya. Buku-buku dalam bentuk asli bahasa asing, menyulitkan banyak mahasiswa, terutama yang belum menguasai bahasa asing. Sementara buku-buku terjemahan seringkali menyulitkan mahasiswa karena kalimat dalam bahasa terjemahan tersebut sulit untuk dipahami. Oleh karena itu, perlu disusun buku-buku yang benar-benar asli Indonesia. Keberadaan buku ini merupakan langkah awal pendidikan berkualitas bagi saintis dan insinyur. Semoga buku ini dapat dimanfaatkan oleh semua saintis, insinyur, mahasiswa, dosen, siswa, guru, dan masyarakat secara luas.

Ucapan Terimakasih

Banyak rekan yang telah membantu para penulis demi terwujudnya buku ini. Para penulis mengucapkan terimakasih kepada saudari Siti Wahyuni atas kejeliannya dalam memeriksa naskah asli buku ini. Atas kejeliannya, banyak kesalahan ketik yang telah ditemukan dan diperbaiki. Selanjutnya ucapan terimakasih yang tulus juga disampaikan oleh para penulis kepada rekan-rekan anggota kelompok penelitian KAMP Laboratorium Fisika Atom dan Inti jurusan Fisika FMIPA UGM atas saran-saran dan harapan-harapan yang telah menjadi masukan yang sangat berarti.

Yogyakarta, Agustus 2014

Muhammad Farchani Rosyid. Saya lahir di kampung Ngeseng. Kampung ini berada di desa Gemolong, desa kecil yang berada di kabupaten Sragen, Jawa Tengah. Saya menghabiskan masa kecil di sana. Memancing ikan di sungai kecil yang membelah desa itu, membuat dan menjual petasan, bermain bola plastik, dan berbagai hal yang biasa dilakukan oleh anak-anak kampung telah menjadi hiburan di masa kecil itu. Selepas SMA, saya pindah ke Yogyakarta. Di sela-sela belajar, saya masih sempat mengajar privat di SMP dan SMA. Sekarang saya tinggal di kampung Patukan desa Ambarketawang. Desa ini masuk dalam wilayah kecamatan Gamping, kabupaten Sleman, Yogyakarta. Banyak hal yang sekarang saya kerjakan. Tetapi yang terpenting dari banyak hal itu adalah belajar untuk menjadi manusia seutuhnya.



Eko Firmansah. Saya lahir di Way Mili. Memiliki hobi membaca, otomotif, menonton acara olah raga, berkebun, bertaman, beternak, memasak, memancing, dan beberapa yang lain. Menghabiskan masa kecil di Desa Bumi Raharjo Lampung Tengah. Lulus sekolah dasar tahun 1997. Dalam rentang waktu 2003-2005 bekerja sebagai mekanik otomotif roda empat di sebuah perusahaan bidang jasa otomotif roda empat. Selama di bangku sekolah dasar dan menengah pertama, selain belajar juga berkebun dan beternak kambing dan ayam. Sementara selama di sekolah kejuruan lebih banyak menghabiskan waktu untuk mempelajari otomotif terutama kendaraan roda empat. Pada tahun 2007-2010 selain kegiatan perkuliahan juga menerima layanan jasa perbaikan komputer dan laptop serta pernah mendirikan toko dan tempat reparasi komputer tahun 2009-2010. Di sela-sela waktu, saya juga mengajar les privat beberapa siswa SD, SMP, dan SMA.



Yusuf Dyan Prabowo. Saya lahir di kota Malang. Menghabiskan sebagian masa kecil di desa Gedangan, Kabupaten Malang, Jawa Timur. Kemudian menempuh pendidikan dasar di kota Malang. Semenjak umur sepuluh tahun belajar bela diri karate dan silat. Selama duduk di bangku sekolah dasar, sempat melakukan pendakian gunung-gunung di sekitar Malang. Sejak duduk di bangku sekolah dasar aktif di berbagai organisasi. Sekarang tinggal di Kabupaten Sleman, Yogyakarta. Di sela-sela kesibukan, sempat mengajar privat di berbagai tempat. Juga aktif sebagai blogger.

Daftar Isi

iii Pengantar

Ucapan Terimakasih iv

vii Daftar Isi

Bab 1

- 1 **Fisika: Upaya Memahami Alam**
- 1.1 Perumusan Pola-pola Matematis Itu 5
 - Tentang Hubungan antara Fisika dan Matematika 7
 - 1.2 Teori, Eksperimen, dan Keterkaitan Antara Keduanya 9
 - 1.3 Dari Galaksi Sampai Muon 9
 - 1.4 Taksonomi Fisika 10
 - 1.5 Fisika dan Teknologi 12
 - 1.6 Fisika Merupakan Produk Peradaban Kolektif 13
 - 1.7 Sikap dan Perilaku Ilmiah 14
 - 1.8 Motivasi Agung Dalam Sains 17
 - 1.9 Pertanyaan-pertanyaan 18

Bab 2

19 **Besaran dan Pengukuran**

- 2.1 Besaran dan Satuan 21
- 2.2 Besaran Pokok dan Turunan 22
- 2.3 Sistem Internasional 23
 - Panjang 24
 - Massa 26
 - Waktu 27
 - Kuat Arus Listrik 28

Suhu	28
Intensitas Cahaya	28
Banyaknya Zat	28
Sudut Bidang dan Sudut Ruang	30
2.4 Redefinisi Sistem Internasional	32
Usulan Standar Panjang	32
Usulan Standar Massa	32
Usulan Standar Waktu	33
Usulan Standar Kuat Arus	33
Usulan Standar Suhu	33
Usulan Standar Intensitas Cahaya	33
Usulan Standar Banyaknya Zat	34
2.5 Besaran Ekstensif dan Intensif	34
2.6 Dimensi	36
2.7 Konversi Satuan	38
2.8 Angka Penting	40
Aturan Penulisan Angka Penting	41
Angka Penting dan Aljabar	42
Notasi Ilmiah	43
2.9 Penaksiran	44
2.10 Tentang Pengukuran	45
Ketidakpastian Pengukuran	46
Tentang Ralat Pengukuran	47
Ralat Pembacaan Skala	48
Ketidakpastian Relatif	48
2.11 Perambatan Ralat	48
Ralat Jumlahan dan Selisih	49
Mengalikan Dua Hasil Ukur	49
Menjumlahkan Hasil Ukur	50
Mengalikan Hasil Ukur	51
Perkalian dengan Bilangan Eksak	52
Besaran pangkat dari nilai ukur	52
Ralat Kuadratur untuk Jumlahan	53
Ralat Kuadratur untuk Perkalian	53
Ketidakpastian fungsi satu peubah	53
Perambatan Ralat secara Umum	53
Ketidakpastian Pengukuran Berulang	54
2.12 Mengukur Medan Gravitasi Bumi	55
Metode Grafik	56
Linearisasi Persamaan	58
Regresi Linier	59
2.13 Pengukuran Klasik versus Pengukuran Kuantum	61
Sistem Klasik versus Sistem Kuantum	62
Struktur Esensial	62
Melakukan Eksperimen dan Bermain Judi itu Beda Tipis	63
2.14 Pengukuran adalah Pacuan	64
Eksperimen Cavendish	64
Gravity Probe-B	67

Eksperimen Eötvös 68

Bab 3

71 Peranti Matematik

- 3.1 Berapa besarnya? Ke mana arahnya? 72
- 3.2 Kesamaan Dua Vektor 72
- 3.3 Aljabar Vektor 73
 - Penjumlahan Vektor 74
 - Perkalian Vektor dengan Skalar 76
 - Sifat-sifat Penjumlahan Vektor dan Perkalian dengan Skalar 78
- 3.4 Penguraian Vektor 80
 - Penguraian Vektor pada Sumbu-sumbu Koordinat 81
- 3.5 Hasilkali Skalar 83
- 3.6 Hasilkali Silang 87
- 3.7 Medan Skalar dan Medan Vektor 89

Bab 4

95 Kinematika

- 4.1 Kerangka Acuan dan Vektor Posisi 96
 - Kerangka Acuan 97
 - Vektor Posisi 97
 - Perpindahan versus Jarak 98
- 4.2 Kecepatan Rata-Rata, Kecepatan Sesaat dan Kelajuan 101
 - Kecepatan Rata-Rata versus Kelajuan Rata-Rata 102
 - Kecepatan Sesaat 104
- 4.3 Percepatan Rata-Rata dan Percepatan Sesaat 106
 - Percepatan Rata-Rata 106
 - Percepatan Sesaat 107
- 4.4 Gerak Lurus 108
 - Gerak Lurus Beraturan 110
 - Gerak Lurus Berubah Beraturan 112
 - Gerak Osilasi 115
- 4.5 Gerak pada Bidang 116
 - Gerak Parabola 116
 - Gerak Melingkar 119

Bab 5

125 Dinamika

- 5.1 Gerak Menurut Aristoteles 126
- 5.2 Hukum Pertama Newton: Penegasan Kembali Hukum Kelembaman 127
- 5.3 Hukum Kedua Newton: Seberapa Besar Perubahan Gerak 130
 - Massa Gravitasi dan Massa Inersial 135
- 5.4 Hukum Ketiga Newton: Aksi-Reaksi 136
- 5.5 Macam-macam Gaya 139
 - Gaya Sentuhan 139
 - Gaya Tegangan 146
 - Gaya atau Interaksi Fundamental 147
- 5.6 Penerapan Hukum Newton Lebih Lanjut 149
 - Kelereng Jatuh Dalam Zat Alir Kental 149
 - Gaya pada Gerak Melingkar 151
 - Bandul Melingkar 153
- 5.7 Kerangka Acuan Non Inersial: Gaya-gaya Lembam 155

Bab 6

157 Kerja dan Tenaga

- 6.1 Tenaga Kinetik 158
- 6.2 Kerja 162
 - Kerja Sepanjang Pergeseran Kecil 163
 - Kerja Sepanjang Lintasan 165
- 6.3 Medan Gaya Lestari dan Tenaga Potensial 169
- 6.4 Hukum Kelestarian Tenaga Mekanik 174

Bab 7

181 Tumbukan, Impuls, dan Momentum

- 7.1 Pusat Massa 182
- 7.2 Momentum Linier dan Impuls 183
 - Batasan Momentum Linier dan Impuls 183
 - Momentum Sistem Dua Partikel dan Kelestariannya 185
 - Momentum Sistem Banyak Partikel dan Kelestariannya 186
- 7.3 Tumbukan 189
 - Jenis-Jenis Tumbukan 190

Bab 8**193 Gerak Benda Tegar**

- 8.1 Orientasi, Kecepatan, dan Percepatan **194**
- 8.2 Hubungan Variabel Linier dan Variabel Sudut **199**
- 8.3 Tenaga Kinetik dan Momen Inersia **204**
- 8.4 Teorema Sumbu Sejajar dan Sumbu Tegak **215**
- 8.5 Momen Gaya **217**
- 8.6 Dinamika **221**
- 8.7 Kesetimbangan **224**
- 8.8 Usaha, Tenaga, dan Daya **229**
- 8.9 Momentum Sudut **230**
- 8.10 Perpaduan Translasi dan Rotasi **235**
- 8.11 Topik Khusus dalam Rotasi **238**
 - Gerak Giroskop dan Gasing **238**
 - Pengantar Gerak Benda Tegar Tersambung **239**

Bab 9**241 Gravitasi**

- 9.1 Hukum Kepler **243**
 - Hukum Pertama Kepler **244**
 - Hukum Kedua Kepler **246**
 - Hukum Ketiga Kepler **246**
- 9.2 Gravitasi Oleh Benda Titik **249**
- 9.3 Gravitasi Oleh Benda-benda Besar **254**
 - Gaya Pasang (*Tidal*) **258**
- 9.4 Massa Lembam versus Massa Gravitasi **262**
 - Dari Galilei, Newton, dan Bessel **263**
 - Eksperimen Eötvös **264**
 - Eksperimen Roll-Krotov-Dicke **265**
 - Eksperimen Braginskij-Panov **266**

- 9.5 Gravitasi Newton dan Hukum Kepler **267**
- 9.6 Medan Gravitasi **275**
- 9.7 Tenaga Potensial Gravitasi **277**
 - Usaha Oleh Gaya Gravitasi **277**
 - Tenaga Potensial Gravitasi **280**
 - Tenaga Mekanik dan Bentuk Lintasan **283**
- 9.8 Orbit Satelit **284**
- 9.9 Pandangan Einstein tentang Gravitasi **286**
 - Prinsip Kesetaraan Lemah **288**
 - Prinsip Kesetaraan **290**
 - Terapan Prinsip-prinsip Kesetaraan **292**
- 9.10 Topik Khusus **294**
- 9.11 Lebih Jauh tentang Gravity Probe-B **295**

Bab 10**297 Dinamika Zat Alir**

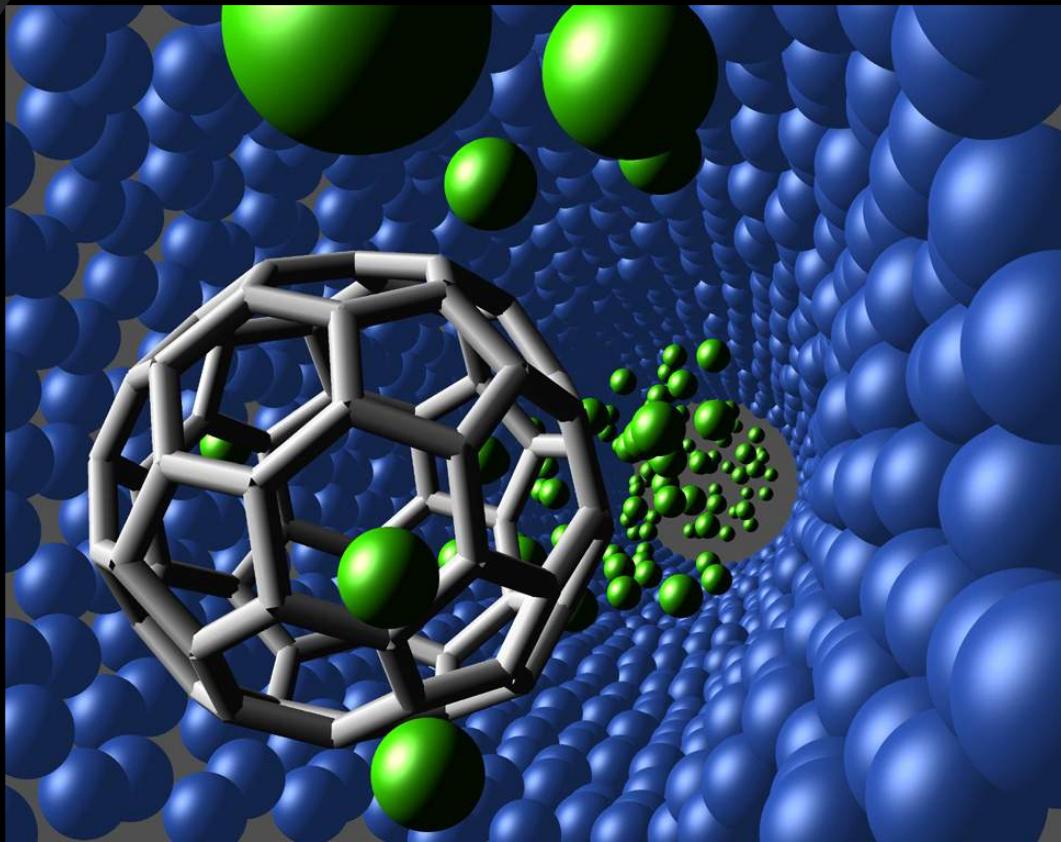
- 10.1 Pengertian Zat Alir **298**
- 10.2 Jenis-jenis Zat Alir **299**
- 10.3 Partikel Zat Alir **299**
- 10.4 Tekanan **300**
- 10.5 Persamaan Kontinuitas **302**
- 10.6 Dinamika Zat Alir **304**
- 10.7 Tekanan Hidrostatik **305**
- 10.8 Gaya Apung **307**
- 10.9 Hukum Bernoulli **309**
- 10.10 Zat Alir Tak Ideal **311**
 - Zat alir kental tak termampatkan di antara dua pelet **312**
 - Aliran zat alir kental dalam pipa berpenampang bujursangkar **313**
- 10.11 Soal-soal **315**

317 Daftar Pustaka

I

Fisika: Upaya Memahami Alam

Quantum mechanics in action.
Gambar ini memperlihatkan sebuah visualisasi piston nanohidrolik. Model ini melibatkan suatu tabung nano karbon (biru), atom-atom helium (hijau), dan sebuah molekul "Buckyball". Teknologi dalam ukuran nanometer semacam ini merupakan konsekuensi fisika kuantum (gambar diambil dari <http://www.nanotech-now.com>)



- 1.1 Pola-pola Keteraturan**
- 1.2 Perumusan Pola-pola Matematis itu**
- 1.3 Teori, Eksperimen, dan Keterkaitan antara Keduanya**
- 1.4 Dari Muon sampai Galaksi**
- 1.5 Taksonomi Fisika**
- 1.6 Fisika dan Teknologi**
- 1.7 Fisika: Produk Peradaban Bersama**
- 1.8 Sikap dan Perilaku Ilmiah**

Pandangilah langit di malam hari. Jika Anda tinggal di tempat yang jauh dari keramaian kota, maka Anda akan terpana oleh kerlap-kerlip tebaran bintang-gemintang di langit. Itulah Bimasakti. Seakan-akan bintang-bintang itu tersebar dan mengambil tempat sekenanya di sana. Tetapi, ketika Friedrich Wilhelm Herschel tahun 1789 memiliki teropong yang cukup kuat (dengan cermin utama berdiameter 1,26 m dan titik api sejauh 12 m) dan bersemangat meluangkan waktunya untuk mencermati sebaran bintang-bintang, ternyata bintang-bintang itu tidaklah mengambil tempat sekenanya. Terdapat pola-pola yang diikuti oleh bintang-bintang untuk menempatkan diri. Kini kita menyadari bahwa Bimasakti berbentuk spiral dan Bimasakti bukan keseluruhan alam semesta kita. Bimasakti hanyalah satu dari sekian ratus miliar galaksi yang ada di alam semesta. Kebanyakan galaksi memiliki bangun spiral. Ada beberapa jenis spiral yang menjadi bentuk galaksi-galaksi itu. Sekarang diketahui pula bahwa galaksi-galaksi bergerak saling menjauh. Besar kecepatan surut galaksi itu ternyata diketahui berbanding lurus dengan jarak antara galaksi. Jadi, alam semesta mengembang.



Gambar 1.1: Nautilus (kiri), dan cangkang nautilus yang dibelah (kanan)

Pernahkah Anda melihat binatang yang dikenal sebagai nautilus? Itu binatang air bercangkang yang diperlihatkan oleh Gambar 1.1 (gambar yang di sebelah kiri). Jika cangkang nautilus itu dibelah akan terlihat bagian dalamnya seperti pada Gambar 1.1 (yang di sebelah kanan). Apa yang menarik dari penampakan bagian dalam cangkang nautilus? Paling jelas terlihat adalah adanya pola spiral. Secara matematis, spiral itu ternyata merupakan spiral logaritmik. Spiral ini dapat digambarkan sebagai kurva matematis pada sebuah bidang datar. Jikalau dinyatakan dengan koordinat polar, titik-titik yang terletak pada kurva itu memenuhi persamaan $r = e^{\theta}$, dengan r jarak dari titik-titik itu ke pusat koordinat dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor posisi titik-titik itu dari sumbu-x. Spiral logaritmik semacam ini juga dapat Anda lihat pada cangkang-cangkang siput.

Virus adalah penyebab infeksi penyakit yang sangat kecil dan berbiak hanya dalam sel-sel makhluk hidup yang lain. Virus dapat menginfeksi segala bentuk kehidupan. Manusia mengenal virus pertama kali melalui Dmitri Ivanovsky pada tahun 1892, yakni dalam sebuah artikelnya yang menggambarkan penyebab penyakit non-bakterial pada tanaman tembakau. Selanjutnya, Martinus Beijerinck menemukan virus mosaic pada daun tembakau di tahun 1898. Virus secara umum tersusun atas tiga hal. Yang pertama adalah material genetik (DNA atau RNA), yang kedua adalah mantel protein, dan yang ketiga adalah bungkus lemak (lipids). Kenyataan yang menarik tentang virus-virus yang telah ditemukan oleh para ilmuwan adalah bahwa bangun tubuh virus-virus itu memiliki kesetangkupan (simetri) terhadap perputaran-perputaran yang dikenal dengan kesetangkupan icosahedral. Jadi, bangun geometri tubuh virus memiliki kesetangkupan tingkat tinggi. Gambar 1.2 memperlihatkan salah satu jenis virus dan bangun icosahedron yang sesuai dengan virus itu.

Gambar 1.3 memperlihatkan penampakan berbagai bunga salju, mulai dari yang sederhana hingga yang sangat rumit. Dalam pembentukan kristal-kristal air ini terlihat dengan jelas bahwa molekul-molekul air tidak menempatkan diri sekenanya. Mereka tunduk pada pola-pola yang mengatur posisi mereka masing-masing. Bunga-bunga salju itu memiliki kesetangkupan baku tertentu, yakni terhadap perputaran dengan sudut 60 derajat. Secara teknis kesetangkupan semacam ini disebut kesetangkupan lipat enam. Pola-pola yang mengatur posisi molekul air itu telah diketahui, dan bergantung pada temperatur dan kelembaban udara di sekitar tempat pembentukan kristal itu. Molekul-molekul airpun ternyata mengenal geometri tingkat tinggi.



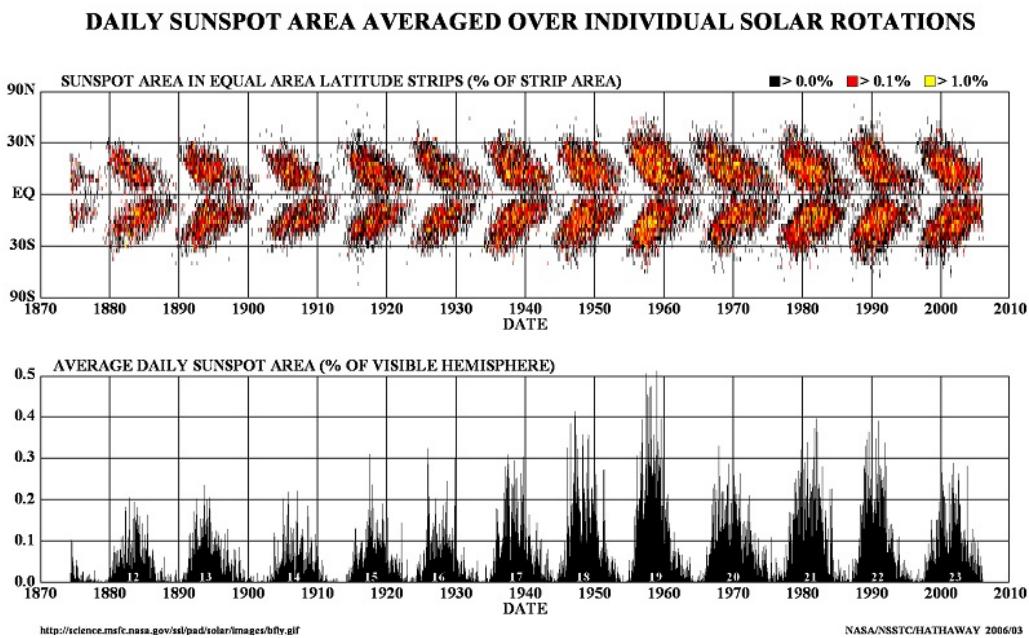
Gambar 1.2: Virus dan bangun icosahevron (sumber gambar: commons.wikimedia.org)



Gambar 1.3: Penampakan “close-up” berbagai macam bentuk bunga salju yang diambil dengan kamera oleh seorang fotografer Rusia, Alexey Kljatov. (Gambar diambil dari www.demilked.com/macro-snowflakes-diy-camera-alexey-kljatov)

Bintik-bintik Matahari (*sun spots*) adalah gejala penarikan wilayah-wilayah terbatas pada permukaan fotosfer oleh gejolak medan magnet setempat. Akibatnya, pada wilayah itu temperatur sedikit mengalami penurunan jika dibandingkan dengan wilayah lain di sekitarnya. Dengan demikian, wilayah yang mengalami penurunan temperatur itu tampak lebih gelap jika dibandingkan dengan wilayah di sekitarnya. Hal ini mudah dipahami dari gejala radiasi termal. Bintik-bintik Matahari merupakan indikator bagi aktivitas Matahari. Semakin luas wilayah bintik Matahari, semakin tinggi aktivitas Matahari. Gambar 1.4 memperlihatkan grafik yang merekam aktivitas Matahari sejak dari tahun 1870 hingga tahun 2010. Yang menarik dari grafik itu di antaranya adalah adanya siklus Matahari, bahwa kuatnya aktivitas Matahari berulang-ulang dalam waktu 11 tahun.

Dari beberapa contoh gejala alam yang diungkapkan di atas tersirat adanya keteraturan. Tampak dengan nyata bahwa gejala-gejala atau peristiwa-peristiwa di alam ini memiliki pola-pola tertentu. Oleh karena itu, tidak salah jika kemudian Anda menyimpulkan dan meyakini bahwa alam ini diciptakan sebagai suatu keselarasan (harmoni) yang memiliki pola-pola keteraturan. Walaupun gejala-gejala alam-alam sering terlihat terjadi secara acak, namun tetap saja sesungguhnya adalah acak yang teratur. Ada keteraturan dalam keacakan. Perambatan kalor dan difusi bahan sesungguhnya adalah gejala acak. Akan tetapi, terdapat keteraturan sehingga geja-



Gambar 1.4: Aktivitas Matahari yang diwakili oleh luas rata-rata wilayah bintik-bintik Matahari sejak tahun 1870 hingga 2010 (Gambar diambil dari www.science.msfc.nasa.gov).

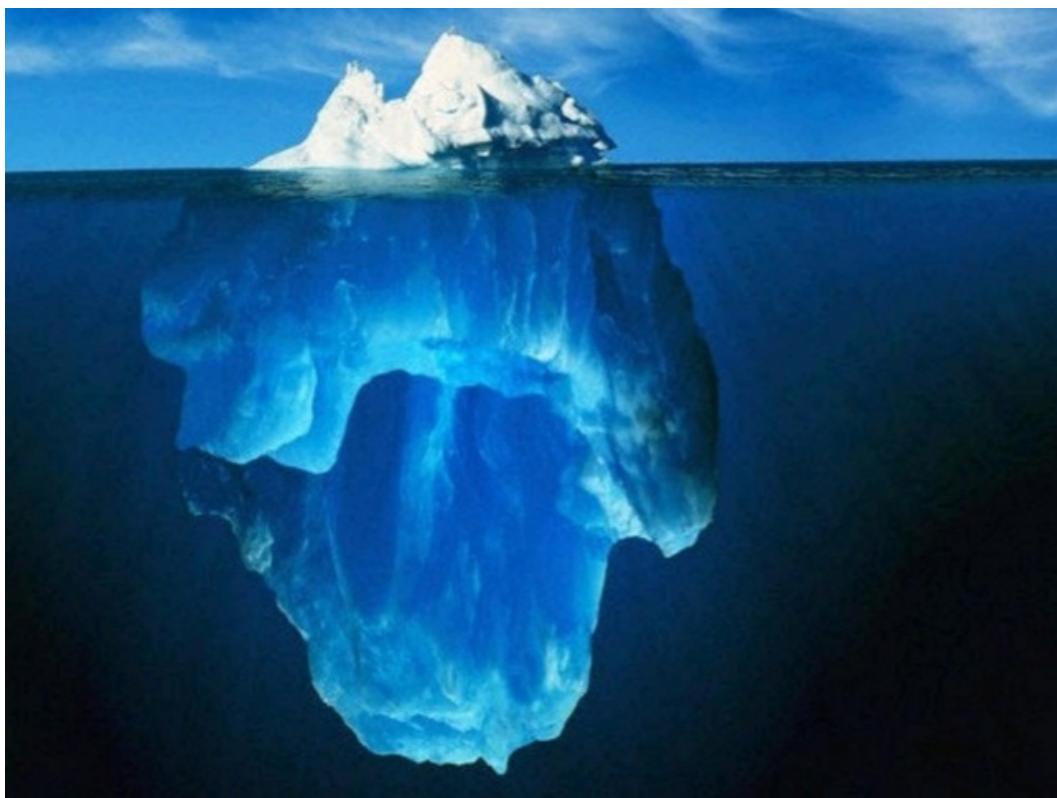
Fisika merupakan upaya menemukan pola-pola keteraturan alam dan membingkainya menjadi bagan berpikir yang runtut.

Bagan berpikir tentang pola-pola keteraturan alamiah itu disebut teori.

Jadi, fisika adalah upaya membangun teori tentang gejala-gejala alamiah.

la perambatan panas dan difusi bahan dapat dirumuskan secara matematis. Jadi, adakalanya pola-pola keteraturan itu tampak jelas nyata, tetapi sering terjadi bahwa keteraturan itu sangat tersembunyi, sehingga membutuhkan kejelian dan kecermatan kita dalam mengungkapnya. Sekarang marilah kita merenung sejenak. Mungkinkah akan terasa nyaman andaikata kita mampu mengetahui kaidah-kaidah atau pola-pola yang dianut oleh setiap gejala alamiah dalam setiap rinciannya. Dengan panduan kaidah-kaidah itu kita dapat meramalkan segala sesuatunya. Dari hasil ramalan itu, kita dapat mengambil tindakan yang memadai agar kita dapat mengambil keuntungan ataupun menghindar dari kerugian. Boleh jadi, hidup kita akan terasa lebih mudah. Sesuatunya akan tampak pasti, jauh dari kegalauan dan kegundahan. Atau mungkin malah sebaliknya, dengan kepastian semacam itu hidup kita justru terasa sulit, tidak pernah tenang dan selalu dalam kesedihan sebagaimana seorang narapidana yang telah mendapat kepastian kapan akan dihukum mati. Akan tetapi, terlepas dari kemungkinan-kemungkinan semacam itu, cita-cita ilmu fisika hanya-lah menemukan kaidah-kaidah atau pola-pola yang sering disebut hukum alam itu.

Fisika merupakan upaya menemukan pola-pola keteraturan alam dan membingkainya menjadi bagan berpikir yang runtut, yakni berupa kaitan logis antara konsep-konsep tertentu. Bagan berpikir tentang pola-pola keteraturan alamiah itu disebut teori. Jadi, fisika adalah upaya membangun teori tentang gejala-gejala alamiah. Bagan berpikir itu secara matematis disajikan sebagai kaitan-kaitan matematis yang menghubungkan struktur-struktur matematis yang mewakili konsep-konsep tertentu, semisal besaran, parameter, dll. Oleh karena itu, konsep-konsep pun bermunculan sesuai kebutuhan. Jadi, ilmu fisika berusaha menemukan pola-pola keteraturan tersebut dan membingkainya dalam suatu rumusan matematis. Yang diusahakan adalah mendapatkan gambaran matematis maksimal, yakni persamaan matematis yang paling tepat dan yang memiliki jangkauan paling luas dalam menjelaskan keteraturan alam. Walaupun tidak ada kesepakatan secara formal namun telah berkembang keyakinan secara luas bahwa pola-pola keteraturan alam itu paling baik apabila dimodelkan atau disajikan dalam bentuk pola-pola matematis yang



Gambar 1.5: Gunung es di permukaan laut. Yang tersembunyi di bawah permukaan laut jauh lebih besar jika dibandingkan dengan yang tampak di atas permukaan. (Gambar diambil dari www.kimberlyemerson.com)

berupa persamaan ataupun grafik. Contoh-contoh yang telah disebutkan di muka barangkali cukup menunjukkan kebenaran pernyataan ini.

Untuk apa sebuah teori disusun? Holton dan Brush (Holton dan Brush, 2005) menggambarkannya dengan keberadaan sebuah gunung atau pulau es yang terapung di permukaan air laut. Bagian es yang berada di bawah permukaan air laut (oleh karena itu tidak kelihatan) jauh lebih besar jika dibandingkan dengan yang tampak di atas permukaan air laut. Tujuan sebuah teori adalah menjelaskan seluk-beluk, sifat-sifat, dan perilaku gunung es itu secara keseluruhan termasuk bagian pulau es yang tersembunyi di bawah permukaan air laut itu dengan berbekal pengetahuan tentang seluk-beluk, sifat-sifat, dan perilaku bagian yang tampak di permukaan air laut. Secara rinci sebuah teori diharapkan mampu untuk (i) menghubungkan berbagai fakta yang terpisah dalam suatu bagan berpikir yang logis dan mudah ditangkap, (ii) memberikan gambaran tentang kaitan-kaitan baru, yakni mampu menjelaskan kaitan antara fakta-fakta lama dan fakta-fakta baru, (iii) memberikan prakiraan (prediksi) gejala-gejala alamiah baru, dan memberikan penjelasan bagi gejala-gejala alamiah yang telah teramat, (iv) menuntun dalam penyelesaian masalah-masalah praktis.

1.1 Perumusan Pola-pola Matematis Itu

Untuk mewujudkan obsesi tersebut, sebagian fisikawan yang masyhur disebut fisikawan teoretis berusaha menyusun model-model hukum alam dengan memanfaatkan kaidah-kaidah matematis. Bagan berpikir yang runtut itu akan dimodelkan dengan objek-objek matematis dan kaitan antara objek-objek itu. Penyusunan model-model

ini tidak boleh sembarangan. Penyusunan ini haruslah didasarkan pada data-data hasil eksperimen (percobaan) atau pengamatan yang telah dihasilkan oleh sebagian fisikawan yang dikenal sebagai fisikawan eksperimental. Model hukum alam yang diusulkan, tentu saja, tidak mungkin identik dengan hukum atau pola-pola keteraturan alam yang sesungguhnya (yakni yang dimodelkannya), melainkan hanya sekedar pendekatan semata. Oleh karena itu, diperlukan ukuran apakah model-model yang diusulkan diterima atau ditolak. Ukuran tersebut haruslah terkait dengan kesesuaian model-model tersebut dengan perilaku alam yang yang diwakilinya. Model yang paling sesuai dengan perilaku alam merupakan model yang paling diterima. Selain dituntut untuk mampu menjelaskan hasil-hasil eksperimen yang telah dilakukan, model yang diusulkan dituntut pula mampu meramalkan hasil-hasil eksperimen yang akan dilakukan. Jadi, semakin banyak hasil eksperimen yang dapat dijelaskan dan diramalkan secara tepat oleh suatu model, maka model tersebut semakin diterima. Oleh karena itu, dapatlah dikatakan bahwa eksperimen merupakan ‘hakim’ dalam fisika (sains pada umumnya), yakni menentukan apakah suatu model matematis diterima ataukah ditolak. Akan tetapi, walaupun suatu model telah mampu memainkan peran tersebut secara memuaskan, ia terpaksa harus pula diinggalkan atau paling tidak diperbaiki apabila terdapat paling sedikit sebuah eksperimen yang tidak mampu dijelaskan atau diramalkan olehnya. Jadi, tidak ada model hukum alam yang diterima secara langgeng. Albert Einstein, mengatakan, “*No number of experiments can prove me right; a single experiment can prove me wrong.*” Jadi, seribu macam eksperimen yang mendukung kebenaran suatu teori atau model belumlah cukup untuk menyatakan bahwa teori itu benar, tetapi sebuah eksperimen saja (sekali lagi, hanya sebuah eksperimen saja) telah mencukupi untuk menggugurkan suatu teori atau model manakala hasil-hasil eksperimen tersebut sama sekali tidak mampu dijelaskan oleh suatu teori atau model. Sebuah teori yang disusun secara induktif (teori sains) tidak akan pernah dapat dibuktikan kebenarannya. Justru sebaliknya, yang mungkin dapat dibuktikan dari suatu teori sains adalah kesalahannya, yakni ketika salah satu prediksinya tidak sesuai dengan hasil eksperimen atau pengamatan. Hal ini mudah dipahami mengingat tidak semua kasus yang mungkin terjadi dapat diamati. Oleh karena itu, Karl Popper, seorang filsuf sains asal Austria, sejak lama telah mengusulkan dua langkah yang harus dilakukan dalam upaya pengembangan sains (Popper, 1935), yakni melalui pengusulan dan penolakan. Dua langkah itu lebih jelasnya adalah sebagai berikut:

**Sebuah teori yang disusun secara induktif (teori sains)
tidak akan pernah dapat dibuktikan kebenarannya.
Justru sebaliknya, yang mungkin dapat dibuktikan
dari suatu teori sains
adalah kesalahannya.**

- (i) Pengusulan teori-teori yang memungkinkan dapat dibuktikan kesalahannya. Hanya teori-teori yang memungkinkan untuk dibuktikan kesalahannya saja yang diusulkan, yakni yang sedemikian rupa sehingga ada cara atau keadaan yang dapat dijadikan kriteria bahwa teori itu salah. Jadi, yang patut ditanyakan dari sebuah model atau teori adalah cara pembuktian kesalahannya atau falsifikasinya. Pernyataan yang memungkinkan untuk dibuktikan kesalahannya disebut pernyataan atau proposisi ilmiah. Gagasan-gagasan yang tidak mungkin dapat dibuktikan kesalahannya tidak termasuk gagasan ilmiah. Pernyataan “Lukisan berjudul ‘Perkelahian dengan singa’ karya Raden Saleh adalah lukisan terbaik” adalah pernyataan yang tidak dapat dibuktikan kesalahannya. Oleh karena itu, pernyataan itu bukanlah proposisi ilmiah. Pernyataan “Ulir pada semua cangkang siput adalah ulir putar kanan” adalah pernyataan ilmiah sebab dimungkinkan adanya cara atau keadaan yang dapat digunakan untuk menyatakannya salah, yaitu ketika seseorang menemukan cangkang siput yang berulir putar kiri.

(ii) Penolakan teori-teori yang diusulkan melalui eksperimen atau pengamatan.

Dalam hal ini, secara rutin dan berkesinambungan diupayakan untuk “menolak” teori-teori itu melalui eksperimen atau pengamatan. Dalam kaitan ini eksperimen adalah upaya menolak atau membuktikan kesalahan sebuah teori. Jadi, eksperimen bukanlah cara untuk membuktikan kebenaran sebuah teori atau model. Eksperimen dilakukan justru untuk membuktikan kesalahan sebuah teori atau model.

Jadi, model-model yang masih lolos dari penolakan akan terus bertahan, sedangkan yang telah gagal perlu diperbaiki atau ditinggalkan sama sekali. Model-model yang masih lolos uji perlu digabungkan sehingga didapatkan model-model yang memiliki jangkauan (domain) yang lebih luas. Selanjutnya, model-model hasil penggabungan kemudian harus diuji lagi dengan eksperimen-eksperimen. Sekali lagi, yang masih lolos akan bertahan, yang gagal diperbaiki atau ditinggalkan. Proses semacam ini berlangsung terus-menerus. Lalu, kapan akan berakhir? Jawabnya : tiada akan berakhir. Kehebatan sebuah teori atau model diukur dari kemampuannya bertahan dari upaya penolakan melalui eksperimen-eksperimen. Semakin banyak eksperimen yang gagal membuktikan kesalahan sebuah teori, semakin meyakinkan teori itu. Akan tetapi, tetap saja, bahwa teori itu tidak akan pernah terbukti kebenarannya.

Eksperimen bukanlah cara untuk membuktikan kebenaran sebuah teori atau model. Eksperimen dilakukan justru untuk membuktikan kesalahan sebuah teori atau model

Tentang Hubungan antara Fisika dan Matematika

Telah disebutkan bahwa tuntutan kuantitatif mengharuskan pola-pola keteraturan alam dimodelkan dengan pola-pola matematis. Jadi, matematika berperan sebagai media atau bahan, sebagaimana batu atau kayu bagi para pemahat ataupun kanvas dan cat minyak bagi para pelukis. Pola-pola keteraturan alam adalah konsep yang berada di balik gejala-gejala alam dan menentukan wujud gejala-gejala alam itu. Ketika seseorang memahat patung seekor kambing pada sebongkah batu, maka sesungguhnya ia sedang berusaha memindahkan konsep tentang binatang yang bernama kambing dari seekor kambing ke sebongkah batu itu. Konsep adalah suatu gagasan yang menggambarkan hakikat atau esensi. Ketika patung kambing telah selesai dikerjakan, tentu saja tidak seluruh konsep tentang kambing dapat dipindahkan secara utuh ke dalam sebongkah batu itu, malahan lebih banyak bagian konsep tentang kambing yang tidak dapat dipindahkan oleh pemahat tadi. Banyak tidaknya bagian (porsi) konsep tentang kambing yang dapat dipindahkan oleh pemahat tersebut bergantung pada beberapa hal. Pertama, seberapa dalam sang pemahat memahami konsep tentang kambing. Semakin dalam pemahamannya tentang anatomi kambing misalnya, maka patung kambing yang ia selesaikan semakin mirip dengan kenyataan seekor kambing. Kedua, media atau bahan yang dipakai untuk membuat patung kambing itu. Bahan yang terlalu lembek dan tidak pernah bisa mengeras tentu saja akan sulit untuk dipakai membuat patung, sehingga bahan semacam itu tidak mampu menjadi wadah bagi konsep tentang seekor kambing. Ketiga, kemampuan memahat sang pemahat. Patung kambing yang dipahat oleh seorang pemahat berbakat yang telah berpengalaman tentu akan lebih baik jika dibandingkan dengan yang dihasilkan oleh seorang yang sedang belajar memahat.

Seorang fisikawan yang sedang menyusun sebuah teori bagi suatu gejala alam, sesungguhnya sedang memindahkan konsep yang berada di balik gejala alam itu ke dalam dunia matematika, yang biasanya berupa objek-objek matematis dan kaitan antara objek-objek itu semisal persamaan-persamaan atau grafik-grafik. Sayangnya,

Ketika seseorang memahat patung seekor kambing pada sebongkah batu, maka sesungguhnya ia sedang berusaha memindahkan konsep tentang binatang yang bernama kambing dari seekor kambing ke sebongkah batu itu.

Seorang fisikawan yang sedang menyusun sebuah teori bagi suatu gejala alam, sesungguhnya sedang memindahkan konsep yang berada di balik gejala alam itu ke dalam dunia matematika, yang biasanya berupa objek-objek matematis dan kaitan antara objek-objek itu semisal persamaan-persamaan atau grafik-grafik.

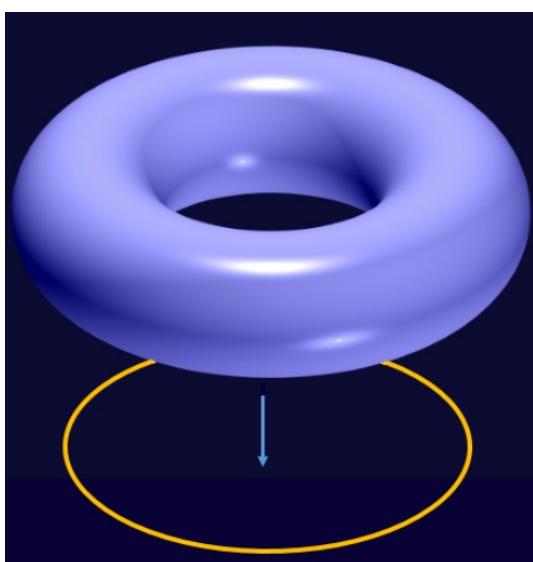
Untuk dapat menampung konsep yang ada di balik gejala alam secara utuh dibutuhkan matematika yang tidak sederhana.

untuk dapat menampung konsep yang ada di balik gejala alam secara utuh dibutuhkan matematika yang tidak sederhana. Bahkan seringkali, matematika yang diperlukan dalam perumusan suatu kaidah bagi suatu gejala alam belum dibayangkan sama sekali oleh para matematikawan. Dalam hal ini fisika memperlihatkan perannya dalam menentukan arah pengembangan ilmu matematika. Contoh masyhur yang patut disebutkan dalam hal ini adalah kalkulus yang dikembangkan secara terpisah oleh Newton dan Leibniz. Newton mengembangkan kalkulus dengan tujuan untuk menyelesaikan masalah mekanika, sedangkan Leibniz mengembangkan kalkulus sebagai kreativitas matematis.

Berikut berapa pandangan tentang kaitan antara fisika dan matematika:
Pertama, pandangan paling lunak, mendudukkan matematika hanya sebagai peranti yang memudahkan fisika dan sebagai bahasa untuk mengungkapkan hukum-hukum fisika. Dalam pandangan ini, persamaan-persamaan atau objek-objek matematis bukan segalanya, namun ada esensi lain dalam suatu hukum fisika yang tidak dapat dirumuskan secara matematis. Semua fisikawan eksperimental dan sebagian fisikawan teoretis mengambil posisi ini.

Kedua, pandangan yang mendudukkan matematika sebagai tujuan. Fisika adalah upaya memilih atau membangun struktur matematis yang cocok untuk menggambarkan pola-pola keteraturan gejala alamiah. Jadi, fisika dipahami sebagai upaya menemukan realitas matematis sebagai model yang mewakili realitas fisis.

Ketiga, pandangan radikal bahwa fisika adalah upaya menemukan matematika alam, yakni matematika yang mengatur alam semesta ini, keseluruhannya.



Gambar 1.6: Objek matematis untingan serat yang tersusun atas torus dan lingkaran berpadanan dengan elektromagnetika pada sebuah lingkaran.

Selain itu, perlu disadari bahwa matematika dan sains (khususnya fisika) masing-masing memiliki “naluri” (fitur) yang dalam beberapa hal saling bertentangan. Pengambilan kesimpulan dalam matematika bersifat deduktif. Terlepas dari teorema Gödel, selalu ada pembuktian bagi kebenaran sebuah proposisi matematis. Sementara pengambilan kesimpulan dalam sains bersifat induktif. Oleh karena itu, seperti diungkapkan di depan, tidak ada cara untuk membuktikan kebenaran proposisi (teori) sains. Proposisi (teori) sains hanya mungkin untuk dibuktikan kesalahannya. Namun demikian, ada hal-hal menarik yang terkait dengan hubungan antara matematika dan fisika. Kalau kita mencermati, akan terlihat adanya perpaduan antara teori-teori yang berkembang di fisika dan konsep-konsep yang berkembang di matematika padahal teori-teori dan konsep-konsep itu dikembangkan terpisah dalam ranahnya masing-masing. Ketika kedua hal yang berpaduan itu bertemu dihasilkanlah sebuah teori yang indah dan efektif. Sebagai contoh, teori relativitas umum yang digagas oleh Albert Einstein memiliki timplan geometri Lorentz sebagai hal khusus geometri Riemann. Ka-

lau dalam ilmu fisika dikenal mekanika Newton, maka di matematika berkembang geometri simplektik. Jika di dalam fisika berkembang teori medan tera yang menjelaskan interaksi (gaya-gaya) fundamental, maka di matematika orang mengembangkan teori untingan serat dengan koneksi. Dan masih banyak lagi perpaduan semacam ini.

1.2 Teori, Eksperimen, dan Keterkaitan Antara Keduanya

Uraian di atas menunjukkan bahwa dalam usaha menemukan model matematika yang tepat bagi hukum-hukum alam, sangat dibutuhkan kerjasama yang erat antara dua kelompok fisikawan, yakni kelompok teoretis dan kelompok eksperimental. Kedua kelompok fisikawan tersebut harus merasa bahwa kesemuanya memiliki peran yang sama-sama penting dalam pencarian model matematis bagi pola-pola keteraturan alam. Jadi, harus terdapat keterpaduan kerja antara kedua kelompok fisikawan tersebut dalam membangun sebuah teori. Para fisikawan teoretis mengusulkan model, sedangkan para fisikawan eksperimental berupaya menolak model itu dengan berusaha membuktikan kesalahan model-model yang diusulkan. Oleh karena itu, agar ilmu fisika dapat berkembang secara pesat, haruslah ada interelasi semacam itu antara keduanya dalam setiap penelitian yang dikerjakan oleh para fisikawan. Jadi, dalam ilmu fisika dikenal dua cara (metodologi) yang saling melengkapi, yakni fisika teoretik dan fisika eksperimental. Fisikawan teoretik berperan dalam penyusunan teori guna menjelaskan hasil-hasil eksperimen serta meramalkan hasil-hasil yang akan diperoleh jika sebuah eksperimen akan dilakukan. Para fisikawan eksperimental berperan dalam pengumpulan data-data terkait dengan gejala-gejala alamiah, dan membuktikan kesalahan sebuah teori. Keberadaan peralatan eksperimen merupakan hal penting dalam fisika eksperimen. Terdapat dua jenis peralatan, yakni peralatan generik dan peralatan fenomenal atau ekstrem. Peralatan generik adalah peralatan-peralatan yang dijual secara bebas, semisal alat-alat ukur standar untuk mengukur tekanan, tegangan, kuat arus, dll. Sementara peralatan fenomenal atau ekstrem adalah peralatan hasil pengembangan sehingga tidak dijual bebas. Peralatan semacam ini harus dirancang dan dibangun sendiri. Kemampuan dalam merancang dan membangun peralatan semacam ini merupakan kunci keberhasilan melakukan terobosan-terobosan. Biasanya peralatan semacam ini, memiliki unjuk kerja yang ekstrem. Terobosan dalam fisika terjadi biasanya setelah keberhasilan perancangan dan pembangunan peralatan fenomenal. Keberhasilan fisikawan Belanda Heike Kammerlingh Onnes merancang dan membangun peralatan yang mampu menurunkan temperatur bahan hingga mencapai titik hampir nol kelvin membawanya kepada penemuan gejala superkonduktivitas tahun 1911, yaitu lenyapnya resistensi bahan ketika bahan itu mencapai suhu kritisnya. Keberhasilan perancangan teleskop yang memiliki kemampuan ekstrem membawa Hubble kepada kesadaran bahwa Bimasakti bukanlah alam semesta, melainkan hanyalah galaksi dari sekian miliar galaksi yang ada di alam semesta. Dengan penemuannya itu, Hubble juga menyadarkan kita bahwa alam semesta ini mengembang. Oleh karena itu kemampuan merancang dan membangun peralatan riset termasuk bagian dari kemampuan yang harus dimiliki oleh para fisikawan.

Para fisikawan teoretis mengusulkan model, sedangkan para fisikawan eksperimental berupaya menolak model itu dengan berusaha membuktikan kesalahan model-model yang diusulkan.

Kemampuan merancang dan membangun peralatan riset termasuk bagian dari kemampuan yang harus dimiliki oleh para fisikawan.

1.3 Dari Galaksi Sampai Muon

Objek material yang dipelajari oleh ilmu fisika sangat beragam dan memiliki rentang yang begitu luas. Dari segi ukuran, objek yang dipelajari ilmu fisika bervariasi dari yang berukuran sangat kecil (partikel-partikel elementer : elektron, proton, positron, neutrino, meson, muon, kaon, dsb.) hingga yang berukuran sangat besar

(bintang, tata surya, galaksi, bahkan seluruh alam semesta ini). Dari segi kelajuan, objek material ilmu fisika memiliki rentang kelajuan yang sangat panjang, dari yang diam (aquaduk, jembatan-jembatan, bangunan-bangunan), yang berkelajuan rendah (orang berjalan, gerobak sapi), yang berkelajuan sedang (kereta api, mobil), yang berkelajuan tinggi (pesawat terbang), sangat tinggi (partikel-pertikel elemen-ter, misalnya) sampai dengan yang memiliki kelajuan mendekati/sama dengan cahaya.



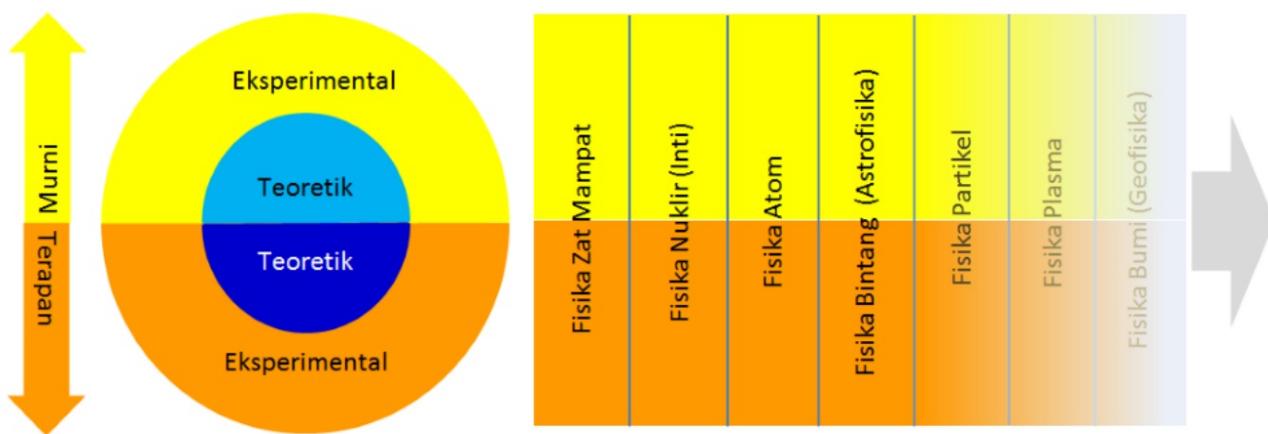
Gambar 1.7: Suatu galaksi spiral yang terlihat dari teleskop Hubble. Galaksi yang berukuran dahsyat ini termasuk objek material ilmu Fisika.

Dari segi fase atau wujud zat, objek material yang dipelajari oleh ilmu fisika dapat berwujud superfluida, cair, padat, gas, maupun yang berwujud plasma. Superfluida adalah suatu wujud bahan ketika bahan berperilaku seperti fluida dengan viskositas (kekentalan) nol dan dalam wujud itu bahan juga memperlihatkan kemampuannya untuk mendorong dirinya sendiri melawan gravitasi dan tegangan permukaan. Meskipun wujud semacam ini pada awalnya ditemukan dalam helium cair, namun sekarang orang juga menemukannya dalam astrofisika, fisika energi tinggi, dan teori gravitasi kuantum. Gejala superfluiditas terlihat pada temperatur yang sangat rendah, yakni di sekitar nol kelvin. Sementara plasma adalah gas yang telah mengalami ionisasi keseluruhan sehingga tersusun atas ion-ion dan elektron-elektron. Wujud zat ini biasanya terjadi pada temperatur yang sangat tinggi. Plasma banyak ditemukan di angkasa luar. Jadi, dalam ilmu fisika dikenal lima wujud zat. Selain itu objek-objek material ilmu fisika dapat pula dibedakan antara yang berupa benda-benda yang hidup yakni yang mengalami metabolisme dan reproduksi maupun yang mati.

1.4 Taksonomi Fisika

Terdapat tiga cara dalam penyusunan taksonomi atau pengelompokan cabang-cabang ilmu fisika, yakni yang berdasarkan tujuannya, berdasarkan peran dalam penyusunan teori, dan yang berdasarkan objek material kajiannya. Tiga cara pengelompokan itu dijelaskan sebagai berikut. **Berdasarkan tujuan.** Berdasarkan tujuannya, dikenal fisika (murni) dan fisika terapan. Dalam hal ini fisika (murni) bertujuan membangun teori tentang keteraturan alam. Sementara dalam fisika terapan, para fisikawan berupaya mempelajari cara memanfaatkan berbagai pengetahuan (teori, model, dan kaitan-kaitan fisis) untuk tujuan-tujuan khusus dan umum.

Berdasarkan peran. Berdasarkan peran yang dimainkan, dikenal dua metodologi, yakni fisika teoretik dan fisika eksperimental atau observasional. Dalam fisika teoretik para fisikawan berupaya menyusun model-model (matematis) bagi keteraturan alamiah, memprakirakan hasil-hasil eksperimen dan pengamatan, serta berupaya menjelaskan hasil-hasil eksperimen dan pengamatan. Dalam fisika eksperimental dan observasional para fisikawan melakukan eksperimen dan pengamatan terkait dengan pengujian teori atau model-model matematis yang diusulkan, mengumpulkan data-data, dan melakukan eksplorasi gejala-gejala alamiah.



Gambar 1.8: Matriks taksonomi fisika

Berdasarkan objek material. Ini adalah pengelompokan fisika berdasarkan objek material yang menjadi bahan kajian. Mengingat beranekaragamnya objek material ilmu fisika, maka dapat diduga terdapat berbagai cabang fisika berdasarkan cara pengelompokan ini. Sekedar untuk disebutkan, beberapa cabang itu antara lain fisika partikel, fisika Bumi (geofisika), fisika atom, fisika nuklir, fisika plasma, fisika komputasi, fisika material, ekonofisika, biofisika, dll.

Taksonomi fisika oleh karena itu dapat di sajikan sebagai matriks yang tersaji dalam Gambar 1.8. Hal penting yang harus disadari adalah bahwa dalam setiap cabang fisika yang digolongkan berdasarkan objek material terdapat kajian yang bersifat teoretis maupun eksperimental/observasional dan yang bertujuan untuk membangun teori fisika tentang objek itu maupun untuk menerapkan pengetahuan yang sudah diperoleh. Sebagai contoh, dalam fisika material terdapat fisikawan yang bekerja secara teoretis ataupun eksperimental dan dengan tujuan membangun teori tentang material yang dipelajari maupun yang berupaya menerapkan pengetahuan yang telah diperoleh tentang material yang dikaji. Oleh karena itu, dalam fisika material terdapat fisika material teoretis, fisika material eksperimental, fisika murni material, fisika terapan material.

Geofisika atau **fisika Bumi** adalah upaya memahami sifat-sifat dan struktur Bumi serta lingkungannya di angkasa secara kuantitatif. Aspek-aspek yang dipelajari dalam geofisika tentu saja adalah aspek-aspek fisis semisal struktur dalam Bumi, gravitasi Bumi, kemagnetan Bumi, dinamika lempeng-lempeng tektonik, kegunungan, dinamika kelautan, atmosfer, dll. Geofisika memiliki terapan dalam masalah kemasyarakatan, semisal masalah mineral, mitigasi bencana alam, masalah lingkungan, air tanah, dan lain sebagainya.

Dalam kosmologi para fisikawan berupaya memahami asal-muasal, struktur, perkembangan, dan kemungkinan kehancuran alam semesta. Kosmologi fisis cenderung memahami asal-muasal, struktur, perkembangan, dan kemungkinan kehancuran alam semesta dari sudut pandang hukum-hukum fisika yang telah dikembangkan oleh para fisikawan dan matematikawan. Kosmologi modern didominasi oleh pembicaraan tentang teori Big Bang, yakni teori tentang dentuman besar sebagai awal terciptanya alam semesta, dan inflasi alam semesta, yaitu pengembangan ruang bagi alam semesta ini. Kosmologi ditabahiskan sebagai salah satu cabang sains sekitar tahun 1960, ketika data-data ilmiah tentang alam semesta telah dapat dikumpulkan. Sebelumnya, kosmologi bukanlah sains karena metode pengembangannya

Dalam setiap cabang fisika yang digolongkan berdasarkan objek material terdapat kajian yang bersifat teoretis maupun eksperimental/observasional dan yang bertujuan untuk membangun teori fisika tentang objek itu maupun untuk menerapkan pengetahuan yang sudah diperoleh.

lebih berdasarkan pemikiran-pemikiran spekulatif. Bahkan kosmologi pernah juga menjadi salah satu cabang teologi.

Astrofisika meskipun sering disebut sebagai cabang astronomi, dapat pula dipandang sebagai cabang fisika yang mengambil benda-benda angkasa sebagai objek material tinjauannya. Jadi, dalam astrofisika, para fisikawan mempelajari sifat-sifat fisis benda-benda angkasa, semisal planet-planet, bintang-bintang, lubang hitam, bintang neutron, pulsar, galaksi, medium antar bintang, dll. Kajian dilakukan baik secara teoretis maupun observasional. Astrofisika boleh dikatakan sebagai sains observasional karena data-data yang digunakan sebagai acuan untuk kajian hanya diperoleh melalui pengamatan tanpa rekayasa. Jadi, hampir tidak ada eksperimen dalam astrofisika, kecuali kalau simulasi komputer dianggap sebagai eksperimen. Pengamatan dalam astrofisika mengandalkan berbagai gelombang, dari yang bersifat optik (cahaya tampak), gelombang radio, sinar inframerah, ultraungu, maupun gelombang gravitasi. Aspek yang ditinjau pada berbagai benda angkasa itu menyangkut mekanika, elektromagnetika, mekanika statistik, termodynamika, relativitas, magnetohidrodinamika, dan mekanika kuantum. Astrofisika juga terkait dengan cabang lain fisika semisal fisika nuklir, fisika atom, fisika plasma maupun fisika partikel. Oleh karena itu, muncul misalnya astrofisika nuklir, astrofisika partikel, dan lain sebagainya.

Fisika zat mampat adalah cabang fisika yang berupaya memahami sifat-sifat fisik zat dalam wujud mampat. Zat padat termasuk dalam kelompok zat semacam ini. Para fisikawan zat mampat berupaya memahami perilaku wujud zat semacam ini dengan menggunakan hukum-hukum fisika semisal mekanika kuantum, elektromagnetika, dan mekanika statistik. Wujud mampat yang paling familiar adalah padat dan cair. Akan tetapi wujud zat mampat yang paling menarik barangkali adalah wujud superkonduktor dan superfluida. Dua wujud ini dicapai oleh suatu bahan ketika bahan itu berada pada temperatur di bawah temperatur kritisnya. Penelitian dalam fisika zat mampat meliputi pengukuran sifat-sifat penting berbagai bahan melalui berbagai eksperimen dengan dipandu oleh model-model matematis yang dikembangkan oleh para fisikawan teoretis.

1.5 Fisika dan Teknologi

Fisika merupakan basis teknologi. Semua teknologi yang telah dicapai manusia hingga saat ini merupakan terapan konkret dari fisika.

Sekarang sempatkanlah pergi ke dalam perpustakaan barang sejenak dan bukalah catatan sejarah penemuan berbagai peralatan yang saat ini sedang kita nikmati ke nyamanannya. Dari catatan sejarah, dapat kita ketahui adanya kurun waktu ketika berbagai penemuan teknologi yang bermanfaat bagi umat manusia harus didahului dengan serangkaian pekerjaan tanpa kepastian dan sangat melelahkan serta menghabiskan biaya yang sebeginu besar. Yakni saat-saat ketika penemuan-penemuan diperoleh dengan cara coba-coba. Pada masa-masa itu, seringkali orang harus melakukan percobaan seribu kali sebelum berhasil mendapatkan sesuatu yang diimpikan atau bahkan gagal tiada hasil sama sekali. Zaman ‘kegelapan’ ini pun berakhir, ditutup tatkala manusia mulai menyadari pentingnya pengetahuan tentang perilaku alam, yakni pengetahuan akan pola-pola keteraturan yang dianut oleh gejala-gejala alam. Dengan ilmu pengetahuan atau sains ini, usaha manusia untuk mendapatkan suatu teknologi tidak lagi harus menempuh jalur-jalur panjang yang penuh dengan spekulasi, tetapi sebaliknya sesuatunya dituntun dan diarahkan oleh sains (khususnya ilmu fisika). Dengan cara ini, teknologi berkembang dengan pesat dan tampak kepastiannya. Secara umum teknologi adalah rekayasa atau manipulasi perila-

ku alam sehingga bermanfaat bagi umat manusia. Perhatikan monitor televisi Anda. Pernahkah Anda tergelitik untuk mengetahui cara monitor itu bekerja menghasilkan gambar yang dinamis? Ketahuilah bahwa monitor televisi dapat menghasilkan gambar karena rekayasa perilaku elektron-elektron di dalam medan listrik dan medan magnet. Lalu, tukakah Anda bagaimana sinar laser dihasilkan? Sinar laser dihasilkan berkat pengetahuan kita tentang perilaku atom-atom terhadap foton-foton (cahaya) yang ditembakkan pada atom-atom itu. Boleh dikatakan hampir mustahil bahwa manusia mampu mendapatkan sinar laser tanpa berbekal pengetahuan tentang perilaku atom-atom terhadap radiasi elektromagnetik. Oleh karena itu pengetahuan kita tentang perilaku alam atau pola keteraturan yang dianut oleh alam sangatlah penting perannya dalam pengembangan teknologi sebab berdasarkan pengetahuan semacam itulah kita dapat merekayasa atau memanipulasi perilaku alam. Padahal, sebagaimana telah diuraikan di atas sains (khususnya fisika) berusaha menemukan pola perilaku alam. Jadi, sesungguhnya ilmu fisika memainkan peran sentral dalam pengembangan teknologi. Peran semacam ini sangat jelas manakala kita menengok perkembangan teknologi dari waktu ke waktu. Dalam pengembangan teknologi terdapat adagium yang menyatakan bahwa 'Sains adalah peretas jalan bagi teknologi'. Sebagai contoh, begitu sains (khususnya fisika) mulai merambah alam mikroskopis (yakni benda-benda yang mempunyai ukuran sangat kecil), perkembangan teknologi pun mulai menapaki wilayah tersebut. Sebagai akibat, pada gilirannya muncullah teknologi-teknologi yang berbasiskan pengetahuan manusia akan alam mikroskopis ini. Sekedar untuk disebutkan, teknologi-teknologi itu di antaranya adalah teknologi zat padat (solid state technology), teknologi nuklir, teknologi laser dll. Inilah teknologi yang secara dominan mewarnai perikehidupan manusia dewasa ini.

Pengetahuan kita tentang perilaku alam atau pola keteraturan yang dianut oleh alam sangatlah penting perannya dalam pengembangan teknologi sebab berdasarkan pengetahuan semacam itulah kita dapat merekayasa atau memanipulasi perilaku alam.

1.6 Fisika Merupakan Produk Peradaban Kolektif

Tidak diketahui secara pasti sejak kapan ilmu fisika dikembangkan. Mungkin sejak awal keberadaan manusia di muka Bumi. Sejak keberadaan mereka di muka Bumi manusia telah mengenal pengetahuan tentang alam di sekitar mereka. Pada zaman prasejarah manusia telah mengenal sifat-sifat api, air, tanah dan lain sebagainya. Mereka memanfaatkan pengetahuan itu untuk dapat bertahan menghadapi tantangan alam yang masih ganas. Sejenak kemudian mereka mengenal perunggu. Lalu dilanjutkan logam-logam yang lain. Yang jelas tercatat dalam sejarah adalah bahwa peradaban-peradaban kuno seperti Mahenjo-Daro (di sekitar India-Pakistan), Asyiria (Asia Barat), Mesir Kuno (sepanjang sungai Nil di Afrika), Cina Kuno, Inca (di pegunungan Andes, Amerika Tengah), Maya (di Amerika Tengah) dan Aztec (di Meksiko) telah memiliki dan mengembangkan pengetahuan tentang bahan yang cukup maju. Pada jaman Yunani Kuno pengembangan sains mendapatkan penguatan tersendiri dalam nuansa filsafati yang kental. Setelah jaman Yunani Kuno ini seolah pengembangan sains mengalami jeda yang cukup panjang. Baru pada jaman keemasan Islam para ilmuwan muslim, seperti Al-Biruni, Al-Idrisi, Al-Hazen, Al-Farabi dlsb., menggali kembali warisan peradaban itu dan mengembangkannya sampai tahap yang menakjubkan. Setelah itu peradaban yang cukup maju ini masuk ke Eropa melalui Andalusia (Spanyol) dan Semenanjung Balkan. Maka kemudian tercatat tokoh-tokoh klasik seperti Roger Bacon, Nicolaus Copernicus, Galileo Galilei, Isaac Newton dan lain sebagainya hingga tokoh-tokoh awal abad ke dua puluh seperti Max Planck, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Albert Einstein, Enrico

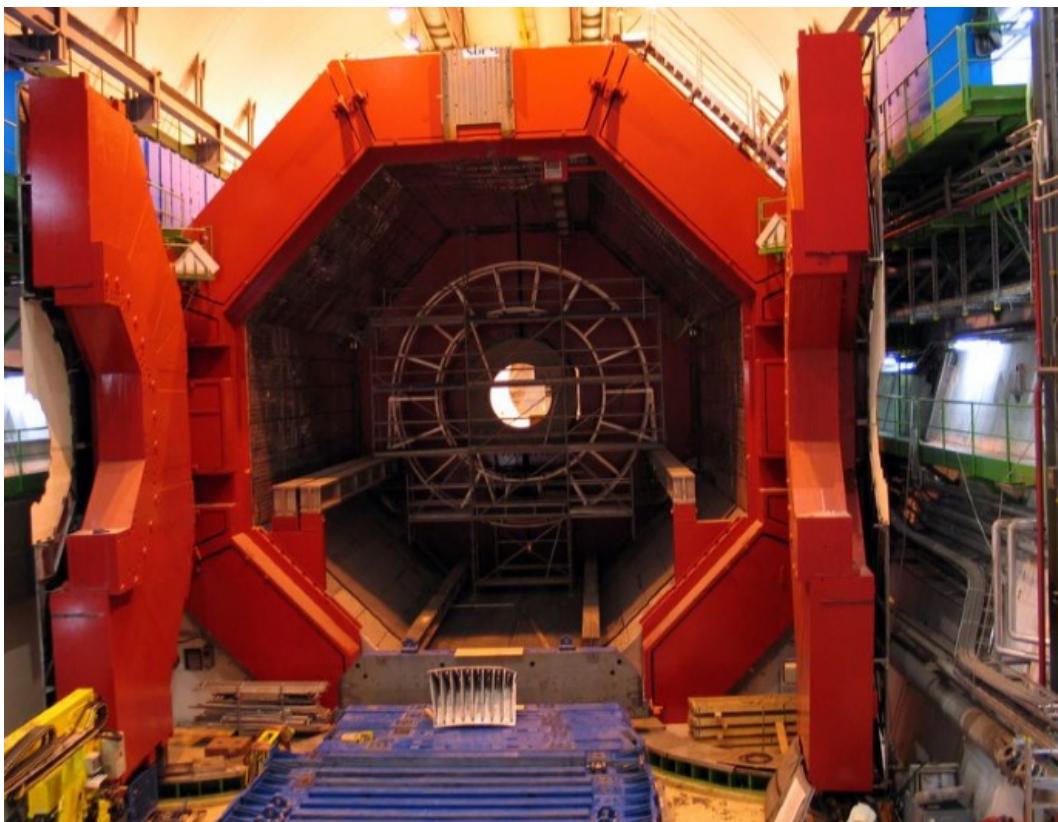
Fermi. Tak ketinggalan pula, dari Asia kita mengenal fisikawan-fisikawan besar yang ikut merubah sejarah seperti Abdus Salam, Satyendranath Bose, Chandrasekhara-Venkata Raman, Hideki Yukawa, Leo Isaki dan lain sebagainya. Tak dapat dipungkiri lagi bahwa fisika merupakan ilmu lintas bangsa. Puncak-puncak pengembangannya dipergilirkan dari satu bangsa ke bangsa yang lain, dari satu generasi ke generasi berikutnya.

1.7 Sikap dan Perilaku Ilmiah

Agar dapat memahami alam dengan baik dan selanjutnya pemahaman itu bermanfaat, baik bagi diri sendiri maupun lingkungan, Anda perlu membekali diri dengan sikap dan perilaku ilmiah. Apa itu sikap dan perilaku ilmiah? Sikap dan perilaku ilmiah adalah sikap dan perilaku yang pasti/harus dimiliki oleh seorang ilmuwan. Andaikan ada seseorang yang mengaku sebagai ilmuwan. Namun, ternyata pada diri orang itu tidak Anda temukan sikap dan perilaku ilmiah, maka dapat Anda pastikan bahwa sesungguhnya dia bukan seorang ilmuwan. Sikap dan perilaku apa saja yang termasuk sikap dan perilaku ilmiah? Berikut hendak dijelaskan satu persatu :

Rasa ingin tahu: Ilmuwan harus memiliki keinginan untuk mengetahui dan memahami berbagai gejala yang ada di alam semesta ini. Mereka berusaha menemukan pola-pola keteraturan yang dimiliki oleh alam semesta ini. Mereka berusaha pula mengembangkan teori yang mampu menerangkan cara alam semesta ini diciptakan dan disempurnakan. Seseorang tanpa keinginan untuk mengetahui dan memahami tentu tidak mungkin dapat berperan sebagai seorang ilmuwan. Rasa ingin tahu ini boleh dikatakan sebagai bahan bakar yang mampu memberi asupan tenaga bagi kegiatan ilmiah sehingga terus berlangsung.

Menyangsikan dan bertanya: Benarkah alam semesta ini ada awalnya? Lalu, bila manakah itu? Bagaimana alam semesta berkembang? Benarkah anggapan orang bahwa kehidupan berasal dari benda-benda mati? Mengapa kebanyakan daun berwarna hijau? Mengapa laut menjadi pasang saat bulan pernama? Kemudian, benarkah bahan-bahan konduktor yang dingin dapat mengantarkan listrik lebih baik dari pada yang panas? Mengapa demikian? Lebih lanjut, bagaimana perilaku seekor gorila di tengah belantara? Apa pengaruh vitamin C terhadap kanker? Mengapa sepotong besi membara bila dipanaskan? Benarkah semua rumah siput memiliki ulir putar kanan? Itulah berbagai pertanyaan ilmiah. Menyangsikan dan bertanya termasuk pekerjaan utama seorang ilmuwan. Dari kesangsian terhadap keyakinan akan suatu kebenaran muncul pertanyaan. Pertanyaan-pertanyaan itu kemudian mendorong ilmuwan untuk mencari jawabannya. Tetapi tidak setiap pertanyaan mampu menggerakkan para ilmuwan untuk mencari jawabannya. Seorang Yunani kuno yang bernama Thales (kira-kira 624-546 SM) dinobatkan sebagai bapak filsafat karena ia melontarkan pertanyaan "Dari bahan apa sajakah alam semesta ini disusun?". Dijawab sendiri olehnya : 'Air'. Suatu jawaban yang sangat sederhana. Jauh lebih sederhana dibandingkan dengan pertanyaannya sendiri. Thales dikatakan sebagai filsuf pertama bukan kerena jawaban 'air' itu, melainkan kerena ia mampu melontarkan pertanyaan yang sangat berbobot. Mengapa pertanyaan Thales itu dikatakan sangat berbobot? Ya ... sebab sekian banyak orang tertarik dan tergerak untuk menjawab pertanyaan itu. Dari Demokritus dan Aristoteles, kemudian Jabir dan Dalton, sampai Thomson, Rutherford dan Bohr. Dan bahkan sampai detik ini, pertanya-



Gambar 1.9: Salah satu sudut “Large Hadronic Collider (LHC)” di CERN Jenewa, Swiss. Fasilitas penelitian fisika partikel ini dibangun dengan biaya kurang lebih 40 triliun rupiah. Inilah salah satu tanggapan atas sebuah pertanyaan yang diajukan oleh Thales sekitar dua ribu tahun yang lalu. (www.lhc.web.cern.ch)

an itu masih terus menerus bergaung, memanggil jawaban memuaskan yang tiada kunjung datang. Berbagai fasilitas laboratorium dari kamar gelembung sampai akcelerator yang harganya triliunan rupiah dibangun guna mencari jawaban atas pertanyaan itu. Bandingkan pertanyaan Thales itu dengan pertanyaan seseorang yang sedang mencari rumah sahabatnya, “Pak, dimanakah dusun Patukan RT08/RW22, Kelurahan Ambarketawang Kecamatan Gamping, Sleman?” Barangkali tidak ada ilmuwan yang tertarik untuk menjawab pertanyaan semacam ini kecuali yang merasa iba.

Selanjutnya, setiap pertanyaan yang diutarakan segera ditindaklanjuti dengan eksperimen serta pengamatan. Eksperimen dan pengamatan menelorkan jawaban. Ada perbedaan yang menyolok antara pertanyaan yang diajukan oleh seorang ilmuwan dengan pertanyaan yang diajukan oleh seorang awam. Pertama, para ilmuwan bukan saja menanyakan segala sesuatu yang tidak/belum mereka ketahui, tetapi mereka juga menanyakan segala hal yang kelihatannya telah diketahui dan dipahami oleh setiap orang. Sebelum seseorang dapat mempertanyakan segala sesuatu, ia dianggap masih berpikir dengan hati, bukan dengan akal. Seorang ilmuwan selalu menyangsikan setiap hal yang telah diyakini kebenarannya oleh khalayak bahkan oleh dirinya sendiri. Dengan kata lain, seorang ilmuwan selalu menantang ‘status quo’ dalam rangka meningkatkan pemahaman akan alam semesta ini. Kedua, pertanyaan-pertanyaan yang diajukan oleh para ilmuwan berbeda dari yang ditanayakan oleh awam karena para ilmuwan menanyakan segala hal yang masih berada dalam jangkauan akal manusia. Bagi ilmuwan, tiada wilayah terlarang atau tabu untuk dijamah oleh keingintahuannya.

Mampu menyusun dugaan ilmiah: Ilmuwan selalu berangkat dari dugaan ilmiah atau hipotesa ilmiah dan membuktikan dugaan itu. Lalu, apakah yang dimaksud dengan dugaan ilmiah? Tidak setiap dugaan merupakan dugaan ilmiah. Dugaan

Ilmuwan bukan saja menanyakan segala sesuatu yang tidak/belum mereka ketahui, tetapi mereka juga menanyakan segala hal yang kelihatannya telah diketahui dan dipahami oleh setiap orang.

bawa Einstein adalah fisikawan terhebat abad 20 bukanlah sebuah dugaan ilmiah karena tidak ada cara guna menunjukkan bahwa pernyataan itu salah atau benar. Dugaan bahwa atom adalah partikel terkecil yang menyusun zat-zat merupakan hipotesa ilmiah walaupun telah terbukti salah. Pernyataan “Kemunculan rasi bintang Waluku menandakan nasib baik” bukanlah dugaan ilmiah.

Menuntut pembuktian: Pada jaman dulu para ilmuwan mempunyai dugaan bahwa cahaya tersusun atas zarah-zarah kecil yang bergerak dengan cepat. Kalau zarah-zarah itu mengenai suatu benda maka sebagiannya dipantulkan, sebagiannya diserap dan kalau benda itu transparan maka sebagian besar zarah-zarah itu diteruskan. Apabila zarah-zarah yang dipantulkan itu diterima oleh mata kita, maka benda tersebut membentuk bayangan di mata kita. Inilah proses melihat. Tetapi, keyakinan ini bergeser kepada keyakinan lain, yakni bahwa cahaya adalah gelombang elektromagnetik. Tidak lama kemudian keyakinan bahwa cahaya adalah gelombang pun goyah juga dan akhirnya ditinggalkan. Terakhir, para ilmuwan meyakini bahwa cahaya merupakan zarah-zarah yang mempunyai aspek gelombang. Aspek gelombang membawa informasi statistik tentang zarah-zarah itu. Mengapa begitu banyak perubahan? Bolehkah jika kemudian dikatakan bahwa para ilmuwan itu ‘esuk dele sore tempe’, atau lebih kasarnya lagi, ‘mencla-mencle’? Sebegini mudahkah para ilmuwan berubah pikiran? Tidak! Para ilmuwan bukanlah orang-orang yang mudah berubah pikiran. Mereka membutuhkan bukti-bukti yang cukup untuk berubah pikiran. Pergeseran keyakinan yang terjadi pada diri seorang ilmuwan terjadi apabila telah diperoleh cukup bukti-bukti bagi suatu keyakinan baru. Tetapi keyakinan terkini seorang ilmuwan inipun bersifat sementara karena sebagai ilmuwan ia akan terus menyangsikan kebenaran yang ditawarkan oleh keyakinan terkini itu.

Menarik kesimpulan berdasarkan fakta-fakta ilmiah: Tidak setiap informasi dibutuhkan dalam sains (khususnya fisika). Hanya fakta-fakta ilmiah saja yang dibutuhkan. Apa yang dimaksud dengan fakta ilmiah? Fakta ilmiah adalah suatu informasi atau data-data tentang suatu gejala alam yang telah mengalami serangkaian pemeriksaan akan kebenarannya oleh para ilmuwan melalui pengamatan dan pengukuran. Fakta ilmiah diperoleh melalui pengamatan dan pengukuran. Para ilmuwan berusaha memperoleh data-data yang seakurat dan selengkap mungkin. Sebab data-data tersebut hendak mereka gunakan sebagai pijakan untuk menyusun teori-teori dan hipotesa-hipotesa serta untuk menarik kesimpulan-kesimpulan. Seorang ilmuwan bukan hanya mengumpulkan data-data, melainkan juga mencari makna dari data-data yang ada di tangannya, yakni menafsirkannya. Dengan mengetahui makna dari data-data tersebut seorang ilmuwan dapat menjawab berbagai pertanyaan yang menggodanya. Bagi seorang ilmuwan, penarikan kesimpulan tanpa berdasarkan fakta-fakta ilmiah adalah tabu.

Taat logika: Darwin mengamati adanya perubahan pada binatang-binatang dari satu pulau ke pulau lain di gugusan Galapagos. Sementara itu Wallace mengamati hal yang sama di kepulauan nusantara. Berdasarkan pengamatan itu, mereka menarik kesimpulan-kesimpulan secara logis. Seorang ilmuwan harus berpikir secara logis dan menjauahkan diri dari takhayul dan ‘gugon tuhon’. Misalnya, tentang keberadaan makhluk halus yang menunggu suatu jembatan atau pohon tua.

Para ilmuwan bukanlah orang-orang yang mudah berubah pikiran. Mereka membutuhkan bukti-bukti yang cukup untuk berubah pikiran.

1.8 Motivasi Agung Dalam Sains

Kemanfaatan sebuah benda bagi suatu makhluk bergantung pada seberapa jauh makhluk itu mengenali perilaku dan watak benda itu. Sekumpulan ayam akan berebut butiran-butiran jagung yang kita sebar di tanah. Jelas, hal itu karena ayam-ayam itu mengenali watak butiran-butiran jagung itu. Akan tetapi, sekumpulan ayam itu akan bergeming (diam saja, cuek) manakala yang kita sebar adalah segenggam koin seribuan rupiah. Jangankan koin-koin seribuan, berlembar-lembar ratusan ribu rupiah sekalipun yang Anda tebarkan tidaklah membuat ayam-ayam itu tertarik untuk berebut. Ayam tidak mengenal watak uang, maka mereka tidak melihat manfaat yang ada pada uang-uang itu. Mereka tidak tahu bahwa uang memiliki "kekuatan". Demikian juga sesungguhnya manusia, mereka tidak memandang adanya manfaat pada suatu hal karena ia tidak mengenal dan tidak memahami sesuatu hal itu dengan baik. Jika saja mereka mengenal sesuatu hal dengan baik, maka ia akan mampu mengambil manfaat dari sesuatu hal itu. Bagi orang Jawa beberapa jenis tanaman di kebun-kebun atau di semak-semak dalam hutan tidak memiliki arti apapun, bahkan dianggap mengganggu. Seringkali ada gerakan untuk membersihkan tanaman-tanaman itu. Daun-daunnya ditumpuk dan dibakar begitu saja. Tetapi, bagi orang Sunda, dedaunan itu sangat berharga karena memiliki manfaat, semisal untuk lalapan yang sangat lezat. Jangan heran, karena orang Sunda lebih mengenali watak tanaman-tanaman itu daripada orang Jawa. Daun ketela rambat di mata masyarakat Yogyakarta tidak lebih dari makanan ternak (kambing). Sementara daun ketela rambat itu ternyata memiliki nilai yang lebih tinggi di mata masyarakat Surakarta dan sekitarnya. Mereka memasaknya menjadi makanan yang banyak disukai, yang dikenal sebagai brambangasem. Belakangan, anak-anak sebuah SMA swasta di Yogyakarta dalam penelitian mereka menemukan kandungan kimiawi daun ketela rambat itu yang sangat bermanfaat bagi kesehatan. Tingkat pengenalan seseorang terhadap sesuatu hal akan menentukan nilai sesuatu hal itu di matanya. Oleh karena itu, dengan berprasangka baik atau berpikir positif bahwa segala hal bisa memberi manfaat dan kemudian berupaya mengenali dan memahami semua hal merupakan sikap dan langkah yang menguntungkan. Oleh karena itu tidaklah berlebihan jika dikatakan bahwa barangsiapa yang mengenali alam ini dengan lebih baik, maka ia akan dapat hidup dengan lebih baik. Seterusnya, jangan pernah heran jika orang-orang yang telah tercerahkan berupaya mempelajari dan memahami perilaku dan watak alam ini dari berbagai sisinya. Mereka berupaya keras untuk memahami alam ini dari yang paling kecil, yakni yang berukuran 10^{-35} meter sampai dengan yang paling besar, yakni alam semesta ini keseluruhannya dan dari berbagai aspeknya. Mereka tetap saja mengupayakan pencarian itu, bahkan meskipun untuk itu diperlukan biaya yang luar biasa besar. Bayangkan, beberapa negara rela menggelontorkan uang lebih dari 35 triliun rupiah kepada para fisikawan untuk membangun peranti raksasa yang dikenal sebagai LHC (Large Hadronic Collider) padahal alat itu hanya digunakan untuk eksperimen tumbukan partikel-partikel elementer. Sungguh itu bukan pekerjaan sia-sia. Untuk apa mereka melakukan itu? Jawab mereka, untuk mencari atau mengkonfirmasi keberadaan salah satu batu penyusun bangunan teori tentang partikel elementer. Untuk apa sebuah teori dikembangkan? Jawaban bagi pertanyaan ini telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Akan tetapi, berbagai teknologi yang kita nikmati saat ini dapat memperkuat bukti kebermanfaatan teori-teori yang telah dibangun. Berbagai teknologi maju dewasa ini diperoleh karena adanya bimbingan oleh teori-teori yang telah dikembangkan. Teknologi berkembang dengan sangat pesat karena bimbingan teori-teori sains yang ada. RASA INGIN TAHU adalah mo-

Rasa ingin tahu adalah motivasi paling agung dan alami dalam sains.

tivasi paling agung dan alami dalam sains. Itulah yang mendorong ilmuwan sejati dalam melakukan perenungan dan penelitian. Jadi, bukanlah tuntutan uang, bukan ketenaran, bukan kemanfaatan, bukan *trend*, bahkan bukan pula publikasi ilmiah yang mendorong para ilmuwan perintis jaman dalam membuka jalan bagi kemajuan umat manusia dewasa ini. Kita simak sekali lagi ungkapan Newton yang terkenal itu:

"... I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me."

Karena dorongan RASA INGIN TAHU, ilmu pengetahuan berkembang semakin luas dan semakin mendalam, menjangkau hal-hal luar biasa yang sangat mengagumkan yang tidak dapat kita perhitungkan dari semula, sehingga kita mampu bergerak menuju ke tengah lautan ilmu (meskipun kita tidak akan mungkin sampai di sana) serta mampu menyelam menuju kedalaman samudra ilmu yang disebut-sebut oleh Newton di atas (meskipun kita juga tidak akan mungkin sampai di sana). Sebaliknya jika pengembangan sains hanya didorong (lebih tepatnya dikebiri) oleh kebutuhan-kebutuhan hidup sesaat, maka seolah sudah ada batas bagi pengembangan kita. Inilah yang akhirnya membatasi atau menghalangi kita untuk bergerak semakin ke tengah dan semakin ke dalam samudra ilmu. Akhirnya, kita hanya berada di pinggir, mungkin hanya sebatas di teluk sempit dan dangkal saja. Di sana kita tidak akan mendapatkan hal-hal luar biasa, yang mengagumkan, dan yang tak terduga. Lebih parah lagi, kalau kemudian kita merasa sudah berada di samudra ilmu. Padahal samudra ilmu itu luas dan dalam, bukan sesempit dan sedangkan teluk itu. Mari kita bebaskan sains dari belenggu-belenggu itu, yang menekang kreativitas kita yang menghalangi kita untuk sekedar menghilangkan rasa haus kita akan pengetahuan dan pemahaman.

1.9 Pertanyaan-pertanyaan

1. Dugaan ilmiah atau bukan ?
 - a) Albert Einstein adalah fisikawan terpopuler sepanjang zaman.
 - b) Zinedin Zidane adalah pemain sepak bola terbaik di dunia.
2. Susunlah sendiri beberapa dugaan. Lalu diskusikan dengan rekan-rekan Anda apakah dugaan-dugaan Anda itu merupakan dugaan ilmiah.
3. Bagaimana pendapat Anda tentang pertanyaan yang diajukan salah seorang rekan Anda kepada guru perihal jawaban sebuah soal yang ada dalam buku ini? Dapatkah pertanyaan itu menggerakkan para ilmuwan mencari jawabannya?
4. Bayangkanlah Anda hidup pada masa ketika manusia belum mengetahui bahwa Bumi ini bulat dan masih beranggapan bahwa Bumi ini merupakan bidang datar. Lalu andaikan pada masa itu ada orang yang melakukan perjalanan ke arah barat terus menerus tanpa berhenti. Maka orang itu tentu akan muncul dari arah timur. Hal ini bagi kita bukanlah sesuatu yang menakjubkan. Akan tetapi, bagi orang-orang pada masa itu kejadian seperti itu tentu akan mengherankan dan akan menimbulkan banyak penafsiran. Dapatkah Anda memperkirakan seperti apakah bayangan manusia tentang bentuk Bumi ini setelah mengetahui kejadian itu?

2

Besaran dan Pengukuran

Candi Siwa dan Wisnu di komplek candi Prambanan seolah tidak tampak. Puncak candi Brahma ini juga terlihat lebih tinggi daripada puncak Merapi. Inilah yang disebut sebagai Paralaks. Hal ini juga terjadi pada rasi bintang yang selama ini terlihat seolah pada satu bidang. Dalam pengukuran dampak adanya paralaks ini harus diperhitungkan (gambar diambil dari <http://panoramio.com>).

- 2.1 Besaran dan Satuan**
- 2.2 Besaran Pokok dan Turunan**
- 2.3 Sistem Internasional**
- 2.4 Redefinisi Sistem Internasional**
- 2.5 Besaran Ekstensif dan Intensif**
- 2.6 Dimensi**
- 2.7 Konversi Satuan**
- 2.8 Angka Penting**
- 2.9 Penaksiran**
- 2.10 Tentang Pengukuran**
- 2.11 Perambatan Ralat**
- 2.12 Mengukur Medan Gravitasi Bumi**
- 2.13 Pengukuran Klasik versus Pengukuran Kuantum**
- 2.14 Pengukuran adalah Pacuan**



Sebuah neraca puntir yang berukuran raksasa untuk ukuran masyarakat tahun 1798 yang dilengkapi dengan dua buah bola timbal yang masing-masing bermassa 158 kg dan dua buah bola kecil masing-masing bermassa 0,7 kg harus dipersiapkan oleh Henry Cavendish untuk mengukur tetapan gravitasi umum yang muncul dalam hukum gravitasi Newton. Keberhasilan Henry Cavendish dalam pengukuran tetapan gravitasi menyempurnakan pekerjaan Newton dalam penyusunan model hukum alam yang mengatur interaksi gravitasi antara benda-benda bermassa. Menurut Newton, benda-benda titik saling tarik menarik dengan *gaya gravitasi* secara spontan sedemikian rupa sehingga besar gaya gravitasi antara keduanya berbanding lurus dengan massa kedua benda dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antara keduanya. Newton juga berpandangan bahwa ruang dan waktu bersifat mutlak adanya. Pandangan Newton semacam ini berhasil menjelaskan dan meramalkan berbagai gejala alam semisal waktu kedatangan komet Halley dan menjelaskan hukum Kepler, sehingga diterima secara luas baik di kalangan masyarakat ilmiah maupun masyarakat awam. Keberhasilan Henry Cavendish juga memiliki makna tersendiri bagi umat manusia. Akhirnya, umat manusia mampu mengetahui massa Bumi, bola raksasa yang selama ini menjadi tempat tinggal mereka.

Pengukuran membawa konsekuensi besar, yaitu bertambah luasnya cara pandang manusia terhadap alam semesta, terhadap dirinya dan terhadap Tuhananya.

Setelah pandangan Newton berhasil bertahan kurang lebih selama 228 tahun, Albert Einstein menyodorkan pandangan lain mengenai gravitasi yang berbenturan dengan pandangan Newton. Bagi Einstein, ruang dan waktu tidak mutlak. Ruang dan waktu tidak terpisah tetapi terpadu sebagai satu kesatuan dalam kesetaraan. Keberadaan ruang dan waktu bergantung pada keberadaan materi dan energi. Materi dan energi membentuk ruang waktu, yakni menentukan geometrinya. Gravitasi bukan gaya, melainkan sesuatu yang muncul sebagai perwujudan atau akibat kelengkungan ruang dan waktu. Sementara dinamika sebaran materi dan energi dituntun oleh kelengkungan ruang dan waktu.



Gambar 2.1: Bola kuarsa untuk giroskop efek geodesik. Gambar diambil dari *booklet NASA, Gravity Probe B*

Pandangan Einstein membawa kita pada pencerahan tentang kenyataan bahwa cahaya dibelokkan oleh gravitasi. Selain itu, pandangan Einstein juga mampu menjelaskan terjadinya presesi perihelium orbit planet Merkurius. Pandangan Einstein ini juga meramalkan adanya *efek geodesik*, yakni puntiran ruang dan waktu di sekitar Bumi karena rotasinya. Untuk membuktikan ramalan tersebut, seorang fisikawan bernama Leonard Schiff pada tahun 1960 mengusulkan suatu eksperimen untuk mengukur efek geodesik. NASA memulai upaya pembuktian ramalan ini pada tahun 1962 dengan membangun fasilitas riset yang diletakkan di angkasa luar. Jantung fasilitas riset ini adalah empat buah giroskop yang masing-masing berupa bola yang terbuat dari kuarsa yang diletakkan di belakang teleskop yang mengarah ke bintang IM Pegasi. Kesulitan pembuatan bola-bola kuarsa itu terletak pada tuntutan bahwa

bola-bola kuarsa itu harus merupakan bola sempurna. Kenyataannya, bola-bola kuarsa itu merupakan bola dengan presisi paling baik yang pernah dibuat oleh umat manusia. Eksperimen ini menguras anggaran lebih dari 750 juta dollar dan memakan waktu lebih dari 4 dekade.

Murray Gell-Mann adalah Mendeleev dalam fisika partikel. Ia mengajukan "sistem periodik unsur" untuk partikel-partikel elementer yang mashur disebut sebagai *Eightfold Way* pada tahun 1961. Keberadaan partikel-partikel yang dimodelkan oleh Gell-Mann tersebut terbukti melalui serangkaian eksperimen dalam akselerator, suatu fasilitas riset berbiaya tinggi di CERN, Jenewa, Swiss. Konsekuensi dari pengukuran-pengukuran tersebut adalah berkembangnya pengetahuan manusia perihal alam semesta dalam ukuran mikrokopis. Di CERN itulah, untuk pertama kalinya para fisikawan menggagas internet dan berhasil mewujudkannya guna memudahkan mereka dalam bertukar informasi (data) antar akselerator yang ada di dunia. Setelahnya, fisika partikel juga memiliki proyek besar terkait dengan keberadaan partikel hipotetik yang dikenal sebagai partikel Higgs. Untuk itu, fasilitas LHC dibangun dengan biaya lebih dari 40 triliun rupiah.

Mengapa Henry Cavendish *harus* merancang peralatan yang sedemikian besar (untuk ukuran waktu itu) *hanya* untuk mengukur nilai tetapan gravitasi umum? Mengapa para fisikawan *harus* merancang akselerator partikel yang sedemikian canggih dan mahal *hanya* untuk memperoleh tumpukan kertas berisikan bilangan-bilangan? Mengapa internet harus digagas dan diwujudkan *hanya* untuk mendukung pengukuran yang dilakukan oleh para fisikawan itu? Mengapa dana lebih dari 40 triliun dikeluarkan *hanya* untuk membangun mesin raksasa untuk membenturkan partikel-partikel? Mengapa NASA menghabiskan lebih dari empat dekade *hanya* untuk mengukur efek geodesik oleh rotasi Bumi? Mengapa para fisikawan material harus menguras pikiran untuk merekayasa material guna membuat bola paling

Pengukuran adalah hal yang tidak bisa dipisahkan dari fisikawan, sebagaimana penyair dengan puisinya. Jika penyair membaca alam semesta dengan kata-kata, fisikawan membaca alam semesta dengan matematika dan angka-angka. Pengukuran adalah *passion* fisikawan. Mendapatkan hasil ukur yang seteliti mungkin adalah harapan. Pengukuran dan permodelan adalah cara yang diyakini fisikawan untuk mengumpulkan serpihan-serpihan rahasia tentang alam semesta.

sempurna demi gagasan itu? Mengapa pula NASA harus mengeluarkan dana lebih dari 750 juta dollar *hanya* untuk memenuhi ide gila Leonard Schiff tersebut? Mengapa ribuan orang harus dilibatkan, puluhan bidang ilmu dipertemukan, dan tak terhitung sumber daya harus dikaryakan *hanya* untuk sesuatu yang bernama pengukuran? Tak perlu heran! Karena pengukuran merupakan hal yang sangat penting dalam ilmu fisika. Bahkan, barangkali, yang paling penting. Pengukuran menjadi penting karena membawa akibat atau konsekuensi yang penting pula.

2.1 Besaran dan Satuan

Pola-pola (rumus-rumus) matematika yang diburu oleh para fisikawan sebagai model bagi keteraturan alam menghubungkan satu besaran fisika dengan besaran fisika yang lain. Pola-pola matematika yang dimaksud biasanya berupa persamaan-persamaan yang menghubungkan besaran-besaran fisika. **Besaran** adalah sesuatu yang diukur. Oleh karena itu besaran-besaran fisika memainkan peran yang sangat penting dalam ilmu fisika. Jadi, besaran erat kaitannya dengan pengukuran. Semenara pengukuran besaran-besaran fisika merupakan bagian terpenting dalam ilmu fisika. **Pengukuran** adalah membandingkan suatu besaran dengan satuan.

Sebagai contoh sederhana, misalkan Anda ingin menentukan panjang meja belajar Anda. Anda mengukur dengan tangan Anda, diperoleh 7 jengkal misalnya. Dalam hal ini, Anda telah membandingkan panjang meja Anda dengan satuan *jengkal*. Jengkal yang dimaksud adalah ukuran sepanjang rentangan penuh antara ujung ibu jari dan ujung kelingking Anda. Contoh lain misalnya Anda ingin menentukan banyaknya air yang Anda gunakan untuk mandi. Anda menampung air tersebut dalam ember-ember kemudian Anda menghitung jumlah ember-nya. Anda menampung 5 ember misalnya. Lagi-lagi, Anda telah membandingkan banyaknya air yang akan Anda gunakan untuk mandi dengan satuan *ember*.

Besaran sangat terkait dengan kehidupan sehari-hari. Besaran panjang misalnya, terkait erat dengan seberapa jauh jarak dari rumah kita ke pasar. Besaran waktu misalnya, terkait dengan seberapa lama kita sebaiknya tidur. Besaran massa biasa muncul dalam keseharian kita di pasar. Berapa banyak beras yang akan kita beli? Besaran volume misalnya, biasa muncul ketika kita membeli bensin atau minyak tanah.

Nilai suatu besaran fisika biasanya diungkapkan sebagai hasil kali antara suatu nilai numerik dengan satuan. Seperti contoh sebelumnya, Anda telah mengalikan bilangan yang menyatakan panjang meja Anda, yaitu 7 dengan satuan jengkal dan bilangan 5 yang menyatakan banyaknya air yang akan Anda gunakan untuk mandi, dengan satuan ember. **Satuan** adalah suatu besaran fisika khusus yang telah didefinisikan dan disepakati untuk dibandingkan dengan besaran lain dari jenis yang sama dalam berbagai pengukuran.

Satuan panjang tidak harus meter. Satuan massa tidak harus kilogram. Satuan luas juga tidak harus hektar. Satuan ditetapkan berdasarkan kesepakatan. Tentu saja selalu ada konversi dari satu satuan ke satuan yang lain untuk besaran yang sama sehingga tidak menghambat komunikasi.

Generasi sebelum kita sering menggunakan satuan yang mungkin kita masih mengenalnya. Satuan panjang misalnya, ada *jengkal*, *hasta*, *depa*, dan lain-lain. Satu



Gambar 2.2: Salah satu satuan tradisional nusantara adalah *jengkal*

Satuan yang baik tidak akan menimbulkan penafsiran berbeda oleh orang yang berbeda. Satuan *jengkal*, *hasta*, *depa* misalnya, akan menimbulkan penafsiran yang berbeda terkait dengan ukuran tubuh manusia, sehingga jika diukur oleh orang yang berbeda, maka didapatkan hasil ukur yang berbeda pula.

hasta adalah panjang dari siku sampai ujung jari tengah jika tangan direntangkan lurus. Sementara satu depa adalah panjang antara kedua ujung jari jika kedua tangan dibentangkan lurus ke samping. Ada pula ukuran panjang *dim*, yang diserap dari bahasa Belanda 'dium' yang artinya *jempol*. Jadi, satu dim ini sama dengan panjang ibu jari, yang kemudian dibakukan ke satuan Inggris dan dikenal dengan *inch* (inci). Satu inci tersebut eksak nilainya, yaitu sama dengan 2,54 cm.

Selain itu ada juga istilah tradisional *tumbak* untuk satuan luas. Satu tumbak sama dengan 16 m^2 . Di pulau Sumatera juga didapati satuan lain untuk luas, yaitu *rante* (rantai). Satu rante luasnya sama dengan $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, atau 400 m^2 . Di beberapa daerah di Pulau Jawa dikenal istilah *patok* untuk satuan luas. Satu patok tersebut sama dengan 25 tumbak atau 400 m^2 . Di daerah Riau ada istilah *elak* untuk satuan luas. Satu elak sama dengan $17 \text{ m} \times 17 \text{ m}$ atau 289 m^2 kemudian didefinisikan lagi, 10 elak sama dengan 1 *jalur*.

Untuk kebutuhan yang lebih luas, perlu penetapan satuan yang berlaku secara internasional melalui kesepakatan sehingga memudahkan dalam komunikasi yang terkait dengan besaran-besaran fisis. Kesepakatan tentang satuan sebuah besaran disandarkan pada fenomena-fenomena alamiah. Agar kesepakatan itu tidak memiliki makna berbeda maka fenomena-fenomena alamiah yang digunakan sebagai sandaran harus memberikan nilai tunggal.

2.2 Besaran Pokok dan Turunan

Ketentuan penulisan satuan:

- Apabila satuan ditulis lengkap, maka selalu dimulai dengan huruf kecil.

Contoh: newton, liter, meter, joule, dll.

- Singkatan satuan yang ber-
asal dari nama seseorang
dimulai dengan huruf besar.

Contoh: Nuntuknewton,
Juntuk Joule, dll.

Menurut cara menentukan satuannya, terdapat dua jenis besaran, yakni besaran pokok dan besaran turunan. Besaran pokok adalah besaran yang satuannya telah ditetapkan terlebih dahulu. Misalnya besaran panjang, waktu dan massa. Ini merupakan besaran-besaran yang penting dalam mekanika. Besaran turunan adalah besaran yang diturunkan dari beberapa besaran pokok. Satuan besaran turunan bergantung pada satuan besaran pokok. Contoh besaran turunan adalah luas, volume, massa jenis, dan laju. Volume sebuah kubus yang memiliki rusuk 0,1 meter (misalnya) adalah $(0,1 \text{ meter}) \times (0,1 \text{ meter}) \times (0,1 \text{ meter}) = 0,001 \text{ meter}^3$. Massa jenis dipahami sebagai massa persatuan volume. Apabila balok di atas terbuat dari suatu bahan tertentu sehingga massanya 0,5 kg, maka massa jenis bahan balok itu adalah $(0,5 \text{ kg}) / (0,001 \text{ m}^3) = 500 \text{ kg/m}^3$. Laju sebuah kendaraan disepakati sebagai jarak yang ditempuh oleh kendaraan itu selama satu satuan waktu. Apabila spedometer kendaraan yang Anda naiki menunjukkan angka 60 km/jam terus menerus selama 15 menit, maka selama itu anda menempuh jarak 15 kilometer. Angka 60 km/jam yang menunjukkan laju kendaraan Anda didapatkan dari 15 km dibagi dengan 15 menit = 1/4 jam.

Dalam konferensi ke-IV pada tahun 1971 mengenai masalah ukuran dan timbangan, telah ditetapkan tujuh besaran pokok dan dua besaran tambahan.

Ketujuh besaran pokok tersebut, sesuai dengan booklet yang dikeluarkan oleh *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) dapat dilihat pada Tabel 9.1. Dua besaran tambahan yang dimaksud adalah sudut bidang dengan satuan radian (rad) dan sudut ruang dengan satuan steradian (sr).

Tabel 2.1: Besaran Pokok berdasarkan Sistem Internasional

No	Besaran	Satuan	Singkatan	Dimensi
1	Panjang	meter	m	L
2	Massa	kilogram	kg	M
3	Waktu	detik	s	T
4	Kuat Arus Listrik	ampere	A	I
5	Suhu	kelvin	K	Θ
6	Banyaknya Zat	mole	mol	N
7	Intensitas Cahaya	candela	cd	J

Sementara itu, contoh beberapa besaran turunan dengan satuan sistem internasionalnya dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Besaran Turunan

No	Besaran	Satuan	Singkatan	Dimensi
1	Gaya	newton	$N(kg \cdot m \cdot s^{-2})$	MLT^{-2}
2	Usaha	joule	$J(kg \cdot m^2 \cdot s^{-2})$	ML^2T^{-2}
3	Tekanan	pascal	$P(kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2})$	$ML^{-1}T^{-2}$
4	Massa Jenis	kg/m^3	kg/m^3	ML^{-3}
5	Luas	m^2	m^2	L^2

2.3 Sistem Internasional

Salah satu pekerjaan seorang ilmuwan dalam proses ilmiah adalah mengomunikasikan atau melaporkan hasil-hasil pengamatannya kepada masyarakat khususnya masyarakat ilmiah. Apabila seseorang memberitahukan hasil-hasil pengukurannya kepada masyarakat ilmiah maka ia harus memenuhi aturan atau format-format tertentu yang telah disepakati. Sesuatu yang telah disepakati ini disebut standar. Anda akan bingung apabila tiba-tiba datang kepada Anda seorang asing (mungkin makhluk yang berasal dari luar tata surya kita) dan mengatakan bahwa ia datang dari suatu tempat yang jaraknya 100 “milita” dari tempat anda berada. Apa itu “milita”? Yang jelas “milita” adalah satuan panjang. Tetapi berapa satu milita? Berbeda halnya kalau orang asing itu mengatakan bahwa ia datang dari suatu tempat yang jauhnya 50 kilometer dari tempat Anda berada. Mengapa? Betul, karena kita telah memahami nilai satu kilometer itu.

Besaran pokok maupun besaran turunan dapat diukur dengan menggunakan satuan yang telah baku maupun satuan yang belum baku. Penggunaan berbagai satuan tersebut tentu akan menimbulkan berbagai masalah. Untuk mengatasi hal ini, di Perancis pada tahun 1790 telah didefinisikan dan disepakati suatu standar sistem satuan yang berlaku secara menyeluruh di Eropa saat itu dengan mendefinisikan standar panjang dalam meter. Sistem ini dikenal dengan sistem metrik dan merupakan sistem alternatif selain sistem Inggris yang juga berlaku pada saat itu terutama di Inggris. Meskipun sistem metrik ini sudah digunakan untuk jangka waktu yang lama secara internasional, namun penggunaan istilah Sistem Internasional (SI) baru dimulai sejak tahun 1970. Sistem internasional ini diturunkan dari sistem metrik sehingga sistem ini lebih populer dengan nama sistem metrik. Pembuatan sistem yang seragam secara internasional bertujuan agar memperoleh keseragaman dalam

Pendefinisan sistem satuan yang diterapkan secara internasional sangat penting. Hal tersebut memudahkan dalam berkomunikasi, lebih khususnya komunikasi yang terkait penelitian-penelitian ilmiah dan pengembangan teknologi.

pengukuran sehingga dapat dipakai di seluruh dunia. Jadi, bukan berarti Sistem Internasional ini merupakan sistem yang terbaik.

Sistem internasional diturunkan atas dasar bilangan kelipatan 10 atau sistem desimal agar sesuai dengan dasar bilangan yang digunakan di seluruh dunia. Sistem internasional ini juga mudah diterapkan karena sesuai dengan jumlah jari tangan manusia sehingga dalam pengajaran dapat digunakan alat-alat peraga yang sederhana terutama untuk menerangkan tangga/jenjang konversi. Untuk menyatakan hasil pengukuran yang bernilai sangat besar maupun sangat kecil dalam sistem internasional, dapat dilakukan dengan menambahkan awalan pada sistem besaran pokoknya. Beberapa awalan yang digunakan dalam sistem internasional dapat dilihat pada Tabel 2.3

Tabel 2.3: Faktor Pengali dan Awalannya

Faktor	Awalan	Simbol	Faktor	Awalan	Simbol
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yotta-	y
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	eksa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	piko-	p
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^3	kilo-	k	10^{-3}	mili-	m
10^2	hekto-	h	10^{-2}	senti-	c
10^1	deka-	da	10^{-1}	desi-	d

Sekarang satu persatu standar untuk masing-masing besaran pokok tersebut hendak dibicarakan.

Panjang

Sebenarnya orang telah melakukan pengukuran panjang sejak 3 milenium sebelum masehi. Satuan panjang tertua yang tertulis dalam sejarah adalah *cubit*. Satuan *cubit* tersebut merupakan satuan mesir kuno, yang panjangnya setara dengan jarak dari siku hingga jari tengah apabila tangan direntangkan. Cubit tersebut setara dengan 18 inci. Sistem satuan pengukuran terus berkembang hingga saat ini, sampai berlakunya Sistem Internasional.



Gambar 2.3: Artefak batang satu cubit (britishmuseum.org).

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, sistem metrik sudah dicetuskan sejak tahun 1790 oleh Lembaga Nasional Prancis. Sistem metrik ini kemudian tersebar luas dan digunakan oleh banyak negara di Eropa dan Amerika Latin, hingga pada tahun 1875, dua puluh negara dari mereka berkumpul pada Konvensi Meter. Hasil dari konvensi ini adalah penandatanganan Pakta Meter. Selain itu, dibentuk juga tiga lembaga yang menjaga pelaksanaannya. Lembaga tersebut adalah: (1) *Conférence Générale des Poids et Mesures* (CGPM). Konferensi yang digelar setiap empat hingga enam tahun se kali ini mengumpulkan delegasi-delegasi dari negara-negara yang telah menyepakati konvensi. Tugas utama konferensi ini adalah me-

nyebarluaskan dan melakukan pengembangan Sistem Internasional (SI). (2) *Comité International des Poids et Mesures* (CIPM). CIPM merupakan kepengurusan yang terdiri delapan belas pakar dari berbagai negara. Kepengurusan CIPM diajukan melalui CGPM. CIPM melakukan pertemuan setiap tahun dan tugasnya adalah memberikan pertimbangan pada CGPM. CIPM ini memiliki sub bagian, yang menangani bidang yang berbeda. Salah satu bidang dari CIPM adalah CCU (*Consultative Committee for Units*), yang bertugas memberikan pertimbangan pada CIPM perihal satuan dan pengukuran. (3) *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) yang bertugas menjaga prototipe kilogram dan meter. BIPM memiliki prosedur standar untuk menjaga artefak-artefak tersebut. BIPM juga melayani negara-negara yang ingin melakukan penggandaan prototipe standar untuk digunakan di negara-negara tersebut.

Dalam sistem metrik, besaran panjang mempunyai satuan meter, yang pada awalnya didefinisikan sebagai sepersepuluh juta (10^{-7}) jarak di permukaan Bumi antara kutub Utara ke Khatulistiwa dengan melewati kota Paris di Prancis. Satuan ini ditetapkan secara hukum pada tahun 1799. Kemudian, satu meter didefinisikan sebagai jarak antara dua buah goresan pada meter standar yang terbuat dari bahan campuran platina dan iridium pada suhu 0 °C (Gambar 2.4).

Standar meter ini tidak digunakan lagi sejak tahun 1960 dengan berbagai alasan, salah satunya adalah ketelitian untuk digunakan dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat itu. Di samping itu, para ahli juga menyadari bahwa penggunaan meter standar yang terbuat dari paduan platina-iridium ini kurang praktis dan mengalami pemuatan, walaupun sangat kecil sekali, sehingga mereka menginginkan suatu meter standar yang dapat digunakan setiap saat.

Dalam konferensi yang membahas masalah berat dan ukuran tahun 1960, disepakati suatu pendefinisian baru mengenai suatu besaran panjang. Pada pertemuan tersebut ditetapkan bahwa satu meter adalah panjang yang nilainya sama dengan 1.650.763,73 kali panjang gelombang sinar merah-jingga dalam ruang hampa yang dipancarkan oleh atom-atom gas kripton-86. Mengapa digunakan gas kripton-86? Dibandingkan dengan zat lainnya, kripton-86 mampu menghasilkan garis-garis interferensi yang tajam dan jelas. Tetapi pada tahun 1983, definisi satu meter diubah lagi menjadi jarak yang ditempuh cahaya dalam ruang hampa dalam selang waktu 1/299.792.458 detik. Definisi terakhir ini terasa lebih mengesankan.

Dalam keseharian, pengukuran panjang, lebar, tinggi dan kedalaman tidak dilakukan dengan cara membandingkan langsung benda yang akan diukur dengan standar meter, melainkan dengan menggunakan alat pembanding, yaitu alat ukur yang sudah ditera sedemikian rupa sehingga satu meter yang ditunjukkan oleh alat ukur itu betul-betul satu meter sesuai standar.

Pada alat ukur akan dijumpai skala ukuran yang menunjukkan satuan panjang dan merupakan bagian dari meter, misalnya milimeter atau centimeter. Alat-alat tersebut misalnya mistar, meteran, jangka sorong, mikrometer sekrup, dan lain-lain. Berdasarkan skala ini panjang suatu benda yang sedang diukur dapat ditentukan dan terbaca.



Gambar 2.4: Standar Meter yang saat ini tidak digunakan lagi (commons.wikimedia.org).

Alat ukur yang kita gunakan sehari-hari merupakan duplikat dari alat ukur standar. Alat yang kita gunakan telah ditera (disesuaikan) dengan standar. Kemampuan menerima alat-alat eksperimen juga merupakan kemampuan dasar yang dimiliki Fisikawan.

Tabel 2.4: Panjang/jarak beberapa obyek

Benda	Jarak (m)
Jarak quarsar paling jauh yang diketahui dari Bumi	$1,4 \times 10^{26}$
Jarak galaksi paling dekat dari Bumi	2×10^{22}
Jarak rata-rata Matahari dari Bumi	$1,5 \times 10^{11}$
Jejari Bumi	$6,37 \times 10^6$
Jarak Jakarta-Surabaya	$8,49 \times 10^5$
Panjang kertas A4	$2,97 \times 10^{-1}$
Diameter atom Hidrogen	10^{-10}

Massa

Apakah massa itu? Awalnya orang mengatakan massa adalah ukuran *banyaknya* suatu benda. Kemudian di era mekanika Newton, massa disebut sebagai ukuran kecen-deungan benda dapat dipercepat oleh suatu gaya. Sementara itu ada konsep *massa inersial* dan *massa gravitasi* (lihat bab Gravitasi). Kemudian dalam perkembangan terakhirnya, para fisikawan masih mencari asal usul terjadinya massa. Dugaan terakhir adalah bahwa massa terjadi karena setiap benda "diberi massa" oleh partikel Higgs. Dugaan tersebut terbukti pada 4 Juli 2012 dengan ditemukannya partikel dengan massa berada di antara 125 dan 127 GeV/c² di LHC. Temuan ini memastikan teori tentang keberadaan medan Higgs. Keberadaan medan Higgs merupakan kabar gembira bagi pengikut Model Standar. Namun hingga sampai saat ini, asal usul massa masih dipertanyakan karena teori Model Standar banyak menuai kritik.

Model Standar, yang sejauh ini diyakini oleh banyak fisikawan partikel, menjelaskan tentang penyusun materi dan cara materi berinteraksi satu sama lain. Model standar bersandar pada dua gagasan sederhana: semua materi tersusun atas partikel-partikel elementer, dan partikel tersebut saling berinteraksi satu sama lain dengan menukar partikel lain yang diyakini bertanggung jawab atas keberadaan gaya-gaya fundamental. Partikel-partikel penyusun materi disebut sebagai *fermion* dan partikel-partikel pembawa interaksi disebut sebagai *boson*. Standar model sangat sederhana, namun terdapat persamaan yang sangat rumit di belakangnya.

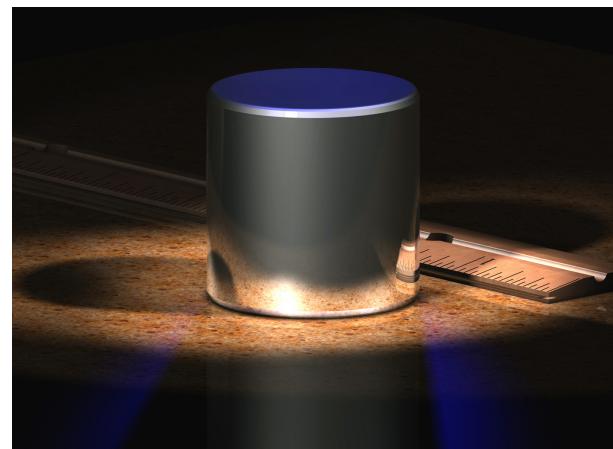
Model standar masih memiliki kekurangan, yaitu tidak dapat menjelaskan fenomena yang terjadi pada energi tinggi. Pada tingkat energi rendah, semuanya dapat dijelaskan. Ini senada dengan kenyataan bahwa mekanika Newton tidak dapat menjelaskan benda-benda yang bergerak dengan kelajuan mendekati kelajuan cahaya. Masalah besar di Model Standar adalah tidak menyertakan interaksi gravitasi dalam tinjauannya. Model standar tidak dapat menjelaskan alasan gravitasi jauh lebih lemah daripada gaya elektromagnetik dan gaya-gaya inti. Model standar memiliki lubang besar. Kemudian diperkenalkanlah teori supersimetri, yang menyatakan bahwa setiap partikel memiliki padanan. Supersimetri inilah yang menutup lubang model standar. Untuk penjelasan lebih rinci mengenai fisika partikel, akan dibahas pada jilid 3 buku ini. Untuk sementara, secara pragmatis, massa dapat dipandang sebagai ukuran resistensi benda terhadap gaya.

Pengukuran massa telah dilakukan sejak 3 milenium sebelum masehi oleh orang-orang Mesir kuno. Satuan massa pada saat itu adalah *deben*, yang setara dengan 91 gram. *Deben* artinya "balok batu". Hal ini menyatakan bahwa pengukuran massa pada zaman itu adalah membandingkan massa benda yang diukur terhadap balok-balok batu dengan menggunakan neraca.

Teknologi pengukuran massa terus dikembangkan hingga saat ini. Standar massa internasional yang disepakati hingga saat ini adalah **kilogram** (kg). Satu kilogram adalah massa silinder campuran (*alloy*) platina-iridium yang mempunyai diameter dan tinggi yang sama, yakni sebesar 39 mm yang disimpan di Lembaga Berat dan Pengukuran Internasional di kota Sèvres, Perancis. Standar massa atau artefak tersebut dibuat dari komposisi Platina 90% dan 10% Iridium. Standar massa kilogram ini telah ditetapkan sejak tahun 1901 dan belum berubah lagi sampai buku ini ditulis. Massa artefak standar tersebut selalu tepat $m(\mathcal{K}) = 1 \text{ kg}$.

Akan tetapi, karena akumulasi substansi-substansi kontaminan yang tidak dapat dihindarkan, artefak tersebut mengalami penambahan massa sekitar $1 \mu\text{g}$ per tahun. Oleh karena itu, Lembaga Berat dan Pengukuran Internasional (BIPM) menyatakan bahwa artefak 1 kilogram tersebut dapat dijadikan referensi massa, setelah melalui serangkaian proses pembersihan dan pencucian dengan metode yang telah ditentukan.

Notasi $m(\mathcal{K})$ digunakan untuk menyatakan massa artefak standar \mathcal{K} .



Waktu

Hingga saat ini, pertanyaan "Apakah sebenarnya *waktu itu?*" masih menjadi pencarian bagi para fisikawan. Waktu menjadi kajian yang sangat filosofis dan mungkin esoteris. Untuk saat ini, waktu dapat dipahami sebagai parameter dinamika. Namun sesungguhnya, maknanya jauh lebih dalam daripada itu. Dalam relativitas khusus, *Minkowskian*, waktu dimaknai sebagai dimensi keempat. Waktu merupakan salah satu sumbu dalam ruang datar (kelengkungannya nol) berdimensi empat. Sementara dalam relativitas umum, orang tidak lagi mengatakan "dimensi ruang dan waktu", tetapi orang mengatakan "ruang waktu" karena ruang dan waktu terjalin, tidak terpisah, sebagai struktur alam semesta. Untuk lebih jelasnya dapat dibaca pada Jilid 3 buku ini.

Gambar 2.5: Artefak standar 1 kilogram (commons.wikimedia.org)

Standar waktu yang masih digunakan sampai saat ini adalah **sekon** (detik). Seperti halnya standar panjang, standar waktu secara internasional ini juga mengalami perubahan. Pada awalnya satu detik didefinisikan sebagai $(1/60)(1/60)(1/24)$ hari Matahari rata-rata. Jadi, satu detik adalah $1/86400$ hari Matahari rata-rata. Kemudian, para ahli menyadari bahwa hari Matahari rata-rata berubah dari tahun ke tahun sehingga tidak cocok lagi dijadikan sebuah standar. Pada tahun 1967, dengan menggunakan jam atom, yaitu alat yang bekerja berdasarkan getaran suatu atom tertentu, telah didefinisikan standar waktu yang baru.

Dengan menggunakan jam atom, satu sekon adalah waktu $9.192.631,770$ kali periode gelombang elektromagnetik (radiasi) yang dipancarkan karena transisi antara dua aras hiperhalus pada keadaan dasar atom Caesium-133. Dalam kehidupan sehari-hari, selain detik digunakan pula satuan yang lain seperti menit, jam, dan hari. Satuan ini merupakan kelipatan satuan yang lainnya, contohnya $1 \text{ menit} = 60 \text{ sekon}$, $1 \text{ jam} = 60 \text{ menit}$, dan $1 \text{ hari} = 24 \text{ jam}$. Untuk satuan hari dan tahun perlu kehati-hatian mengingat satuan-satuan tersebut terkait dengan gerak Bumi dalam sistem tata surya kita. Satuan hari dan tahun bergantung dari planet tempat pengamatan dilakukan.

Kuat Arus Listrik

Arus listrik adalah aliran muatan listrik. Lebih tepatnya, arus adalah laju aliran muatan listrik yang melalui suatu luasan tertentu tiap satuan waktu.

Berdasarkan kesepakatan internasional, sebagai standar kuat arus listrik ditetapkan ampere (A). Satu ampere didefinisikan sebagai besar kuat arus yang apabila dialirkan pada masing-masing kawat dari dua kawat sejajar berdiameter amat sangat kecil yang panjangnya tak berhingga dan terpisah oleh jarak 1 meter dalam ruang hampa, akan menimbulkan gaya sebesar 2×10^{-7} newton di antara kedua kawat itu untuk setiap meter panjang kawat.

Mengikuti definisi kuat arus, tetapan magnetik μ_0 , yang juga dikenal dengan permeabilitas vakum, adalah tepat $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ henry per meter.

Suhu

Suhu atau temperatur adalah ukuran numerik yang menyatakan dingin atau panasnya suatu benda. Suhu sebenarnya tidak lain adalah energi kinetik. Untuk pembahasan lebih lanjut akan dijelaskan pada jilid 2 buku ini bab Termodinamika.

Berdasarkan kesepakatan internasional *Conférence Générale des Poids et Mesures* (CGPM) pada tahun 1968, sebagai standar suhu ditetapkan kelvin (K). Sebelum satuan kelvin, satuan yang digunakan adalah derajat kelvin ($^{\circ}\text{K}$), yang ditetapkan di konferensi internasional CGPM pada tahun 1954. Sebelum derajat kelvin ini, sebagai standar suhu orang menggunakan derajat celcius yang menetapkan titik beku air 0°C dan titik didih air 100°C pada tekanan 1 atmosfer. Satuan derajat Celcius ini ditetapkan pada CGPM tahun 1948. Satuan kelvin juga menggunakan acuan yang sama yaitu titik beku air dan titik didih air. Pada skala kelvin, titik beku air pada tekanan atmosfer ditetapkan 273,16 K, dan titik didih air 373,16 K. Kelvin, satuan untuk temperatur termodinamis, adalah pecahan $1/273,16$ suhu termodinamis titik tripel air.

Intensitas Cahaya

Intensitas cahaya adalah daya yang dipancarkan gelombang elektromagnetik per satu satuan sudut ruang. Standar internasional satuan intensitas cahaya mengalami penyempurnaan dari waktu ke waktu. Pada awalnya, sebagai standar intensitas cahaya orang menggunakan lilin, kemudian diganti dengan kandela, berdasarkan pada radiasi benda hitam sempurna saat mencapai titik lebur platina. Kemudian, secara internasional kembali diberikan definisi baru mengenai standar intensitas cahaya. Satu candela didefinisikan sebagai intensitas cahaya monokromatik atau radiasi elektromagnetik yang dipancarkan oleh suatu sumber pada frekuensi tertentu (540 terrahertz atau $5,4 \cdot 10^{14}$ hertz) dengan intensitas radiasi sebesar $1,46 \cdot 10^{-3}$ W/sr dalam arah pancaran tersebut.

Banyaknya Zat

Untuk standar banyaknya zat, secara internasional ditetapkan sebagai mol (mole). Satu mol suatu zat terdiri atas $6,022 \times 10^{23}$ buah partikel yang nilainya sama dengan bilangan Avogadro.

Uraian tentang standar untuk masing-masing besaran di atas dirangkum pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5: Standar Besaran-Besaran Pokok

Besaran	Satuan	Simbol	Definisi
Panjang	meter	m	Satu meter adalah panjang lintasan yang ditempuh oleh cahaya dalam ruang hampa selama interval waktu $1/299.792.458$ detik
Massa	kilogram	kg	Satu kilogram sama dengan massa sebuah silinder pejal yang terbuat dari campuran platina-iridium yang disimpan di the International Bureau of Weights and Measures di Sèvres, Perancis.
Waktu	detik	dt	Satu detik adalah $9.192.631.770$ kali periode radiasi (gelombang elektromagnetik) yang dipancarkan karena transisi antara dua aras hiperhalus pada keadaan dasar atom Caesium-133.
Arus listrik	ampere	A	Satu ampere didefinisikan sebagai besar kuat arus yang bila dialirkan pada masing-masing kawat dari dua kawat sejajar berdiameter amat sangat kecil yang panjangnya tak terhingga dan terpisah oleh jarak 1 meter dalam ruang hampa, akan menimbulkan gaya sebesar 2×10^{-7} newton di antara kedua kawat itu untuk setiap meter panjang kawat.
Suhu Termodinamis	kelvin	K	Pecahan $1/273,16$ suhu termodinamis titik tripel air
Banyaknya zat	mole	mol	Satu mol suatu zat terdiri atas $6,022 \times 10^{23}$ buah partikel yang nilainya sama dengan bilangan Avogadro.
Intensitas cahaya	candela	cd	Satu candela didefinisikan sebagai intensitas cahaya monokromatik atau radiasi elektromagnetik yang dipancarkan oleh suatu sumber pada frekuensi tertentu (540 terrahertz atau $5,4 \times 10^{14}$ hertz) dengan intensitas radiasi sebesar $1,46 \times 10^{-3}$ W/sr dalam arah pancaran tersebut.

Uji Ketajaman 2.1

1. Andaikan massa artefak 1 kilogram pada saat t adalah $m(\mathcal{K})$. Karena terjadi kontaminasi, pada saat t' massanya menjadi $m(\mathcal{K}) + \delta$. Pada saat t' tersebut, artefak standar langsung digunakan untuk menara duplikat artefak dan diperoleh bahwa massa duplikat artefak tersebut 0,15% lebih besar daripada massa artefak standar. Berapakah massa duplikat artefak tersebut?
2. Seseorang menimbang massa badannya di permukaan Bumi. Kemudian orang tersebut menimbang kembali massa badannya saat berada di dalam pesawat yang sedang meluncur di ketinggian 10 kilometer di atas permukaan laut. Apakah sama hasil penimbangan massa seseorang ketika berada di permukaan Bumi dan berada di ketinggian 10 kilometer? Mengapa?
3. Diberikan sebuah material logam dengan rapat massa ρ . Seorang metalurgist diminta untuk membuat silinder berongga dengan jejeri dalam r_1 dan jejeri luar r_2 . Tentukan banyaknya (massa) material yang harus digunakan oleh metalurgist tersebut apabila dalam proses pembuatannya terjadi penyusutan material sebesar 3%.
4. Untuk membuat peranti-peranti laboratorium berupa wadah senyawa, digunakan material kaca borosilikat. Diketahui massa material borosilikat tersebut adalah $2,23 \text{ g/cm}^3$. Tentukan massa

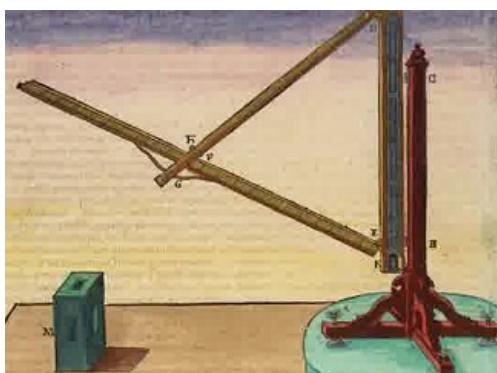
kaca borosilikat yang diperlukan apabila ingin dibuat gelas kimia (berbentuk silinder) dengan jari dalam 70 mm, tinggi gelas (diukur pada bagian dalam) 91 mm dan ketebalan gelas tersebut 2 mm pada bagian pinggir, 3 mm pada bagian bawah, dengan penyusutan selama proses pembuatan adalah 2%.

Sudut Bidang dan Sudut Ruang

Sudut adalah objek yang dibentuk oleh dua berkas sinar atau dua potongan garis, dengan titik pangkal yang sama.

Biasanya kita langsung menyepakati bahwa istilah "sudut" yang biasa kita gunakan sehari-hari artinya adalah *sudut bidang*. Oleh karena itu, dalam buku ini disepakati bahwa terminologi sudut sama artinya dengan sudut bidang. Sudut adalah objek yang dibentuk oleh dua berkas sinar atau dua potongan garis, dengan titik pangkal yang sama. Kedua berkas sinar atau potongan garis yang membentuk sudut disebut sebagai *sisi sudut*. Sementara titik pangkal keduanya disebut sebagai *verteks* (titik sudut).

Dari bukti sejarah sejauh ini, tercatat bahwa pengukuran sudut awalnya dilakukan oleh para astronom. Ptolomeus (85-165SM) telah melakukan banyak pengukuran astronomis di Alexandria, dengan menggunakan alat yang disebut sebagai *Triquetrum* (Gambar 2.6(a)). Sesuai dengan namanya, *Triquetrum* artinya berkaki tiga. Alat ini digunakan untuk mengukur sudut, terdiri atas tiga potongan batang yang dikaitkan dengan engsel, satu bagian batang ditancapkan ke tanah, sedangkan dua lainnya bisa berputar dan membentuk segitiga sama kaki dengan batang yang posisinya dibuat tetap. Batang yang langsung tersambung dengan batang vertikal yang tetap, dilengkapi dengan lubang untuk melihat bintang atau objek angkasa lainnya. Sudut zenith diukur dari batang ketiga. Pada terapan yang modern, alat ini telah dikembangkan untuk keperluan militer, misalnya untuk survei wilayah perang.



(a) *Triquetrum* adalah salah satu alat astronomis yang dibuat pertama kali oleh Ptolomeus (muslimheritage.com)



(b) *Astrolabe* adalah salah satu alat navigasi yang dikembangkan oleh para matematikawan muslim abad pertengahan (commons.wikimedia.org).

Gambar 2.6: Alat-alat yang digunakan untuk mengukur sudut.

Bintang-bintang digunakan sebagai acuan navigasi ketika orang-orang melakukan penjelajahan samudera. Alat praktis pertama kali dibuat yang digunakan untuk navigasi adalah *Astrolabe* (Gambar 2.6(b)). Astrolabe ini digunakan dengan cara di tegakkan sejajar sumbu vertikal, kemudian jarumnya diarahkan pada bintang dan dibaca panjang busurnya. Alat ini berguna untuk navigasi laut, untuk memetakan

daratan dan juga garis pantai. Dalam beberapa catatan sejarah, alat ini banyak digunakan oleh para pelaut Timur Tengah. Banyak ditemukan artefak-artefak astrolabe yang berasal dari Persia sejak 400M. Namun, konsep mengenai astrolabe sendiri telah ada sejak 150SM, disebutkan bahwa orang pertama yang merancangnya adalah Hiparcchus, seorang astronom Yunani. Disebutkan pula bahwa dalam buku *Tetrabiblos*, alat ini juga digunakan oleh Ptolomeus.

Astrolabe ini dikembangkan dengan baik pada abad pertengahan, era kejayaan Islam. Pada alat ini ditambahkan lagi lingkaran dan skala sudut, sehingga dapat dibaca sudut *azimut* dan *horizon*-nya. Matematikawan muslim yang pertama kali membuatnya adalah Muhammad ibn Ibrāhīm al-Fazārī. Landasan matematis tentang astrolabe dituliskan pertama kali oleh astronom sekaligus matematikawan muslim Muhammad ibn Jābir al-Harrānī al-Battānī dalam risalahnya, *Kitab az-Zidj* (920M). Di era abad pertengahan, orang-orang Islam menggunakan astrolabe untuk navigasi dan penentuan arah kiblat. Teknologi astrolabe ini mempengaruhi berkembangnya alat penunjuk waktu, yang kita sebut sebagai jam.

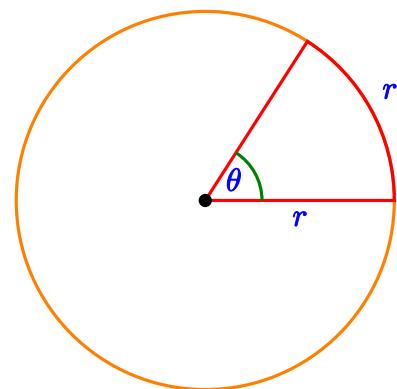
Alat-alat pengukuran sudut terus berkembang, hingga sekarang digunakan alat yang sangat presisi, yaitu Teodolit. Alat ini digunakan untuk mengukur sudut terhadap bidang horizontal maupun vertikal.

Teodolit diterapkan untuk keperluan yang sangat presisi, misalnya untuk mengukur sudut peluncuran roket. Ketelitian teodolit ini mencapai satuan detik (satuan detik untuk sudut ini tidak sama dengan satuan detik untuk waktu, lihat penjelasan di bawah).

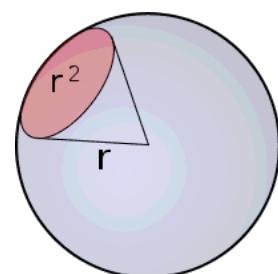
Satuan Internasional untuk sudut yang digunakan saat ini adalah radian. Satu radian adalah besarnya sudut pembuka suatu busur sedemikian rupa sehingga panjang busur s sama dengan jari-jari lingkaran. Oleh karena itu, satu radian adalah sudut θ sedemikian rupa sehingga $s = R$. Dua radian adalah sudut θ sedemikian rupa sehingga $s = 2R$. Hal tersebut berarti θ radian adalah sudut θ sedemikian rupa sehingga $s = \theta R$. Oleh karena itu jika sudut θ diukur dalam radian, maka berlaku persamaan $\theta = s/R$. Karena sudut sebebar 360° berkaitan dengan keliling lingkaran $K = 2\pi R$, maka sudut 360° sama dengan sudut $K/R = 2\pi$ radian (Gambar 2.7).

Satuan sudut lain yang sering digunakan adalah *derajat*. Derajat adalah $1/360$ dari rotasi penuh lingkaran. Simbol derajat dinyatakan dengan $^\circ$. Untuk nilai desimal dalam satuan derajat, biasanya dituliskan dalam desimal biasa atau dengan derajat-menit-detik, disesuaikan dengan kebutuhan. Koordinat lintang dan bujur menggunakan satuan derajat-menit-detik. Satu derajat dibagi menjadi 60 menit dan 1 menit dibagi menjadi 60 detik, sehingga 1 detik sama dengan $1/3600$ derajat. Simbol menit adalah tanda aksen ('), dan simbol detik adalah aksen ganda (''). Berikut adalah kesetaraan antara satuan derajat, menit, detik, yang pada pembahasan berikutnya disebut sebagai *faktor konversi*.

$$\frac{1^\circ}{60'} = 1; \quad \frac{1'}{60''} = 1 \quad (2.1)$$



Gambar 2.7: Definisi radian.



Gambar 2.8: Definisi steradian.

Satuan sudut yang lain yaitu *gradian*. Gradian setara dengan $1/400$ putaran penuh. Satu gradian sama dengan $9/10$ derajat atau $\pi/200$ radian. Gradian sering dituliskan sebagai *gon*, *grad*, atau *grade*.

Selain sudut, terdapat satu besaran tambahan lain yaitu sudut ruang. Sudut ruang adalah sudut dua dimensi di ruang tiga dimensi, yang dibentuk oleh geometri

luas benda terhadap satu titik acuan, dan titik acuan itu sebagai titik sudutnya. Secara fisis, sudut ini berhubungan dengan seberapa benda terlihat oleh pengamat yang berada di titik sudut. Satuan sudut ruang adalah steradian (sr). Satu steradian adalah sudut ruang yang dibentuk pada bola dengan jari-jari satu satuan dan luas permukaan potongan cakram yang tercakup adalah satu satuan. Secara umum, apabila suatu bola berjejari r , maka satu steradian adalah sudut yang dibentuk jika luas cakram yang dilingkupi adalah $A = r^2$ (Gambar 2.8).

2.4 Redefinisi Sistem Internasional

Sistem Internasional bertahan hingga saat ini. Namun, seiring berkembangnya teknologi, ditemukanlah kelemahan-kelemahan pada sistem SI ini. Salah satunya adalah kebergantungan terhadap artefak satu kilogram sebagai standar. Artefak satu kilogram ini tidak dapat dijaga sepenuhnya dari kontaminasi. Ketika tiruan yang dibuat berdasarkan artefak ini mengalami penambahan massa, kemudian dibandingkan kembali dengan artefak asli, maka tidak dapat dipastikan tiruannya yang mengalami penambahan ataukah artefaknya yang mengalami penyusutan atau sebaliknya. Berdasarkan kelemahan ini, Sistem Internasional dirasa perlu untuk didefinisikan ulang. Tujuan pendefinisian ulang Sistem Internasional ini adalah menjadikan satuan-satuan yang ada tidak lagi bergantung pada artefak, melainkan bergantung pada tetapan-tetapan yang sudah ada di alam.

Pada tahun 2011, CCU mengajukan rancangan pendefinisian ulang Sistem Internasional. Mereka juga mengajukan bahwa 4 tetapan alamiah lain selain cepat rambat cahaya di ruang hampa, harus juga bernilai eksak. Keempat tetapan itu adalah: tetapan Planck h dengan nilai $6,62606 \times 10^{-34}$ Js, muatan elementer e yaitu $1,60217 \times 10^{-19}$ C, tetapan Boltzmann k yaitu $1,38065 \times 10^{-23}$ J K $^{-1}$, dan tetapan Avogadro N_A yang nilainya $6,02014 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$.

Selain itu, CCU juga mengusulkan tetapan alamiah berikut ini, untuk juga dijaga eksak nilainya: Kelajuan cahaya di ruang hampa c adalah 299.792.458 meter per detik, frekuensi pemecahan hiperhalus atom Cesium-133 pada keadaan dasar yang dinotasikan dengan $\Delta\nu(^{133}Cs)_{hfs}$ adalah 9 192 631 770 hertz, dan efikasi luminus K_{cd} dari radiasi monokromatik dengan frekuensi 540×10^{12} hertz adalah tepat 683 lumen per watt. CCU mengusulkan pula agar: artefak standar kilogram tidak lagi digunakan dan definisi kilogram yang digunakan sekarang harus dicabut, definisi ampere harus dicabut, definisi kelvin dicabut, dan definisi mole direvisi.

Usulan Standar Panjang

Standar panjang yang diusulkan tidak jauh berbeda dari yang digunakan sekarang. Hanya saja redaksinya diubah sedikit sehingga definisi tersebut lebih mengena.

Meter merupakan satuan panjang, yang besarnya ditentukan dengan menetapkan nilai numerik kelajuan cahaya di ruang hampa sehingga tepat 299.792.458 jika dinyatakan dalam satuan m/s.

Usulan Standar Massa

Definisi kilogram akan mengalami perubahan yang mendasar dengan usulan yang baru. Definisi yang lama bergantung pada artefak, sementara definisi yang baru menghubungkan dengan energi ekuivalen foton melalui tetapan Planck.

Simbol h merupakan kesepakatan untuk menyatakan tetapan Planck. Sementara simbol c atau biasanya c_0 merupakan simbol yang disepakati untuk menyatakan kelajuan cahaya di ruang hampa. Simbol e digunakan untuk menyatakan muatan elementer, yang merupakan muatan proton.

Kilogram merupakan satuan massa, besarnya ditentukan dengan menetapkan nilai numerik tetapan Planck sehingga tepat $6,62606 \times 10^{-34}$ jika dinyatakan dalam J s.

Akibat langsung usulan ini adalah satuan kilogram yang baru menjadi bergantung pada definisi meter dan detik. Namun, satuan ini tidak lagi bergantung pada artefak kilogram sehingga artefak tersebut hanya tinggal sejarah.

Usulan Standar Waktu

Standar waktu yang diusulkan tidak jauh berbeda dari yang digunakan sekarang.

Detik merupakan satuan waktu, yang besarnya ditentukan dengan cara menetapkan frekuensi pemecahan hiperhalus keadaan dasar atom Cesium-133 pada keadaan diam dan suhu 0 K, sehingga tepat $9.192.631.770$ jika dinyatakan dalam Hz.

Usulan Standar Kuat Arus

Definisi ampere yang digunakan saat ini, setelah diteliti, sulit untuk direalisasikan dalam presisi yang tinggi. CCU mengusulkan definisi yang lebih presisi:

Ampere merupakan satuan kuat arus listrik, yang besarnya ditentukan dengan cara menetapkan muatan elementer sehingga tepat $6,0217 \times 10^{-19}$ jika dinyatakan dalam C.

Standar ampere yang digunakan saat ini, bergantung pada gaya yang berdimensi MLT^{-2} . Hal tersebut berarti satuan ampere bergantung pada standar kilogram, meter, dan detik yang harus didefinisikan terlebih dahulu. Sementara standar ampere yang diusulkan oleh CCU, memberikan konsekuensi bahwa satuan ini tidak lagi perlu bergantung pada definisi kilogram dan meter, melainkan hanya bergantung pada satuan detik.

Usulan Standar Suhu

Standar suhu baru yang diajukan CCU, menjadikan satuan kelvin ditetapkan berdasarkan energi ekuivalen melalui persamaan Boltzmann dan tidak lagi melalui titik tripel air. Jika usulan ini diterima, maka standar suhu akan mengalami perubahan yang fundamental. Salah satu hal yang melatarbelakangi usulan ini adalah bahwa standar kelvin yang berlaku saat ini terbukti tidak memberikan presisi yang memuaskan untuk suhu di bawah 20 kelvin dan suhu di atas 1300 kelvin. Pada tahun 2007, bagian dari CIPM yang menangani masalah suhu, mempublikasikan laporan yang membuktikan ketidakakuratan standar suhu yang digunakan sekarang.

Kelvin merupakan satuan suhu termodinamis, yang besarnya ditentukan dengan menetapkan nilai numerik tetapan Boltzmann sehingga tepat $1,38065 \times 10^{-23}$ jika dinyatakan dalam $J K^{-1}$.

Salah satu akibat langsung definisi ini adalah satuan kelvin menjadi bergantung pada satuan detik, meter, dan kilogram.

Usulan Standar Intensitas Cahaya

Standar intensitas cahaya yang diusulkan CCU tidak jauh berbeda dari standar yang lama, hanya redaksinya sedikit diubah.

Candela merupakan satuan intensitas cahaya pada arah yang ditentukan, besarnya ditentukan dengan cara menetapkan nilai numerik efikasi luminus dari cahaya monokromatik pada frekuensi 540×10^{12} Hz sehingga tepat 683 jika dinyatakan dalam lm/W (lumen per watt).

Usulan Standar Banyaknya Zat

Definisi baru yang diusulkan oleh CCU membuat satuan mole tidak lagi bergantung pada kilogram. Definisi yang baru ini bergantung pada bilangan Avogadro.

Mol merupakan satuan banyaknya zat entitas elementer, yang dapat berupa atom, molekul, ion, elektron, atau partikel atau kumpulan partikel, yang besarnya ditentukan dengan cara menetapkan nilai numerik bilangan Avogadro sehingga tepat $6,02214 \times 10^{23}$ jika dinyatakan dalam satuan mol^{-1} .

Hingga tahun 2014, saat buku ini ditulis, usulan mengenai pendefinisian ulang Sistem Internasional ini belum disepakati.

Uji Ketajaman 2.2 Tentang Satuan

- Andaikan dipilih suatu sistem satuan sedemikian rupa sehingga kelajuan cahaya di ruang hampa sama dengan satu. Tentukan waktu yang ditempuh oleh cahaya untuk mencapai planet yang jaraknya 1 SA dari sumber cahaya tersebut. (SA adalah Satuan Astronomis yang didefinisikan sebagai jarak rerata antara Bumi dan Matahari. Jika dinyatakan dalam kilometer, $1 \text{ SA} \approx 150$ juta kilometer.)
- Diketahui besarnya 'gaya gravitasi' yang dialami oleh suatu benda terkait dengan keberadaan benda lainnya diberikan oleh $F = G m_1 m_2 / r^2$, dengan G adalah tetapan gravitasi umum, m_1 adalah massa benda pertama, m_2 adalah massa benda kedua, dan r adalah jarak kedua benda. Tentukan satuan G tersebut.
- Andaikan dipilih suatu sistem satuan sedemikian rupa sehingga nilai tetapan gravitasi umum G sama dengan satu. Tentukan satuan 'gaya gravitasi'.
- Energi foton diberikan oleh $E = h\nu$, dengan h adalah tetapan Planck dan ν adalah frekuensi gelombang elektromagnetik dalam Hertz. Apabila dipilih suatu sistem satuan sedemikian rupa sehingga $h = 1$, maka tentukan satuan energi foton tersebut.

2.5 Besaran Ekstensif dan Intensif

Besaran Ekstensif dan Intensif akan dijelaskan dengan lebih rinci pada buku jilid berikutnya bagian termodinamika.

Suatu besaran disebut besaran ekstensif jika besar atau *magnitude*-nya bersifat aditif yakni dijumlahkan dari bagian-bagiannya. Sebagai contoh adalah besaran massa dan volume. Jika tersedia seonggok daging yang massanya 1 kg dan sepotong gula merah 0,5 kg, maka secara keseluruhan massa daging dan sepotong gula merah itu adalah 1,5 kg, yakni merupakan jumlahan dari massa daging dan massa gula. Suatu besaran disebut besaran intensif bila besarnya tidak tergantung dari penambahan subsistem. Sebagai contoh adalah besaran massa jenis. Dua potong kayu masing-masing memiliki massa jenis $0,9 \text{ kg/m}^3$. Bila kayu itu kemudian disambung, maka massa jenisnya tidak berubah, yakni tetap $0,9 \text{ kg/m}^3$. Jadi, massa jenisnya tidak men-

jadi dua kali massa jenis masing-masing potongan. Contoh lain adalah tekanan dan temperatur.

Contoh 2.1 Rapat Massa

Sebuah batang silinder terletak memanjang di $x = 0$ hingga $x = 14$ cm, memiliki luas tampong lintang seragam, yaitu $9,00 \text{ cm}^2$. Kerapatannya bertambah dari ujung ke ujung, dari $2,70 \text{ g/cm}^3$ hingga $19,3 \text{ g/cm}^3$. Tentukan

- tetapan B dan C pada persamaan $\rho = B + Cx$,
- massa batang tersebut.

Persamaan $\rho = B + Cx$ merupakan persamaan garis lurus di bidang xy . Oleh karena itu, B dapat ditentukan dengan memasukkan nilai $x = 0$ ke persamaan tersebut, dan diperoleh $B = 2,7 \text{ g/cm}^3$. Kemudian nilai C dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan

$$C = \frac{\rho_2 - \rho_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.2)$$

Dengan memasukkan nilai $\rho_2 = 19,3 \text{ g/cm}^3$, $\rho_1 = 2,70 \text{ g/cm}^3$, $x_2 = 14 \text{ cm}$ dan $x_1 = 0 \text{ cm}$, diperoleh $C = 1,1857 \text{ g/cm}^4$. Untuk menghitung massa batang silinder tersebut, dapat dilakukan dengan cara integral

$$m = \int \rho dV, \quad (2.3)$$

dengan dV adalah elemen volume. Karena elemen volume $dV = A dx$, dengan A adalah luas penampang batang dan dx adalah elemen panjang, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$m = \int \rho A dx. \quad (2.4)$$

Luas penampang A bernilai tetap di sembarang titik, sehingga dapat keluar dari tanda integral

$$m = A \int_{x=0 \text{ cm}}^{x=14 \text{ cm}} B + Cx dx. \quad (2.5)$$

Dengan demikian diperoleh

$$m = A \left(Bx + \frac{1}{2}Cx^2 \Big|_0^{14 \text{ cm}} \right). \quad (2.6)$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang telah didapatkan, maka diperoleh

$$m = 1385,99 \text{ g}. \quad (2.7)$$

Uji Ketajaman 2.3 Rapat Massa Planet

1. Diketahui jejari planet Jupiter 71.492 kilometer. Apabila massa Jupiter $1,90 \times 10^{27}$ kilogram, tentukan rapat massa Jupiter.
2. Diketahui rapat massa planet Saturnus $0,7 \text{ g/cm}^3$. Apabila massa Saturnus $5,69 \times 10^{26}$ kilogram, tentukan radius Saturnus.
3. Jejari Bumi diketahui 6.378 kilometer dan massa Bumi $5,97 \times 10^{24}$ kilogram. Tentukan rapat massa Bumi. Bandingkan Bumi dengan Jupiter, manakah yang lebih rapat?
4. Diketahui rapat massa Venus $5,2 \text{ g/cm}^3$, apabila jejari Venus 6.052 kilometer, tentukan massa Venus.

2.6 Dimensi

Istilah **dimensi** dalam ilmu fisika memiliki dua pengertian khusus yang berbeda. *Yang pertama* berkaitan dengan keleluasaan gerak sebuah benda. Sebuah manik-manik yang dibiarkan begitu saja di atas meja akan dapat bergerak lebih leluasa dibandingkan dengan manik-manik yang diuntai pada seutas kawat yang kaku. Manik-manik yang diuntai pada seutas kawat kaku itu akan bergerak hanya sepanjang kawat itu saja. Dikatakan bahwa manik-manik yang diuntai tinggal dalam ruang yang *dimensinya lebih rendah* dibandingkan manik-manik yang dibiarkan bebas di atas meja. Manik-manik yang diuntai dikatakan “hidup” dalam ruang satu dimensi, sedang manik-manik yang dibiarkan bebas di atas meja dikatakan hidup pada ruang dua dimensi jika laju tidak ada kemungkinan terengkang dari permukaan meja. Pengertian istilah dimensi *yang kedua* terkait dengan besaran. Inilah yang akan dibicarakan di sini.

Dengan satuan apapun, jarak suatu gugus bintang dari Bumi adalah besaran panjang. Entah dengan satuan meter, tahun cahaya atau satuan tradisional semacam *sejengkal, sedepa* dan lain sebagainya, jarak gugus bintang tersebut tetaplah besaran panjang. Oleh karena itu jarak memiliki **dimensi panjang**. Demikian pula untuk selang waktu, akan dinyatakan dengan satuan apapun, entah dengan detik, menit, jam, atau entah dengan satuan-satuan waktu yang lain, selang waktu tetaplah selang waktu. Ia memiliki *dimensi waktu*.

Pada awalnya dimensi merupakan nama yang diberikan kepada setiap besaran yang terukur. Kemudian dalam perkembangan selanjutnya dimensi diartikan pula sebagai cara untuk menyusun suatu besaran dengan menggunakan huruf atau lambang tertentu.

Setiap besaran fisika hanya mempunyai satu dimensi. Misalnya dimensi untuk besaran panjang ditetapkan L. Panjang, lebar, tinggi, kedalaman dan diameter merupakan besaran yang sama, yaitu besaran panjang. Oleh karena itu memiliki dimensi panjang. Demikian pula untuk besaran-besaran pokok yang lain. Dimensi untuk massa dan waktu berturut-turut ditulis sebagai M dan T. Selanjutnya, dimensi untuk besaran turunan diperoleh berdasarkan dimensi besaran-besaran pokoknya. Berdasarkan kenyataan ini, dimensi sering pula diartikan sebagai cara untuk menyusun suatu besaran berdasarkan besaran-besaran pokoknya. Dimensi bermanfaat misalnya untuk mengingat-ingat bentuk persamaan-persamaan dalam fisika dan

memeriksa apakah perhitungan-perhitungan yang dilakukan telah sesuai. Kegunaan dimensi yang lain adalah untuk menguji apakah suatu persamaan yang tersusun dari berbagai besaran fisis sudah tepat atau belum. Dapat pula digunakan untuk menjelaskan adanya kesetaraan dua besaran fisis yang secara sekilas terlihat berbeda.

Contoh 2.2 Analisis Persamaan

Diberikan persamaan untuk besarnya gaya yang bekerja pada suatu benda $F = 2ma^2t$, dengan m adalah massa benda, a percepatan dan t adalah waktu. Apakah persamaan tersebut benar secara dimensi jika satuan yang digunakan adalah satuan SI?

Telah kita ketahui bahwa dimensi gaya adalah

$$[F] = M L T^{-2}.$$

Berikutnya kita tinjau dimensi besaran $2ma^2t$,

$$[2ma^2t] = M L^2 T^{-3}.$$

Jadi, persamaan $F = 2ma^2t$ secara dimensi tidak benar.

Penentuan dimensi suatu besaran turunan dapat dilakukan dengan mengetahui satuan besaran itu dinyatakan dengan satuan-satuan besaran pokok. Andaikan suatu besaran memiliki satuan $m \cdot kg \cdot dt^3$, maka dimensi besaran itu adalah $L M T^3$. Perlu diperhatikan bahwa dimensi terkait dengan sistem satuan yang dipilih. Seringkali untuk memudahkan analisis, para fisikawan memilih sistem satuan sedemikian rupa sehingga tetapan-tetapan alamiah bernilai satu. Apabila tetapan-tetapan alamiah tersebut bernilai satu, maka dapat dihilangkan dari persamaan. Oleh karena itu, dalam sistem satuan tertentu, seringkali timbul satuan-satuan yang 'aneh'.

Contoh 2.3 Analisis Hukum Pangkat

Diberikan persamaan yang terkait dengan energi suatu benda $E = k m^\alpha v^\beta r^\gamma$, dengan k suatu tetapan, sedangkan α , β , dan γ adalah bilangan bulat. Jika m massa benda itu, v kelajuannya dan r besarnya pergeseran, tentukan α , β , dan γ , agar besarnya energi benar secara dimensi.

Kita ketahui dimensi energi

$$[E] = M L^2 T^{-2}$$

Jika kita tuliskan dimensi energi sesuai dengan persamaan $E = k m^\alpha v^\beta r^\gamma$, maka

$$\begin{aligned}[E] &= M^\alpha \left(\frac{L}{T}\right)^\beta L^\gamma \\ &= M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\beta}.\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, α , β , dan γ yang sesuai secara berurutan adalah 1, 2, dan 0.

1. Arus listrik didefinisikan sebagai muatan yang mengalir melalui suatu titik tiap satuan waktu, secara umum diberikan oleh $I = dq/dt$. Tentukan dimensi muatan listrik tersebut.
2. Torka (momen gaya) adalah besaran vektor yang besarnya dapat dinyatakan sebagai $|\tau| = r F_{\perp}$, dengan r merupakan lengan gaya dan F_{\perp} komponen gaya yang tegak lurus lengan gaya. Tentukan dimensi momen gaya tersebut. Bandingkan dimensinya dengan dimensi energi. Apakah momen gaya dan energi merupakan besaran yang sama?
3. Energi mekanik untuk sistem osilator harmonis diberikan oleh $E_m = p^2/(2m) + m\omega^2q/2$ dengan m massa benda, p adalah momentum linier, dan q jarak dari titik setimbang, dan ω besarnya kecepatan sudut. Tentukan dimensi energi mekanik tersebut. (Perlu diketahui bahwa momentum adalah kuantitas gerak, merupakan perkalian antara massa dan kecepatan.)
4. Tekanan merupakan besarnya gaya tiap satuan luas, diberikan oleh $P = F/A$ dengan F merupakan besarnya gaya tekan dan A merupakan besarnya luas. Tentukan dimensi tekanan tersebut.

2.7 Konversi Satuan

Dalam pengukuran seringkali diperlukan adanya konversi dari satu sistem satuan ke sistem satuan yang lain. Hal ini memudahkan pengukuran ataupun penghitungan karena satuan dapat dipilih sedemikian rupa sehingga sesuai dengan kebutuhan. Dalam perhitungan konversi satuan, satuan dapat dipandang layaknya peubah dalam aljabar, sehingga dapat saling meniadakan (dapat "dicoret"). Perlu diperhatikan, bahwa dalam melakukan konversi sebaiknya dibiasakan menulis secara lengkap satuan yang digunakan hingga akhir perhitungan. Hal ini untuk memudahkan pelacakan jika terjadi kesalahan perhitungan.

Contoh 2.4 Tahun Cahaya

Satuan panjang yang biasanya dipakai dalam kajian astrofisika dan astronomi adalah satu tahun cahaya. Satu tahun cahaya bukanlah satuan waktu. Satu tahun cahaya adalah jarak yang ditempuh oleh cahaya dalam ruang hampa selama satu tahun. Sebagai contoh, suatu bintang yang berada di galaksi Andromeda, jaraknya dari kita 690 kpc (kiloparsec). Melalui teleskop kita, bintang tersebut terlihat mengalami supernova, yaitu ledakan besar sebagai tanda berakhirnya masa hidup bintang tersebut. Kapan sesungguhnya supernova tersebut terjadi?

Satu parsec sama nilainya dengan 3,26 tahun cahaya. Oleh karena itu, pengetahuan ini dapat kita gunakan sebagai faktor konversi. Jarak bintang tersebut apabila dinyatakan dalam tahun cahaya

$$690.000 \text{ parsec} \times \frac{3,26 \text{ tahun cahaya}}{1 \text{ parsec}} = 2.249.400 \text{ tahun cahaya.} \quad (2.8)$$

Sesungguhnya kita melihat supernova yang telah terjadi 2.249.400 tahun yang lalu, karena cahaya membutuhkan waktu 2.249.400 tahun untuk sampai ke mata kita.

Pada Contoh 2.4 di atas, perhitungan dilakukan dengan cara menggunakan faktor konversi. Dalam melakukan konversi satuan, sebaiknya selalu diperhatikan penggunaan faktor konversi ini. Faktor konversi adalah nisbah (perbandingan) antara dua satuan yang nilainya sama dengan satu. Misalnya:

$$\frac{1 \text{ ft}}{0,348 \text{ m}} = 1; \quad \frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ ton}} = 1; \quad \frac{3,26 \text{ tahun cahaya}}{1 \text{ parsec}} = 1.$$

Contoh 2.5 Tahun Cahaya

Jarak quarsar paling jauh yang teramati dari Bumi adalah $1,4 \times 10^{26}$ meter. Maka quarsar dari tahun berapakah sesungguhnya yang kondisinya teramati dari Bumi saat ini?

Bila dikonversi ke satuan tahun cahaya, maka jarak quarsar tersebut adalah

$$1,4 \times 10^{26} \cancel{\text{meter}} \times \frac{9,45 \times 10^{-15} \text{ tahun cahaya}}{1 \cancel{\text{meter}}} = 1,40 \times 10^{10} \text{ tahun cahaya}$$

$$\cong 1,5 \times 10^{10} \text{ tahun cahaya}$$

Jadi, quarsar yang teramati oleh kita sekarang ini sesungguhnya adalah quarsar pada waktu $1,5 \times 10^{10}$ tahun yang lampau. Karena satu tahun ada $3,1536 \times 10^7$ detik, maka jangka waktu $1,5 \times 10^{10}$ tahun sama lamanya dengan $(1,5 \times 10^{10})(3,1536 \times 10^7 \text{ dt}) \times 4,7 \times 10^{17}$ detik. Padahal umur jagad raya adalah 5×10^{17} detik. Jadi, quarsar yang kita lihat adalah quarsar $0,3 \times 10^{17}$ detik setelah jagad raya kita lahir. Begitulah cara kita mengintip masa lalu jagad raya kita.

Tahukah Anda ?

Mars Climate Orbiter

Pada tahun 1993, NASA memulai program Mars Surveyor. Program Mars Surveyor tersebut menjalankan serangkaian misi yang bertujuan untuk eksplorasi planet Mars. Pada tahun 1995, dua misi dijadwalkan akan diluncurkan pada akhir 1998 dan awal 1999. Kedua misi tersebut adalah *Mars Climate Orbiter* (MCO) dan *Mars Polar Lander* (MPL). MCO diluncurkan pada 11 Desember 1998 dan MPL diluncurkan pada 3 Januari 1999. Sembilan setengah bulan setelah peluncuran, MCO akan segera menyalakan mesin untuk mencapai orbit eliptik di sekitar Mars. Mesin MCO dihidupkan pada 23 September 1999, namun MCO hilang ketika memasuki atmosfer Mars karena orbitnya lebih rendah dari yang diharapkan. MCO mengorbit terlalu rendah karena komputer yang mengirimkan perintah dari Bumi menggunakan sistem satuan British Engineering sementara komputer yang ada pada MCO menggunakan satuan SI.

Kesalahan ini membuat MCO berada 56 kilometer di atas permukaan Mars dari yang seharusnya diharapkan yaitu 250 kilometer. Kerugian yang diderita akibat kesalahan ini mencapai 168 juta dollar pada masa itu. Kejadian ini memberikan pelajaran bahwa kesepakatan satuan sangat penting.

Uji Ketajaman 2.5 Konversi Satuan

1. Jembatan yang menghubungkan pulau Jawa dan Pulau Madura adalah jembatan Suramadu. Panjang jembatan suramadu adalah 5483 m. Tentukan panjang jembatan tersebut dalam satuan mil ($1 \text{ mil} = 1,609 \times 10^3 \text{ m}$).

2. Colosseum, dalam bahasa latin *Amphitheatrum Flavium*, merupakan tempat pertunjukan terbuka terbesar yang pernah dibangun bangsa Romawi. Colosseum tersebut sering digunakan untuk pertarungan para ksatria yang disebut sebagai *Gladiator*, untuk menghibur para pembesar dan masyarakat Romawi. Di tengah bangunan Colosseum tersebut terdapat *Arena* (dari bahasa latin *harena* yang berarti pasir). Arena tersebut merupakan tempat bertarung yang dibangun dengan kayu dan dilapisi pasir di atasnya. Ukuran arena tersebut adalah $280 \text{ pes} \times 163 \text{ pes}$. Tentukan panjang dan lebar *arena* tersebut dalam satuan inci. (Satuan *pes* adalah satuan panjang bangsa Romawi, yang setara dengan 0, 9708 ft. Kita ketahui bahwa 1 ft setara dengan 0, 3048 m.)
3. Satuan panjang yang dimiliki bangsa Yunani salah satunya adalah δακτυλος. Nilai satu δακτυλος adalah setara dengan 13, 1 inci. Parthenon adalah salah satu bangunan bersejarah Yunani yang merupakan simbol demokrasi. Tinggi salah satu kolom Parthenon adalah 538, 86 δακτυλος. Tentukan tinggi kolom Parthenon tersebut dalam meter.
4. Piramida adalah bangunan bersejarah pada zaman mesir kuno yang dibangun sebagai makam para Firaun. Piramida Giza yang terletak di situs sejarah Giza Necropolis, memiliki volume 27.002.880 khar. Satuan *khar* adalah satuan kuno Mesir yang nilainya setara dengan 20 kali satuan *heqat*. Satu *heqat* nilainya setara dengan 4, 8 liter. Tentukan sisi alas persegi Piramid Giza tersebut dalam satuan inci, apabila tingginya 279, 047 cubit (1 cubit setara dengan 52, 5 cm).
5. Ziggurat of Ur, adalah salah satu bangunan bersejarah Mesopotamia. *Ziggurat of Ur* merupakan frasa dari bahasa Sumeria yang artinya "bangunan yang fondasinya menimbulkan teror". Ziggurat dulunya adalah bangunan sejenis candi yang digunakan sebagai pusat administrasi kota, dan juga dijadikan sebagai tempat suci Dewa Bulan. Bangunan ini alasnya berbentuk persegi panjang dengan ukuran $210 \text{ ft} \times 150 \text{ ft}$. Tentukan luas alas bangunan tersebut dalam satuan *uzalak*. Satuan *uzalak* adalah satuan Mesopotamia kuno yang setara dengan 900 m^2 .



(a) Colosseum



(b) Parthenon



(c) Piramida Giza



(d) Ziggurat of Ur

Gambar 2.9: Bangunan-Bangunan Bersejarah (commons.wikimedia.org)

2.8 Angka Penting

Pengukuran tidak bisa dipisahkan dari fisikawan. Fisikawan tentunya menyampaikan hasil ukur hingga ambang batas ketidakpastiannya. Dalam hasil ukur, terdapat angka yang disebut sebagai angka penting. Oleh karena itu, tentu saja terdapat pula angka yang tidak penting. Angka penting dalam pengukuran, menunjukkan tingkat ketelitian pengukuran tersebut. Bagi fisikawan, hasil ukur 13 mm berbeda dengan 13, 000 mm. Pada hasil ukur 13 mm, digit terakhir, yaitu angka 3 merupakan angka yang diragukan. Sementara pada hasil ukur 13, 00 mm, digit terakhirnya yaitu angka 0 merupakan angka yang diragukan. Dari kenyataan tersebut, tentulah hasil

ukur 13,00 mm lebih teliti daripada 13 mm. Hasil ukur tersebut misalnya adalah hasil pengukuran diameter kancing baju secara berturut-turut menggunakan penggaris kayu satu meter dan jangka sorong. Skala terkecil penggaris kayu adalah 1 cm, sehingga tidak mungkin didapatkan digit ketiga dalam pengukuran tersebut apabila satuan yang digunakan adalah milimeter. Dengan demikian, seorang eksperimen-tator melaporkan hasil pengukuran diameter kancing baju dengan menggunakan penggaris tersebut, misalnya (13 ± 2) mm. Sementara pengukuran menggunakan jangka sorong dapat dilaporkan misalnya $(13,000 \pm 0,002)$ mm. Tampak jelas bahwa hasil ukur yang kedua lebih teliti daripada hasil ukur pertama. Hasil ukur pertama berarti bahwa nilai diameter kancing baju berada di antara 11 mm dan 15 mm. Sementara hasil ukur kedua mengatakan bahwa hasil ukur tersebut berada di antara 12,098 mm dan 13,002 mm.

Angka penting dapat dikatakan sebagai nilai hasil ukur hingga digit taksirannya. Suatu fungsi yang peubahnya hasil ukur juga mengandung angka penting. Pada kasus pengukuran diameter kancing baju di atas, hasil ukur 13 mm mengandung dua angka penting, yaitu 1 dan 3, karena digit taksirannya adalah satu digit terakhir, yaitu angka 3. Sementara 13,000 mengandung lima angka penting, karena digit taksirannya adalah juga satu digit terakhir, yaitu angka 0. Kita dapat mengetahui angka mana saja yang merupakan taksiran dari suatu hasil ukur dengan cara melihat ralatnya. Dari kasus di atas, diketahui ralatnya masing-masing bersesuaian dengan digit terakhir hasil ukurnya.

Perlu diperhatikan bahwa tidak selalu nilai taksiran suatu pengukuran adalah digit terakhir hasil ukurnya. Taksiran suatu pengukuran bisa saja diwakili oleh dua digit terakhir, tiga digit terakhir, dan seterusnya. Hal tersebut bergantung pada tingkat ketelitian pengukuran. Sebagai contoh, hasil ukur presesi geodesik pada eksperimen Gravity Probe B diperoleh 6602 ± 18 milidetik/tahun. Pada hasil ukur tersebut, nilai taksirannya terletak pada dua digit terakhir, yaitu angka 02.

Pada kasus lain, apabila ada seseorang yang menyampaikan hasil ukur massa 3400 gram misalnya, maka angka tersebut menimbulkan ambiguitas. Kita tidak dapat mengetahui apakah dua angka nol merupakan taksiran atau bukan. Apabila dinyatakan dalam notasi ilmiah, angka 3400 g menjadi $3,4 \times 10^3$ g. Tentu saja hasil ini berbeda apabila ternyata yang dimaksud adalah $3,400 \times 10^3$ g. Nilai ukur $3,400 \times 10^3$ g lebih teliti daripada $3,4 \times 10^3$ g, walaupun keduanya setara nilainya dengan 3400 g. Oleh karena itu disepakati bahwa angka nol di sebelah kanan angka bukan nol yang tidak mengikuti tanda desimal bukanlah angka penting. Dengan demikian, apabila ada yang menuliskan hasil ukur misalnya seperti 3400 g, maka dianggap sama dengan $3,4 \times 10^3$ g, dengan kata lain, hanya memiliki dua angka penting. Dari uraian tersebut, maka sebaiknya dalam menyajikan hasil ukur, sebisa mungkin dalam notasi ilmiah. Tentang notasi ilmiah akan dibahas kemudian. Untuk penjelasan yang lebih rinci mengenai angka penting, dapat dilihat pada rangkuman aturan berikut.

Aturan Penulisan Angka Penting

1. Semua angka bukan nol adalah angka penting.
Contoh : "245,5" memiliki empat angka penting.
2. Semua angka nol di sebelah kanan tanda desimal tetapi di sebelah kiri angka bukan nol bukanlah angka penting.
Contoh : "0,000001" hanya memiliki satu angka penting. Angka tersebut dapat

dituliskan sebagai 1×10^{-7} . Kita dapat melihat, sekalipun dituliskan dalam bentuk awalnya, ketujuh angka 0 yang berada di kiri angka 1 tidaklah penting. Nilai taksiran tidak akan berada di digit awal, melainkan selalu berada di digit bagian akhir.

3. Semua angka nol di sebelah kanan tanda desimal yang mengikuti angka bukan nol adalah angka penting.
Contoh : "2,00" memiliki tiga angka penting. "2,300" memiliki empat angka penting.
4. Angka nol di sebelah kanan angka bukan nol tetapi tanpa tanda desimal bukanlah angka penting.
Contoh : "3400" hanya memiliki dua angka penting.
5. Angka nol di antara dua angka penting merupakan angka penting.
Contoh : "560,0" memiliki empat angka penting.

Angka Penting dan Aljabar

1. Angka Penting pada Penjumlahan

Pada penjumlahan dua buah bilangan akan muncul beberapa angka yang diragukan. Maka hasil penjumlahan harus dibulatkan sehingga angka yang diragukan tinggal satu saja.

2. Angka Penting pada Pengurangan

Pada pengurangan dua buah bilangan akan muncul beberapa angka yang diragukan. Maka hasil pengurangan harus dibulatkan sehingga angka yang diragukan tinggal satu saja.

3. Angka Penting pada Perkalian

Hasil perkalian harus dibulatkan sehingga jumlah angka pentingnya sama dengan jumlah angka penting paling kecil di antara yang dikalikan.

4. Angka Penting pada Pembagian

Hasil bagi harus dibulatkan sehingga jumlah angka pentingnya sama dengan jumlah angka penting paling kecil di antara bilangan-bilangan yang muncul dalam pembagian (entah pembagi maupun yang dibagi)

Contoh 2.6 Angka Penting

1. Angka Penting pada Penjumlahan

Bilangan "4,8890" memiliki lima angka penting. Sedangkan "43,67" memiliki empat angka penting. Ada berapa angka pentingkah pada hasil jumlahan kedua bilangan di atas? Hasil jumlahan matematis kedua bilangan itu adalah 48,5590. Angka yang diragukan pada "43,67" adalah angka "7" yang terletak dua angka dibelakang koma. Sedang angka yang diragukan pada "4,8890" adalah angka "0" dan terletak empat angka di belakang koma. Maka angka-angka yang diragukan pada hasil jumlahan matematis adalah yang terletak mulai dari dua angka di belakang koma, yakni mengikuti letak angka "7" pada bilangan 43,67. Angka-angka tersebut adalah yang digarisbawahi pada bilangan 48,5590. Tetapi angka yang diragukan haruslah satu saja. Oleh karena itu perlu pembulatan. Dan pembulatan ini dilakukan sampai angka yang diragukan paling kiri.

Hasilnya 48,56. Jadi 4,8890 ditambah 43,67 sama dengan 48,56 dan bilangan ini memiliki empat angka penting.

2. Angka Penting pada Pengurangan

Hendak dihitung pengurangan 2,567 dari 345,2. Hasil pengurangan secara matematis adalah 342,633. Tiga angka yang digarisbawahi merupakan angka yang diragukan. Karena tidak boleh terdapat lebih dari satu angka yang diragukan, maka harus dibulatkan sampai ke angka diragukan paling kiri. Hasilnya adalah 342,6. Jadi, ada empat angka penting.

3. Angka Penting pada Perkalian

Andaikan anda harus mengalikan bilangan 3,428 dengan 81,3224. Bilangan pertama memiliki empat angka penting, sedang yang kedua memiliki enam angka penting. Menurut kalkulator hasil kali kedua bilangan itu adalah 278,7731872. Tetapi di antara kedua bilangan yang dikalikan, jumlah angka penting terkecil dimiliki oleh bilangan 3,428, yakni sebanyak empat angka penting. Oleh karena itu, hasil perkalian yang ditunjukkan kalkulator di atas harus dibulatkan sehingga tinggal empat angka penting saja. Jadi, 278,8.

4. Angka Penting pada Pembagian

Hendak dihitung $2,389 \div 3,22278$. Dari kalkulator anda mendapatkan 0,741285474. Tetapi di antara kedua bilangan yang muncul dalam pembagian jumlah angka penting paling kecil dimiliki oleh bilangan 2,389, yakni empat angka penting. Oleh karena itu hasil perhitungan kalkulator di atas harus dibulatkan menjadi 0,7413.

Uji Ketajaman 2.6

Angka Penting

1. Selembar kertas *sticky notes* (catatan tempel), berbentuk persegi panjang dengan panjang terukur 12,5 cm dan lebar terukur 17,3 cm. Tentukan luas kertas tersebut.
2. Sebuah gelas berbentuk silinder dengan jejari alas terukur 4,0 cm dan tingginya terukur 9,5 cm. Tentukan volume cairan maksimum yang dapat ditampung gelas tersebut.
3. Tahun Tropis adalah interval waktu dari satu *vernal equinox* ke *vernal equinox* berikutnya, yaitu 365,242199 hari. Hitung jumlah detik dalam satu tahun tropis.

Notasi Ilmiah

Bentuk umum penulisan ilmiah adalah $p \times 10^n$. Bagian p yang nilainya memenuhi aturan $1 \leq p < 10$ disebut **mantissa**. Jumlah angka penting mantissa disesuaikan dengan jumlah angka penting bilangan yang akan ditulis dalam notasi ilmiah. Bagian 10^n disebut **ordo**, dengan n bilangan bulat.

Contoh 2.7

Notasi Ilmiah

1. Dalam notasi ilmiah bilangan 0,000067 ditulis sebagai $6,7 \times 10^{-5}$. Bilangan 0,000067 memiliki dua angka penting. Oleh karena itu, mantissanya juga harus memiliki dua angka penting, yakni 6,7.

2. Dalam notasi ilmiah bilangan 1,0997 ditulis sebagai 1,0997. Ordo dengan $n = 0$ tidak perlu ditulis.
3. Dalam notasi ilmiah bilangan 70000000 ditulis sebagai 7×10^7 . Bilangan 70000000 memiliki 1 angka penting saja. Oleh karena itu mantissanya juga memiliki 1 angka penting, yakni 7.
4. Dalam notasi ilmiah bilangan 40000,0 ditulis sebagai $4,00000 \times 10^4$. Bilangan 40000,0 memiliki enam angka penting. Maka mantissanya adalah 4,00000 yang memiliki enam angka penting.

2.9 Penaksiran

Seringkali, seorang fisikawan dihadapkan dengan suatu masalah yang harus diselesaikan dengan cepat. Dalam hal ini, fisikawan tersebut tidak dapat memberikan secara cepat bilangan eksak yang diharapkan, kecuali beberapa orang saja yang menguasai metode hitung cepat. Oleh karena itu, seorang fisikawan terbiasa melakukan penaksiran (*estimation*). Taksiran seorang fisikawan yang hebat, pasti mendekati nilai sebenarnya. Orang awam melihat bahwa fisikawan sering melakukan tebakan. Namun, tebakan fisikawan itu seringkali benar, bahkan hampir tidak pernah salah, sehingga orang mengatakan bahwa tebakan seorang fisikawan bukanlah sembarang tebakan. Orang mengatakan bahwa fisikawan tidak melakukan *guessing* (menebak), melainkan *guesstimation*, yaitu tebakan yang didasarkan pada taksiran atau perhitungan.

Contoh 2.8 Konsumsi Air

Sebuah rumah memiliki tangki penampungan air berbentuk silinder dengan diameter 2,2 meter, dan tingginya 2,8 meter. Apabila rata-rata penggunaan air 3 liter tiap menitnya, perkiraan berapa tangki air yang dihabiskan rumah tersebut selama 70 tahun.

Terlebih dahulu kita perkiraan jumlah menit dalam 70 tahun

$$\frac{70 \text{ tahun}}{1 \text{ tahun}} \frac{400 \text{ hari}}{1 \text{ hari}} \frac{25 \text{ jam}}{1 \text{ hari}} \frac{60 \text{ menit}}{1 \text{ jam}} \approx 4 \times 10^7 \text{ menit.}$$

Air yang dihabiskan selama 70 tahun

$$\frac{3 \text{ liter}}{1 \text{ menit}} 4 \times 10^7 \text{ menit} \approx 12 \times 10^7 \text{ liter.}$$

Kemudian kita perkiraan volume tangki

$$\pi r^2 t \approx 3 \cdot (1 \text{ meter})^2 3 \text{ meter} \approx 10 \text{ meter}^3 \approx 10^4 \text{ liter.}$$

Dengan demikian, dalam 70 tahun, rumah tersebut menghabiskan air sebanyak

$$\approx 12 \times 10^7 \text{ liter} \frac{1 \text{ tangki}}{10^4 \text{ liter}} \approx 12 \times 10^3 \text{ tangki}$$

Perhatikan bahwa melakukan taksiran artinya menghitung dengan perkiraan. Dalam hal ini, satu tahun dibulatkan sebagai 400 hari dan satu hari dibulatkan sebagai 25 jam, untuk memudahkan perkalian. Kemudian volume tangki dibulatkan menjadi 10 m^3 . Hasil taksiran adalah $1,2 \times 10^4$ tangki,

artinya, nilai tersebut berada pada orde 10^4 . Biasanya, dalam melakukan taksiran, cukup dinyatakan ordenya saja.

Setelah memperoleh nilai taksiran, hendaknya dilakukan pembulatan. Pembulatan tersebut maksudnya, apabila mantissa hasil yang kita peroleh sama dengan $10^{0,5} = 3,162$ atau lebih, maka dianggap sudah mencapai 10^1 , dan apabila kurang dari $10^{0,5}$, maka dianggap belum mencapai 10^1 . Misalnya pada Contoh 2.8 di atas, nilai yang diperoleh adalah $1,2 \times 10^4$. Angka 1, 2 nilainya kurang dari 3, 162 sehingga orde taksiran tetap berada pada 10^4 . Namun apabila taksiran diperoleh misalnya 5×10^4 , maka orde taksiran berada pada 10^4 . Karena mantissanya lebih dari 3, 162, artinya nilai taksiran tersebut lebih besar daripada $10^{0,5} \times 10^4$. Nilai yang lebih dari $10^{0,5}$ dalam penaksiran dapat dibulatkan sebagai 10^1 .

2.10 Tentang Pengukuran

Dalam melakukan pengukuran, fisikawan memiliki metode tersendiri yang diatur sedemikian rupa sehingga pengukuran yang dilakukan dapat dipertanggungjawabkan kesahihannya. Telah disebutkan di muka bahwa pengukuran adalah kegiatan membandingkan besaran suatu objek atau suatu fenomena dengan standar yang sesuai. Seseorang yang sedang mengukur jarak rumah tempat tinggalnya dengan warung mie ayam terdekat, sesungguhnya sedang membandingkan jarak rumah-warung itu dengan duplikat standar satu meter yang berupa *meteran*. Mengukur jarak rumah-warung sesungguhnya adalah kegiatan mencari jawaban bagi pertanyaan "Sama dengan berapa kali satu meterkah jarak rumah ke warung mie ayam terdekat?"

Ketika seorang fisikawan eksperimental sedang melakukan pengukuran, artinya ia sedang menentukan nilai suatu besaran dengan dengan bantuan alat yang disebut sebagai **alat ukur**. Hasil pengukuran kemudian disajikan sebagai perkalian antara sebuah bilangan riil dengan satuan yang dipakai. Bilangan riil dalam ungkapan hasil pengukuran menunjukkan hasil perbandingan (ratio) antara besaran yang diukur dengan duplikat standar besaran yang dipakai.

Dari caranya, pengukuran dapat digolongkan menjadi dua:

1. Pengukuran Tunggal

Pengukuran atau pengamatan yang dilakukan sekali saja untuk mengukur suatu besaran tertentu, disebut pengukuran tunggal

2. Pengukuran Berulang

Pengukuran yang dilakukan beberapa kali untuk mengukur suatu besaran tertentu, disebut pengukuran berulang.

Pengukuran tak langsung, yang hasil ukurnya diperoleh dari kombinasi berbagai pengukuran tunggal, termasuk pengukuran tunggal. Pengukuran kombinasi dapat dipandang sebagai pengukuran tunggal saja jika jumlah pengukuran sama dengan jumlah besaran yang tidak diketahui dalam pengukuran.

Dari sifat keluaran yang dihasilkan, pengukuran dapat digolongkan menjadi:

1. Pengukuran Statis

Pengukuran dikatakan statis jika keluaran yang dihasilkan tetap (konstan) selama

Kegiatan pengukuran adalah proses dalam menentukan nilai suatu besaran fisis dengan menggunakan alat ukur

Akurasi versus Presisi.
Suatu pengukuran dikatakan akurat apabila taksiran terbaik pengukuran tersebut dekat dengan nilai sebenarnya. Sementara, pengukuran dikatakan presisi apabila ralatnya kecil.

periode yang relatif lama. Contoh sepele misalnya, pengukuran massa dan pengukuran panjang. Contoh lain misalnya mengukur nilai rerata dari arus bolak-balik.

2. Pengukuran Dinamis

Pengukuran dikatakan dinamis jika keluaran yang dihasilkan berubah sebagai fungsi waktu. Contoh misalnya pengukuran fluks magnetik dengan menggunakan galvanometer balistik. Contoh lain misalkan pengukuran benda bersuhu tinggi dengan menggunakan termokopel. Tentu saja termokopel ditempelkan pada benda tersebut dalam waktu yang cukup singkat, karena jika terlalu lama dapat merusak termokopel tersebut. Dalam selang waktu pengukuran suhu yang singkat itu, skala yang terbaca berubah.

Sekalipun alat yang digunakan digital, apabila keluaran nilainya tetap dalam waktu yang lama, pengukuran digolongkan sebagai pengukuran statis. Sementara dalam pengukuran dinamis, eksperimentator perlu mengetahui sistem pengukuran secara rinci, termasuk persamaan diferensial yang terkait, serta fungsi transfer, dan lain-lain.

Ketidakpastian Pengukuran

Hasil pengukuran bukanlah besaran yang diukur. Ambilah sepotong kertas sembarang dan juga penggaris yang Anda miliki. Coba ukurlah lebar kertas yang anda punya. Misalkan anda melakukannya dengan baik sehingga anda dapat menyebutkan 20 cm. Pertanyaan yang mudah dijawab, apakah 20 cm itu merupakan lebar kertas Anda yang sesungguhnya? Tentu saja tidak. Dapatkah Anda mengetahui lebar kertas tersebut yang sesungguhnya? Tidak! Bahkan seorang fisikawan eksperimental yang hebat sekalipun tidak akan berhasil mengetahuinya.

Perlu ditekankan bahwa kegiatan mengukur selalu merupakan prosedur eksperimen, dan selalu melibatkan alat ukur. Alat ukur dibuat oleh manusia, dan selalu tidak sempurna. Maka yang tidak dapat dihindarkan dari pengukuran adalah kesalahan dan ketidakpastian. Oleh karena itu para fisikawan memperkenalkan konsep ketidakpastian atau ralat. Ralat atau ketidakpastian adalah sarana bagi para fisikawan yang melakukan pengukuran untuk mengungkapkan keragu-raguan mereka akan hasil ukur. Ralat diwujudkan dalam bentuk bilangan positif. Dengan menggunakan konsep ketidakpastian ini hasil pengukuran suatu besaran A disajikan dengan format $A \pm \delta A$, dengan A adalah rata-rata pengukuran dan δA adalah ralatnya. Sajian hasil pengukuran semacam itu diartikan bahwa nilai sesungguhnya besaran yang diukur itu terletak antara $A - \delta A$ sampai $A + \delta A$. Dengan kata lain lagi, nilai besaran A yang sesungguhnya tidak kurang dari $A - \delta A$ dan tidak lebih dari $A + \delta A$.

Sebagai contoh, hasil pengukuran tetapan Hubble oleh seorang fisikawan disajikan sebagai (71 ± 4) km.dt $^{-1}$.Mpc $^{-1}$. Artinya, menurut orang yang melakukan pengukuran, nilai tetapan Hubble yang sesungguhnya berada di antara nilai 67 km.dt $^{-1}$.Mpc $^{-1}$ sampai nilai 75 km.dt $^{-1}$.Mpc $^{-1}$.

Jadi, semakin besar ralat yang dituliskan merupakan pertanda semakin besar pula keraguan orang yang melakukan pengukuran akan hasil pengukurannya sendiri. Dan sebaliknya, semakin kecil ralat yang dituliskan semakin yakinlah orang yang melakukan pengukuran akan hasil pengukurannya. Kemampuan melakukan estimasi ralat merupakan salah satu ukuran kehebatan seorang eksperimentator.

Besar kecilnya ralat dapat pula dipahami sebagai kepastian (presisi) pengukuran. Semakin besar ralatnya, semakin kurang pasti pengukuran yang dilakukan. Sebalik-

Hal yang tidak akan pernah bisa dihindarkan dari pengukuran adalah kesalahan dan ketidakpastian

Nilai ralat menunjukkan tingkat presisi suatu pengukuran. Semakin kecil ralatnya, semakin presisi pengukuran tersebut.

nya, semakin kecil ralatnya, semakin pasti pengukurannya. Besar kecilnya ralat tergantung dari beberapa faktor : kualitas alat, kemampuan orang yang melakukan pengukuran dan jumlah pengukuran yang dilakukan. Untuk mengukur ketebalan buku ini, misalnya, pemakaian jangka sorong akan memberikan hasil yang lebih pasti ketimbang pemakaian penggaris biasa. Pengukuran yang diulang akan memberikan pembanding bagi data hasil pengukuran sebelumnya dan ini pada gilirannya akan meningkatkan kepastian. Cara menentukan ralat sangat bervariasi, bergantung pada cara pengukuran dan alat ukur yang dipakai.

Tentang Ralat Pengukuran

Dalam pengukuran selalu terdapat tiga unsur: alat ukur, metode pengukuran, dan eksperimentator. Masing-masing unsur tersebut selalu menyumbangkan ralat bagi suatu pengukuran sehingga secara umum, ralat suatu pengukuran dapat dinyatakan sebagai

$$\delta = \delta_a + \delta_m + \delta_e \quad (2.9)$$

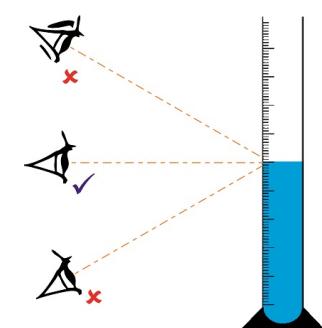
dengan δ adalah ralat pengukuran, δ_m adalah ralat yang disumbangkan oleh metode, δ_a adalah ralat alat, dan δ_e adalah ralat eksperimentator.

Ralat metode muncul karena teori yang tidak mencukupi tentang suatu fenomena yang dijadikan dasar pengukuran dan ketidakakuratan hubungan-hubungan yang digunakan untuk menaksir nilai besaran. Semakin baik pemodelan fisis yang digunakan, semakin realistik teori yang dijadikan dasar pengukuran, maka semakin kecil nilai ralat metode. Ralat alat disebabkan oleh ketidaksempurnaan alat yang digunakan. Ralat alat selalu muncul dalam setiap pengukuran, mengingat tidak ada alat ukur yang sempurna. Ralat eksperimentator muncul karena pengukuran dilakukan oleh manusia. Selalu ada kemungkinan kesalahan yang dilakukan oleh manusia, misalnya kesalahan dalam pembacaan skala. Kesalahan dalam pembacaan skala bisa berupa paralaks, yakni pengambilan perspektif yang salah. Paralaks terjadi apabila mata pengamat, penunjuk skala, dan objek pengamatan tidak berada pada satu garis lurus, sehingga pengamat mengira bahwa nilai yang terbaca merupakan hasil ukur. Padahal yang terbaca oleh pengamat adalah nilai lain pada skala karena antara mata pengamat, objek dan penunjuk skala membentuk sudut. Namun dengan berkembangnya instrumen yang digunakan, ralat eksperimentator ini nilainya tidak lagi signifikan. Dalam instrumen digital misalnya, ralat ini dianggap seolah tidak ada.

Dari sifatnya, ralat juga dapat dibedakan menjadi ralat sistematis dan ralat acak. Ralat Sistematis terjadi jika nilai keluaran suatu pengukuran untuk suatu besaran yang sama, tetap atau berubah dengan pola tertentu. Ralat sistematis yang teramat dapat diatasi dengan memasukkan faktor koreksi. Akan tetapi, tidak mungkin untuk menghilangkan ralat sistematis sepenuhnya dengan cara ini. Pasti selalu ada bagian dari ralat yang tersisa, dan sisanya tersebutlah yang menjadi ralat sistematis. Ralat acak. Andaikan ada suatu besaran yang diukur berulang kali. Jika ada perbedaan hasil dari beberapa pengukuran tersebut yang tidak dapat ditemukan pola dari perbedaan-perbedaan yang ada, maka ralat tersebut tergolong sebagai ralat acak.

Ralat acak dapat ditemukan dengan cara melakukan pengukuran terhadap besaran yang sama secara berulang dalam pengaturan eksperimen yang sama. Sementara ralat sistematis dapat ditemukan secara eksperimen me-

Eksperimentator dapat merancang sistem pengukuran yang realistik dengan tidak mengabaikan faktor-faktor yang terlibat dalam pengukuran. Ralat dalam suatu instrumen tidak hanya diketahui berdasarkan spesifikasi yang tertulis pada booklet manual. Misalnya jika eksperimentator menambahkan beberapa kabel dalam pengukuran, maka ralat dari transmisi kabel tersebut juga diperhitungkan. Oleh karena itu, pengukuran yang baik dapat dilakukan dengan cara membangun sendiri peranti eksperimen, sehingga eksperimentator benar-benar memahami segala faktor terkait pengukurannya.



Gambar 2.10: Paralaks.

Dalam pengukuran selalu diharapkan nilai keberulangan dan reproduksibilitas yang tinggi.

lalui perbandingan terhadap metode yang berbeda atau alat lain yang lebih akurat.

Dalam pengukuran ada istilah *keberulangan* yang menggambarkan kualitas pengukuran untuk besaran yang sama. Keberulangan yang baik artinya nilai pengukuran yang dihasilkan selalu mirip, tidak berbeda jauh. Pengukuran dengan keberulangan yang baik menunjukkan bahwa ralat acaknya kecil. Ada istilah lain lagi yaitu *reproduksibilitas* yang menggambarkan kedekatan hasil pengukuran untuk besaran yang sama jika diukur dengan pengaturan yang berbeda, atau mudahnya berbicara, reproduksibitas dapat dipahami sebagai ukuran seberapa jauh suatu eksperimen dapat diulang-ulang pada keadaan yang berbeda sedemikian rupa sehingga tak terbedakan satu dari yang lain. Misalnya di laboratorium yang berbeda atau dengan alat yang berbeda. Reproduksibilitas yang baik menunjukkan bahwa ralat sistematis maupun ralat acak bernilai kecil.

Ralat Pembacaan Skala

Ralat pembacaan skala tidak selalu sama dengan setengah kali skala terkecil. Ralat tersebut bergantung pada keterampilan dan kepercayaan diri eksperimentator.

Interpolasi artinya proses menaksir posisi penunjuk di antara tanda-tanda skala.

Misalkan kita sedang mengukur panjang pensil yang kita punya dengan menggunakan mistar yang mempunyai skala terkecil 1 mm. Kita letakkan salah satu ujung pensil tersebut lurus dengan nilai nol mistar. Panjang pensil tersebut terbaca di skala mistar, lebih dekat ke 127 mm daripada 126 mm atau 128 mm. Kita tidak dapat memastikan 127 mm adalah panjang pensil namun kita dapat tetapkan nilai tersebut sebagai *taksiran terbaik* dari pengukuran kita. Nilai sebenarnya dari panjang pensil tersebut pastilah terletak di antara 126,5 mm dan 127,5 mm.

Nilai ralat pengukuran dari hasil pembacaan skala tidak selalu sama dengan setengah skala terkecil. Nilai ralat tersebut bergantung pada kepercayaan diri eksperimentator dalam melakukan *interpolasi*. Interpolasi artinya proses menaksir posisi penunjuk di antara tanda-tanda skala. Eksperimentator dapat juga misalnya, menyatakan ralatnya sebagai 0,2 kali skala terkecil. Kemampuan eksperimen semacam ini meningkat seiring bertambahnya pengalaman dalam melakukan pengukuran.

Ketidakpastian Relatif

Ketidakpastian relatif adalah perbandingan ralat mutlak dengan taksiran terbaik. Ralat relatif besaran b misalnya, dinotasikan dengan $\delta b / |b|$

Tinjau suatu pengukuran panjang satu kilometer dengan ketidakpastian 10 cm. Pengukuran tersebut dapat dikatakan memiliki presisi yang tinggi dengan melihat kecilnya perbandingan antara ketidakpastian dengan nilai ukurnya. Pada pengukuran lain misalnya, nilai ukur adalah 30 cm sementara ketidakpastiannya 10 cm. Hal tersebut menunjukkan betapa kasarnya taksiran yang dilakukan, artinya tingkat presisinya rendah.

Secara umum, kualitas pengukuran tidak hanya ditunjukkan dengan ketidakpastian mutlaknya, tetapi juga perbandingan antara ketidakpastian mutlak dengan nilai taksiran terbaiknya. Perbandingan tersebut disebut sebagai *ketidakpastian relatif*. Ketidakpastian relatif tersebut biasanya disajikan dalam persen (perseratus).

2.11 Perambatan Ralat

Dalam proses pengukuran, tidak selalu besaran yang ingin diketahui nilainya merupakan besaran yang langsung diukur. Seringkali nilai besaran yang ingin diketahui ditentukan dari (merupakan fungsi) besaran yang lain, sedangkan ralat besaran-

besaran yang lain tersebut masing-masing sudah diketahui. Nilai besaran yang ingin kita tentukan, tentu saja memiliki ralat. Ralat itu diperoleh dari ralat besaran-besaran lain yang digunakan untuk menentukan besaran tersebut. Andaikan b adalah besaran yang nilainya akan ditentukan dan b bergantung pada x, y, z , dan seterusnya. Jadi $b = b(x, y, z, \dots)$. Ralat besaran b ditentukan dari ralat besaran-besaran x, y, z dan lain-lain.

Perambatan ralat merupakan metode menghitung ralat suatu besaran yang merupakan fungsi beberapa besaran lain yang langsung diukur.

Ralat Jumlahan dan Selisih

Suatu besaran x diukur langsung, dan diperoleh hasil ukurnya yaitu $\bar{x} \pm \delta x$. Kemungkinan nilai minimum besaran tersebut adalah $\bar{x} - \delta x$, dan kemungkinan nilai maksimumnya adalah $\bar{x} + \delta x$. Kemudian besaran lain, yaitu besaran y juga diukur langsung dan diperoleh hasil ukur $\bar{y} \pm \delta y$. Kemungkinan nilai minimum dan maksimumnya secara berturut turut yaitu $\bar{y} + \delta y$ dan $\bar{y} - \delta y$. Apabila nilai besaran yang ingin diketahui merupakan jumlahan dari besaran x dan y , dinyatakan sebagai $s = x + y$, dengan taksiran terbaiknya dinyatakan sebagai $\bar{s} = \bar{x} + \bar{y}$, maka secara berturut-turut, kemungkinan nilai minimum dan maksimumnya adalah $\bar{s} - (\delta x + \delta y)$ dan $\bar{s} + (\delta x + \delta y)$. Sama halnya apabila ada besaran lain yang merupakan selisih antara x dan y , misalkan dinyatakan sebagai $t = x - y$, dengan taksiran terbaiknya diberikan oleh $\bar{t} = \bar{x} - \bar{y}$, maka secara berturut-turut, kemungkinan nilai maksimum dan minimumnya adalah $\bar{t} - (\delta x + \delta y)$ dan $\bar{t} + (\delta x + \delta y)$. Oleh karena itu ketidakpastian baik untuk s maupun untuk t adalah sama, yaitu jumlahan ketidakpastian x dan y

$$\delta s = \delta t \approx \delta x + \delta y. \quad (2.10)$$

Dengan demikian, hasil ukur besaran s dan besaran t , masing-masing dapat dinyatakan sebagai $\bar{s} \pm \delta s$ dan $\bar{t} \pm \delta t$.

Mengalikan Dua Hasil Ukur

Andaikan kita ingin mengukur luas sebidang tanah yang berbentuk persegi panjang. Pasti kita mengukur terlebih dahulu panjang p dan lebar l tanah tersebut, kemudian kita kalikan kedua hasil ukur itu untuk mendapatkan luas tanah $L = p \times l$. Panjang dan lebar tanah yang kita ukur tersebut masing-masing memiliki ketidakpastian. Kita dapat tuliskan hasil pengukuran panjang sebagai

$$p = p_t \pm \delta p \quad (2.11)$$

dengan p adalah hasil ukur besaran panjang. Sementara p_t adalah taksiran terbaik besaran panjang, dan δp adalah ralat mutlaknya. Hasil ukur tersebut juga dapat disajikan dalam ketidakpastian relatifnya, sehingga ungkapannya

$$p = p_t \left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_t|} \right). \quad (2.12)$$

Eksperimen merupakan suatu seni melakukan pengukuran.

Dengan ungkapan yang serupa, hasil ukur lebar dapat disajikan dalam bentuk

$$l = l_t \left(1 \pm \frac{\delta l}{|l_t|} \right) \quad (2.13)$$

dengan l adalah hasil ukur lebar, l_t adalah taksiran terbaiknya, dan δl adalah ralat mutlaknya. Taksiran terbaik besaran luas dapat dituliskan sebagai

$$L_t = p_t l_t. \quad (2.14)$$

Nilai terbesar luas adalah

$$L_{\max} = p_t l_t \left(1 + \frac{\delta p}{|p_t|} \right) \left(1 + \frac{\delta l}{|l_t|} \right). \quad (2.15)$$

Sementara nilai terkecilnya adalah

$$L_{\min} = p_t l_t \left(1 - \frac{\delta p}{|p_t|} \right) \left(1 - \frac{\delta l}{|l_t|} \right). \quad (2.16)$$

Persamaan (2.15) dapat dituliskan sebagai

$$L_{\max} = p_t l_t \left(1 + \frac{\delta p}{|p_t|} + \frac{\delta l}{|l_t|} + \frac{\delta p \delta l}{|p_t||l_t|} \right) \quad (2.17)$$

Nilai $\delta p/|p_t|$ dan $\delta l/|l_t|$ sangat kecil, apalagi jika kedua nilai tersebut dikalikan, pastilah menjadi jauh lebih kecil lagi. Oleh karena itu, suku terakhir yang ada di dalam kurung persamaan (2.17) dapat diabaikan, sehingga menjadi

$$L_{\max} = p_t l_t \left(1 + \frac{\delta p}{|p_t|} + \frac{\delta l}{|l_t|} \right). \quad (2.18)$$

Nilai minimum pengukuran luas dapat ditentukan dengan cara yang sama

$$L_{\min} = p_t l_t \left(1 - \frac{\delta p}{|p_t|} - \frac{\delta l}{|l_t|} \right). \quad (2.19)$$

Maka secara umum, hasil ukur luas dapat dituliskan sebagai

$$L = L_t \left(1 \pm \frac{\delta L}{|L_t|} \right) \quad (2.20)$$

dengan

$$\frac{\delta L}{|L_t|} = \frac{\delta p}{|p_t|} + \frac{\delta l}{|l_t|} \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.21) di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa ralat relatif besar-an yang merupakan perkalian dua hasil ukur langsung dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan ralat relatif masing-masing hasil ukur tersebut. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (2.21) dengan $|L_t| = |p_t||l_t|$ maka didapatkan ralat mutlak pengukuran luas sebagai berikut

$$\delta L = \delta p |l_t| + \delta l |p_t| \quad (2.22)$$

Menjumlahkan Hasil Ukur

Andaikan suatu besaran b diperoleh dengan menjumlahkan besaran-besaran h_i dengan $i = 1, \dots, n$ dan besaran $-l_j$ dengan $j = 1, \dots, m$, atau dituliskan

$$b = \sum_{i=1}^n h_i - \sum_{j=1}^m l_j. \quad (2.23)$$

Pembaca diharapkan sudah terbiasa dengan notasi sigma. Notasi sigma (Σ) pada persamaan (2.23) di atas dimaksudkan untuk menyingkat penulisan penjumlahan beruntun, dari yang biasanya dituliskan sebagai

$$b = h_1 + h_2 + \cdots + h_n - (l_1 + l_2 + \cdots + l_m).$$

Ketidakpastian besaran b adalah jumlah ketidakpastian masing-masing peubahnya.

$$\delta b = \sum_{i=1}^n \delta h_i + \sum_{j=1}^m \delta l_j \quad (2.24)$$

Contoh 2.9 Menimbang massa senyawa campuran

Seorang kimiawan mencampurkan dua senyawa yang diberi label A dan B untuk keperluan sintesa nanopartikel. Hasil ukur diberikan dalam daftar berikut

$$\begin{aligned} M_A &= \text{massa senyawa A beserta wadahnya} \\ &= 444 \pm 17 \text{ gram} \\ m_a &= \text{massa wadah senyawa A} \\ &= 66 \pm 2 \text{ gram} \\ M_B &= \text{massa senyawa B beserta wadahnya} \\ &= 222 \pm 11 \text{ gram} \\ m_b &= \text{massa wadah senyawa B} \\ &= 14 \pm 1 \text{ gram} \end{aligned}$$

Massa total campuran senyawa A dan B adalah

$$M = M_A - m_a + M_B - m_b = 526 \text{ gram.}$$

Sesuai dengan persamaan (2.24), ralat ukur massa campuran senyawa A dan B adalah

$$\delta M = \delta M_A + \delta m_a + \delta M_B + \delta m_b = 31 \text{ gram.}$$

Dengan demikian, hasil pengukuran massa campuran senyawa tersebut dapat dituliskan sebagai

$$M \pm \delta M = (526 \pm 31) \text{ gram}$$

Mengalikan Hasil Ukur

Apabila besaran b diperoleh dari mengalikan besaran-besaran yang terukur

$$b = \frac{h_1 \times h_2 \times \dots \times h_n}{l_1 \times l_2 \times \dots \times l_m} \quad (2.25)$$

Apabila nilai besaran yang ingin diketahui merupakan jumlahan dari besaran-besaran yang langsung diukur, maka ralat mutlaknya merupakan jumlahan dari ralat masing-masing besaran yang langsung diukur itu. Sementara apabila nilai besaran yang ingin diketahui merupakan perkalian antara besaran-besaran yang langsung diukur, maka ralat relatifnya merupakan jumlahan dari ralat relatif masing-masing besaran yang langsung diukur itu.

Fisika sebenarnya bukan ilmu pasti. Andaikan kepastian adalah sesuatu yang dicari oleh para fisikawan, maka hal itu tidak pernah akan didapatkan. Hal yang dapat diusahakan adalah pencarian matematika paling maksimal untuk mempuisikan alam semesta. Pengukuran sejauh ini merupakan pendekatan logis untuk menuju matematika maksimal itu.

atau lebih singkatnya dituliskan sebagai

$$b = \frac{\prod_{i=1}^n h_i}{\prod_{j=1}^m l_j} \quad (2.26)$$

(notasi Π pada persamaan (2.26) digunakan untuk menyingkat penulisan perkalian beruntun) maka ketidakpastian relatifnya diberikan oleh

$$\frac{\delta b}{|b|} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta h_i}{|h_i|} + \sum_{j=1}^m \frac{\delta l_j}{|l_j|}. \quad (2.27)$$

Perkalian dengan Bilangan Eksak

Satu contoh lagi, andaikan kita mengukur besaran b yang merupakan perkalian antara bilangan eksak α dengan besaran h yang langsung kita ukur.

$$b = \alpha h \quad (2.28)$$

Bilangan eksak α tidak memiliki ralat. Sesuai dengan pembicaraan sebelumnya, ralat relatif besaran b dapat diperoleh dengan menjumlahkan ralat relatif α dan ralat relatif h . Karena ralat relatif α nol, maka

$$\frac{\delta b}{|b|} = \frac{\delta h}{|h|} \quad (2.29)$$

Besarnya b dinyatakan dengan

$$|b| = |\alpha h| \quad (2.30)$$

sehingga, ketidakpastian mutlaknya diberikan oleh

$$\delta b = \frac{|\alpha||h|}{|h|} \delta h \quad (2.31)$$

atau

$$\delta b = |\alpha| \delta h. \quad (2.32)$$

Besaran pangkat dari nilai ukur

Jika besaran b dinyatakan dengan

$$b = h^n \quad (2.33)$$

maka ralat relatif b dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\delta b}{|b|} = n \frac{\delta h}{|h|} \quad (2.34)$$

Ralat Kuadratur untuk Jumlahan

Apabila ralat masing-masing peubah fungsi saling bebas dan acak, ralat yang lebih realistik dan lebih kecil dapat diperoleh dengan penjumlahan kuadratur. Jika besaran b dinyatakan dengan persamaan (2.23), maka ralat δb dapat dinyatakan sebagai.

$$\delta b = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\delta h_i)^2 + \sum_{j=1}^m (\delta l_j)^2}. \quad (2.35)$$

Ralat Kuadratur untuk Perkalian

Apabila besaran b dinyatakan dengan persamaan (2.26), maka nilai ralat relatif $\delta b/|b|$ akan lebih kecil jika dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{\delta b}{|b|} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta h_i}{h_i}\right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\delta l_j}{l_j}\right)^2}. \quad (2.36)$$

Ketidakpastian fungsi satu peubah

Andaikan h merupakan besaran yang langsung diukur, dengan ketidakpastian δh besaran b yang ditentukan dari h memiliki ketidakpastian

$$\delta b = \left| \frac{db}{dh} \right| \delta h \quad (2.37)$$

Perambatan Ralat secara Umum

Sebelumnya banyak disampaikan kasus-kasus khusus mengenai perambatan ralat. Pada bagian ini akan diberikan metode yang paling umum untuk menghitung perambatan ralat.

Andaikan h_1, \dots, h_n diukur secara langsung dengan ralat $\delta h_1, \dots, \delta h_n$, dan hasil ukur tersebut digunakan untuk menghitung nilai besaran b yang merupakan fungsi (h_1, \dots, h_n) , maka

$$\delta b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial h_1} \delta h_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial h_n} \delta h_n\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial h_i} \delta h_i\right)^2}, \quad (2.38)$$

dengan mensyaratkan masing-masing ralat saling bebas dan acak. Ralat besaran b tidak akan pernah lebih besar daripada jumlahan ralat masing-masing peubahnya.

Notasi parsial (∂), misalnya pada $\partial b / \partial h_1$ maksudnya adalah besaran b diturunkan terhadap h_1 dengan menganggap peubah lain sebagai tetapan.

$$\delta b \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial b}{\partial h_i} \right| \delta h_i \quad (2.39)$$

Persamaan (2.38) merupakan persamaan "sakti" yang umum digunakan untuk menghitung perambatan ralat. Jika menemui besaran yang merupakan fungsi beberapa peubah, bagaimanapun bentuknya, dengan syarat ralat masing-masing peubah bebas satu dengan lainnya, maka persamaan (2.38) berlaku. Namun, apabila besaran yang ingin kita ketahui nilainya merupakan fungsi beberapa peubah dan ralat masing-masing peubah tersebut terikat (ralat yang satu mempengaruhi yang lain), maka ralat δb tidak sederhana. Eksperimentator yang baik akan berusaha menghilangkan kebergayutan (keterikatan) ralat antar masing-masing peubah tersebut. Bagi eksperimentator pemula yang kesulitan menghilangkan kebergayutan tersebut, dapat menggunakan persamaan (2.39).

Penjelasan lebih rinci mengenai ralat dapat dibaca pada buku-buku yang membahas metode pengukuran, misalnya [10].

Ketidakpastian Pengukuran Berulang

Kesulitan pengukuran tidak selalu terletak pada pembacaan skala, apalagi sekarang alat-alat dengan indikator digital telah banyak ditemukan. Contoh misalnya, kita mengukur periode bandul dengan menggunakan *stopwatch* digital. Alat yang digunakan digital, sehingga pembacaan skala hampir tidak mungkin terjadi kesalahan, namun pengukuran semacam ini melibatkan ralat eksperimentator. Ralat eksperimentator tersebut terbait dengan refleks menekan tombol *stopwatch*.

Andaikan dalam pengukuran pertama, kita peroleh periode bandul 2,4 detik. Dari satu kali pengukuran ini, kita tidak dapat berbicara mengenai ketidakpastian. Oleh karena itu, berikutnya kita lakukan lagi pengukuran, dan diperoleh hasil 2,3 detik misalnya. Singkatnya secara bertutut-turut, kita memperoleh hasil ukur (dalam satuan detik): 2,4; 2,2; 3; 2,5; 2,4. Biasanya, taksiran terbaik yang diambil adalah rerata hasil-hasil ukur tersebut, yaitu 2,4 detik.

Secara umum, andaikan \bar{b} merupakan rerata dari hasil ukur b_1, \dots, b_n . Nilai \bar{b} diperoleh melalui persamaan

$$\bar{b} = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \quad (2.40)$$

Ralat pengukuran berulang dapat diperoleh melalui persamaan (2.38). Sehingga, ralat b dapat dituliskan sebagai

$$\delta \bar{b} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial b_1} \delta b_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial b_n} \delta b_n \right)^2}. \quad (2.41)$$

Dari persamaan (2.40), kita ketahui bahwa

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial \bar{b}}{\partial b_n} = \frac{1}{n}. \quad (2.42)$$

Oleh karena pengukuran dilakukan berulang menggunakan alat yang sama, maka ralat masing-masing pengukuran sama

Dalam pengukuran berulang, taksiran terbaik diperoleh dengan cara mengambil rerata dari data-data yang bisa diterima.

$$\delta b_1 = \dots = \delta b_n = \delta b. \quad (2.43)$$

sehingga persamaan (2.41) dapat dituliskan sebagai

$$\delta \bar{b} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\delta b\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\delta b\right)^2} = \frac{\delta b}{\sqrt{n}}. \quad (2.44)$$

Uji Ketajaman 2.7 Ralat

1. Sebongkah emas ditimbang massanya $(93,67 \pm 0,02)$ g. Apabila volumenya terukur $(5,1 \pm 0,1)$ cm^3 , hitunglah rapat massa emas tersebut beserta ralatnya.
2. *Karat* adalah satuan kemurnian logam campuran emas. Karat suatu campuran emas dapat dihitung berdasarkan persamaan

$$K = 24 \frac{M_g}{M_m}, \quad (2.45)$$

dengan M_g adalah massa emas dalam campuran material, dan M_m adalah massa keseluruhan material campuran. Material tersebut ditimbang massanya, diperoleh $104,36 \pm 0,02$ g. Volume air yang dipindahkan ketika material tersebut dimasukkan ke dalam air adalah $4,35 \pm 0,03$ cm^3 . Tentukan karat emas tersebut beserta ralatnya.

2.12 Mengukur Medan Gravitasi Bumi

Metode yang sering digunakan untuk mengukur percepatan gravitasi adalah dengan menggunakan bandul. Pada bagian ini dibahas cara melakukan pengukuran tersebut termasuk perhitungan ketidakpastiannya menggunakan metode grafik dan regresi linier.

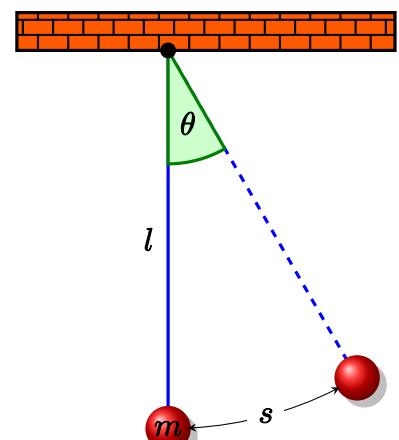
Ditunjukkan pada Bab Osilasi (buku jilid 2), bahwa periode bandul, untuk sudut θ yang kecil, diberikan oleh

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.46)$$

dengan l mewakili panjang tali dan g besar percepatan gravitasi Bumi. Dalam pengolahan data pengukuran, eksperimentator mencari hubungan linier antara peubah bebas dan peubah terikat, sehingga persamaan yang didapatkan adalah persamaan garis $y = A + Bx$. Nilai besaran yang diukur dapat berupa gradien, atau titik potong terhadap ordinat dari persamaan garis. Oleh karena itu, persamaan (2.46) diubah sedemikian rupa sehingga diperoleh hubungan linier.

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \quad (2.47)$$

Pada persamaan (2.47) di atas, dapat diketahui bahwa kuadrat periode bandul, berbanding lurus dengan panjang tali l . Panjang tali merupakan peubah



Gambar 2.11: Bandul Sederhana

bebas yang divariasi. Persamaan (2.47) di atas sudah berbentuk persamaan garis $y = Bx$, dengan T^2 sebagai sumbu- y , l sebagai sumbu- x , dan $4\pi^2/g$ sebagai gradien garis.

Sebagai contoh, dilakukan pengukuran percepatan gravitasi di laboratorium tempat penulis bekerja sehari-hari. Panjang tali bandul divariasi, dan periodenya diukur menggunakan *stopwatch*. Lebih tepatnya bukan mengukur periode, tetapi waktu yang diperlukan bandul untuk mengalami sepuluh kali osilasi, mengingat kesulitan dalam pengamatan menggunakan mata apabila yang diukur langsung adalah periode. Diperoleh data sebagai berikut

Tabel 2.6: Tabel Data Ukur Periode

l (cm)	$\bar{T}_1 \pm \delta\bar{T}_1$ (s)	$\bar{T}_2 \pm \delta\bar{T}_2$ (s)	$T_1 \pm \delta T_1$ (s)	$T_2 \pm \delta T_2$ (s)	$T \pm \delta T$ (s)	$T^2 \pm \delta T^2$
80	$17,90 \pm 0,50$	$17,86 \pm 0,50$	$1,790 \pm 0,050$	$1,786 \pm 0,050$	$1,788 \pm 0,035$	$3,19 \pm 0,12$
90	$19,16 \pm 0,50$	$19,07 \pm 0,50$	$1,916 \pm 0,050$	$1,907 \pm 0,050$	$1,912 \pm 0,035$	$3,65 \pm 0,13$
100	$20,07 \pm 0,50$	$20,26 \pm 0,50$	$2,007 \pm 0,050$	$2,026 \pm 0,050$	$2,017 \pm 0,035$	$4,06 \pm 0,14$
110	$20,96 \pm 0,50$	$20,95 \pm 0,50$	$2,096 \pm 0,050$	$2,095 \pm 0,050$	$2,096 \pm 0,035$	$4,39 \pm 0,15$
120	$21,89 \pm 0,50$	$21,73 \pm 0,50$	$2,189 \pm 0,050$	$2,173 \pm 0,050$	$2,181 \pm 0,035$	$4,75 \pm 0,15$
130	$22,79 \pm 0,50$	$22,85 \pm 0,50$	$2,279 \pm 0,050$	$2,285 \pm 0,050$	$2,282 \pm 0,035$	$5,20 \pm 0,16$
140	$23,61 \pm 0,50$	$23,87 \pm 0,50$	$2,361 \pm 0,050$	$2,387 \pm 0,050$	$2,374 \pm 0,035$	$5,63 \pm 0,16$
150	$24,60 \pm 0,50$	$24,51 \pm 0,50$	$2,460 \pm 0,050$	$2,451 \pm 0,050$	$2,456 \pm 0,035$	$6,03 \pm 0,17$

Dari data di atas, \bar{T}_1 adalah waktu untuk 10 getaran pada pengukuran pertama, dan \bar{T}_2 pada pengukuran kedua. Sementara T_1 dan T_2 secara berturut-turut adalah periode bandul yang diperoleh dengan cara membagi 10 dari \bar{T}_1 dan \bar{T}_2 . Kemudian, T adalah periode bandul, yang diperoleh dari rerata antara T_1 dan T_2 . Nilai T^2 adalah kuadrat periode, yang merupakan sumbu- y dalam grafik.

Ralat $\delta\bar{T}_1$ dan $\delta\bar{T}_2$ merupakan ralat refleks eksperimentator dalam menekan tombol stopwatch. Jadi, $\delta\bar{T}_1$ dan $\delta\bar{T}_2$ merupakan ralat yang diakibatkan oleh faktor manusia. Sementara δT_1 dan δT_2 merupakan perambatan ralat perkalian terhadap suatu bilangan, $\delta T_1 = (1/10)\delta\bar{T}_1$ dan $\delta T_2 = (1/10)\delta\bar{T}_2$ sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya pada persamaan (2.32). Kemudian, δT diperoleh dari persamaan (2.38). Begitu juga dengan δT^2 , diperoleh dengan cara perambatan ralat dari δT

$$\delta T^2 = \frac{\partial T^2}{\partial T} \delta T = 2T \delta T. \quad (2.48)$$

Setelah diperoleh data sebagaimana pada Tabel 2.6, eksperimentator selanjutnya melakukan pengolahan data.

Metode Grafik

Grafik sangat penting bagi fisikawan. Hanya dengan melihat grafik, seorang fisikawan mampu menjelaskan hubungan antara besaran-besaran fisis yang ada. Hanya dengan melihat grafik, fisikawan mampu menjelaskan evolusi suatu besaran, dan menjelaskan sifat-sifatnya. Grafik menjadi penting bagi para fisikawan terkait kegunaannya dalam menjelaskan hubungan empiris antara dua besaran, sekalipun belum didapatkan perumusan analitisnya. Dalam melakukan peneraan (kalibrasi) fisikawan juga menggunakan grafik.

Dalam contoh yang kita ambil, kita telah mengetahui hubungan antara besaran yang diukur dan besaran sebagai masukan, yaitu sebagaimana pada persamaan

(2.47). Andaikan kita melakukan suatu pengukuran, dan kita belum mengetahui hubungan antara besaran yang ingin kita ketahui nilainya dengan masukan yang kita berikan, maka kita harus menganalisis hubungan tersebut. Analisis dapat dilakukan dengan metode grafik.

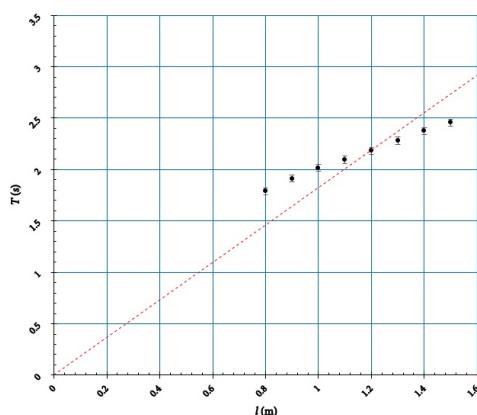
Terdapat beberapa prinsip yang harus diperhatikan dalam melukiskan grafik. Dalam buku ini tidak akan dijelaskan secara rinci mengenai hal ini, karena ini bukan buku yang membahas khusus mengenai pengukuran. Namun, akan diberikan pokok-pokoknya saja. Sebelum membuat grafik, eksperimentator hendaknya memastikan terlebih dahulu, besaran yang merupakan peubah bebas, atau masukan. Besaran masukan tersebut merupakan sumbu horizontal pada grafik, atau sumbu horizontal tersebut dapat berupa suatu fungsi yang memuat besaran masukan sebagai peubahnya. Sementara sumbu vertikal merupakan peubah terikat, atau luaran dari eksperimen, atau dapat juga suatu fungsi yang memuat luaran sebagai peubahnya. Seperti yang telah dicontohkan dalam bab ini, pada eksperimen pengukuran percepatan gravitasi, dipastikan sebagai sumbu horizontal adalah panjang tali, yang merupakan peubah bebas. Sementara sumbu vertikal adalah kuadrat periode bandul yang merupakan suatu fungsi yang bergantung pada waktu untuk sepuluh osilasi. Dalam hal ini, periode bukan merupakan besaran yang diukur secara langsung. Periode didapatkan dari waktu untuk sepuluh osilasi, dan kuadrat periode bergantung pada periodenya. Setelah memastikan besaran-besaran atau fungsi-fungsi yang menjadi sumbu-sumbu pada grafik, eksperimentator kemudian menentukan skala pada grafik. Skala di sini maksudnya adalah nisbah antara nilai besaran sebenarnya dengan satuan panjang di kertas grafik. Misalnya, seorang eksperimentator memilih setiap 1 cm di kertas grafik mewakili rentang suhu 10°C . Skala hendaknya dipilih yang mudah, tidak memuat banyak angka nol sehingga membingungkan. Rentang pemilihan yang baik permulaannya berada pada orde 10^{-1} hingga 10. Sebagai contoh, apabila melibatkan orde tinggi, misalnya pengaturan temperatur berada pada 400 hingga 1500 K, maka cukup dituliskan pada skala adalah angka 4, 5, ..., 16, tetapi disebutkan nilai pengali pada nama skala, yaitu $T (10^2\text{K})$.

Dalam memilih skala hendaknya yang realistik, sehingga tidak membuat titik-titik data mengumpul pada daerah kecil tertentu pada grafik namun menyisakan banyak ruang kosong di tempat lain. Ada estetika yang harus diperhatikan dalam membuat grafik. Garis pada grafik akan tampak kurang indah apabila terlalu curam atau terlalu landai. Biasanya garis alur data pada grafik diatur berada dalam kemiringan sekitar 45° . Cara mengatur kemiringan tersebut adalah dengan memilih skala yang tepat.

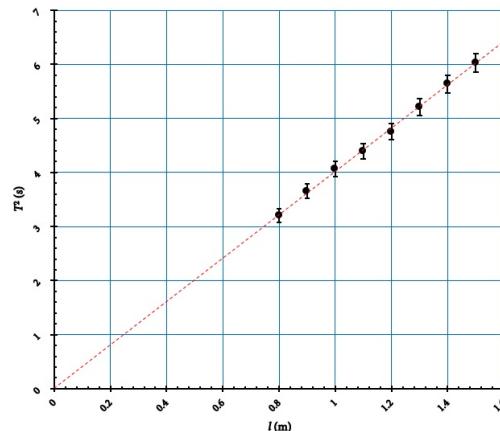
Tanda titik dalam grafik tidak harus berupa titik. Pembuatan tanda harus dibuat jelas. Apabila dalam satu grafik terdapat lebih dari satu himpunan data, maka harus dibuat simbol yang berbeda untuk setiap himpunan data. Misalnya, selain simbol titik digunakan simbol \times , atau \blacklozenge . Namun, simbol yang digunakan tidak boleh terlalu besar sehingga mengaburkan letak titik sebenarnya.

Sebagai contoh, untuk kasus eksperimen bandul dengan data pada Tabel 2.6, dapat dianalisa dengan menggambarkan titik-titik data pada grafik. Analisa tersebut bertujuan mengetahui hubungan antara masukan (besaran yang nilainya dapat diatur oleh eksperimentator) dengan luaran (besaran yang nilainya diukur). Dalam hal ini, yang ingin diketahui adalah hubungan antara panjang tali bandul dengan periode bandul. Sehingga, titik-titik pada grafik dengan koordinat (x, y) menggambarkan titik-titik dengan nilai panjang tali $l = x$ dan periode bandul $T = y$. Grafik tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.12. Dari grafik diketahui bahwa panjang tali tidak berbanding secara linier dengan periode bandul. Namun setelah dilakukan pengkajian data empiris, ditemukan bahwa panjang tali berbanding linier dengan

Gambar 2.12: Grafik yang menunjukkan hubungan antara besaran masukan dan luaran. Tampak bahwa panjang tali bandul tidak berbanding lurus dengan periodenya. Namun, panjang tali bandul berbanding lurus dengan kuadrat periode bandul.



(a) Periode bandul fungsi panjang tali.



(b) Kuadrat periode bandul fungsi panjang tali.

kuadrat periode bandul. Garis lurus yang ditarik dari titik $(0, 0)$ tidak menjadi garis alur pada grafik periode fungsi panjang tali. Sementara garis alur yang ditarik dari titik $(0, 0)$ pada grafik kuadrat periode fungsi panjang tali, membentuk garis lurus. Dalam kasus ini, garis alur haruslah ditarik dari titik $(0, 0)$ karena, dari persamaan $T^2 = (4\pi^2/g)l$ kita ketahui bahwa ketika panjang tali nol, maka periodenya nol (tentu saja tidak akan terjadi osilasi apabila tali tidak ada). Titik $(0, 0)$ haruslah dipastikan untuk dilewati garis alur, karena $(0, 0)$ merupakan data eksak. Pada kasus ini, tidak dibenarkan membuat garis alur tanpa data $(0, 0)$ kemudian melakukan ekstrapolasi hingga memotong sumbu- y .

Ekstrapolasi artinya melakukan perluasan data dari data yang diperoleh. Salah satu bentuknya adalah melakukan perpanjangan garis alur.

Contoh 2.10

Memilih Besaran yang Sesuai untuk Sumbu-Sumbu Koordinat

Andaikan Anda ingin menguji kebenaran hukum Boyle

$$pV = k, \quad (2.49)$$

dengan p adalah tekanan gas ideal, V adalah volume gas tersebut dan k suatu tetapan. Anda mengubah-ubah volume gas dan mengukur tekanan untuk setiap volume yang berbeda.

Dalam hal ini, mungkin Anda menggambar grafik dengan p sebagai sumbu- y dan V sebagai sumbu- x . Jika hal tersebut dilakukan, maka tidak menghasilkan persamaan garis lurus pada grafik dan tentunya akan mempersulit Anda dalam melakukan analisis data. Setelah Anda mengubah persamaan (2.49) menjadi

$$p = (1/V)k, \quad (2.50)$$

Anda telah mendapatkan persamaan garis lurus. Oleh karena itu, grafik digambar dengan p sebagai sumbu- y , dan $1/V$ sebagai sumbu- x , sehingga diperoleh garis lurus di atas kertas grafik.

Linearisasi Persamaan

Dalam eksperimen, tidak selalu hubungan linier masukan dan luaran langsung diperoleh. Seringkali persamaan tersebut tidak linier, sehingga perlu dilakukan 'linearisasi'. Sebagai contoh dalam kasus eksperimen bandul kita, panjang tali tidak berhubungan linier dengan periode sehingga, kita lakukan linearisasi terhadap per-

samaan tersebut untuk memperoleh hubungan linier.

Contoh 2.11 Linearisasi Persamaan

Gambar (2.13) menunjukkan hasil pengamatan suatu besaran yang disebut luminositas bintang-bintang, yakni energi yang dipancarkan tiap satu satuan waktu oleh bintang-bintang tersebut. Grafik tersebut memperlihatkan hubungan antara luminositas bintang-bintang (dinyatakan dalam luminositas Matahari) dengan massa bintang-bintang (dinyatakan dalam massa Matahari). Jika yang dituangkan sebagai sumbu datar dan sumbu tegak secara berturut-turut adalah massa bintang dan luminositas bintang, maka tidak akan diperoleh grafik berupa garis lurus. Jika yang dituangkan sebagai sumbu datar dan sumbu tegak berturut turut adalah logaritma massa dan logaritma luminositas, maka diperoleh grafik berupa garis lurus seperti terlihat pada gambar.

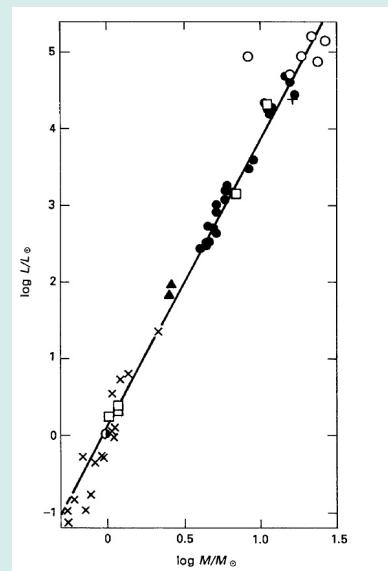
Dari grafik tersebut kita bisa menghitung gradien (kemiringan), sebesar 3,85. Jadi,

$$\log(L/L_{\odot}) = (3,85) \log(M/M_{\odot}) = \log(M/M_{\odot})^{3,85}, \quad (2.51)$$

karena grafik melalui titik (0,0). Jadi hubungan antara massa dan luminositas dapat dinyatakan sebagai

$$L = L_{\odot}(M/M_{\odot})^{3,85}. \quad (2.52)$$

Dalam hal ini luminositas bintang ditentukan oleh massa bintang itu dan kenyataan menyatakan bahwa massa bintang merupakan parameter yang menentukan struktur dan sifat-sifat bintang.



Gambar 2.13: Grafik $\log(L/L_{\odot})$ fungsi $\log(M/M_{\odot})$

Regresi Linier

Dalam suatu pengukuran, eksperimentator mendapatkan titik-titik data. Titik-titik data merupakan pasangan bilangan yang berupa masukan dan keluaran. Titik data tersebut biasa dilambangkan $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$, dengan x_1, \dots, x_n merupakan peubah bebas yang dipilih oleh eksperimentator sebagai masukan, dan y_1, \dots, y_n merupakan peubah terikat atau keluaran, yang terkait dengan peubah bebas secara linier. Titik-titik data tersebut membentuk suatu garis alur yang memenuhi persamaan $y = A + Bx$. Sebagai contoh dalam eksperimen di atas, persamaan $T^2 = (4\pi^2/g)l$ menunjukkan bahwa nilai g yang kita cari termuat dalam gradien garis. Nilai taksiran terbaik gradien garis, yaitu B dapat diperoleh melalui suatu metode statistik yang diwakili persamaan berikut

$$B = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\Delta}, \quad (2.53)$$

dengan

$$\Delta = n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2. \quad (2.54)$$

Garis alur, adalah garis lurus imajiner yang menjadi alur data. Garis alur tidak menyentuh seluruh titik data, tetapi menyentuh banyak data, atau berada di dekat titik-titik data.

Sementara nilai taksiran terbaik A atau titik potong garis alur terhadap sumbu ordinat diperoleh melalui ungkapan

$$A = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{\Delta}. \quad (2.55)$$

Ralat statistik y dapat dihitung dengan persamaan

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i)^2}. \quad (2.56)$$

Ralat statistik A dan ralat B secara berurutan diberikan oleh persamaan

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}} \quad (2.57)$$

dan

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}}. \quad (2.58)$$

Penjelasan lebih rinci mengenai metode statistik pengukuran akan diberikan pada bab tersendiri pada buku lain dengan topik pengukuran.

Pada metode regresi linier, sebenarnya ralat untuk masing-masing data ukur tidak begitu esensial, karena ralat akan dihitung berdasarkan metode statistik. Bagaimana ralat ukur bisa menjadi tidak esensial? Bukankah ketelitian suatu pengukuran selalu bergantung pada ralatnya? Memang benar, namun dalam hal ini, orde ralat berada jauh di bawah orde taksiran terbaik pengukuran, sehingga ralat yang kecil tersebut hampir tidak terlalu jelas tergambar pada kertas grafik. Selain itu, nilai besaran yang ingin diketahui bukan merupakan besaran yang langsung diukur, melainkan sebagai peubah suatu fungsi besaran lain yang langsung diukur. Sehingga ralat ukur merupakan perambatan ralat. Dalam hal ini, besaran yang ingin diketahui nilainya termuat dalam gradien persamaan garis alur data, yang artinya, perambatan ralat untuk besaran ini dapat diperoleh melalui regresi linier. Jika seorang eksperimenter ingin mengetahui nilai suatu besaran yang tidak dapat diukur langsung, maka yang ia lakukan adalah pembuatan model dari fenomena fisis tersebut, dan mencari hubungan linier antara besaran masukan yang ia berikan dengan fungsi suatu besaran lain yang menjadi luarannya sehingga persamaannya berbentuk linier. Perlu ditekankan bahwa tidak semua data eksperimen dapat diolah dengan metode regresi linier.

Data Eksperimen pada Tabel 2.6 dapat diolah menggunakan regresi linier. Apabila digunakan persamaan (2.55) diperoleh

$$B \pm \sigma_B = (4,00 \pm 0,03) \text{ m}^{-1}\text{s}^2. \quad (2.59)$$

Telah kita ketahui bahwa

$$B = 4\pi^2/g, \quad (2.60)$$

sehingga

$$g = 4\pi^2/B. \quad (2.61)$$

Dengan menggunakan persamaan untuk menghitung perambatan ralat, yaitu persamaan (2.38) diperoleh

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial B} \sigma_B = \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{4\pi^2}{B} \right) \sigma_B = \frac{4\pi^2}{B^2} \sigma_B. \quad (2.62)$$

Dengan memasukkan hasil pada persamaan (2.59) ke persamaan (2.61) dan (2.62), didapatkan hasil

$$g \pm \delta g = 9,87 \pm 0,01 \text{ ms}^{-2}. \quad (2.63)$$

Uji Ketajaman 2.8 Grafik dan Regresi

1. Anda ingin menyelidiki hukum Coulomb. Anda melakukan eksperimen dengan neraca puntir. Telah diketahui bahwa hukum Coulomb dinyatakan dalam persamaan $F = (1/4\pi\epsilon_0)q_1q_2/r^2$. Anda ingin mengonfirmasi ungkapan tersebut. Anda mengatur jarak dua bola bermuatan dan mengukur gaya yang terjadi. Tentukan persamaan garis yang sesuai dengan $y = A + Bx$ untuk dilukiskan pada kertas grafik, tentukan sumbu- x dan sumbu- y nya.
2. Anda melakukan eksperimen untuk mengetahui tetapan suatu pegas. Kita ketahui bahwa besarnya gaya pemulih pada pegas dinyatakan sebagai $F = kx$, dengan k tetapan pegas dan x adalah pertambahan panjang pegas. Anda memberikan gaya, berupa beban pada pegas, kemudian Anda ukur pertambahan panjangnya. Tentukan persamaan yang sesuai dengan $y = A + Bx$ untuk dilukiskan pada grafik.
3. Andaikan Anda menguji apakah suatu material tunduk pada hukum Ohm. Anda telah mengatur rangkaian, dan mengubah-ubah beda potensial antara kedua ujung penghantar. Anda mencatat arus yang mengalir untuk beda potensial yang berbeda. Hukum Ohm dapat dinyatakan dengan $I = V/r$, dengan I adalah arus, V beda potensial, dan r hambatan. Tentukan persamaan yang sesuai dengan $y = A + Bx$ untuk dilukiskan pada grafik.
4. Anda ingin mengetahui nilai fokus suatu lensa cembung. Anda telah mengatur peranti eksperimen dan siap melakukan pengukuran. Telah diketahui bahwa hubungan antara fokus lensa dengan jarak benda dan jarak bayangan diberikan oleh $1/f = 1/s_o + 1/s_i$, dengan f adalah jarak fokus lensa, s_o adalah jarak benda terhadap lensa, dan s_i adalah jarak bayangan terhadap lensa. Tentukan persamaan yang sesuai dengan $y = A + Bx$.

2.13 Pengukuran Klasik versus Pengukuran Kuantum

Pengukuran sebenarnya tidak sesederhana yang kita pandang selama ini. Apabila Anda mengukur panjang suatu meja pada saat *sekarang*, kemudian Anda memberikan meja tersebut dan Anda mengukurnya lagi *satu jam kemudian*, maka Anda akan mendapatkan hasil ukur yang sama. Begitu juga misalnya jika Anda mengetahui secara pasti letak rumah Anda. Esok hari, tentu Anda masih akan mendapatkan rumah Anda terletak di lokasi tersebut. Namun peristiwa semacam itu hanya terjadi pada skala makroskopis, pada sistem-sistem klasik. Pengukuran semacam itu tidak dapat dilakukan pada sistem kuantum. Andaikan rumah Anda bersifat kuantum, maka esok hari Anda belum tentu menemukannya berada pada lokasi yang sama dengan hari ini. Peristiwa semacam itu terjadi pada sistem mikroskopis. Pada elektron misalnya.

Sistem Klasik versus Sistem Kuantum

Sistem fisis merupakan idealisasi dari gejala alamiah.

Pengukuran yang biasa kita lakukan selama ini, misalnya mengukur tinggi badan, mengukur kecepatan kendaraan, mengukur temperatur, dan lain sebagainya, sebenarnya merupakan pengukuran secara klasik. Suatu pengukuran disebut sebagai pengukuran klasik apabila yang diukur merupakan besaran-besaran pada sistem fisis yang bersifat klasik.

Suatu gejala alamiah digambarkan sebagai sistem fisis klasik apabila gejala alamiah tersebut bersifat makroskopis, yakni pengukuran yang dilakukan terhadap sistem tersebut *tidak mengusiknya*. Sebenarnya *tidak* ada pengukuran yang *tidak* mengusik sistem fisis. Namun pada domain makroskopis, usikan tersebut sangat dapat diabaikan, sehingga gejala alamiah dapat direduksi menjadi sistem klasik. Dalam kasus tersebut, dianggap tidak ada usikan dari kegiatan pengukuran atau eksperimen.

Sistem makroskopis digambarkan secara klasik, sementara sistem mikroskopis digambarkan secara kuantum.

Sebagai contoh sederhana, andaikan Anda mengukur suhu suatu cairan dalam bejana. Hal yang Anda lakukan adalah mencelupkan pangkal termometer ke dalam cairan tersebut. Keberadaan pipa termometer tersebut tentu saja mengusik keadaan sebenarnya yang ingin Anda ketahui dari cairan tersebut. Termometer yang Anda celupkan telah mengganggu keseimbangan termodinamis yang telah dimiliki cairan tersebut, sehingga diperoleh keseimbangan yang baru. Mudahnya, termometer yang dicelupkan telah mengubah suhu cairan yang akan diukur. Akan tetapi, karena gangguan itu sangat kecil dan selalu dapat diusahakan sekecil mungkin, maka perbedaan suhu yang terbaca pada skala termometer dengan suhu sebenarnya dapat diabaikan. Dalam kasus ini, cairan tersebut secara keseluruhan dapat dipadandang sebagai sistem fisis makroskopis dan digambarkan secara klasik.

Tidak semua gejala alamiah dapat diidealasi menggunakan sistem makroskopis. Untuk gejala-gejala dengan ukuran yang relatif kecil, idealisasi secara makroskopis tidak lagi cukup untuk menggambarkan gejala alamiah tersebut. Fenomena tersebut disebut sebagai sistem mikroskopis. Suatu gejala alamiah diidealasi dengan sistem fisis miroskopis apabila gangguan-gangguan yang disebabkan oleh pengukuran tidak lagi dapat diabaikan. Sistem yang demikian ini *harus* digambarkan secara kuantum, dan disebut sebagai sistem kuantum.

Struktur Esensial

Sistem klasik dan sistem kuantum memiliki struktur esensial bersama. Struktur esensial tersebut maksudnya adalah hal-hal mendasar yang pasti ada dalam penggambaran setiap gejala alamiah secara matematis. Struktur esensial tersebut antara lain adalah:

1. **Ruang Keadaan.** Ruang keadaan adalah suatu konstruksi matematis untuk menggambarkan keadaan suatu sistem. Sesuai dengan namanya, ruang keadaan adalah himpunan yang berisi keadaan-keadaan yang mungkin dimiliki oleh suatu sistem fisis yang ditinjau. Ruang keadaan disebut juga sebagai *ruang fase*. Sebagai contoh mudahnya, benda yang bergerak dalam satu dimensi, misalnya manik-manik pada kawat yang sangat panjang. Manik-manik tersebut memiliki ruang keadaan \mathbb{R}^2 , yang berisi titik-titik (x, p) pasangan posisi dan momentum manik-manik tersebut. Titik-titik pada ruang \mathbb{R}^2 disebut sebagai *keadaan manik-manik* tersebut.
2. **Aljabar Observabel.** Besaran fisis yang dapat diukur disebut sebagai *observabel*. Temperatur, posisi, momentum, dan lain-lain yang diukur merupakan observa-

bel. Namun lebih lanjut akan dijelaskan bahwa sejatinya untuk menjelaskan "semua hal" dari suatu sistem fisis cukup diketahui posisi dan momentumnya saja. Besaran yang lain dapat diperoleh melalui kedua besaran tersebut (dapat dibaca pada buku jilid 3). Himpunan yang berisi observabel-observabel disertai dengan aturan pengoperasian antar observabel tersebut disebut sebagai aljabar observabel.

3. **Aturan Akses.** Aturan akses adalah cara agar eksperimentator dapat mengambil informasi mengenai suatu sistem fisis. Prosedur ini menuntun seorang eksperimentator untuk dapat mengetahui nilai-nilai yang akan keluar sebagai hasil ukur apabila suatu besaran fisis diukur beserta peluang masing-masing nilai keluar sebagai hasil ukur apabila suatu sistem berada pada keadaan tertentu. Terdapat keadaan khusus yang disebut sebagai swakeadaan. Swakeadaan adalah keadaan yang membuat peluang hasil ukur tertentu menjadi pasti. Artinya, apabila sistem berada pada swakeadaan, maka hasil ukurnya pasti satu bilangan tertentu, yang apabila pengukuran diulang-ulang berapa kali pun, hasilnya tetap sama. Nilai yang terkait dengan swakeadaan tersebut disebut sebagai swanilai. Apabila Anda mengatur meja berada pada posisi x , dan mengukur posisinya *sekarang, nanti*, ataupun, *esok hari*, maka Anda akan memperoleh hasil ukur yang sama. Dengan kata lain, posisi meja tidak berubah diukur berapa kali pun. Namun hal tersebut tidak berlaku pada sistem kuantum. Andaikan meja tersebut bersifat kuantum, maka Anda belum tentu menemukannya berada di tempat yang sama dengan ketika Anda meletakkannya. Oleh karena itu, secara matematis, prosedur mengambil informasi dari suatu sistem fisis dimodelkan dengan peluang.
4. **Dinamika.** Dinamika suatu sistem fisis adalah perkembangan keadaan sistem fisis itu seiring berubahnya parameter. Secara matematis, dinamika suatu sistem fisis dimodelkan dengan kurva-kurva berparameterkan waktu pada ruang keadaan. Kurva-kurva tersebut merupakan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial yang khas untuk setiap model. Persamaan diferensial ini disebut sebagai persamaan gerak bagi sistem fisis yang ditinjau. Jadi, dinamika menggambarkan lintasan perjalanan suatu sistem fisis dalam ruang keadaan. Dalam ruang keadaannya, lintasan-lintasan setiap sistem bersifat deterministik. Artinya, apabila pada suatu saat tertentu diketahui keadaannya, maka keadaan sistem tersebut setiap saat dapat pula diketahui [8].

Melakukan Eksperimen dan Bermain Judi itu Beda Tipis

Ketika Anda melempar sebuah dadu normal, terdapat 6 nilai yang mungkin keluar. Salah satu 6 angka tersebut pastilah muncul sebagai keluaran dari pelemparan dadu yang Anda lakukan. Himpunan nilai-nilai yang mungkin muncul disebut sebagai ruang sampel atau spektrum. Dalam pelemparan dadu yang Anda lakukan, spektrumnya adalah $\{1, 2, \dots, 6\}$. Eksperimen atau pengukuran tidak lain adalah pengundian sebagaimana melempar dadu. Pada sistem kuantum, mengukur adalah "memaksa" salah satu anggota spektrum untuk keluar sebagai hasil ukurnya. Apabila suatu sistem diatur pada keadaan tertentu, belum tentu kita mendapatkannya pada keadaan tersebut ketika mengukurnya. Sementara pada sistem klasik, setiap keadaan merupakan swakeadaan. Jika suatu sistem klasik diatur pada sembarang keadaan yang terkait dengan suatu swanilai, maka swanilai itu pastilah selalu menjadi hasil ukurnya. Satu ruang sampel pada pengukuran klasik, hanya berisi satu

anggota, yaitu swanilai itu. Dengan demikian, berapa kali pun suatu sistem klasik diukur, maka hasil ukurnya akan tetap sama.

Untuk memudahkan menjelaskan, dapat dipahami melalui ilustrasi berikut. Ambil contoh elektron sebagai sistem mikroskopis. Ketika Anda melakukan pengukuran pada elektron tidak sama dengan ketika Anda melakukan pengukuran pada meja kerja Anda. Elektron tidak diam sebagaimana meja kerja Anda. Elektron "loncat" ketika diukur. Ketika Anda memperoleh informasi yang pasti mengenai posisinya, maka Anda kehilangan informasi mengenai momentumnya, begitu juga sebaliknya. Itulah sistem kuantum. Ketika suatu sistem kuantum sedang "menjalani" dinamikanya, kemudian saat itu Anda ukur, maka dinamika tersebut berubah, lintasan partikel berubah. Berbeda dengan sistem klasik yang tidak akan berubah dinamikanya apabila diukur.

The more precisely the position is determined, the less precisely the momentum is known in this instant, and vice versa.

-- Werner Heisenberg, Uncertainty Paper, 1927.

(*Semakin presisi posisi ditentukan, maka semakin tidak presisi pengetahuan kita akan momentumnya pada saat itu, begitu juga sebaliknya*). Dalam sistem kuantum dikenal superposisi keadaan. Mudahnya, dimungkinkan sistem berada dalam keadaan yang lain apabila sistem diatur berada pada keadaan tertentu. Elektron bisa berada pada tak hingga tempat pada suatu waktu.

2.14 Pengukuran adalah Pacuan

Bagi para fisikawan, pengukuran dalam kasus-kasus tertentu, bukan keterpaksaan. Pengukuran merupakan perlombaan. Dalam pengertian, orang berlomba untuk mendapatkan hasil ukur seteliti dan setepat mungkin. Kita akan membicarakan beberapa "perlombaan" itu.

Eksperimen Cavendish

Eksperimen Cavendish adalah eksperimen untuk menentukan tetapan gravitasi G yang dilakukan oleh Henry Cavendish pada tahun 1798 untuk menentukan nilai tetapan gravitasi umum yang muncul dalam hukum gravitasi Newton.

Alat Cavendish yang sebenarnya terdiri atas bola timbal 12 inci dengan massa masing-masing 348 pon. Kedua bola tersebut digunakan untuk menarik dua bola lain yang lebih kecil. Dua bola yang kecil masing-masing berdiameter 2 inci dan bermassa 1,61 pon. Jarak antara bola kecil dan bola besar adalah 9 inci. Jarak antara kedua bola kecil adalah 6 kaki, dan dihubungkan oleh batang kayu. Batang tersebut dihubungkan pada kawat dengan sudut puntir dan reaksi pemulihnya telah diukur sebelumnya. Dua bola besar juga digantung, tetapi pada eksperimen Cavendish, kedua bola itu dianggap bergeming. Hal ini diusahakan dengan memilih cara menggantung yang mampu mencengah terjadinya gerak. Pada batang dipasang cermin. Bola besar dan bola kecil akan saling tarik menarik sehingga membuat lengan yang menahan bola kecil berputar. Jika lengan tersebut berputar, maka kawat penahanannya akan terpuntir.

Pada alat yang lebih modern, bola besar benar-benar dibuat bergerging. Sementara pada eksperimen Cavendish, tentu saja bola besar tidak benar-benar bergerging mengingat cara mengurnya adalah dengan digantung. Namun Cavendish tidak pernah mengukur perpindahan yang terjadi pada bola besar. Pada Gambar (2.14) tampak ada garis yang keluar dari dinding. Alat tersebut digunakan hanya untuk memindahkan bola besar ke dalam atau ke luar. Tegangan pada neraca puntir ini terlalu besar untuk diimbangi oleh gaya-gaya yang terlibat di eksperimen, maka tidak ada gaya yang bisa diungkapkan dengan cara tersebut. Cavendish mengukur pembelokan salah satu bola kecil dan memperoleh hasil ukur 0,16 inci.

Hal tersebut di atas dapat dianggap sebagai informasi yang krusial. Akan tetapi, ada yang lebih krusial lagi yang diabaikan. Kita diberi tahu bahwa alat tersebut dimasukkan dalam kotak untuk melindungi dari gangguan angin. Kotak ini terbuat dari dinding kayu setebal 2 kaki. Atapnya setinggi 10 kaki dan dindingnya seluas 10 kaki persegi. Kita diberi tahu bahwa alat tersebut diletakkan di dalam gudang meskipun kita tidak diberi tahu, jenis material yang digunakan untuk membangun dinding tersebut.

Secara singkat, proses penentuan tetapan gravitasi G yang dilakukan oleh Cavendish dapat dijelaskan melalui ungkapan berikut

$$\kappa\theta = LF \quad (2.64)$$

dengan κ adalah koefisien torsi kawat penggantung bola kecil, θ adalah sudut defleksi neraca, L adalah panjang batang yang menghubungkan kedua bola kecil, dan F adalah besarnya gaya. Besarnya gaya yang diakibatkan oleh gravitasi diberikan oleh

$$F = \frac{GmM}{r^2} \quad (2.65)$$

dengan G adalah tetapan gravitasi umum, m adalah massa bola kecil, M adalah massa bola besar, dan r adalah jarak antara bola besar dan bola kecil. Dengan memasukkan persamaan (2.65) ke persamaan (2.64) diperoleh

$$\kappa\theta = \frac{LGmM}{r^2}. \quad (2.66)$$

Sementara tetapan torsi κ diperoleh dari periode osilasi neraca torsi

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad (2.67)$$

dengan I adalah momen inersia batang penghubung bola kecil yang diberikan oleh

$$I = \frac{mL^2}{2} \quad (2.68)$$

sehingga

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{2\kappa}}. \quad (2.69)$$



Gambar 2.14: Replika Alat Pengukuran tetapan Gravitasi oleh Cavendish. Satu-satunya replika yang menyerupai aslinya ada di Science Museum (gambar diambil dari <http://milesmathis.com>)

Alat untuk mengukur tetapan Gravitasi sebenarnya bukan ide Cavendish. John Mitchell merancang alat tersebut, namun ia meninggal sebelum menyelesaikan eksperimennya. Alat tersebut berpindah ke tangan Cavendish dan kemudian dimodifikasi. Secara terpisah, neraca puntir ini juga ditemukan oleh Coulomb, untuk mengukur tetapan elektrostatik.

Tetapan Gravitasi yang diperoleh Cavendish adalah $G = 6,74 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Oleh karena itu, tetapan Gravitasi dapat diperoleh

$$G = \frac{2\pi^2 L r^2 \theta}{MT^2}. \quad (2.70)$$

Cara di atas merupakan cara yang "baku" digunakan di universitas sebagai praktikum untuk mahasiswa tahun pertama. Namun metode neraca puntir tersebut tidak akurat, mengandung banyak kesalahan.

Cavendish mendapatkan gaya di ujung-ujung batang penghubung bola timbal kecil yaitu 7×10^{-8} N, dengan total massa yang diperhitungkan 350 pon. Cavendish mempertimbangkan gaya penggeraman yang terlibat adalah hanya torsi (puntiran) dari neraca torsii. Sementara, tekanan atmosfer diabaikan. Tekanan atmosfer besarnya 65 newton per inci kuadrat, semestinya tidak seharusnya diabaikan [2],[5]. Tekanan tersebut dapat diabaikan apabila pada zaman Cavendish, teknologi pompa vakum digunakan untuk mengosongkan udara pada sistem eksperimen, kenyataannya tidak demikian. Dinding setebal 2 kaki juga diabaikan oleh Cavendish, padahal dinding tersebut menyumbang massa yang besar terkait interaksi gravitasi maupun interaksi elektromagnetik [5].

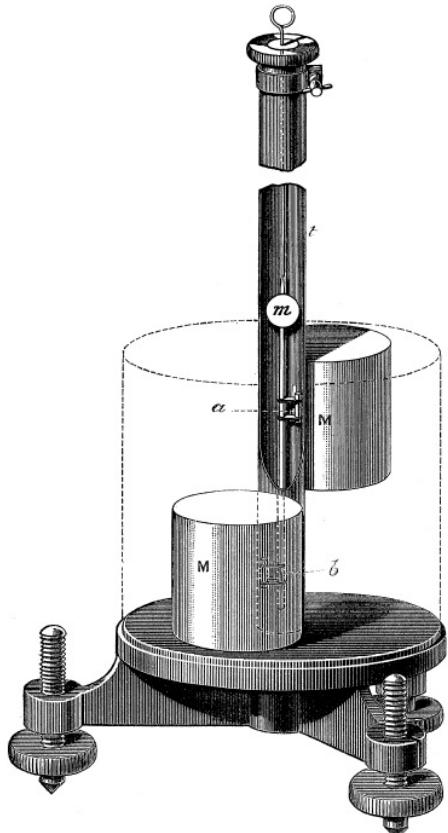
Eksperimen Cavendish tersebut telah menjadi dogma. Artikel yang isinya melawan Cavendish dicabut dari peredaran, sebagai contoh yaitu yang ditulis oleh S.J Barnett, pada 1902, abstraknya dihapus oleh Harvard semenjak jumlah pembacanya mulai meningkat [5]. Artikel lain yang dihapus yaitu yang ditulis oleh P.V. Moore et. al. tahun 1994 dan artikel oleh J.K. Hoskins pada tahun 1981. Namun, terdapat banyak eksperimen lain yang mengonfirmasi Cavendish.

Eksperimen Cavendish dilakukan kembali oleh Reich pada tahun 1837, Baily pada tahun 1842, kemudian Cornu dan Baille. Tujuan para eksperimentator tersebut melakukan kembali eksperimen Cavendish adalah untuk meningkatkan kepekaan dari peralatan sehingga didapatkan hasil ukur yang lebih akurat. Eksperimen mereka diatur hampir sama dengan cara pengaturan yang dilakukan oleh Cavendish. Cornu merancang alat yang mirip namun mengurangi dimensinya menjadi seperempat dari aslinya.

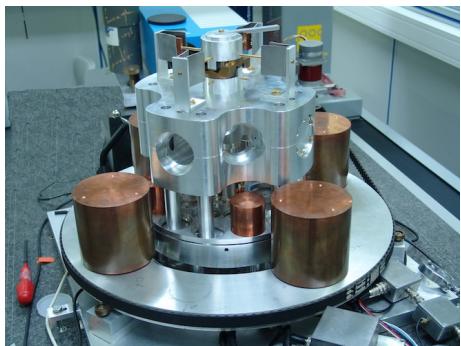
Hal lain yang dilakukan Cornu adalah menggunakan raksa sebagai massa penariknya sehingga dapat disalurkan melalui pipa tanpa mengganggu konfigurasi alat. Ditambah lagi, kotak penutup alat berupa logam yang terhubung ke Bumi untuk mencegah terjadinya usikan listrik. Eksperimen lain yang mengonfirmasi Cavendish juga dilakukan oleh C.V. Boys [2] pada tahun 1889, dengan konfigurasi yang berbeda (Gambar 2.15). Boys mengklaim bahwa pipa silinder yang digunakannya untuk menggantung massa lebih baik daripada neraca puntir. Tarikan oleh pipa silinder tersebut tidak berpengaruh pada

perhitungan. Boys melihat kesalahan Cavendish tentang tembok yang diabaikan. Namun, Boys melewatkannya banyak sekali massa di sekitar alat eksperimennya yang tidak diperhitungkan. Dia melakukan eksperimen di gudang yang terletak di bawah jalan. Gangguan berupa kendaraan yang lewat dan pelajar yang sedang parade merusak data eksperimennya. Hal tersebut diakui oleh Boys dalam artikelnya [2].

Cerita tentang eksperimen Cavendish tidak berhenti sampai di situ. Hingga buku ini ditulis, pengukuran tetapan gravitasi masih dilakukan, terutama oleh para



(a) Skema Eksperimen oleh C.V. Boys (1889)



(b) Neraca Puntir BIPM (2013)

Gambar 2.15: Alat Pengukuran tetapan gravitasi umum G

fisikawan eksperimentalis di BIPM. Alat baru telah dirancang. Alat tersebut juga berupa neraca puntir (Gambar 2.15) dan telah ditambah motor servo. Pada tahun 2001, Quinn, et. al, mengumumkan G yang diukur menggunakan alat tersebut, yaitu $6,67559(27) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ dengan ketidakpastian 41 ppm [6]. Pada tahun 2013, Quinn et. al. mempublikasikan kembali pengukurannya dengan menggunakan alat yang telah dimodifikasi. Tetapan Gravitasi diperoleh $6,67545(18) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ dengan ketidakpastian 27 ppm [7]. Hasil ukur terakhir ini merupakan hasil ukur yang paling teliti sejauh ini.

Jelas sekali, bahwa pengukuran tetapan gravitasi tidak hanya berhenti pada Henry Cavendish. Fisikawan generasi berikutnya, bahkan hingga saat ini, masih berlomba mendapatkan hasil ukur yang paling akurat dan paling teliti. Sumber daya yang besar dikeluarkan untuk melakukan riset alat-alat pengukuran yang lebih mutakhir. Kepuasan para eksperimentator adalah ketika bisa merancang alat yang lebih canggih dan hasil ukurnya lebih akurat dan presisi. Para fisikawan yang benar-benar fisikawan tidak tertarik sedikitpun pada jabatan-jabatan struktural, yang tidak terkait sama sekali dengan perkembangan ilmu pengetahuan. Bagi para eksperimentator ini, pekerjaan administratif hanya akan menghambat penelitian, menghambat *passion* mereka untuk mendapatkan gambaran alam semesta secara lebih jelas.

Gravity Probe-B

Menurut Teori Einstein, materi menimbulkan kelengkungan. Benda yang berotasi, memelintir ruang waktu. Bayangkan sebuah bola di atas lembaran karet, kemudian diputar, maka karet itu terpelintir. Begitu juga terjadi pada Bumi. Bumi yang berotasi memelintir dan menggeser ruang waktu di sekitarnya. Josef Lense dan Hans Thiring telah menggagas keberadaan fenomena ini sejak 1918, tetapi baru pada 1960-an George Pugh dari Departemen Pertahanan AS dan Leonard Schiff dari Stanford University secara terpisah menemukan ide untuk mengukur pergeseran tersebut menggunakan giroskop.

Pada tahun 1959, Leonard Schiff bertemu dengan koleganya, William Fairbank dan Robert Cannon di kolam renang Stanford University. Mereka duduk di pinggir kolam dan membicarakan rencana peluncuran giroskop itu agar mengorbit Bumi dan mengukur efek presesi dan puntiran ruang waktu di sekitar Bumi. Namun, efek geodesik yang diramalkan sangat kecil nilainya. Ibarat mengukur tinggi koin dari jarak 62 mil. Schiff meyakini pengukuran yang menuntut kepresisan tinggi ini tetap mungkin untuk dikerjakan. Pada tahun 1960, Schiff mempublikasikan artikelnya terkait cara melakukan pengukuran ini [9].

Pada 1962, Schiff mengajukan proposal kepada NASA agar mendanai 1 juta dollar untuk eksperimen yang diberi nama *Gravity Probe B* ini. Awalnya, para pengagas memperkirakan eksperimen ini akan selesai dalam tiga tahun. *Gravity Probe B* sebenarnya sangat sederhana, hanya teleskop, giroskop, dan sebuah bintang. Namun, setelah dilakukan kajian yang lebih mendalam, teknologi yang dibutuhkan untuk menjalankan eksperimen ini sangatlah tinggi, sehingga untuk rancang bangun peranti dibutuhkan waktu yang sangat panjang. Semua peranti riset harus dirancang sendiri dan sepresisi mungkin. Salah satu penemuan besar dalam eksperimen ini adalah giroskop ultrasensitif yang terbuat dari kuarsa dan dilapisi niobium, dapat dilihat pada Gambar 2.1 pada awal bab ini. Giroskop tersebut tidak memiliki tanda skala secara fisik. Untuk memantau perubahan orientasi giroskop ini digunakan konsep superkonduktivitas, dan dideteksi dengan menggunakan detektor *Superconducting Quantum Interference Device* (SQUID).

Gravity Probe B merupakan eksperimen terlama dalam sejarah. Eksperimen ini memakan waktu 47 tahun, dan memakan dana 750 juta dollar.

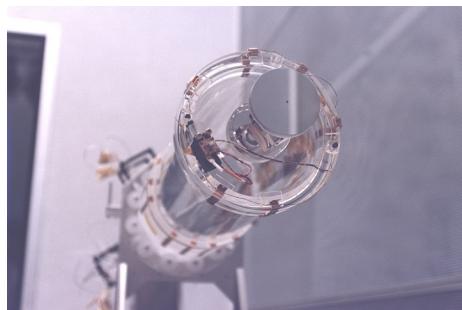
Presisi versus presesi.
Istilah presisi terkait dengan ketilitian.
Pengukuran dengan presisi tinggi artinya ketilitiannya tinggi. Sementara istilah presesi terkait dengan perubahan orientasi sumbu putar benda yang berotasi.

Teleskop pelacak bintang juga harus dibuat sepresisi mungkin. Teleskop tersebut dibuat dari bahan kuarsa (Gambar 2.16). Metode Eksperimen Gravity Probe B ini sangat sederhana, yang tidak sederhana adalah riset untuk merancang alat eksperimen ini. Awalnya "pesawat" ruang angkasa yang terdiri atas kelengkapan giroskop, teleskop, dan lainnya diluncurkan dan mengorbit Bumi pada jarak 640 km di atas permukaan Bumi. Kemudian teleskop pelacak bintang mengunci posisi bintang IM Pegasi (HR 8703) sebagai acuan secara presisi. Pesawat dipastikan selalu ke bintang IM Pegasi tersebut, diarahkan dengan penggerak sejenis roket yang berbahan bakar helium, disebut *microthruster*.

Giroskop berada di dalam tempatnya, dibuat mengambang di ruang vakum. Giroskop tersebut berputar dengan sumbu putar sejajar sumbu simetri pesawat. Cara memutar giroskop adalah dengan pompa helium, yang kemudian dihisap kembali untuk memastikan tidak ada torka dan arus lain kecuali dari niobium giroskop. Giroskop berputar, detektor SQUID membaca data orientasi giroskop [12]. Selesai.

Pada kenyataannya, eksperimen ini tidak semulus yang diinginkan. Proyek ini sudah hampir dibatalkan oleh NASA sebanyak 9 kali. Apakah pengukuran sepresisi ini tetap akan bisa diwujudkan? Pesawat *Gravity Probe B* diluncurkan 20 April 2004. Pengambilan data dimulai 28 Agustus 2004 dan berakhir 14 Agustus 2005. Pada awal pengambilan data, seluruh tim eksperimen berduka. Giroskop mengalami guncangan yang tidak diperkirakan sebelumnya. Untuk membersihkan data, dibutuhkan dana jutaan dollar. NASA telah munghentikan pendanaan eksperimen ini. Namun, sumber dana lain berdatangan.

Setelah mendapat sumbangan dari beberapa pihak di luar NASA, termasuk salah satunya Richard Fairbank (anak salah satu pengagas eksperimen ini--William Fairbank), eksperimen ini tetap dilanjutkan dan memperoleh hasil yang dekat dengan perkiraan dan ralatnya cukup kecil. Presisi geodesik didapatkan 6602 ± 18 milidetik/tahun, sementara perhitungan secara teori adalah 6606 milidetik/tahun. Pergeseran kerangka diperoleh $37,2 \pm 7,2$ milidetik/tahun dari yang diprediksi 39,2 milidetik/tahun [4]. Setelah bersusah payah hampir setengah abad, hanya sepasang hasil pengukuran tersebutlah yang didapatkan. Hal itu mengarah pada kesimpulan, "Sejauh ini, teori Einstein masih benar".



Gambar 2.16: Teleskop pelacak bintang. Kotak hitam kecil pada gambar adalah fotodetektor dengan ketepatan tinggi untuk mengunci posisi bintang tertentu (einstein.stanford.edu).

Aspek-aspek fisis yang lebih rinci mengenai Gravity Probe B akan dibahas lebih lanjut pada bab Gravitasi.

Eksperimen Eötvös

Eksperimen Eötvös adalah pengukuran perbedaan antara massa inersial dan massa gravitasi. Hipotesisnya adalah *kesamaan massa gravitasi dan massa inersial*. Eksperimen ini sebenarnya telah dilakukan oleh Newton dan kemudian oleh Bessel. Roland von Eötvös mulai melakukan eksperimen ini pada 1885 dengan alat yang lebih akurat. Alat yang digunakan adalah neraca puntir.

Hasil pengukuran oleh Eötvös dipaparkan di Hungarian Academy of Sciences pada 20 Januari 1889. Teks asli yang memuat eksperimen ini berjudul *Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen* dalam jurnal *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* yang terbit pada 1890 [11]. Dalam tulisannya tersebut, Eötvös memperoleh hasil bahwa massa gravitasi dan massa inersia dapat dianggap sama dengan ketidakpastian hingga 2×10^{-7} , namun ia tidak menyatakan perhitungan yang menunjukkan cara ia mendapatkan ketidakpastian itu. Pada tahun 1922, terbit artikel dengan nama Eötvös, Pekár dan Fekete yang berjudul *Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität*. Dalam artikel ter-

sebut, ketidakpastian kesamaan massa gravitasi dan inersial adalah 2×10^{-9} . Hasil ini lebih teliti dari eksperimen sebelumnya [1].

Eksperimen yang lebih teliti dilakukan oleh Roll, Krotov dan Dicke pada tahun 1961. Massa inersial dikatakan proporsional dengan massa gravitasi dengan orde 10^{-11} . Kemudian Braginskij dan Panov melakukan eksperimen yang lebih teliti pada tahun 1972. Ketidakpastian yang didapatkan berada pada orde 10^{-12} [3].

3

Peranti Matematik

Alam memperlihatkan keberadaan pola-pola matematik yang luar biasa. Gambar di samping memperlihatkan penampakan “close-up” sepotong bunga salju. Bunga salju di samping memiliki simetri yang terkait dengan objek matematik yang dikenal sebagai grup dihedral D_3 . (Gambar ini diambil dari www.demilked.com/macro-snowflakes-diy-camera-alexey-kljatov)



3.1 Berapa besarnya? Ke mana arahnya?

3.2 Kesamaan Dua Vektor

3.3 Aljabar Vektor

3.4 Penguraian Vektor

3.5 Hasilkali Skalar

3.6 Hasilkali Silang

3.7 Medan Skalar dan Medan Vektor

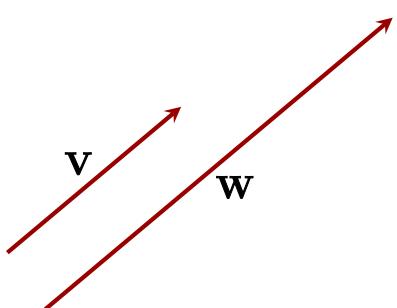
Newton “membuang” waktunya selama 11 tahun untuk membangun kalkulus, dan dengan kalkulus itulah hukum-hukum Newton tentang gerak dan tentang gravitasi memperlihatkan taringnya, semisal menjabarkan hukum-hukum Kepler atau meramalkan kedatangan sebuah komet yang di kemudian hari disebut komet Halley. Pada era dan di tempat yang lain, Albert Einstein harus berkelana menemui para matematikawan, mulai dari Marcel Grossmann hingga akhirnya David Hilbert. Di tempat terakhir itulah persoalan penurunan persamaan medan Einstein menemukan jawabannya. Ternyata gagasan Einstein tentang gravitasi harus mengambil geometri semi-Riemann sebagai kerangkanya. Lembaran sejarah nan mashur itu memberi pelajaran penting bagi kita bahwa teori yang hebat selalu memerlukan matematika lanjut untuk dijadikan sebagai kerangkanya. Oleh karena itu, keberadaan matematika dalam fisika merupakan keniscayaan. Dalam bab ini, kita akan berbicara tentang beberapa konsep matematika yang penting yang akan memainkan peran penting dalam pembahasan di bab-bab selanjutnya. Konsep-konsep itu ialah vektor dan aljabar vektor serta kalkulus vektor. Tentang matematika lanjut yang dibutuhkan dalam pembahasan teori-teori fisika lanjut dapat dipelajari dalam buku yang sesuai.

3.1 Berapa besarnya? Ke mana arahnya?

Anda sedang bersantai sambil memancing di pinggir sebuah telaga. Tiba-tiba seseorang menghubungi Anda dari kampus. Ia menanyakan tentang keberadaan Anda sekarang. Anda katakan bahwa Anda berada 100 kilometer dari kota Sragen. Cukupkah data yang Anda sampaikan itu bagi kolega Anda itu sehingga ia benar-benar mengetahui keberadaan anda saat ini? Tentu saja data yang Anda sampaikan itu jauh dari mencukupi, sebab kolega Anda harus memilih satu dari sekian tempat yang memiliki jarak 100 kilometer dari kota Sragen untuk memastikan tempat keberadaan Anda. Satu data lagi yang diperlukan oleh teman Anda, agar ia segera menemukan tempat keberadaan Anda. Arah. Seratus kilometer dari kota Sragen itu ke arah mana? Kisah yang baru saja ini menunjukkan bahwa dalam berbicara masalah posisi terdapat dua data yang penting dan secara pasti menentukan posisi sebuah tempat. Kedua data itu adalah jarak dan arah. Karenanya posisi dikelompokkan ke dalam besaran vektor.

Posisi, kecepatan, dan dorongan atau gaya adalah besaran-besaran yang bukan saja ditentukan oleh besarnya (atau magnitude-nya), namun juga ditentukan oleh arahnya. Ketiganya termasuk besaran vektor. Ada dua pertanyaan yang selalu terkait dengan besaran vektor, yakni “Berapa besarnya?” dan “Ke mana arahnya?” Jika kedua pertanyaan itu semuanya telah berhasil Anda jawab, maka Anda telah memberikan gambaran yang lengkap tentang besaran vektor yang anda sebutkan. Akan tetapi perlu disadari bahwa tidak semua yang memiliki besar dan arah merupakan besaran vektor. Masih ada sebuah syarat lagi bagi sebuah besaran yang memiliki besar dan arah untuk disebut sebuah vektor. Satu syarat itu menyangkut perilaku besaran itu terhadap rotasi kerangka koordinat. Akan tetapi, tampaknya kita tidak akan membicarakannya secara rinci di dalam bagian ini.

Sebuah besaran vektor hendak dituliskan dengan huruf tebal. Besaran vektor posisi, misalnya, dituliskan dengan \mathbf{r} , kecepatan dengan \mathbf{v} , gaya dengan \mathbf{F} , dan lain sebagainya. Apabila A suatu besaran vektor, maka besar atau panjang dari A ditulis sebagai A atau $|A|$. Besar sebuah vektor bukan bilangan negatif. Untuk memudahkan dalam pembicaraan, sebuah besaran vektor digambarkan (divisualisasikan) dengan sebuah anak panah. Panjang anak panah menunjukkan besar (magnitude) besaran vektor itu dan arah yang ditunjukkan oleh anak panah menunjukkan arah besaran vektor itu (lihat Gambar 3.1). Dua anak panah yang terlihat dalam Gambar 3.1 menggambarkan besaran vektor V dan besaran vektor W . Apabila dimensi dari V dan W sama, maka kedua vektor itu dapat dibandingkan. Dalam



Gambar 3.1: Dua anak panah yang menggambarkan besaran vektor W dan besaran vektor V

Gambar 3.1 anak panah yang mewakili W terlihat dua kali lebih panjang dibandingkan dengan anak panah yang mewakili V . Hal ini menunjukkan bahwa besar vektor W dua kali besar vektor V . Arah kedua anak panah itu sama, menandakan bahwa arah besaran vektor V sama dengan arah besaran vektor W .

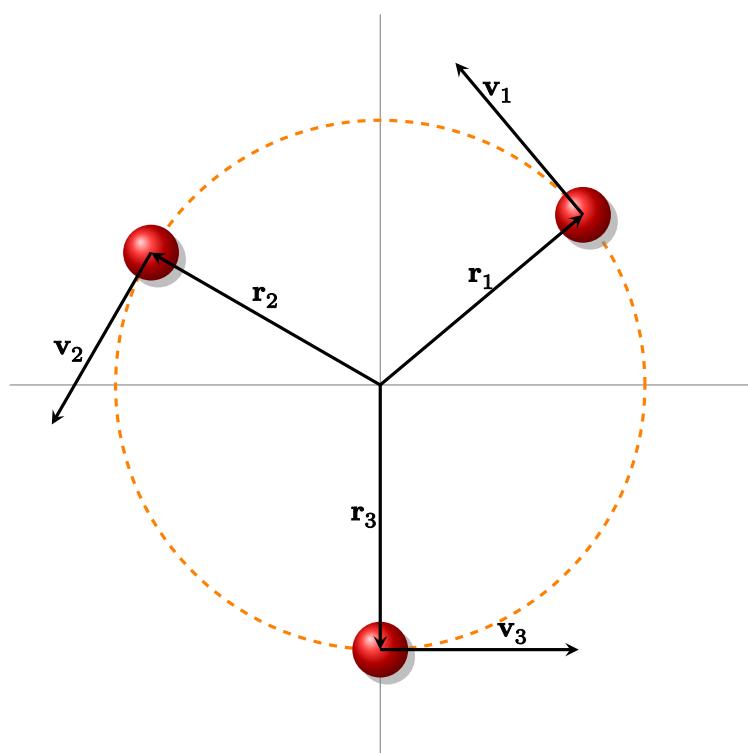
3.2 Kesamaan Dua Vektor

Jarak dari kota Muntilan ke kota Yogyakarta sama jauhnya dengan jarak kota Klaten ke kota Yogyakarta. Namun kedua tempat itu memiliki posisi yang berbeda apabila diukur

dari kota Yogyakarta karena kota Klaten berada di sebelah timur laut kota Yogyakarta, sedangkan Muntilan berada di sebelah barat daya. Kota Kalasan pun berada di sebelah timur laut kota Yogyakarta. Tetapi, karena jarak kota Kalasan ke kota Yogyakarta kurang lebih hanya 10 km, maka posisi kota Kalasan berbeda dari posisi kota Klaten.

Dua buah besaran dikatakan semesta apabila keduanya memiliki dimensi yang sama. Dua buah besaran yang semesta dapat dibandingkan satu dengan yang lain. Dari dua contoh tersebut, dapat disimpulkan bahwa dua buah besaran vektor yang semesta dikatakan sama apabila baik besar (magnitude) maupun arahnya sama. Dengan kata lain, dua buah besaran vektor yang semesta dikatakan sama apabila kedua pertanyaan “Berapa besarnya?” dan “Ke mana arahnya?” memiliki jawaban yang sama kalau diterapkan untuk kedua besaran itu.

Sebuah besaran (entah itu skalar maupun vektor) dikatakan konstan atau tetap apabila besaran itu tidak berubah meskipun waktu terus berjalan. Jadi, suatu besaran skalar dikatakan tetap jika besarnya tidak berubah dengan berjalanannya waktu. Cukup itu saja. Bagaimana dengan besaran vektor? Karena besaran vektor menyangkut dua hal, yakni besar dan arah, maka suatu besaran vektor dikatakan tetap apabila baik besar maupun arah besaran vektor itu tidak berubah. Posisi kota Klaten merupakan besaran vektor yang tetap jika diukur dari kota Sragen. Tetapi posisi bus jurusan Yogyakarta-Surabaya yang sedang melintas di jalur Surabaya-Yogyakarta merupakan besaran vektor yang tidak konstan. Sebuah benda yang bergerak melingkar beraturan memiliki kelajuan yang sama, tetapi arahnya selalu berubah (lihat Gambar 3.2). Oleh karena itu, benda itu memiliki kecepatan yang tidak tetap, meskipun besarnya kecepatan yang dimiliki oleh benda itu sama sepanjang waktu. Pada saat benda berada pada posisi yang ditunjukkan oleh vektor posisi \mathbf{r}_1 benda memiliki kecepatan \mathbf{v}_1 . Pada saat di posisi \mathbf{r}_2 benda memiliki kecepatan \mathbf{v}_2 . Di posisi \mathbf{r}_3 benda memiliki kecepatan \mathbf{v}_3 . Laju atau besarnya kecepatan benda pada masing-masing posisi itu sama, yakni $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_3|$. Tetapi karena arah kecepatan pada ketiga posisi itu berbeda, maka harus dikatakan bahwa kecepatan benda pada ketiga posisi di atas berbeda, yakni secara matematis ditulis sebagai $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_3$.

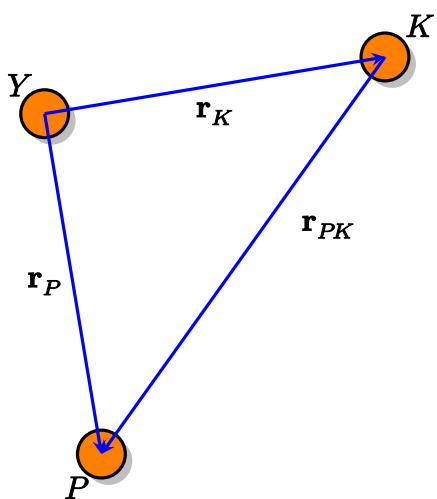


Gambar 3.2: Vektor kecepatan pada gerak melingkar beraturan

3.3 Aljabar Vektor

Dua vektor dapat dijumlahkan sehingga diperoleh sebuah vektor lain, tetapi cara penjumlahannya berbeda dari penjumlahan skalar. Vektor dapat pula dikalikan dengan skalar, hasilnya adalah sebuah vektor lain. Dalam subbab ini kita akan mempelajari penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar dan beberapa sifatnya.

Penjumlahan Vektor

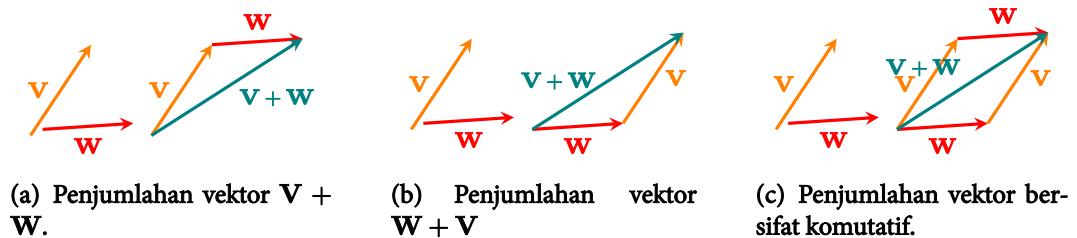


Sekarang andaikan anda menggeser sebuah pot tanaman dari suatu tempat di lantai ruang tengah rumah Anda yang ditandai dengan huruf Y ke suatu tempat lain yang ditandai dengan huruf K. Jika diukur dari titik Y pot itu sekarang memiliki posisi yang diwakili oleh vektor posisi \mathbf{r}_K (lihat Gambar 3.3). Apabila kemudian Anda menggesernya lagi sehingga pot itu berada pada titik yang ditandai dengan huruf P, maka pot itu sekarang terlihat memiliki posisi \mathbf{r}_P apabila diukur dari titik Y dan \mathbf{r}_{PK} apabila diukur dari titik K. Jadi, posisi \mathbf{r}_P diperoleh dari posisi \mathbf{r}_K dengan menggeser pot itu sejauh \mathbf{r}_{PK} . Kita katakan bahwa vektor posisi \mathbf{r}_P merupakan hasil penjumlahan dari vektor \mathbf{r}_K dengan vektor pergeseran \mathbf{r}_{PK} dan ditulis sebagai

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_K + \mathbf{r}_{PK}. \quad (3.1)$$

Gambar 3.3: Menggeser pot dari titik Y menuju titik K dan seterusnya ke titik P.

Secara umum apabila \mathbf{V} dan \mathbf{W} dua buah besaran vektor yang sematra, maka hasil jumlahan besaran vektor \mathbf{V} dan besaran vektor \mathbf{W} adalah besaran vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ yang juga sematra baik dengan besaran vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} .



Gambar 3.4: Penjumlahan dua vektor

Perlu diperhatikan bahwa $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ tidak sama dengan $\mathbf{W} + \mathbf{V}$.
Pernyataan pertama menyatakan penjumlahan secara vektor, sementara pernyataan kedua penjumlahan skalar.

Vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ secara diagram diperoleh dengan cara sebagai berikut : Pertama, menggeser vektor \mathbf{W} (tanpa merubah arah) sedemikian rupa sehingga pangkal vektor \mathbf{W} menempel pada ujung vektor \mathbf{V} . Kedua, vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ adalah vektor yang berpangkal pada pangkal vektor \mathbf{V} dan berujung pada ujung vektor \mathbf{W} (lihat Gambar 3.4(a)). Gambar 3.4(b) memperlihatkan penjumlahan $\mathbf{W} + \mathbf{V}$. Selanjutnya, Gambar 3.4(c) diperoleh dari Gambar 3.4(a) dan 3.4(b). Gambar 3.4(c) memperlihatkan bahwa vektor $\mathbf{W} + \mathbf{V}$ sama dengan vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ atau

$$\mathbf{W} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{W}. \quad (3.2)$$

Dengan kata lain, penjumlahan vektor bersifat komutatif.

Bagaimana cara menentukan besar dan arah vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$? Tidak sulit! Andaikan θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor \mathbf{V} dan vektor \mathbf{W} (lihat Gambar 3.5) Berdasarkan teorema Phytagoras, $|\mathbf{V} + \mathbf{W}|$ (yakni besarnya vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$) memenuhi persamaan

$$|\mathbf{V} + \mathbf{W}|^2 = l^2 + L^2. \quad (3.3)$$

Padahal l diberikan oleh $l = V \sin \theta$ dan L oleh $L = W + V \cos \theta$, dengan $V = |\mathbf{V}|$

dan $W = |\mathbf{W}|$ berturut-turut merupakan besar vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} .

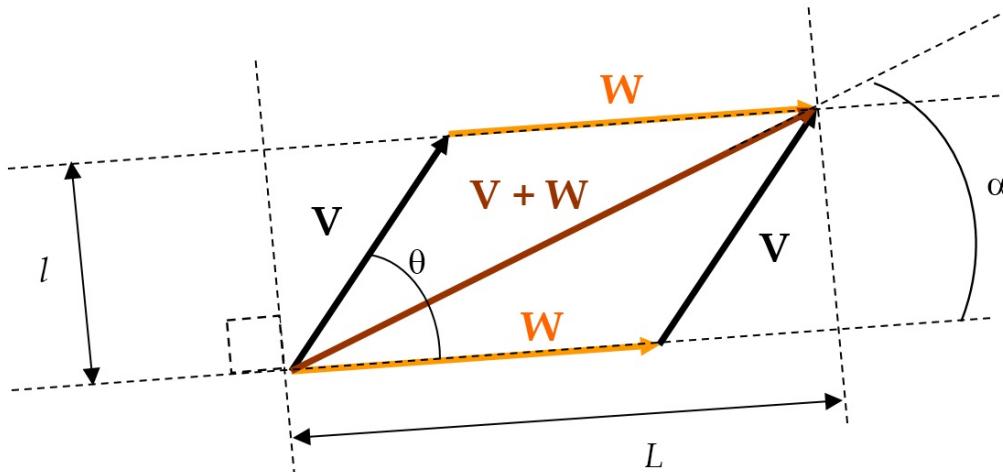
Oleh karena itu

$$\begin{aligned} |\mathbf{V} + \mathbf{W}|^2 &= l^2 + L^2 \\ &= (V \sin \theta)^2 + (W + V \cos \theta)^2 \\ &= V^2 \sin^2 \theta + W^2 + 2WV \cos \theta + V^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Jadi, didapatkan persamaan $|\mathbf{V} + \mathbf{W}|^2 = V^2 + W^2 + 2WV \cos \theta$ atau

$$|\mathbf{V} + \mathbf{W}| = \sqrt{V^2 + W^2 + 2WV \cos \theta}. \quad (3.5)$$

Secara umum, berlaku $|\mathbf{V} + \mathbf{W}| \neq |\mathbf{V}| + |\mathbf{W}|$. Apabila sudut $\theta = 0$ (yakni apabila vektor \mathbf{V} sejajar dengan vektor \mathbf{W}), maka $\cos \theta = 1$. Dalam hal ini tentu saja berlaku $|\mathbf{V} + \mathbf{W}| = |\mathbf{V}| + |\mathbf{W}|$.



Gambar 3.5: Perhitungan besar jumlahan dua vektor

Apabila $\theta = \pi/2$ (yakni apabila vektor \mathbf{V} tegak lurus terhadap vektor \mathbf{W}), maka $\cos \theta = 0$. Dalam hal ini berlaku teorema Phytagoras $|\mathbf{V} + \mathbf{W}|^2 = |\mathbf{V}|^2 + |\mathbf{W}|^2$. Gambar 3.5 memperlihatkan juga kepada kita bahwa arah vektor $\mathbf{V} + \mathbf{W}$, yakni sudut α , dapat dihitung dari dua persamaan berikut

$$\sin \alpha = \frac{V \sin \theta}{\sqrt{V^2 + W^2 + 2WV \cos \theta}} \quad (3.6)$$

dan

$$\cos \alpha = \frac{W + V \cos \theta}{\sqrt{V^2 + W^2 + 2WV \cos \theta}}. \quad (3.7)$$

Uji Ketajaman 3.1

1. Dapatkah orang menjumlahkan sebuah vektor dengan sebuah skalar?
2. Apakah dalam penjumlahan dua buah vektor selalu dihasilkan sebuah vektor yang lebih besar dibandingkan dengan dua vektor yang dijumlahkan itu?

3. Bagaimanakah orang mengurangkan sebuah vektor dari vektor yang lain?
4. Diberikan dua buah vektor, yaitu vektor \mathbf{A} yang besarnya 6 satuan dan vektor \mathbf{B} yang besarnya 4 satuan. Apabila kedua vektor tersebut membentuk sudut 60° , tentukan $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.
5. Diberikan dua buah vektor, vektor \mathbf{C} yang besarnya 3 satuan, dan vektor \mathbf{D} yang besarnya 5 satuan. Apabila kedua vektor tersebut membentuk sudut 40° , tentukan $|\mathbf{C} + \mathbf{D}|$.
6. Vektor \mathbf{E} panjangnya 7 satuan, vektor \mathbf{F} panjangnya 5 satuan. Kedua vektor tersebut dijumlahkan dan menghasilkan vektor \mathbf{G} yang panjangnya 9 satuan. Berapakah sudut yang dibentuk oleh \mathbf{E} dan \mathbf{F} ?
7. Dua buah vektor \mathbf{H} dan \mathbf{I} yang masing-masing panjangnya 4 satuan dan 6 satuan dijumlahkan sedemikian rupa sehingga menghasilkan vektor lain yang panjangnya 3 satuan. Tentukan sudut yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut.
8. Tiga buah vektor masing - masing panjangnya 4, 5, dan 6 satuan. Berapa sudut yang harus dibentuk antar vektor-vektor tersebut agar menghasilkan vektor yang panjangnya 3 satuan?

Perkalian Vektor dengan Skalar

Andaikan \mathbf{T} dan \mathbf{K} dua buah besaran vektor yang semata dan keduanya searah satu dengan yang lain. Berdasarkan uraian di atas, $|\mathbf{T} + \mathbf{K}| = T + K$ dan vektor $\mathbf{T} + \mathbf{K}$ searah dengan vektor \mathbf{T} dan \mathbf{K} . Apabila besar vektor \mathbf{K} dua kali besar vektor \mathbf{T} (yakni $K = 2T$), maka $|\mathbf{T} + \mathbf{K}| = 3|T|$. Jadi, $\mathbf{T} + \mathbf{K}$ adalah sebuah vektor yang besarnya sama dengan $3T$ dan searah dengan vektor \mathbf{T} maupun vektor \mathbf{K} . Dalam hal ini kemudian kita tuliskan $\mathbf{T} + \mathbf{K} = 3\mathbf{T}$. Sebaliknya, perhatikanlah bahwa besarnya vektor \mathbf{T} (yakni T) memenuhi persamaan $T = (1/3)|\mathbf{T} + \mathbf{K}|$. Dengan kata lain, besarnya vektor \mathbf{T} sepertiga kali besarnya vektor $\mathbf{T} + \mathbf{K}$. Jadi, vektor \mathbf{T} adalah sebuah vektor yang searah dengan vektor $\mathbf{T} + \mathbf{K}$ dan besarnya adalah sepertiga kali besar vektor $\mathbf{T} + \mathbf{K}$. Dalam hal ini, kita tulis $\mathbf{T} = (1/3)(\mathbf{T} + \mathbf{K})$.

Sekarang andaikan vektor \mathbf{H} adalah sebuah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor \mathbf{T} dan besarnya tiga kali besar vektor \mathbf{T} . Maka dengan mudah didapatkan bahwa vektor $\mathbf{T} + \mathbf{H}$ adalah sebuah vektor yang panjangnya diberikan oleh $|\mathbf{T} + \mathbf{H}| = 2|T|$ (lihat persamaan(3.5)) dan arahnya ditunjukkan oleh sudut α yang memenuhi persamaan $\sin \alpha = 0$ dan $\cos \alpha = -1$, yakni $\alpha = 180^\circ$ (lihat persamaan (3.6)). Itu berarti bahwa vektor $\mathbf{T} + \mathbf{H}$ berlawanan dengan vektor \mathbf{T} . Jadi, secara vektor dapat dituliskan sebagai $\mathbf{T} + \mathbf{H} = -2\mathbf{T}$.

Secara umum, jika \mathbf{V} sebarang besaran vektor dan λ suatu skalar (bilangan riil), maka vektor $\lambda\mathbf{V}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai berikut:

- (a) jika $\lambda = 0$, maka $\lambda\mathbf{V}$ merupakan vektor nol,
- (b) jika $\lambda < 0$, maka $\lambda\mathbf{V}$ adalah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor \mathbf{V} , sedangkan besarnya $|\lambda|$ kali besar vektor \mathbf{V} ,
- (c) jika $\lambda > 0$, maka $\lambda\mathbf{V}$ adalah vektor yang searah dengan vektor \mathbf{V} , sedangkan besarnya λ kali besar vektor \mathbf{V} .

Khususnya untuk $\lambda = -1$, vektor $-1\mathbf{V}$ ditulis sebagai $-\mathbf{V}$ dan disebut sebagai lawan vektor \mathbf{V} . Dalam hal ini muncul konsep pengurangan vektor: $\mathbf{V} - \mathbf{W}$ berarti

sebuah vektor yang diperoleh dengan menjumlahkan vektor \mathbf{V} dengan lawan vektor \mathbf{W} . Jadi, $\mathbf{V} - \mathbf{W} = \mathbf{V} + (-\mathbf{W})$.

Contoh 3.1 Kombinasi Cembung

Andaikan \mathbf{V} dan \mathbf{W} dua buah vektor. Selanjutnya disusun sebuah vektor \mathbf{A} dari \mathbf{V} dan \mathbf{W} menurut $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{V} + (1 - \alpha)\mathbf{W}$, dengan α sebuah bilangan riil positif dengan $0 \leq \alpha \leq 1$. Vektor \mathbf{A} semacam itu disebut kombinasi cembung vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} .

(a) Tunjukkan bahwa $\mathbf{A} - \mathbf{V}$ paralel dengan $\mathbf{A} - \mathbf{W}$.

(b) Jika pangkal vektor \mathbf{V} dan pangkal vektor \mathbf{W} disatukan, tunjukkan bahwa ujung vektor \mathbf{A} berada pada garis yang menghubungkan ujung vektor \mathbf{V} dan ujung vektor \mathbf{W} .

(a) Dari persamaan $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{V} + (1 - \alpha)\mathbf{W}$ didapat $\mathbf{A} - \mathbf{V} = (\alpha - 1)\mathbf{V} + (1 - \alpha)\mathbf{W} = (\alpha - 1)(\mathbf{V} - \mathbf{W})$ dan $\mathbf{A} - \mathbf{W} = \alpha\mathbf{V} - \alpha\mathbf{W} = \alpha(\mathbf{V} - \mathbf{W})$. Jadi,

$$\frac{\mathbf{A} - \mathbf{V}}{\alpha - 1} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{W}}{\alpha}. \quad (3.8)$$

Hal ini menunjukkan bahwa vektor $\mathbf{A} - \mathbf{V}$ paralel dengan $\mathbf{A} - \mathbf{W}$.

(b) Dari perhitungan di atas didapat pula $\mathbf{A} - \mathbf{W} = \alpha(\mathbf{V} - \mathbf{W})$ yang menunjukkan bahwa $|\mathbf{A} - \mathbf{W}| \leq |\mathbf{V} - \mathbf{W}|$ karena $0 \leq \alpha \leq 1$. Selain itu juga diperoleh $\mathbf{A} - \mathbf{V} = (\alpha - 1)(\mathbf{V} - \mathbf{W})$. Yang terakhir ini berarti $|\mathbf{A} - \mathbf{V}| \leq |\mathbf{V} - \mathbf{W}|$.

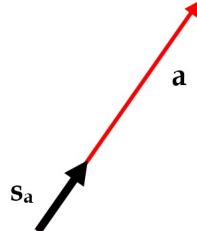
Andaikan \mathbf{a} sebarang vektor (lihat Gambar 3.6). Vektor satuan searah dengan \mathbf{a} adalah vektor $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}}$ yang besarnya satu satuan dan searah dengan vektor \mathbf{a} . Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{a} \mathbf{a}, \quad (3.9)$$

dengan $a = |\mathbf{a}|$, yakni besarnya vektor \mathbf{a} . Persamaan (3.9) menyatakan bahwa vektor $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}}$ merupakan perkalian vektor \mathbf{a} dengan skalar $1/a$. Jadi, berdasarkan uraian sebelumnya, $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}}$ adalah sebuah vektor yang searah dengan vektor \mathbf{a} dan besarnya $1/a$ kali besar vektor \mathbf{a} , yakni

$$|\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}}| = \left| \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right| = 1. \quad (3.10)$$

Persamaan (3.9) memperlihatkan bahwa $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}}$.



Gambar 3.6: Vektor satuan

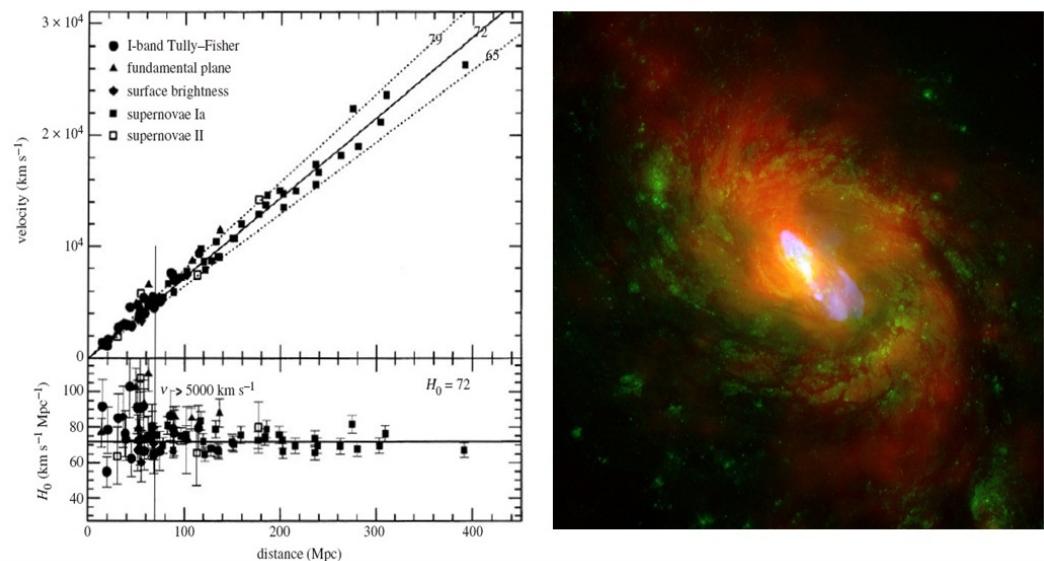
Contoh 3.2 Hukum Hubble

Seorang astronom Amerika bernama Edwin Hubble pada tahun 1929 dengan memanfaatkan teleskop paling kuat di dunia (saat itu) menemukan kenyataan bahwa masing-masing galaksi di sekeliling kita bergerak menjauhi kita. Gambar 3.7 kiri memperlihatkan hasil pengamatan Hubble tentang besarnya kecepatan galaksi-galaksi (diukur dalam kilometer persek) untuk berbagai jarak (diukur dalam mega parsec; satu parsec adalah ketinggian segitiga samakaki dengan sudut puncak 1 sekon dan alas 150 juta kilometer). Tampak dari grafik Gambar 3.7 bahwa besar kecepatan galaksi-galaksi berbanding lurus dengan jarak galaksi-galaksi itu dari kita. Tetapan kesebandingannya adalah gradi-

en kemiringan garis pada grafik itu, yaitu $H_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Tetapan H_0 ini disebut tetapan Hubble. Hal ini berarti bahwa semakin jauh suatu galaksi dari kita di bumi semakin cepat galaksi itu bergerak menjauhi kita. Secara matematis, apabila \mathbf{r}_G vektor posisi sebuah galaksi bernama G diukur dari Bumi dan \mathbf{v}_G kecepatannya (juga diukur dari Bumi), maka berlaku

$$\mathbf{v}_G = H_0 \mathbf{r}_G. \quad (3.11)$$

Tampak bahwa hukum Hubble merupakan perkalian vektor dengan skalar (tetapan Hubble). Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa hukum Hubble di atas tidak bergantung pada galaksi tempat pengamatan dilakukan. Jika Anda berada di galaksi G' misalnya, maka galaksi-galaksi lain juga akan terlihat menjauhi Anda dengan hukum yang sama. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa galaksi-galaksi itu bergerak saling menjauh satu dari yang lain. Jika galaksi-galaksi itu menempel pada titik-titik dalam ruang, maka ruanglah yang mengembang. Jadi, ruang bagi alam semesta kita ini mengembang.



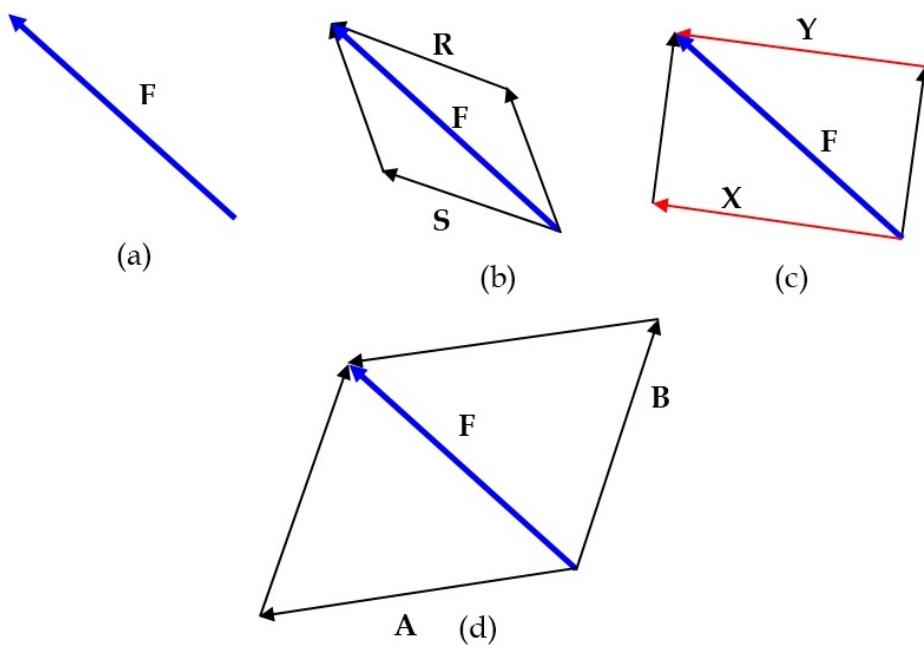
Gambar 3.7: Gambar kiri: Besar kecepatan galaksi-galaksi (dalam km/s) untuk berbagai jarak dari Bumi (dalam mega parsek). Gambar kanan: Galaksi NGC 1068 adalah sebuah galaksi yang memuat sebuah lubang hitam di pusatnya dengan massa dua kali massa galaksi kita (Bimasakti). Gambar ini diambil dari website Chandra X-ray Observatory.

Uji Ketajaman 3.2

1. Mengapa tetapan Hubble harus positif?
2. Gejala macam apa yang digambarkan oleh hukum Hubble jika tetapan Hubble negatif?

Sifat-sifat Penjumlahan Vektor dan Perkalian dengan Skalar

Berikut adalah daftar sifat-sifat penting penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar baik yang telah dibahas di depan maupun yang belum:

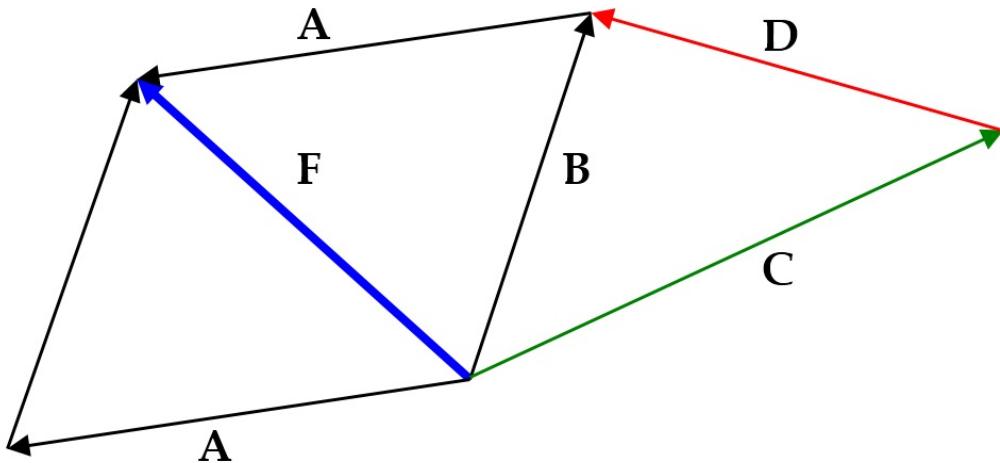


Gambar 3.8: Penguraian vektor atas sepasang vektor lain.

1. Penjumlahan vektor bersifat komutatif: $\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{W} + \mathbf{V}$.
2. Penjumlahan vektor bersifat assosiatif $\mathbf{V} + (\mathbf{W} + \mathbf{U}) = (\mathbf{V} + \mathbf{W}) + \mathbf{U}$. Dengan kata lain, kurung menjadi tidak penting. Penjumlahan vektor itu cukup ditulis $\mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{U}$.
3. Ada sebuah vektor istimewa yang kalau dijumlahkan dengan sebarang vektor \mathbf{V} hasilnya vektor \mathbf{V} itu. Vektor istimewa itu adalah vektor nol, yang selanjutnya hendak ditulis sebagai $\mathbf{0}$.
4. Untuk setiap vektor \mathbf{V} terdapat sebuah vektor $-\mathbf{V}$ sehingga $\mathbf{V} + (-\mathbf{V}) = (-\mathbf{V}) + \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Vektor $-\mathbf{V}$ disebut vektor lawan bagi vektor \mathbf{V} .
5. Untuk setiap vektor \mathbf{V} dan sebarang dua skalar α dan β berlaku dua sifat berikut
 - (i) $(\alpha\beta)\mathbf{V} = \alpha(\beta\mathbf{V}) = \beta(\alpha\mathbf{V})$,
 - (ii) $(\alpha + \beta)\mathbf{V} = \alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{V}$.
6. Untuk setiap dua vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} serta sebarang skalar α berlaku $\alpha(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \alpha\mathbf{V} + \alpha\mathbf{W}$
7. Untuk setiap vektor \mathbf{V} dan sebarang α berlaku
 - (i) $1.\mathbf{V} = \mathbf{V}$,
 - (ii) $0.\mathbf{V} = \mathbf{0}$,
 - (iii) $(-1).\mathbf{V} = -\mathbf{V}$,
 - (iv) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sifat nomor 7 (i) dapat dibuktikan dari definisi perkalian vektor dengan skalar. Sedangkan sifat-sifat 7 (ii), (iii), dan (iv) dapat dibuktikan dari sifat-sifat sebelumnya (1-7(i)). Sifat-sifat (1-7(i)) bersifat bebas satu dari yang lain. Artinya, satu sifat tidak dapat dibuktikan dari sifat yang lain.

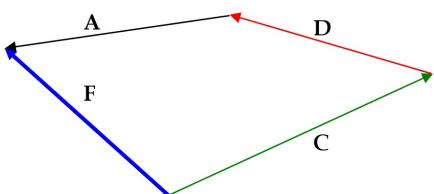
3.4 Penguraian Vektor



Gambar 3.9: Penguraian vektor atas beberapa vektor lain.

Perhatikanlah vektor \mathbf{F} dalam Gambar 3.8 (a). Gambar 3.8 (b) menunjukkan bahwa vektor \mathbf{F} dapat digambarkan sebagai jumlahan antara vektor \mathbf{R} dan vektor \mathbf{S} , yakni $\mathbf{F} = \mathbf{R} + \mathbf{S}$. Akan tetapi, Gambar 3.8 (c) juga menunjukkan bahwa vektor \mathbf{F} dapat dituliskan sebagai jumlahan vektor \mathbf{X} dan vektor \mathbf{Y} . Apa hanya itu? Adakah sepasang vektor yang lain sedemikian rupa sehingga jumlahan pasangan itu sama dengan vektor \mathbf{F} ? Ada! Lihat Gambar 3.8 (d)! Di dalam gambar itu ditunjukkan bahwa vektor \mathbf{F} juga merupakan jumlahan dari vektor \mathbf{A} dan vektor \mathbf{B} . Gambar 3.8 (b) mengatakan bahwa vektor \mathbf{F} diuraikan atas vektor \mathbf{S} dan vektor \mathbf{R} . Gambar 3.8 (c) mengatakan bahwa vektor \mathbf{F} diuraikan atas vektor \mathbf{X} dan vektor \mathbf{Y} . Sementara Gambar 3.8 (d) mengatakan bahwa vektor \mathbf{F} diuraikan atas vektor \mathbf{A} dan vektor \mathbf{B} . Jadi, terdapat sekian banyak (bahkan tak berhingga jumlahnya) pasangan vektor-vektor sedemikian rupa sehingga vektor \mathbf{F} dapat merupakan jumlahan antara vektor-vektor dalam setiap pasangan itu. Oleh karena itu, penguraian vektor atas dua vektor yang lain dikatakan tidak tunggal. Sekarang perhatikan Gambar 3.9! Gambar tersebut memperlihatkan kembali penguraian vektor \mathbf{F} atas vektor \mathbf{A} dan vektor \mathbf{B} sebagaimana telah diperlihatkan dalam Gambar 3.8 (d). Hanya saja, dalam Gambar 3.9 itu, vektor \mathbf{F} diuraikan atas vektor \mathbf{C} dan \mathbf{D} . Jadi, kita dapatkan

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{C} + \mathbf{D}. \quad (3.12)$$



Gambar 3.10: Penguraian vektor atas tiga buah vektor lain.

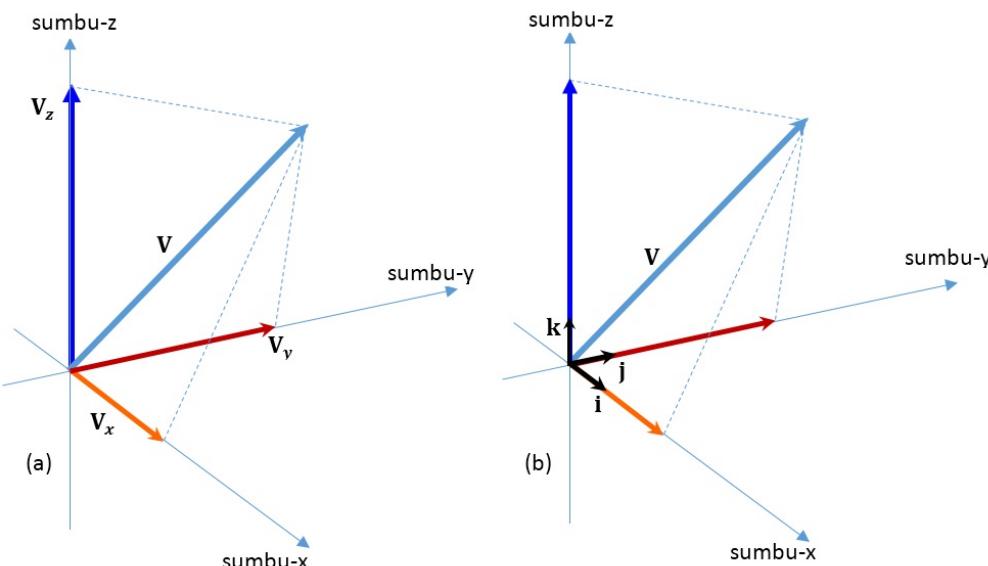
Jadi, vektor \mathbf{F} merupakan hasil jumlahan vektor-vektor \mathbf{C} , \mathbf{D} , dan \mathbf{A} . Dengan kata lain, vektor \mathbf{F} diuraikan atas vektor-vektor \mathbf{C} , \mathbf{D} , dan \mathbf{A} . Situasi ini digambarkan secara lebih jelas oleh Gambar 3.10. Baik vektor \mathbf{C} , \mathbf{D} , maupun \mathbf{A} dalam Gambar 3.10 masih dapat diuraikan menjadi vektor-vektor yang lain. Jadi, sebuah vektor dapat diuraikan atas sekian banyak vektor dan dengan sekian banyak cara. Cara penguraian yang dipilih disesuaikan dengan masalah yang kita hadapi. Jika Anda tepat dalam pengambilan cara penguraian vektor, maka masalah Anda akan menjadi mudah untuk diselesaikan.

Penguraian Vektor pada Sumbu-sumbu Koordinat

Perhatikan sebuah vektor \mathbf{V} . Pada pangkal vektor \mathbf{V} dipasang tata koordinat kartesius sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.11. Vektor \mathbf{V} tersebut dapat diuraikan atas vektor-vektor \mathbf{V}_x , \mathbf{V}_y , dan \mathbf{V}_z sepanjang sumbu-sumbu koordinat, dengan melakukan proyeksi vektor \mathbf{V} secara tegak lurus pada sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z. Hal ini terlihat pada Gambar 3.11 (a).

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z, \quad (3.13)$$

dengan vektor-vektor \mathbf{V}_x , \mathbf{V}_y , dan \mathbf{V}_z berturut-turut disebut komponen vektor \mathbf{V}



Gambar 3.11: Penguraian vektor atas beberapa vektor lain.

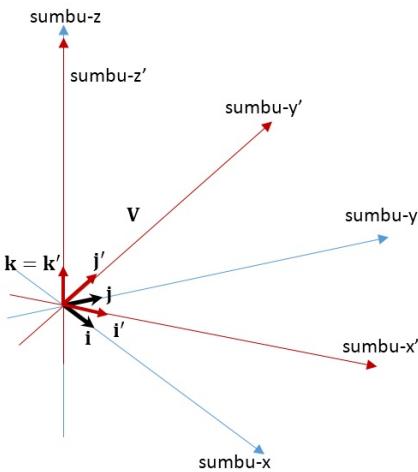
sepanjang sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z. Sementara pada sumbu-sumbu koordinat, kita memiliki vektor-vektor satuan yang mengarah ke arah membesarnya koordinat, yakni vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$ (lihat Gambar 3.11 (b)). Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_x &= V_x \hat{\mathbf{i}}, \\ \mathbf{V}_y &= V_y \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{V}_z &= V_z \hat{\mathbf{k}},\end{aligned} \quad (3.14)$$

dengan V_x , V_y , dan V_z adalah skalar yang sesuai dan tiga skalar ini disebut koordinat bagi vektor \mathbf{V} . Akan tetapi seringkali ketiga skalar ini juga disebut komponen-komponen vektor \mathbf{V} . Dengan demikian sebarang vektor \mathbf{V} dapat diuraikan atas koordinat-koordinatnya sebagai berikut

$$\mathbf{V} = V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.15)$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$ membentuk himpunan $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ yang disebut **basis**. Tata koordinat yang digunakan untuk menguraikan vektor \mathbf{V} tersebut bukan satu-satunya tata koordinat yang ada. Setiap tata koordinat kartesius berkaitan dengan sebuah basis. Oleh karena itu, basis pun tidak tunggal. Sebagai contoh,



Gambar 3.12: Penguraian vektor atas beberapa vektor lain.

perhatikan sumbu-sumbu koordinat baru, yaitu sumbu- x' , sumbu- y' , dan sumbu- z' sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.12. Terkait dengan tata koordinat itu adalah basis $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$. Dalam basis baru ini vektor V tersebut di atas dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{V} = V'_x \hat{i}' + V'_y \hat{j}' + V'_z \hat{k}'. \quad (3.16)$$

dengan V'_x , V'_y , dan V'_z adalah koordinat-koordinat bagi vektor \mathbf{V} relatif terhadap basis $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$. Bagaimana koordinat-koordinat dengan V'_x , V'_y , dan V'_z dihitung dari koordinat lama? Jawaban atas pertanyaan itu akan dibicarakan di belakang setelah pembahasan konsep produk skalar. Contoh istimewa penguraian vektor atas koordinat-koordinatnya adalah penguraian vektor posisi \mathbf{r} atas koordinat-koordinat (x, y, z) dalam kerangka yang dipilih. Dalam hal ini, $V_x = x$, $V_y = y$, dan $V_z = z$, sehingga vektor posisi \mathbf{r} dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}. \quad (3.17)$$

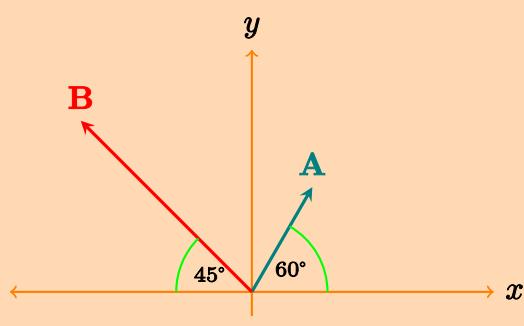
Uji Ketajaman 3.3

1. Dapatkan sebuah vektor diuraikan menjadi dua vektor lain yang lebih besar?
2. Dapatkan sebuah vektor \mathbf{A} diuraikan menjadi dua buah vektor yang semuanya tegak lurus terhadap vektor \mathbf{A} ?
3. Diberikan dua buah vektor, yaitu $\mathbf{V} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ dan $\mathbf{W} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$. Tentukan
 - a) $\mathbf{V} + 2\mathbf{W}$
 - b) $3\mathbf{W} - \mathbf{V}$
 - c) $|\mathbf{V} - 2\mathbf{W}|$
4. Sebuah kereta api bergerak dari suatu stasiun A sejauh 2 km dengan arah horizontal, kemudian menanjak dengan sudut inklinasi 15° sejauh 1,5 km. Kemudian kereta bergerak lagi dengan arah horizontal sejauh 3 km. Setelah itu kereta mengalami jalan menurun dengan sudut deklinasi 20°

sejauh 2 km. Dari ujung jalan menurun tersebut kereta kemudian berjalan horizontal lagi sejahter 4 km namun berbelok 30° dari jalur awalnya dan sampailah kereta di stasiun B. Tentukan perpindahan kereta tersebut dari stasiun A ke stasiun B.

5. Radar sebuah menara pemantau di pesisir pantai mendekksi kapal perang musuh memasuki perairan setempat. Kapal perang tersebut berada 21,2 kilometer dari menara pemantau dan berada di arah 10° (satuan derajat pada radar dihitung sebagaimana pada kompas, nol derajat menunjukkan arah utara, dan penambahan angka derajat bersesuaian dengan putaran arah jarum jam). Sementara pesawat tempur yang mengawasi wilayah setempat sedang berada 10,5 kilometer pada arah 285° dan berada pada ketinggian 4000 ft di atas permukaan laut. Tentukan posisi kapal perang relatif terhadap pesawat tempur dalam notasi vektor satuan (disepakati vektor satuan \hat{i} mengarah ke selatan, vektor satuan \hat{j} mengarah ke timur, dan vektor satuan \hat{k} mengarah ke atas). Tentukan juga jarak antara kapal perang dan pesawat tempur tersebut.
6. Dalam uji coba evakuasi bencana dalam suatu kawasan penduduk, seseorang diberi informasi bahwa titik aman bencana dapat dicapai dari tempat tinggalnya melalui rute sebagai berikut: 400 meter ke arah timur, kemudian 500 meter ke arah utara, 50 meter ke barat, terakhir 100 meter ke utara. Titik aman yang lain dapat ditempuh dengan rute: 700 meter ke arah barat, kemudian 300 meter ke selatan, terakhir, 50 meter ke arah barat daya. Andaikan dalam praktiknya, orang bisa memilih jalan pintas sehingga jalur yang ditempuh bisa seminimal mungkin. Tentukan titik aman yang mana sebaiknya menjadi prioritas. Jelaskan perhitungan tersebut.

Uji Ketajaman 3.4



Gambar 3.13

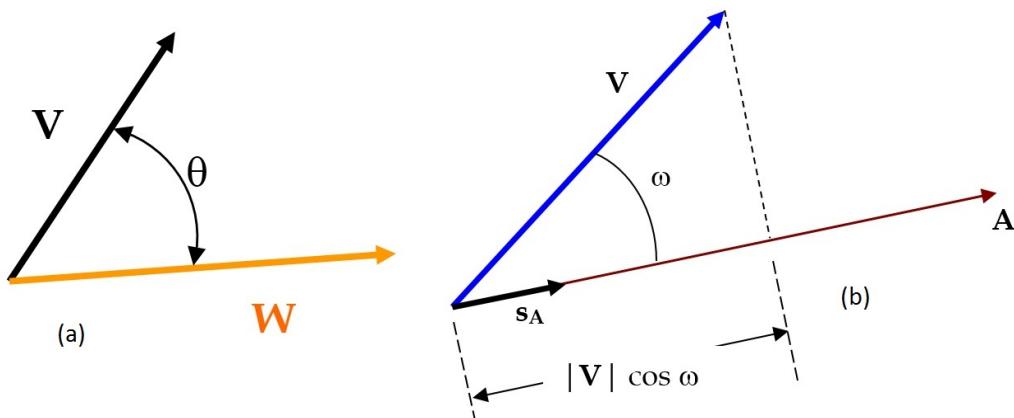
Pada gambar di samping terdapat dua vektor yang terletak pada bidang xy . Vektor A membentuk sudut 60° terhadap sumbu x positif sedangkan vektor B membentuk sudut 45° terhadap sumbu x negatif. Diketahui panjang vektor A adalah 1 satuan dan vektor B adalah 2 satuan. Uraikan masing-masing vektor tersebut terhadap komponen-komponennya, kemudian tentukan vektor: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, dan $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Tentukan pula sudut yang dibentuk oleh masing-masing vektor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, dan $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ terhadap sumbu x positif.

3.5 Hasilkali Skalar

Andaikan dua buah vektor, yakni vektor \mathbf{V} dan vektor \mathbf{W} , membentuk sudut θ sebagaimana yang diperlihatkan dalam Gambar 3.14(a). Hasilkali skalar dari vektor \mathbf{V} dan vektor \mathbf{W} adalah sebuah skalar yang ditulis sebagai $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$ yang nilainya diberikan oleh

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = |\mathbf{V}| |\mathbf{W}| \cos \theta. \quad (3.18)$$

Sekali lagi, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$ adalah sebuah skalar yang diperoleh dari \mathbf{V} dan \mathbf{W} . Selain ditulis sebagai $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$, hasilkali skalar antara vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} dalam beberapa buku



Gambar 3.14: (a) Vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} yang membentuk sudut θ satu dengan yang lain, (b) Projeksi vektor \mathbf{V} sepanjang vektor \mathbf{A} .

juga ditulis sebagai (\mathbf{V}, \mathbf{W}) atau $(\mathbf{V}|\mathbf{W})$ atau $\langle \mathbf{V}, \mathbf{W} \rangle$ atau $\langle \mathbf{V}|\mathbf{W} \rangle$. Hasilkali skalar sering pula disebut sebagai hasilkali dalam. Berikut beberapa sifat hasilkali skalar :

1. Hasilkali skalar bersifat komutatif : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}$.
2. Hasilkali skalar bersifat linier : apabila \mathbf{U} suatu vektor yang lain, maka untuk sebarang skalar a dan b berlaku $\mathbf{V} \cdot (a\mathbf{W} + b\mathbf{U}) = a(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) + b(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})$
3. Apabila \mathbf{V} dan \mathbf{W} tegak lurus, maka $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = 0$.
4. Apabila $\hat{\mathbf{s}}_A$ vektor satuan searah vektor \mathbf{A} , maka $\hat{\mathbf{s}}_A \cdot \mathbf{V}$ merupakan proyeksi tegak lurus vektor \mathbf{V} sepanjang vektor \mathbf{A} sebab berdasarkan definisi di atas diperoleh $\hat{\mathbf{s}}_A \cdot \mathbf{V} = |\hat{\mathbf{s}}_A||\mathbf{V}| \cos \omega = |\mathbf{V}| \cos \omega$. (lihat Gambar 3.14(b)).
5. Untuk setiap vektor \mathbf{V} , berlaku persamaan $|\mathbf{V}| = \sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}$.
6. Untuk setiap pasangan vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} , ketaksamaan Schwartz berikut berlaku: $|\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}| \leq |\mathbf{V}||\mathbf{W}|$.
7. Untuk setiap pasangan vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} , persamaan

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{V}||\mathbf{W}|} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}\sqrt{\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}}} \quad (3.19)$$

berlaku, dengan θ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua vektor itu.

Karena vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$ dalam sumbu-sumbu sistem koordinat yang diperlihatkan pada Gambar 3.12 saling tegak lurus satu dengan yang lain, maka hasilkali skalar antar vektor-vektor satuan itu adalah

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad (3.20)$$

dan

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0. \quad (3.21)$$

Dari dua persamaan terakhir ini diperoleh

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z, \quad (3.22)$$

dan

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (3.23)$$

untuk semua vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} . Oleh karena itu

$$\cos \theta = \frac{V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}. \quad (3.24)$$

Sekarang, ambillah hasilkali skalar kedua ruas dalam persamaan (3.15) berturut-turut dengan $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$, maka akan didapat

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}} \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{i}} \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{i}} \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) + V_y (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) + V_z (\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = V_x,$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{j}} \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{j}} \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{j}} \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x (\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) + V_y (\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) + V_z (\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = V_y,$$

dan

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{k}} \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) + V_y (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) + V_z (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = V_z.$$

Jadi, kita mendapatkan

$$V_x = \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{V}, \quad V_y = \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{V}, \quad V_z = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{V}. \quad (3.25)$$

Jadi,

$$\mathbf{V} = (\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{V}) \hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{V}) \hat{\mathbf{j}} + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{V}) \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.26)$$

Jika $\{\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}'\}$ sebarang basis lain dengan pangkal koordinat yang sama, maka basis lain ini pun juga memenuhi sifat di atas. Terlihat bahwa

$$\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} = \cos \theta_{11},$$

$$\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} = \cos \theta_{12},$$

$$\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta_{13},$$

$$\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} = \cos \theta_{21},$$

dan seterusnya, dengan θ_{11} adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu-x' dan sumbu-x, θ_{12} adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu-x' dan sumbu-y, dan seterusnya hingga θ_{33} adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu-z' dan sumbu-z.

Sekarang, ambillah hasilkali skalar kedua ruas dalam persamaan (3.16) berturut-turut dengan $\hat{\mathbf{i}}'$, $\hat{\mathbf{j}}'$, dan $\hat{\mathbf{k}}'$, maka akan didapat

$$\hat{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V'_x \hat{\mathbf{i}}') + \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V'_y \hat{\mathbf{j}}') + \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V'_z \hat{\mathbf{k}}') = V'_x (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}') + V'_y (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}') + V'_z (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}') = V'_x,$$

$$\hat{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V'_x \hat{\mathbf{i}}') + \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V'_y \hat{\mathbf{j}}') + \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V'_z \hat{\mathbf{k}}') = V'_x (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}') + V'_y (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}') + V'_z (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}') = V'_y,$$

dan

$$\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V'_x \hat{\mathbf{i}}') + \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V'_y \hat{\mathbf{j}}') + \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V'_z \hat{\mathbf{k}}') = V'_x (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}') + V'_y (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}') + V'_z (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}') = V'_z.$$

Jika sekarang kedua ruas persamaan (3.15) diambil hasilkali skalarinya berturut-turut dengan $\hat{\mathbf{i}}'$, $\hat{\mathbf{j}}'$, dan $\hat{\mathbf{k}}'$, maka akan didapat

$$\hat{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{V} = V'_x = \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{i}}' \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x \cos \theta_{11} + V_y \cos \theta_{12} + V_z \cos \theta_{13},$$

$$\hat{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{V} = V'_y = \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{j}}' \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x \cos \theta_{21} + V_y \cos \theta_{22} + V_z \cos \theta_{23},$$

dan

$$\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{V} = V'_z = \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V_x \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V_y \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{k}}' \cdot (V_z \hat{\mathbf{k}}) = V_x \cos \theta_{31} + V_y \cos \theta_{32} + V_z \cos \theta_{33}.$$

Jadi, jika vektor \mathbf{V} diungkapkan dengan matriks kolom, didapatkan ungkapan untuk alihragam koordinat berikut

$$\begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Dapat dibuktikan bahwa determinan matriks bujursangkar

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

tidak lenyap, sehingga matriks itu memiliki invers. Invers matriks tersebut ialah

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{21} & \cos \theta_{31} \\ \cos \theta_{12} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{32} \\ \cos \theta_{13} & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.27) didapatkan alihragam balik

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{21} & \cos \theta_{31} \\ \cos \theta_{12} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{32} \\ \cos \theta_{13} & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Untuk kasus yang diperlihatkan dalam Gambar 3.12, didapat alihragam koordinat berikut

$$\begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Uji Ketajaman 3.5

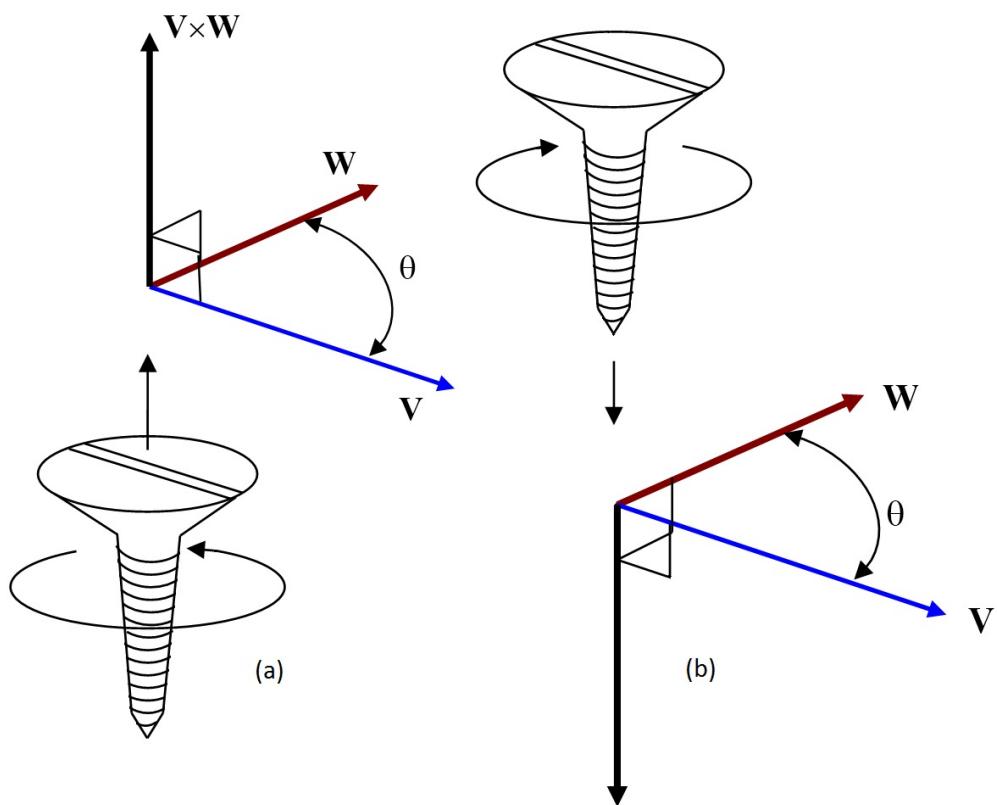
1. Adakah sebuah vektor yang tegak lurus dengan semua vektor? Berilah alasan!
2. Mungkinkah Anda mendapatkan tiga buah vektor yang terletak pada suatu bidang yang sama saling tegaklurus satu terhadap yang lain?
3. Bolehkan orang menuliskan $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}$, untuk sembarang vektor-vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} ?
4. Buktikan bahwa
 - (a) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{V} = 0$, untuk setiap vektor \mathbf{V} , tanpa melalui definisi pers.(3.18).
 - (b) jika $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = 0$, maka $\mathbf{V} = \mathbf{0}$.
5. Buktikan persamaan (3.22).
6. Buktikan bahwa panjang sebuah vektor tidak berubah dengan berpindah sistem koordinat atau basis.
7. Turunkan alih ragam koordinat dengan berpindah kerangka baru yang diperoleh dengan memutar kerangka lama memutari sumbu-x.
8. Diberikan dua buah vektor, $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$ dan $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. Tentukanlah:
 - a) $2\mathbf{A} \cdot 3\mathbf{B}$
 - b) $-2\mathbf{A} \cdot 3\mathbf{B}$
 - c) $2\mathbf{A} \cdot -3\mathbf{B}$
 - d) $-2\mathbf{A} \cdot -3\mathbf{B}$
9. Diberikan dua buah vektor, yaitu \mathbf{C} yang panjangnya 5 satuan, membentuk sudut 50° dengan sumbu x positif, dan vektor \mathbf{D} yang panjangnya 7 satuan, dan membentuk sudut 190° terhadap sumbu x positif. Tentukanlah:
 - a) $-2\mathbf{C} \cdot 2\mathbf{D}$
 - b) $-4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$
 - c) $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D})$

3.6 Hasilkali Silang

Sekali lagi andaikan \mathbf{V} dan \mathbf{W} dua buah vektor sembarang dan keduanya membentuk sudut θ satu dengan yang lain. Hasilkali silang atau produk silang antara vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} adalah sebuah vektor yang hendak ditulis sebagai $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$. Sebagaimana yang telah dijelaskan di awal bab ini, untuk mengetahui vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ perlu diajukan dua pertanyaan : Berapa besarnya? Ke mana arahnya?

1. Berapa besar $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$? Besar vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ diberikan oleh persamaan berikut

$$|\mathbf{V} \times \mathbf{W}| = |\mathbf{V}||\mathbf{W}| \sin \theta. \quad (3.32)$$



Gambar 3.15: Hasilkali silang antara vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} yang membentuk sudut θ satu dengan yang lain.

- Ke manakah arah $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$? Arah vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ diperlihatkan oleh Gambar 3.15. Dalam Gambar 3.15, $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ tegak lurus baik terhadap vektor \mathbf{V} maupun terhadap vektor \mathbf{W} . Arahnya ditentukan dengan meletakkan sebuah sekrup putar kanan sedemikian rupa sehingga tegak lurus baik terhadap vektor \mathbf{V} maupun terhadap vektor \mathbf{W} dan memutarnya dari \mathbf{V} menuju ke \mathbf{W} melalui sudut terkecil. Arah maju sekrup adalah arah vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$.

Berikut adalah sifat-sifat hasilkali vektor :

- Hasilkali vektor bersifat antikomutatif: Untuk sembarang pasangan vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} berlaku $\mathbf{V} \times \mathbf{W} = -\mathbf{W} \times \mathbf{V}$. Artinya, vektor $\mathbf{W} \times \mathbf{V}$ merupakan vektor yang besarnya sama dengan vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ namun arahnya berlawanan terhadap arah vektor $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$. Hal ini diperlihatkan oleh Gambar 3.15.
- Apabila \mathbf{V} dan \mathbf{W} paralel, maka $\mathbf{V} \times \mathbf{W} = 0$.
- Hasilkali silang tidak asosiatif, melainkan memenuhi identitas Jacobi: Untuk sembarang tiga vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} berlaku

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \times \mathbf{U} + (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \times \mathbf{V} + (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W} = 0. \quad (3.33)$$

- Hasilkali vektor bersifat linier : untuk sembarang tiga vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} dan untuk sembarang skalar a dan b berlaku

$$\mathbf{V} \times (a\mathbf{W} + b\mathbf{U}) = a(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) + b(\mathbf{V} \times \mathbf{U}). \quad (3.34)$$

5. Untuk sembarang dua vektor \mathbf{V} dan \mathbf{W} , nilai $|\mathbf{V} \times \mathbf{W}|$ sama dengan luas jajaran genjang yang dibatasi oleh vektor \mathbf{V} dan vektor \mathbf{W} .
6. Untuk sembarang tiga vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} , nilai $(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{U}$ sama dengan volume parallelepiped yang dibentang oleh vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} .
7. Untuk sembarang tiga vektor \mathbf{V} , \mathbf{W} , dan \mathbf{U} , berlaku identitas

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \times \mathbf{U} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})\mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})\mathbf{W}. \quad (3.35)$$

Uji Ketajaman 3.6

1. Buktikan sifat-sifat vektor yang disebutkan di atas.
2. Untuk sembarang vektor-vektor \mathbf{V} , \mathbf{U} , \mathbf{A} , dan \mathbf{W} , di antara ungkapan-ungkapan berikut manakah yang vektor dan manakah yang skalar?
 - (a) $((\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{A}$,
 - (b) $\mathbf{V} \times (\mathbf{U} \cdot \mathbf{A})\mathbf{W}$,
 - (c) $(\mathbf{V} \times \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{W})$,
3. Buktikan bahwa $\mathbf{0} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ untuk semua vektor \mathbf{V} .
4. Diberikan tiga buah vektor. $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{B} = -2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$, dan $\mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Tentukan:
 - a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
 - b) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$
 - c) $\mathbf{C} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
 - d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot 2\mathbf{C}$

3.7 Medan Skalar dan Medan Vektor

Dalam perjalanan menyusuri buku ini dari satu bab ke bab yang lain, Anda akan menjumpai banyak besaran, entah skalar maupun vektor, yang bergantung pada posisi dan waktu. Besaran fisis semacam itu disebut **medan**. Jika yang bergantung pada posisi dan waktu itu besaran vektor, maka kita menyebutnya **medan vektor**. Jika yang bergantung pada posisi dan waktu itu besaran skalar, maka kita menyebutnya **medan skalar**. Temperatur atau suhu ruangan adalah contoh bagi medan skalar. Dalam hal ini temperatur yang bergantung pada posisi dan waktu itu hendak kita tuliskan sebagai $T(\mathbf{r}, t)$. Karena vektor posisi ditentukan oleh tiga buah peubah, yakni x , y , dan z , maka sebuah medan temperatur merupakan fungsi berpeubah (bervariabel) empat. Jadi, $T = T(x, y, z, t)$. Contoh-contoh lain untuk medan skalar adalah rapat massa bahan $\rho(\mathbf{r}, t)$, potensial listrik $V(\mathbf{r}, t)$, dan potensial gravitasi

$\Phi(\mathbf{r}, t)$. Contoh medan vektor adalah medan induksi magnetik $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Contoh-contoh lain adalah medan listrik $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, medan percepatan gravitasi $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$, dan medan kecepatan $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ dalam aliran fluida. Karena sebuah vektor dapat diurai atas koordinat-koordinatnya, maka sebuah medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = V_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{i}} + V_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{j}} + V_z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.36)$$

dengan $V_x(\mathbf{r}, t)$, $V_y(\mathbf{r}, t)$, dan $V_z(\mathbf{r}, t)$ medan-medan skalar sebagai koordinatnya. Medan yang tidak bergantung pada waktu dikatakan sebagai **medan yang tunak atau stasioner**.

Jika $\varphi(\mathbf{r}, t)$ sebuah medan skalar. Medan vektor $\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$ adalah medan vektor yang didapat dari medan skalar $\varphi(\mathbf{r}, t)$ melalui

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.37)$$

dengan

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x}$$

adalah **turunan parsial fungsi** $\varphi(\mathbf{r}, t)$ terhadap peubah x , yaitu turunan fungsi $\varphi(\mathbf{r}, t)$ terhadap peubah x dengan menganggap peubah lain (y , z , dan t) sebagai tetapan. Demikian juga untuk

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial z}.$$

Medan vektor $\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$ disebut **gradien** medan $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Arah medan vektor ini di setiap titik dalam ruang menyatakan arah perubahan maksimum nilai medan φ , sedangkan besarnya menyatakan laju perubahan nilai φ terhadap pergeseran ruang. Jadi,

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} =: d\varphi(\mathbf{r}, t) \quad (3.38)$$

menyatakan perubahan medan φ di titik \mathbf{r} pada saat t jika kita bergeser sejauh $d\mathbf{r}$.

Contoh 3.3 Gradien Medan Skalar

Andaikan $T(x, y, z) = T_0 \exp(-\alpha r^2)$ medan temperatur di sebuah ruangan, dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jarak dari pusat koordinat ke titik yang ditinjau, sedangkan T_0 dan α tetapan. Tentukan gradien temperatur.

Dalam hal ini harus dihitung turunan-turunan parsial $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$, dan $\partial T / \partial z$. Turunan parsial $\partial T / \partial x$ diperoleh dari

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}) = T_0(-2\alpha x)e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = -2\alpha x T.$$

Dengan cara yang sama didapatkan

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -2\alpha y T.$$

dan

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -2\alpha z T.$$

Jadi, gradien temperatur di ruangan itu adalah

$$\nabla T(\mathbf{r}) = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = -2\alpha x T \hat{\mathbf{i}} - 2\alpha y T \hat{\mathbf{j}} - 2\alpha z T \hat{\mathbf{k}} = -2\alpha T(\mathbf{r}) \mathbf{r}.$$

Andaikan $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{i}} + V_y(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{j}} + V_z(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{k}}$ sebuah medan vektor. Medan skalar $\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$ adalah medan skalar yang diperoleh dari medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ melalui

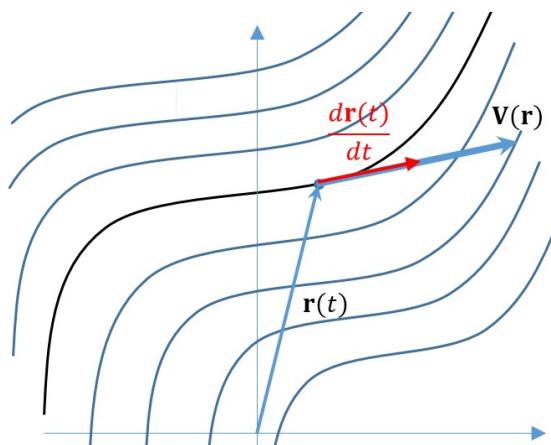
$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (3.39)$$

Medan skalar $\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$ disebut medan divergensi medan \mathbf{V} . Dari medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ diperoleh juga medan vektor lain yang dituliskan sebagai $\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r})$ dan disebut rotasi medan $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Medan vektor ini diperoleh melalui

$$\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.40)$$

Hal penting lain yang terkait dengan sebuah medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ adalah kurva integral milik medan vektor itu. Setiap medan vektor selalu memiliki kurva integral. Kurva integral sebuah medan vektor adalah kurva-kurva yang mengisi ruang (yakni melalui titik-titik dalam ruang itu) sehingga di tiap titik dalam ruang itu, medan vektor merupakan vektor singgung pada kurva-kurva itu. Sebuah kurva dalam ruang dapat dituliskan sebagai rentetan kontinyu titik-titik dalam ruang. Oleh karena itu sebuah kurva dapat dituliskan sebagai vektor posisi atau koordinat yang bergantung pada sebuah parameter riil t . Sebuah kurva, oleh karena itu, dituliskan sebagai $\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}} + z(t) \hat{\mathbf{k}}$, dengan t adalah bilangan riil yang bervariasi secara kontinyu dalam sebuah interval. Vektor 'kecepatan' pada kurva tersebut di titik $\mathbf{r}(t)$ relatif terhadap parameter t , adalah 'kecepatan' terhadap parameter t itu, yakni

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{\mathbf{k}}.$$



Gambar 3.16: Kurva integral bagi sebuah medan vektor.

Vektor ini merupakan vektor singgung pada kurva di setiap titiknya (lihat Gambar 3.16). Berdasarkan definisi kurva integral di atas, medan vektor di tiap titik pada kurva-kurva itu haruslah menyinggung kurva di titik-titik itu. Oleh karena itu,

vektor 'kecepatan' $d\mathbf{r}/dt$ dan medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ di titik itu sama-sama merupakan vektor singgung pada kurva di titik itu. Jadi, berlaku kaitan

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \alpha(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3.41)$$

dengan $\alpha(t)$ sebuah skalar yang bergantung pada parameter t . Persamaan terakhir ini setara dengan

$$V_x = \alpha(t) \frac{dx(t)}{dt}, \quad V_y = \alpha(t) \frac{dy(t)}{dt}, \quad \text{dan} \quad V_z = \alpha(t) \frac{dz(t)}{dt}. \quad (3.42)$$

Dari persamaan ini diperoleh persamaan kurva integral untuk medan vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ sebagai

$$\frac{V_x}{V_y} = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{V_x}{V_z} = \frac{dx}{dz}, \quad \text{dan} \quad \frac{V_y}{V_z} = \frac{dy}{dz}. \quad (3.43)$$

Contoh 3.4 Kurva Integral Medan Vektor Tetap

Sebuah medan vektor konstan diberikan oleh ungkapan $\mathbf{V} = V_0 \hat{\mathbf{i}}$, dengan V_0 sebuah tetapan. Tentukan kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$.

Dalam hal ini, $V_x = V_0$, $V_y = V_z = 0$. Persamaan (3.43) menghasilkan

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $y(x) = C$ dan $z(x) = C'$, dengan C dan C' tetapan-tetapan. Sementara x sembarang. Jika sebuah kurva melalui titik $(1, 1, 1)$, maka $y(1) = C = 1$ dan $z(1) = C' = 0$. Jadi, $C = 1$ dan $C' = 0$. Kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$ ditentukan oleh persamaan

$$y(x) = 1, \quad \text{dan} \quad z(x) = 0.$$

Persamaan terakhir ini dibaca sebagai himpunan titik-titik (x, y, z) dengan $y = 1$ dan $z = 0$. Himpunan ini berupa garis yang melalui titik $(1, 1, 0)$ dan sejajar dengan sumbu-x sebagaimana terlihat pada Gambar 3.17(a).

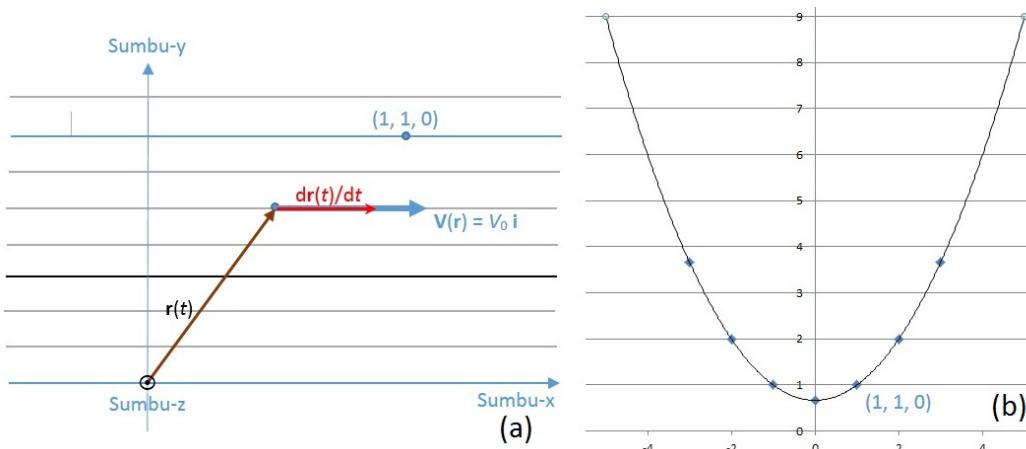
Contoh 3.5 Kurva Integral Kwadrat

Sebuah medan vektor konstan diberikan oleh ungkapan $\mathbf{V} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2x\hat{\mathbf{j}}$. Tentukan kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$.

Dalam hal ini, $V_x = 3$, $V_y = 2x$, $V_z = 0$. Persamaan (3.43) menghasilkan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3}, \quad \frac{dz}{dx} = 0.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $y(x) = (1/3)x^2 + C$ dan $z(x) = C'$, dengan C dan C' tetapan-tetapan. Sementara x sembarang. Jika sebuah kurva melalui titik $(1, 1, 0)$, maka $y(1) = (1/3)(1^2) + C = 1$



Gambar 3.17: (a) Kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$ bagi medan vektor $\mathbf{V} = V_0 \hat{\mathbf{i}}$. (b) Kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$ bagi $\mathbf{V} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2x\hat{\mathbf{j}}$

dan $z(1) = C' = 0$. Jadi, $C = 2/3$ dan $C' = 0$. Kurva integral yang melalui titik $(1, 1, 0)$ ditentukan oleh persamaan

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}, \quad \text{dan} \quad z(x) = 0.$$

Persamaan terakhir ini dibaca sebagai himpunan titik-titik (x, y, z) dengan $y = (1/3)x^2 + (2/3)$ dan $z = 0$. Himpunan ini berupa parabola yang melalui titik $(1, 1, 0)$ yang diperlihatkan oleh Gambar 3.17(b).

4

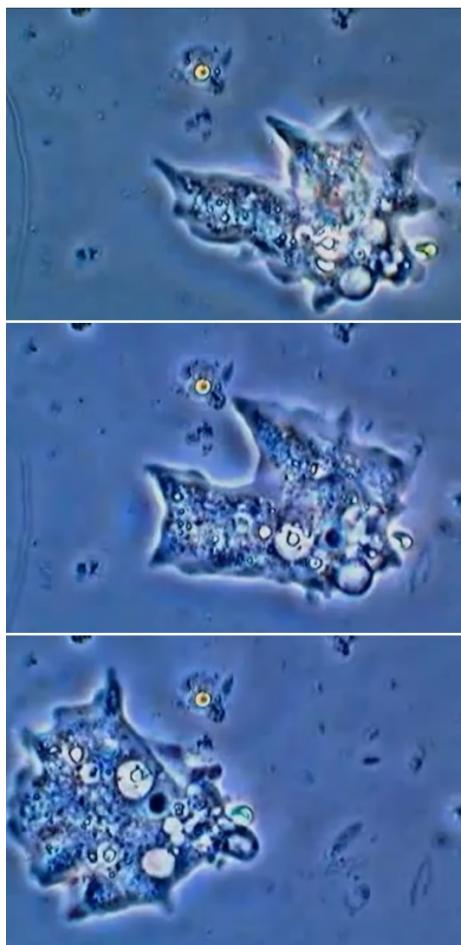
Kinematika

Sebuah benda dikatakan bergerak apabila posisi benda tersebut berubah. Posisi benda bergantung pada kerangka acuan yang dipilih. Gambar di samping memperlihatkan tiga orang yang sedang mengendarai sepeda secara berjajar bersamaan. Posisi ketiganya berubah jika dilihat oleh orang yang diam di tanah. Akan tetapi, setiap orang yang bersepeda itu akan melihat posisi dua temannya tidak mengalami perubahan. Oleh karena itu, gerak bersifat relatif, yakni bergantung pada kesepakatan cara menentukan posisi (kerangka acuan).

- 4.1 Kerangka Acuan dan Vektor Posisi**
- 4.2 Kecepatan Rata-Rata dan Kecepatan Sesaat**
- 4.3 Percepatan Rata-Rata dan Percepatan Sesaat**
- 4.4 Gerak Lurus**
- 4.5 Gerak dalam Bidang**



Gerak dapat ditemukan di berbagai gejala alam, dari yang sederhana sampai dengan yang kompleks dan acak: gerak kereta api di sepanjang rel yang lurus, gerak amoeba, gerak saling menjauh di antara galaksi-galaksi, pergerakan bintang-bintang di langit, gerak planet dalam tata surya, gerak ikan di dalam air, gerak serbuk sari di dalam air (Gerak Brown), dll. Dari sekian banyak gerak tersebut, gerak amoeba barangkali gerak yang paling sulit untuk dipahami. Gerak amoeba tidak hanya meliputi gerak translasi dan rotasi melainkan juga gerak deformasi yakni melibatkan perubahan bentuk geometri tubuhnya. Gerak acak (gerak Brown) sejauh ini secara matematis sudah dapat dirumuskan. Perumusan pertama kali dirumuskan oleh Thorvald N. Thiele tahun 1880 dan dilanjutkan oleh Louis Bachelier pada tahun 1900. Secara fisis gejala gerak Brown dijelaskan oleh Einstein pada tahun 1905 sebagai akibat dorongan dari molekul-molekul air. Hal ini menunjukkan bahwa molekul-molekul air juga mengalami gerak acak. Sementara itu, gerak ikan di dalam air tergolong gerak hayati. Meskipun tidak sekompelks gerak amoeba, gerak ikan juga melibatkan deformasi yakni deformasi tubuh ikan. Meskipun demikian, gerak ikan dapat dimodelkan dengan beberapa gerak benda tegar yang tersambung. Pembicaraan gerak amoeba, gerak Brown, dan gerak ikan memerlukan peranti matematika yang tidak sederhana. Oleh karena itu, ketiga jenis gerak tersebut tidak akan dibicarakan di buku ini. Gerak saling menjauh di antara galaksi-galaksi merupakan akibat adanya pengembangan ruang alam semesta. Selain gerak sistematik akibat pengembangan alam semesta, galaksi-galaksi juga mengalami gerak sendiri, semisal rotasi. Gerak galaksi akan dibicarakan secukupnya di bab Astrofisika buku jilid 3. Sementara, pergerakan bintang-bintang dan gerak planet dalam tata surya akan dibicarakan lebih jauh pada Bab Gravitasi.



Gambar 4.1: Tiga gambar terurut oleh waktu ini (dari atas ke bawah) memperlihatkan posisi dan bentuk Amoeba dalam gerakannya. Amoeba termasuk genus Protozoa. Untuk melakukan perpindahan, Amoeba akan menggerakkan *Pseudopodia*. *Pseudopodia* dibentuk oleh Amoeba dengan mengeluarkan *Cytoplasm* dan diikuti oleh *Endoplasm*.

Gerak (translasi) sebuah benda titik dipahami sebagai perubahan posisi benda itu. Sebuah benda dikatakan sebagai benda titik apabila ukuran benda itu dapat diabaikan, yakni ketika ukuran benda itu jauh lebih kecil daripada jarak pergeseran yang ditempuhnya. Jarak Bumi dari Matahari sekitar 150 juta kilometer. Hal ini berarti bahwa Bumi menempuh jarak 942,5 juta kilometer dalam satu kali periode jika orbitnya dianggap lingkaran. Sementara jari-jari Bumi sekitar 6370 kilometer. Terlihat bahwa ukuran Bumi jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan jarak yang ditempuh olehnya selama satu periode. Oleh karena itu, Bumi dapat dipandang sebagai benda titik. Beberapa benda titik membentuk sistem benda titik. Gerakan benda-benda titik sebagai keseluruhan disebut sebagai gerak sistem benda titik. Gerak sistem benda titik disebut gerak benda tegar apabila jarak antar benda titik tidak berubah. Sementara, jika jarak antara benda titik di dalam sistem benda titik yang bergerak mengalami perubahan, gerak sistem benda titik tersebut disebut gerak dengan deformasi. Tentang gerak benda tegar dan gerak benda dengan deformasi lebih rinci dapat dibaca pada bab Gerak Benda Tegar dan dalam buku ini. Sementara pada bagian ini, kita hanya akan mempelajari gerak benda titik.

Gerak translasi benda titik dinamakan berdasarkan bentuk lintasan yang dilaluinya. Oleh karena itu, orang mengenal adanya gerak lurus, gerak melingkar, dan gerak parabola yang keseluruhannya merupakan gerak elips. Gerak elips merupakan gerak pada bidang karena lintasannya berada pada satu bidang. Adapula gerak dengan lintasan berupa spiral. Gerak ini bukan merupakan gerak pada bidang, melainkan merupakan gerak dalam ruang.

Dalam bagian ini, kita akan membicarakan gerak tanpa meninjau penyebabnya. Cabang mekanika yang membicarakan gerak translasi tanpa meninjau penyebabnya disebut kinematika. Pembicaraan kinematika translasi hendak dimulai dengan pembicaraan tentang kerangka acuan dan vektor posisi. Kerangka acuan merupakan hal yang paling penting untuk disepakati sebelum pembicaraan tentang gerak. Selanjutnya akan dibicarakan konsep kecepatan (yakni, laju perubahan posisi) dan percepatan (yakni, konsep kecepatan). Berikutnya yang hendak dibicarakan adalah gerak lurus dan gerak pada bidang. Dalam pembicaraan tentang gerak pada bidang yang hendak diketengahkan adalah gerak parabola dan gerak melingkar.

4.1 Kerangka Acuan dan Vektor Posisi

Gerak bersifat nisbi (relatif). Sebagai contoh, saat Anda naik kereta api, pohon-pohon yang terlihat di luar kereta api tampak bergerak berlawanan dengan arah gerak kereta. Akan tetapi siapapun tahu bahwa pohon-pohon diam kokoh di atas tanah. Pada saat tertentu kereta berhenti di stasiun, bersamaan pula di rel sebelah terdapat kereta lain yang juga berhenti. Tiba-tiba Anda merasa kereta kembali berjalan. Akan tetapi setelah Anda sadar sepenuhnya, ternyata kereta lain yang ada di rel sebelah mulai berjalan. Sebenarnya perasaan Anda tidak salah, karena kereta yang Anda tumpangi memang bergerak, bukan terhadap tanah, tetapi terhadap kereta api yang sedang berangkat.

Kerangka Acuan

Galilei harus meringkuk di rumahnya sendiri sampai akhir hayatnya dikarenakan berpendapat bahwa Bumi bergerak mengelilingi Matahari. Sementara pihak Gereja berpandangan bahwa Bumi merupakan pusat alam semesta, oleh karenanya Mataharilah yang bergerak mengelilingi Bumi. Perdebatan semacam ini bukan hanya terjadi antara Galilei dan Gereja, akan tetapi hampir setiap peradaban mengenal perdebatan agung semacam itu. Namun, kita akan melihat bahwa perdebatan semacam itu sebenarnya tidak perlu terjadi karena gerak memang bersifat nisbi.

Contoh-contoh tersebut memperlihatkan bahwa diperlukan kerangka acuan yang disepakati sebelum membicarakan gerak. Kesepakatan tersebut adalah tentang kerangka acuan untuk menentukan posisi benda yang bergerak. Kesepakatan mengenai kerangka acuan menyangkut penentuan titik nol (titik pangkal) dan sumbu koordinat.

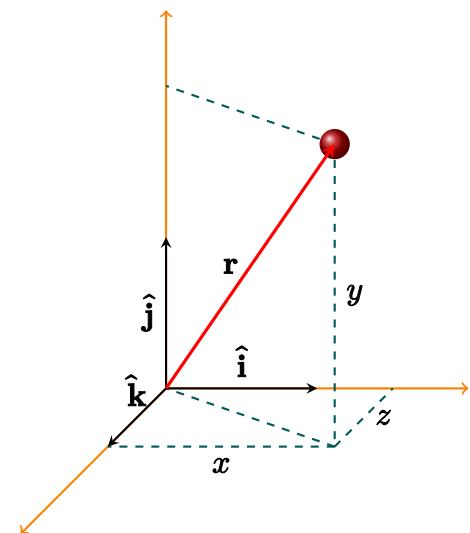
Diperlukan kerangka acuan yang disepakati sebelum membicarakan gerak.

Vektor Posisi

Posisi suatu benda adalah besaran vektor, sehingga biasa disebut vektor posisi. Ujung vektor posisi menunjukkan titik atau posisi yang dimaksud oleh vektor posisi itu. Ciri khas vektor posisi adalah sifatnya yang bergantung pada titik pangkal. Dua vektor posisi yang arah dan besarnya sama tidak harus menunjuk posisi yang sama. Kedua vektor posisi itu menunjuk ke posisi yang sama apabila titik pangkalnya sama. Sebaliknya, sebuah titik atau posisi dapat pula ditunjuk oleh dua vektor posisi yang berbeda titik pangkalnya.

Suatu vektor posisi \mathbf{r} apabila dinyatakan dalam basis-basisnya atau komponen-komponennya atau boleh disebut *dinyatakan dalam vektor-vektor satunya*, dalam ruang \mathbb{R}^3 dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad (4.1)$$



Gambar 4.2: Penguraian vektor posisi suatu partikel (benda) terhadap komponen-komponennya.

dengan $x\hat{\mathbf{i}}$, $y\hat{\mathbf{j}}$, dan $z\hat{\mathbf{k}}$ disebut sebagai komponen vektor posisi \mathbf{r} . Letak partikel sepanjang masing-masing sumbu koordinat *relatif* terhadap pangkal koordinat diberikan oleh koefisien x , y , dan z . Sebagaimana telah dibicarakan pada Bab Peranti Matematik, bahwa masing-masing $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$ sendiri disebut sebagai vektor satuan, vektor-vektor basis yang saling tegak lurus dan besarnya 1 satuan. Andaikan suatu partikel berada di posisi \mathbf{r} relatif terhadap pangkal koordinat kartesian, maka dapat diuraikan berdasarkan komponen-komponennya (Gambar 4.2).

Uji Ketajaman 4.1

Posisi

- Seorang siswa SMK baru saja membeli kit robot dari luar negeri. Ia merangkainya menjadi sebuah robot, dan memasukkan perintah ke dalam chip robot tersebut. Perintah itu merupakan persamaan lintasan dua dimensi yang diterjemahkan dalam bahasa mesin. Persamaan tersebut masing-masing adalah

$$x(t) = 0,5t^2 - t \quad (4.2)$$

dan

$$y(t) = 0,9t. \quad (4.3)$$

Tentukan posisi robot pada saat $t = 3$, $t = 5$, dan $t = 7$

- a) apabila sebelum dinyalakan, robot berada di posisi $(0, 0)$,
- b) apabila sebelum dinyalakan, robot telah berada di titik $(4, 5)$.

*Posisi dinyatakan dalam satuan meter dan waktu dinyatakan dalam satuan detik.

2. Tentukanlah posisi partikel yang bergerak dengan persamaan $\mathbf{r} = 9t - 2t^2\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}}$ pada saat $t = 2$, $t = 4$, dan $t = 6$.

Perpindahan versus Jarak

Perpindahan adalah vektor perubahan posisi.

Sementara jarak adalah total panjang lintasan yang ditempuh benda.

Andaikan suatu kerangka acuan telah disepakati untuk meninjau gerak suatu benda. Perpindahan merupakan besaran vektor yang menunjukkan perubahan posisi dari satu waktu ke waktu yang lain. Dengan kata lain, perpindahan adalah selisih vektor antara posisi akhir dan posisi awal, yang terkait dengan suatu selang waktu. Sebagai gambaran, apabila pada saat t_1 benda berada di \mathbf{r}_1 kemudian pada saat t_2 benda berada pada \mathbf{r}_2 , maka dapat dilihat pada gambar, bahwa secara vektor, posisi \mathbf{r}_2 dapat diporeleh dari penjumlahan vektor secara poligon $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$. Dengan demikian, perpindahan $\Delta\mathbf{r}$ dapat dituliskan sebagai

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (4.4)$$

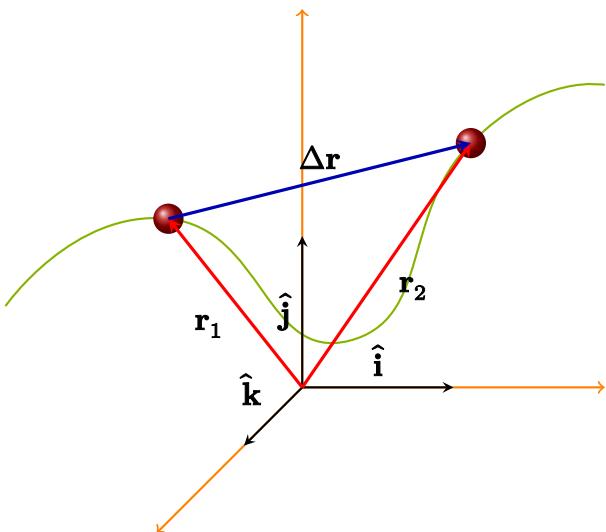
Sementara jarak adalah panjang lintasan yang ditempuh oleh benda dari posisi \mathbf{r}_1 menuju posisi \mathbf{r}_2 . Jarak adalah besaran skalar. Jarak dapat dihitung dengan menggunakan metode integral kurva. Andaikan benda berpindah dari posisi \mathbf{r} menuju posisi $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Vektor $d\mathbf{r}$ adalah vektor perpindahan yang besarnya mendekati nol. Dengan kata lain, benda mengalami perpindahan yang sangat kecil lainnya. Maka, jarak yang ditempuh benda untuk perpindahan yang sangat kecil tersebut tidak lain adalah panjang vektor $d\mathbf{r}$,

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}. \quad (4.5)$$

Kita ketahui bahwa vektor $d\mathbf{r}$ dapat diuraikan berdasarkan komponen-komponennya, $d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}$. Dengan demikian, perkalian skalar antara vektor $d\mathbf{r}$ dengan dirinya sendiri, dapat dituliskan sebagai

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.6)$$

Oleh karena itu, persamaan jarak tempuh benda untuk perpindahan yang sangat kecil dapat dituliskan sebagai



Gambar 4.3: Benda bergerak pada suatu kurva yang berwarna hijau. Pada saat t_1 , benda berada pada posisi \mathbf{r}_1 dan pada saat $t = 2$ benda berada pada posisi \mathbf{r}_2 . Perpindahan dari \mathbf{r}_1 menuju \mathbf{r}_2 ditunjukkan oleh vektor $\Delta\mathbf{r}$. Sementara jarak tempuh benda dari \mathbf{r}_1 hingga \mathbf{r}_2 ditunjukkan oleh potongan kurva berwarna hijau yang dibatasi \mathbf{r}_1 dan \mathbf{r}_2 .

$$d(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (4.7)$$

Dengan demikian, apabila benda bergerak dari posisi \mathbf{r}_1 menuju \mathbf{r}_2 , maka jaraknya dapat dihitung dengan cara menjumlahkan potongan-potongan kecil jarak yang di-tempuh benda tersebut. Penjumlahan secara *infinitesimal* tersebut dapat dilakukan dengan cara mengintegralkan persamaan (4.7) dari \mathbf{r}_1 hingga \mathbf{r}_2 .

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (4.8)$$

Dengan menggunakan sedikit trik aljabar, persamaan (4.8) dapat dikalikan dengan dx/dx ,

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \frac{dx}{dx} \quad (4.9)$$

maka $1/dx$ dapat masuk dalam tanda akar sehingga diperoleh persamaan jarak tempuh benda

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) di atas juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy \quad (4.11)$$

dan

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz. \quad (4.12)$$

Contoh 4.1 Perpindahan dan Jarak Tempuh Benda

Sebuah partikel bergerak dengan persamaan

$$\mathbf{r}(t) = 2t^2 \hat{\mathbf{i}} + 5t \hat{\mathbf{j}} + (3t^2 - 5) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.13)$$

Tentukanlah perpindahan dan jarak yang ditempuh partikel dari $t = 2$ hingga $t = 5$.

Untuk menghitung jarak tempuh suatu partikel, dapat dilakukan dengan cara memotong-motong kurva lintasan menjadi potongan-potongan yang sangat kecil. Potongan tersebut dibuat sedemikian kecilnya (*infinitely small*, sering disingkat sebagai *infinitesimal*). Kemudian potongan-potongan kurva tadi dijumlahkan seluruhnya.

Menjumlahkan sesuatu yang *infinitesimal* dilakukan dengan metode kalkulus, dalam hal ini digunakan integral.

Untuk menentukan perpindahan partikel, cukup dengan cara mengurangkan posisi awal dan posisi akhir secara vektor

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(5) - \mathbf{r}(2). \quad (4.14)$$

Dengan memasukkan nilai t yang diminta, maka diperoleh $\mathbf{r}(5) = 50\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} + 70\hat{\mathbf{k}}$ dan $\mathbf{r}(2) = 8\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$. Dengan demikian, perpindahan yang dialami benda adalah

$$\Delta \mathbf{r} = 42\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}} + 63\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.15)$$

Sementara untuk menentukan jarak yang ditempuh oleh partikel, dapat dilakukan dengan cara memecah persamaan (4.13) terhadap masing-masing koefisien kombinasi linernya,

$$x(t) = 2t^2, \quad y(t) = 5t, \quad z(t) = 3t^2 - 5. \quad (4.16)$$

Misalnya dilakukan parametrisasi terhadap y , maka dapat dilakukan dengan cara substitusi $t = y/5$, sehingga diperoleh persamaan

$$x(y) = \frac{2y^2}{25} \quad \text{dan} \quad z(y) = \frac{3y^2}{25} - 5. \quad (4.17)$$

Dari persamaan di atas diperoleh

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{25} \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{6y}{25}. \quad (4.18)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.18) ke persamaan (4.11), maka diperoleh

$$d(\mathbf{r}(5), \mathbf{r}(2)) = \int_{\mathbf{r}(2)}^{\mathbf{r}(5)} \sqrt{1 + \left(\frac{4y}{25}\right)^2 + \left(\frac{6y}{25}\right)^2} dy. \quad (4.19)$$

Untuk menentukan batas integral, dapat dilakukan dengan substitusi biasa. Ketika $t = 5$, nilai $y = 25$ dan ketika $t = 2$, nilai $y = 10$, sehingga

$$d(\mathbf{r}(5), \mathbf{r}(2)) = \int_{10}^{25} \sqrt{1 + \frac{16y^2}{625} + \frac{36y^2}{625}} dy. \quad (4.20)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$d(\mathbf{r}(5), \mathbf{r}(2)) = \frac{1}{25} \int_{10}^{25} \sqrt{625 + 52y^2} dy. \quad (4.21)$$

Integral pada persamaan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan *substitusi trigonometri* (dapat dibaca pada buku-buku kalkulus). Untuk menyelesaikan integral tersebut, misalkan $625 = a$, dan $52 = b$, sehingga integral pada persamaan di atas berbentuk

$$I = \int \sqrt{a + by^2} dy. \quad (4.22)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$I = \int \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b}y)^2} dy. \quad (4.23)$$

Misalkan

$$\sqrt{by} = \sqrt{a} \tan \theta,$$

maka

$$y = \sqrt{a/b} \tan \theta.$$

Dengan demikian

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{a}{b}} \sec^2 \theta.$$

Dari kedua persamaan di atas kita dapatkan

$$\sqrt{a + by^2} = \sqrt{a} \sec \theta.$$

Oleh karena itu, integral di atas dapat dituliskan sebagai

$$I = \frac{a}{\sqrt{b}} \int \sec^3 \theta d\theta. \quad (4.24)$$

Hasil integral tersebut adalah

$$I = \frac{a}{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right) \quad (4.25)$$

Sehingga, penyelesaiannya adalah

$$\frac{25}{\sqrt{52}} \left| \left(\frac{\sqrt{2704y^2 + 32500y}}{625} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{625+y^2}}{25} + \frac{\sqrt{52}y}{25} \right| \right) \right|_{10}^{25}. \quad (4.26)$$

4.2 Kecepatan Rata-Rata, Kecepatan Sesaat dan Kelajuan

Sekarang kita meninjau gerak yang dialami oleh sebuah benda titik. Andai sebuah kerangka acuan telah kita sepakati. Pergeseran atau perpindahan yang dialami oleh

sebuah benda titik itu dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 adalah selisih vektor posisi benda saat masing-masing titik waktu tersebut, $\Delta\mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$.

Kecepatan Rata-Rata versus Kelajuan Rata-Rata

Kecepatan rata-rata adalah nisbah (perbandingan) antara perubahan posisi benda dengan selang waktu benda tersebut untuk berubah posisinya.

Kecepatan rata-rata benda titik itu dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 adalah nisbah antara perpindahan $\Delta\mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2}$ dengan selang waktu $\Delta t = t_2 - t_1$, atau dapat dituliskan

$$\langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{\Delta\mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (4.27)$$

Kecepatan rata-rata sesuai persamaan (4.27) dapat bernilai nol meskipun benda dalam keadaan gerak, semisal gerak melingkar, elips, dan gerak osilasi. Satuan SI untuk kecepatan rata-rata adalah meter per sekon (m/s).

Contoh 4.2 Kecepatan Rata-Rata

Sebuah benda mengalami gerak sedemikian rupa sehingga posisinya sebagai fungsi waktu diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(\pi t) \hat{\mathbf{i}} + A \sin(\pi t) \hat{\mathbf{j}} \quad (4.28)$$

dengan $A = 2$ meter.

- (a) Hitunglah perpindahan dan kecepatan rata-rata dalam selang waktu antara $t_1 = 0,5$ detik sampai dengan $t_2 = 2$ detik.
- (b) Hitunglah perpindahan dan kecepatan rata-rata dalam selang waktu $t_1 = 2$ detik sampai dengan $t_2 = 4$ detik.
- (a) Perpindahan benda dalam selang $t_1 = 0,5$ detik sampai $t_2 = 2$ detik adalah

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2} &= (2 \text{ m}) \cos(2\pi) \hat{\mathbf{i}} + (2 \text{ m}) \sin(2\pi) \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad - (2 \text{ m}) \cos(0,5\pi) \hat{\mathbf{i}} + (2 \text{ m}) \sin(0,5\pi) \hat{\mathbf{j}} \\ &= (2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu tersebut adalah

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} &= \Delta\mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2} / (t_2 - t_1) \\ &= ((2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}) / (2 - 0,5) \text{ detik} \\ &= (4/3)(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

- (b) Perpindahan benda dalam selang $t_1 = 2$ detik sampai $t_2 = 4$ detik adalah

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2} &= (2 \text{ m}) \cos(4\pi) \hat{\mathbf{i}} + (2 \text{ m}) \sin(4\pi) \hat{\mathbf{j}} \\
 &\quad - (2 \text{ m}) \cos(2\pi) \hat{\mathbf{i}} + (2 \text{ m}) \sin(2\pi) \hat{\mathbf{j}} \\
 &= (0\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} &= \Delta \mathbf{r}_{t_1 \rightarrow t_2} / (t_2 - t_1) \\
 &= ((0\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}) / (4 - 2) \text{ detik} \\
 &= 0(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Sementara kelajuan rata-rata adalah jarak tempuh dibagi dengan waktu tempuh. Kelajuan rata-rata merupakan besaran skalar, dapat dituliskan sebagai

$$\langle v \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{d(r(t_1), r(t_2))}{t_2 - t_1}. \tag{4.33}$$

Uji Ketajaman 4.2 Kecepatan Rerata

1. Suatu robot mainan bergerak dengan persamaan gerak pada sumbu- x , (satuan posisi dalam meter dan satuan waktu dalam detik.)

$$x(t) = 0.2t^2 - t$$

dan pada sumbu- y

$$y(t) = 0,5t.$$

Apabila robot tersebut telah dipindahkan sedemikian rupa sehingga pada $t = 0$ telah berada di titik $(3, 3)$, tentukan

- a) posisi robot tersebut pada sembarang t ,
 - b) posisi robot tersebut pada $t = 3, t = 5$, dan $t = 7$,
 - c) jarak yang ditempuh oleh robot tersebut dari $t = 2$ hingga $t = 6$,
 - d) jarak yang ditempuh oleh robot tersebut dari $t = 3$ hingga $t = 7$,
 - e) kecepatan rata-rata robot tersebut pada selang waktu $t = 0$ sampai dengan $t = 5$,
 - f) kecepatan rata-rata robot tersebut pada selang waktu $t = 5$ sampai dengan $t = 10$,
 - g) kelajuan rata-rata robot tersebut pada selang waktu $t = 2$ hingga $t = 6$,
 - h) kelajuan rata-rata robot tersebut pada selang waktu $t = 3$ hingga $t = 7$.
2. Dari sebuah pelabuhan, seorang nakhoda mengarahkan kapalnya ke arah timur laut dan menempuh jarak 234 kilometer, ditempuh selama 6 jam. Kemudian ia berbelok, mengarahkan kapalnya ke utara sejauh 100 kilometer, ditempuh selama 3,5 jam. Tentukan kecepatan rata-rata kapal tersebut dalam satuan knot.

3. Sebuah pesawat komersial melaju ke arah barat dari sebuah bandara internasional, menempuh jarak 400 kilometer dalam waktu 30 menit. Kemudian pesawat berbelok ke arah utara dan menempuh jarak 700 kilometer dalam waktu 50 menit. Tentukan kecepatan rata-rata dan kelajuan rata-rata pesawat tersebut dalam satuan Mach.
4. Sebuah bus melaju dengan kecepatan rata-rata 80 km/jam ke arah barat selama 3 jam. Kemudian bus tersebut melaju ke arah barat laut dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam selama 2 jam. Tentukan kecepatan rata-rata dan kelajuan rata-rata bus tersebut untuk total perjalanannya.

Kecepatan Sesaat

Sekarang ditinjau kecepatan rata-rata benda tersebut di atas dalam selang waktu antara t dan $t + \Delta t$. Posisi pada masing-masing waktu itu adalah $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ dan $\mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\hat{\mathbf{i}} + y(t + \Delta t)\hat{\mathbf{j}} + z(t + \Delta t)\hat{\mathbf{k}}$. Oleh karena itu, kecepatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v} \rangle_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \frac{x(t + \Delta t)\hat{\mathbf{i}} + y(t + \Delta t)\hat{\mathbf{j}} + z(t + \Delta t)\hat{\mathbf{k}} - x(t)\hat{\mathbf{i}} - y(t)\hat{\mathbf{j}} - z(t)\hat{\mathbf{k}}}{\Delta t} \\ &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Kecepatan sesaat adalah kecepatan rata-rata dengan selang waktu antara t dan $t + \Delta t$



Gambar 4.4: Spidometer pada kendaraan roda dua maupun roda empat bukan menunjukkan kecepatan melainkan besar kecepatan atau disebut kelajuan. Gambar diambil dari wallpaperup.com

untuk Δt yang sangat kecil (menuju nol). Jadi kecepatan sesaat benda itu adalah

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{k}} \right] \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{k}},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

karena untuk sembarang fungsi $f(t)$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}. \tag{4.36}$$

Selanjutnya kecepatan sesaat hendak dituliskan sebagai

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} := \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{k}} \tag{4.37}$$

atau

$$\mathbf{v}(t) = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}. \tag{4.38}$$

Besarnya kecepatan sesaat disebut sebagai kelajuan sesaat atau kelajuan. Kelajuan inilah yang tampak pada spidometer.

Contoh 4.3 Kecepatan Sesaat

Tentukan kecepatan sesaat benda yang dibicarakan pada Contoh 4.2

Berdasarkan persamaan (4.37) diperoleh

$$\mathbf{v} = \frac{d[A \cos(\pi t)]}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d[A \sin(\pi t)]}{dt} \hat{\mathbf{j}} = -A\pi \sin(\pi t) \hat{\mathbf{i}} + A\pi \cos(\pi t) \hat{\mathbf{j}}.$$

Uji Ketajaman 4.3 Kecepatan Sesaat

- Diberikan persamaan lintasan benda

$$\mathbf{r} = (3t^2 - t)\hat{\mathbf{i}} + (t^3 - 6t - 7)\hat{\mathbf{j}} - (2t - 3)\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.39)$$

Tentukan kecepatan sesaat benda tersebut untuk $t = 4$, $t = 6$, dan $t = 8$.

2. Diberikan persamaan kecepatan sesaat benda

$$\mathbf{v}(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.40)$$

Apabila pada saat $t = 3$ benda berada pada posisi $\mathbf{r} = 11\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}}$, tentukanlah posisinya saat $t = 2$, $t = 5$, dan $t = 8$.

3. Diberikan persamaan lintasan sebuah partikel

$$\mathbf{r} = 5t^3 - 5t\hat{\mathbf{i}} - 2t^2 + 3\hat{\mathbf{j}} + 4t\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.41)$$

Tentukan kecepatan sesaat dan kelajuan sesaat partikel tersebut pada saat $t = 3$, $t = 5$, dan $t = 7$.

4.3 Percepatan Rata-Rata dan Percepatan Sesaat

Dalam geraknya, suatu benda tidak selalu memiliki kecepatan yang tetap. Benda bisa saja memiliki kecepatan yang berubah-ubah. Suatu benda dikatakan mengalami gerak yang tetap apabila tidak mengalami perubahan kecepatan. Apabila benda mengalami perubahan kecepatan, benda tersebut dikatakan mengalami perubahan gerak. Perubahan gerak tersebut dinyatakan dalam bentuk percepatan. Apa itu percepatan? Dan mengapa pula harus ada percepatan?

Satuan percepatan dalam SI adalah m/s^2 . Dari satuan percepatan memberikan makna bahwa andaikan seseorang mengendarai sepeda motor dengan percepatan 4 m/s^2 , berarti setelah 1 s motor bergerak dengan kecepatan 4 m/s , setelah 2 s bergerak dengan kecepatan 8 m/s , dan seterusnya dengan mengasumsikan bahwa sepeda motor pada awalnya diam.

Percepatan Rata-Rata

Percepatan rata-rata adalah perubahan kecepatan dalam selang waktu tertentu. Tinjau suatu benda yang memiliki kecepatan $\mathbf{v}(t_1)$ saat t_1 , dan pada saat t_2 kecepatannya $\mathbf{v}(t_2)$. Percepatan rata-rata pada selang waktu t_1 dan t_2 adalah nisbah antara $\Delta\mathbf{v}_{t_1 \rightarrow t_2}$ dengan $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{\Delta \mathbf{v}_{t_1 \rightarrow t_2}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (4.42)$$

Contoh 4.4 Percepatan Rata-rata

Tentukan percepatan rata-rata yang dialami oleh sebuah benda yang mengalami kecepatan seperti pada Contoh 4.2 dalam selang waktu $t_1 = 2$ detik sampai dengan $t_2 = 4$ detik.

Percepatan rata-rata dalam selang waktu $t_1 = 2$ detik sampai dengan $t_2 = 4$ detik adalah

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} \rangle_{t_1 \rightarrow t_2} &= \Delta \mathbf{v}_{t_1 \rightarrow t_2} / (t_2 - t_1) \\ &= (-2\pi \sin(\pi 4)\hat{\mathbf{i}} + 2\pi \cos(\pi 4)\hat{\mathbf{j}}) - (-2\pi \sin(\pi 2)\hat{\mathbf{i}} + 2\pi \cos(\pi 2)\hat{\mathbf{j}}) / (4 - 2) \text{ detik} \\ &= 0 \text{ m/s}^2.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Percepatan Sesaat

Sekarang ditinjau percepatan rata-rata suatu benda dalam selang waktu antara t dan $t + \Delta t$. Kecepatan sesaat benda pada saat t adalah $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}}$. Sementara pada saat $t + \Delta t$, kecepatannya adalah $\mathbf{v}(t + \Delta t) = v_x(t + \Delta t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t + \Delta t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t + \Delta t)\hat{\mathbf{k}}$. Percepatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} \rangle_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \frac{v_x(t + \Delta t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t + \Delta t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t + \Delta t)\hat{\mathbf{k}} - v_x(t)\hat{\mathbf{i}} - v_y(t)\hat{\mathbf{j}} - v_z(t)\hat{\mathbf{k}}}{\Delta t} \\ &= \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Percepatan sesaat adalah percepatan rata-rata dengan selang waktu antara t dan $t + \Delta t$ untuk Δt yang sangat kecil (menuju nol). Jadi percepatan sesaat benda itu adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Percepatan sesaat dapat dikatakan sebagai turunan kecepatan terhadap waktu

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}},\tag{4.46}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.47)$$

dengan

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4.48)$$

Contoh 4.5 Percepatan Sesaat

Tentukan percepatan sesaat benda yang disebutkan dalam Contoh 4.2 ketika $t = 5$ detik.

Percepatan sesaat benda diberikan oleh persamaan (4.46) dan kecepatan sesaat diberikan oleh persamaan (4.2) sehingga

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} [-2\pi \sin(\pi t) \hat{\mathbf{i}} + 2\pi \cos(\pi t) \hat{\mathbf{j}}] = -2\pi^2 \cos(\pi t) \hat{\mathbf{i}} - 2\pi^2 \sin(\pi t) \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.49)$$

Dengan memasukkan nilai $t = 5$ diperoleh

$$\mathbf{a} = 2\pi^2 \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}^2. \quad (4.50)$$

Persamaan (4.49) masih bisa dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{a} = -2\pi^2 \mathbf{r}, \quad (4.51)$$

jadi arah \mathbf{a} selalu ke pangkal koordinat, berlawanan dengan \mathbf{r} .

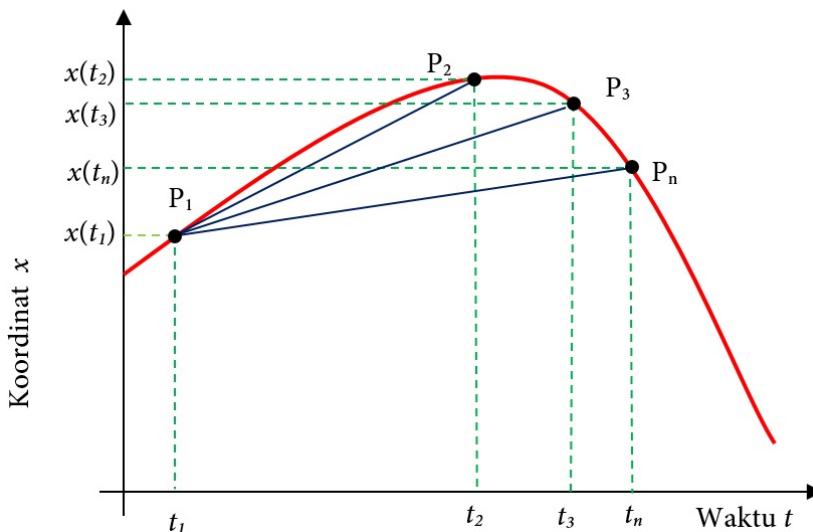
Uji Ketajaman 4.4

1. Diberikan persamaan posisi suatu partikel $\mathbf{r} = (3t^3 - 3t^2 - 5)\hat{\mathbf{i}} + (2t^4)\hat{\mathbf{j}} + (2t - 4)\hat{\mathbf{k}}$, tentukanlah percepatan sesaatnya pada $t = 7$, $t = 8$, dan $t = 9$
2. Percepatan sesaat suatu partikel diberikan oleh persamaan $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$. Apabila pada saat $t = 3$ partikel tersebut berada pada posisi $5\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{j}}$, tentukanlah jarak yang ditempuh partikel itu dari $t = 2$ hingga $t = 4$.
3. Kecepatan suatu partikel diberikan oleh persamaan $-2t^2\hat{\mathbf{i}} + 3t\hat{\mathbf{j}}$. Tentukanlah percepatan sesaat partikel tersebut.

4.4 Gerak Lurus

Gerak lurus adalah gerak dengan lintasan berupa garis lurus. Kita memasang koordinat x sepanjang lintasan itu, kemudian perlu disepakati titik nol koordinat itu. Setelah menentukan titik nol, maka letak sebuah benda ditandai dengan sebuah bilangan riil x . Vektor posisi benda itu dapat dituliskan sebagai $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}}$. Gerakan sembarang benda titik sepanjang sumbu- x dapat digambarkan seperti Gambar 4.5,

yang menunjukkan grafik x sebagai fungsi t . Jika benda awalnya berada di posisi P_1 yang dilabeli koordinat $(x(t_1), t_1)$, kemudian berada di posisi P_2 yang dilabeli koordinat $(x(t_2), t_2)$, maka dapat ditarik garis lurus yang menghubungkan P_1 dan P_2 . Garis lurus tersebut merupakan sisi miring segitiga yang mempunyai sisi $x(t)$ dan Δt . Nisbah antara $\Delta x(t) = x(t_2) - x(t_1)$ dan $\Delta t_{21} = t_2 - t_1$ merupakan kemiringan garis lurus tersebut atau ukuran kecuraman garis lurus pada grafik. Gambar 4.5 menunjukkan beberapa kemiringan garis untuk selang waktu Δt yang berbeda-beda, dengan selang waktu $\Delta t_{n1}, \dots, \Delta t_{31}, \Delta t_{21}$ yang nilainya semakin kecil dari nilai sebelumnya. Gambar 4.5 menunjukkan bahwa semakin kecil nilai Δt , maka semakin curam. Semakin curam garis menunjukkan semakin besar nilai nisbah antara $\Delta x(t)$ dan Δt . Sementara nisbah antara $\Delta x(t)$ dan Δt juga merupakan kecepatan rata-rata. Oleh karena itu, kemiringan atau gradien garis-garis tersebut menunjukkan kecepatan rata-rata.



Gambar 4.5: Grafik koordinat benda sebagai fungsi waktu

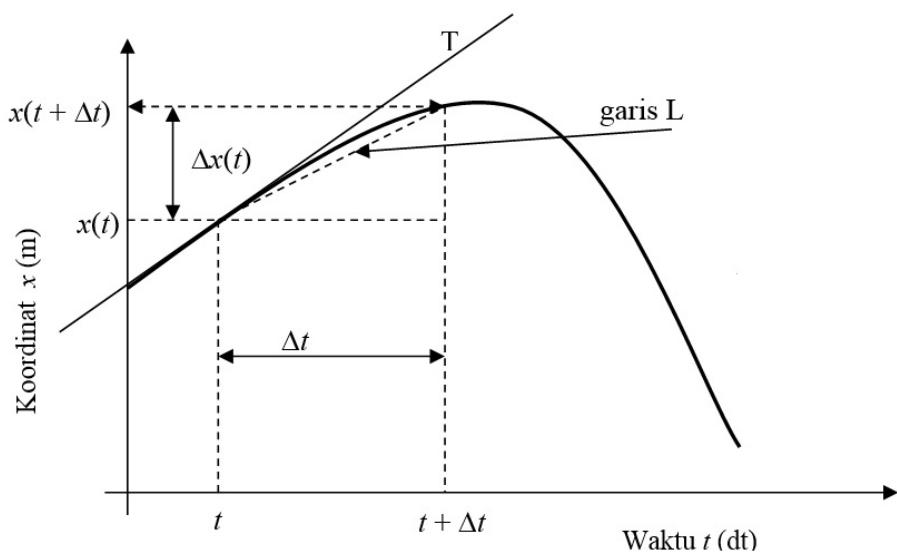
Secara umum, jika pada saat t benda titik berada di posisi $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}}$, dan setelah selang waktu Δt berada pada posisi $\mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\hat{\mathbf{i}}$, maka sebagaimana penjelasan sebelumnya, kecepatan rata-rata benda tersebut dalam selang waktu antara t dan $t + \Delta t$ adalah

$$\langle \mathbf{v} \rangle_{t \rightarrow t+\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)\hat{\mathbf{i}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}}. \quad (4.52)$$

Sementara kecepatan sesaat diberikan oleh

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \mathbf{v} \rangle_{t \rightarrow t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)\hat{\mathbf{i}}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}}. \quad (4.53)$$

Konsep tentang kecepatan sesaat dapat disajikan dalam grafik lintasan benda sebagai fungsi waktu, seperti yang ditunjukkan Gambar 4.6. Sama halnya Gambar 4.5, Gambar 4.6 juga menunjukkan kecepatan rata-rata yang merupakan kemiringan garis. Jika Δt menuju nol, maka kemiringan garis yang menunjukkan kecepatan rata-rata semakin besar. Kecuraman garis-garis itu tidak melebihi dari garis singgung pada kurva di titik t , yakni ketika Δt menuju nol. Kemiringan garis singgung pada kurva di titik t adalah kecepatan sesaat pada saat t tersebut. Secara umum dapat



Gambar 4.6: Grafik koordinat benda sebagai fungsi waktu

dikatakan bahwa kecepatan sesaat adalah kemiringan garis yang menyinggung kurva x terhadap t pada saat itu. Kemiringan garis tersebut dapat bernilai positif yang menunjukkan x bertambah, maupun sebaliknya bernilai negatif yang menunjukkan x berkurang. Hal tersebut menunjukkan bahwa kecepatan sesaat dapat bernilai positif maupun negatif. Kecepatan sesaat terkadang hanya disebut kecepatan. Dengan kata lain, kecepatan menunjukkan kecepatan pada saat t .

Sementara untuk percepatan sesaat adalah jika limit $\Delta v(t)/\Delta t$ dengan Δt menuju nol atau dapat dituliskan

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t) \hat{\mathbf{i}}}{\Delta t} = \frac{dv \hat{\mathbf{i}}}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{\mathbf{i}}. \quad (4.54)$$

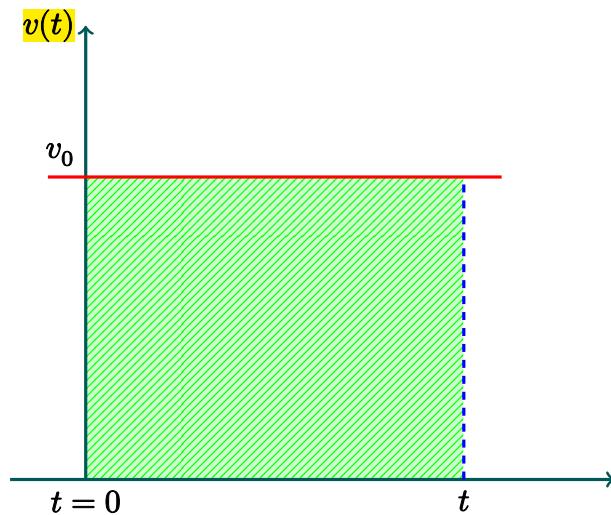
Sebelumnya telah dijelaskan bahwa kecepatan sesaat (kecepatan) adalah kemiringan garis yang menyinggung kurva x terhadap t pada saat itu. Oleh karena itu, percepatan sesaat juga dapat dikatakan merupakan kemiringan garis yang menyinggung kurva v terhadap t pada saat itu.

Gerak Lurus Beraturan

Jika suatu benda titik bergerak dengan kecepatan tetap, maka benda titik tersebut dikatakan bergerak lurus beraturan (GLB). Frase memiliki kecepatan tetap berarti baik arah maupun besarnya kecepatan tetap. Hal ini dikarenakan kecepatan merupakan besaran vektor. Akibatnya lintasan benda itu berupa garis lurus dan besarnya kecepatan tetap. Untuk lebih mudahnya, kita pilih untuk lintasan benda itu adalah sumbu- x . Dalam hal gerak lurus beraturan, kecepatan benda itu konstan. Menurut persamaan (4.53) dan (4.54),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0. \quad (4.55)$$

Oleh karena itu,



Gambar 4.7: Grafik kecepatan fungsi waktu. Jarak tempuh merupakan luas wilayah yang diarsir di bawah kurva.

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \quad (4.56)$$

dengan C_1 suatu tetapan. Seandainya pada saat $t = 0$, kecepatan benda v_0 , maka $C_1 = v_0$. Kemudian dari persamaan (4.56) diperoleh,

$$x(t) = v_0 t + C_2. \quad (4.57)$$

Apabila pada saat $t = 0$, benda berada pada posisi $x(t = 0) = x_0$, maka persamaan (4.57) dapat dituliskan sebagai

$$x(0) = v_0 \cdot 0 + C_2 = x_0. \quad (4.58)$$

Jadi diperoleh $C_2 = x_0$, sehingga untuk sembarang t , persamaan (4.57) dapat dituliskan sebagai

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad (4.59)$$

dengan x_0 adalah posisi benda titik dan v_0 adalah kelajuan benda titik saat $t = 0$. Dikarenakan partikel yang mengalami GLB memiliki kecepatan konstan, maka sesuai persamaan (4.54), percepatan benda itu nol, yakni $a(t) = 0$, sepanjang waktu t .

Selisih $x(t) - x_0$ disebut jarak tempuh selama selang waktu t . Oleh karena itu untuk GLB, jarak tempuh selama selang waktu t diberikan oleh

$$x(t) - x_0 = v_0 t \quad (4.60)$$

Jarak tempuh ini merupakan luas wilayah yang diarsir pada grafik kecepatan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.7

Gerak Lurus Berubah Beraturan

Jika suatu partikel bergerak dengan percepatan tetap, maka partikel tersebut dikatakan bergerak lurus berubah beraturan (GLBB). Contoh yang sangat sering dijumpai adalah gerak jatuhnya benda di sekitar permukaan Bumi oleh pengaruh gravitasi Bumi. Gerak jatuhnya benda tersebut boleh dikatakan memiliki percepatan konstan yaitu percepatan gravitasi (g) yang mempunyai nilai sekitar $9,8 \text{ m/s}^2$. Sebenarnya, percepatan gravitasi Bumi g yang dialami oleh benda titik tidak tetap. Besarnya percepatan tersebut bergantung pada jarak benda dari titik pusat Bumi. Akan tetapi, karena ketinggian benda yang ditinjau dari permukaan bumi jauh lebih kecil daripada jejari Bumi, maka percepatan gravitasi yang dialami oleh benda tersebut dianggap tidak berubah. Untuk peristiwa jatuhnya meteor ke permukaan Bumi, kita tidak dapat menggunakan anggapan tersebut, karena jarak yang ditinjau, yaitu ketinggian meteor dari Bumi, tidak dapat diabaikan terhadap jejari Bumi.

Apabila suatu benda titik bergerak dengan percepatan tetap, maka menurut persamaan (4.54),

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad (4.61)$$

dengan a suatu tetapan. Kita ketahui dari persamaan (4.53) bahwa besarnya kecepatan sesaat $v(t) = dx/dt$. Oleh karena itu, dari persamaan (4.61), besarnya kecepatan benda sebagai fungsi waktu dapat dinyatakan sebagai

$$v(t) = at + C, \quad (4.62)$$

dengan C suatu tetapan. Seandainya pada saat $t = 0$, besarnya kecepatan benda adalah v_0 , persamaan (4.62) dapat dituliskan sebagai

$$v(0) = a \cdot 0 + C = v_0, \quad (4.63)$$

jadi $C = v_0$. Dengan demikian, besarnya kecepatan sesaat benda sebagai fungsi waktu untuk sembarang t dapat dinyatakan sebagai

$$v(t) = v_0 + at. \quad (4.64)$$

Karena $v(t) = dx/dt$, maka $dx = (v_0 + at) dt$ sehingga apabila kedua ruas diintegralkan dengan memasukkan syarat bahwa pada saat $t = 0$ benda berada di posisi $x = x_0$ dan pada saat t benda berada di posisi $x(t)$, maka diperoleh

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t=0}^t [v_0 + at] dt, \quad (4.65)$$

atau

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (4.66)$$

Oleh karena itu pergeseran benda diberikan oleh

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (4.67)$$

Persamaan (4.64) menunjukkan bahwa $t = (v(t) - v_0)/a$. Jika $t = (v(t) - v_0)/a$ disubtitusikan ke persamaan (4.66), diperoleh persamaan

$$x(t) = x_0 + v_0 \left[\frac{v(t) - v_0}{a} \right] + \frac{1}{2} a \left[\frac{v(t) - v_0}{a} \right]^2. \quad (4.68)$$

Kedua ruas Persamaan (4.68) dikalikan a , dan dijabarkan tiap sukunya sehingga diperoleh

$$(x(t) - x_0)a = v_0 v(t) - v_0^2 + \frac{1}{2} v(t)^2 + \frac{1}{2} v_0^2 - v_0 v(t) = \frac{1}{2} v(t)^2 - \frac{1}{2} v_0^2, \quad (4.69)$$

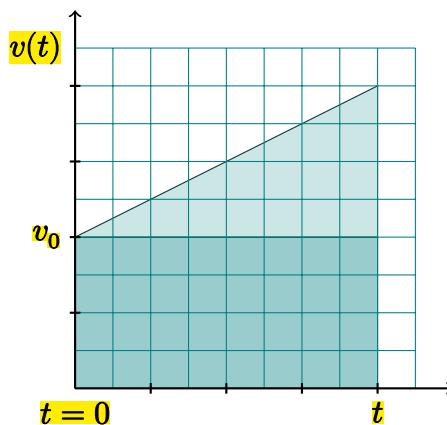
atau

$$2\Delta x a = v(t)^2 - v_0^2, \quad (4.70)$$

dengan $\Delta x = x(t) - x_0$ merupakan jarak yang ditempuh benda. Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2a \Delta x. \quad (4.71)$$

Persamaan (4.71) menunjukkan hubungan antara jarak tempuh, percepatan, dan kecepatan awal dan akhir.



Gambar 4.8: Grafik v fungsi t

Gambar 4.8 menggambarkan laju koordinat benda titik yang kita tinjau. Laju koordinat adalah perubahan koordinat- x tiap satu satuan waktu, dituliskan sebagai $v(t) = dx/dt$. Gambar 4.8 tersebut menunjukkan hal yang menarik, yaitu luas total wilayah yang diarsir sama dengan luas persegi panjang ditambah luas segitiga

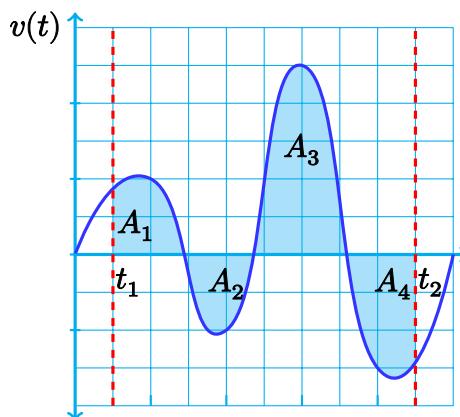
$$\text{Luas} = v_0 t + \frac{1}{2} t a t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (4.72)$$

yang sama dengan persamaan (4.67). Oleh karena itu, pergeseran benda titik dari saat $t = 0$ sampai t sama dengan luas wilayah grafik laju koordinat yang dibatasi

oleh kurva $v(t)$, sumbu- t , garis $t = 0$ serta garis yang tegak lurus pada sumbu- t melalui titik t . Hal ini juga telah diperoleh untuk kasus GLB. Pertanyaan yang mungkin menarik, apakah hal tersebut hanya berlaku untuk GLB dan GLBB? Atau juga untuk gerak-gerak lurus yang lain? Jawabnya ya. Asalkan luas wilayah di bawah sumbu- t diberi tanda negatif ketika dijumlahkan. Sebagai contoh, lihat Gambar 4.9, yang menggambarkan laju koordinat sebuah benda sepanjang sumbu- x . Pergeseran total adalah

$$x(t_2) - x(t_1) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4. \quad (4.73)$$

Sebagai contoh lihat kembali Gambar 4.9, jarak tempuh benda adalah panjang lin-

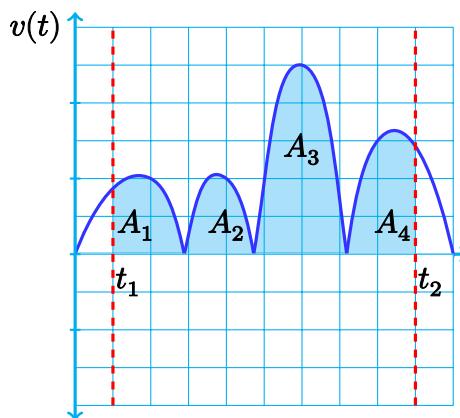


Gambar 4.9: Jarak tempuh adalah luas di bawah kurva $v(t)$

tasan yang ditempuh oleh benda. Oleh karena itu, jarak tempuh benda secara umum dari t_1 sampai t_2 sama dengan luas wilayah pada grafik yang diarsir, yaitu dibatasi oleh sumbu- t , garis $t = t_1$, garis $t = t_2$, dan kurva $v(t)$, tanpa memberikan tanda negatif untuk luas wilayah di bawah sumbu- t ,

$$s = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \quad (4.74)$$

Nilai ini sama dengan luas wilayah pada grafik laju sebagai fungsi waktu yang dibatasi oleh sumbu- t , garis $t = t_1$, garis $t = t_2$ dan kurva laju, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10: Grafik Laju koordinat fungsi waktu.

Kesimpulan bahwa jarak tempuh sama dengan luas wilayah di bawah kurva laju, di atas sumbu- t dan dibatasi oleh garis $t = t_1$, garis $t = t_2$ tidak hanya berlaku untuk gerak pada garis lurus saja, tetapi juga gerak dengan lintasan sembarang.

Uji Ketajaman 4.5

Gerak Lurus Berubah Beraturan

1. Bagaimana Anda menentukan jarak dari rumah ke kampus?
2. Perhatikan Gambar 4.9. Andaikan setiap satu skala sumbu datar menunjukkan satu satuan waktu (detik) dan satu skala sumbu tegak menunjukkan satu satuan kecepatan (meter/detik), hitung pergeseran dan jarak yang ditempuh oleh benda tersebut.
3. Sebuah benda bergerak pada satu garis, menurut persamaan $x(t) = 4t^3 - 2t + 4$. Apakah benda tersebut mengalami gerak lurus berubah beraturan? Jelaskan jawaban Anda.

Gerak Osilasi

Jika sebuah benda bergerak sepanjang sumbu- x sedemikian rupa sehingga koordinatnya sebagai fungsi waktu dituliskan oleh $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta_0)$ dengan ω adalah tetapan yang dinyatakan dalam rad/sekon dan θ_0 suatu tetapan yang dinyatakan dalam satuan radian, maka benda itu dikatakan mengalami gerak getaran atau osilasi selaras. Tetapan ω disebut sebagai frekuensi sudut, sedangkan θ_0 disebut fase awal. Kecepatan benda itu diberikan oleh

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \theta_0), \quad (4.75)$$

sedangkan percepatan benda diberikan oleh

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x. \quad (4.76)$$

Dari persamaan (4.76) diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (4.77)$$

Persamaan (4.77) merupakan 'sidik jari' osilator harmonis. Artinya dalam beberapa kajian jika muncul persamaan seperti itu maka persoalan yang dikaji dapat dipastikan terkait dengan osilator harmonis. Kajian mendalam tentang osilator harmonis dapat dilihat dalam bab Getaran dan Gelombang pada Buku II.

4.5 Gerak pada Bidang

Sembarang partikel dikatakan bergerak pada suatu bidang jika lintasan partikel tersebut terletak pada suatu bidang. Sebagai contoh dari gerak pada bidang adalah gerak elips. Penjelasan mengenai kerangka acuan, posisi, kecepatan dan percepatan hampir sama sebagaimana telah dibahas pada subbab 4.1, 4.2, dan 4.3, hanya saja untuk gerak pada bidang, satu koordinat dimatikan, sehingga kinematika cukup dijelaskan dalam dua dimensi saja.

Gerak Parabola

Ketika orang melempar benda dari permukaan Bumi, bagaimanapun caranya, sebenarnya benda tersebut mengalami gerak elips¹. Artinya lintasan benda tersebut sebenarnya merupakan bagian dari lintasan elips. Namun, apabila wilayah yang dilalui oleh benda itu di dalam gerakan tidak begitu luas maka bolehlah dilakukan penyederhanaan yakni medan gravitasi di sekitar permukaan Bumi dianggap seragam dan mengarah vertikal ke bawah. Alhasil lintasan benda yang dilemparkan merupakan bagian dari parabola, sehingga seolah-olah benda yang dilemparkan mengalami gerak parabola. Sebagai contoh gerakan peluru yang ditembakkan dari meriam. Oleh karena itu gerak parabola juga disebut gerak peluru. Sesungguhnya gerak peluru ini dipengaruhi oleh beberapa hal di antaranya adalah hambatan udara dan variasi percepatan gravitasi. Akan tetapi diasumsikan gerak parabola yang akan dibahas mengabaikan hambatan udara dan menganggap nilai percepatan gravitasi konstan sebesar $g=9,8 \text{ m/s}^2$.

Seseorang melempar sebuah benda dari suatu titik di atas permukaan Bumi. Selanjutnya kita pilih suatu sistem koordinat atau kerangka acuan sedemikian rupa sehingga titik tempat melempar benda tersebut memiliki koordinat (x_0, y_0, z_0) dengan kecepatan awal $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}$. Dengan anggapan tersebut di atas, percepatan gravitasi secara vektor ditulis sebagai $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}}$. Oleh karena itu, benda akan mengalami percepatan

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} - g\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.78)$$

Dari persamaan di atas diperoleh tiga persamaan diferensial berikut

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\hat{\mathbf{k}}.$$

Sesuai dengan yang telah dibahas sebelumnya, karena percepatan ke arah x dan y nol, maka benda mengalami gerak lurus beraturan ke arah tersebut. Koordinat benda pada arah x dapat dinyatakan sebagai berikut

$$x(t) = (x_0 + v_{0x}t). \quad (4.79)$$

Demikian juga dengan arah y , koordinat- y benda dapat dinyatakan sebagai

¹Gerak elips lebih detail akan dibahas pada bab Gravitasi.

$$y(t) = (y_0 + v_{0y}t). \quad (4.80)$$

Karena pada arah z benda mengalami percepatan $-g$ yang tetap maka benda tersebut dikatakan mengalami gerak lurus berubah beraturan pada arah z . Kecepatan benda pada arah z diberikan oleh

$$v_z(t) = (v_{0z} - gt). \quad (4.81)$$

Selanjutnya koordinat- z sebagai fungsi waktu pada arah z dapat dituliskan sebagai

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.82)$$

Secara umum kecepatan dan posisi benda sebagai fungsi waktu diberikan berturut-turut oleh persamaan berikut

$$\mathbf{v}(t) = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + (v_{0z} - gt)\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.83)$$

dan

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{\mathbf{i}} + (y_0 + v_{0y}t)\hat{\mathbf{j}} + (z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.84)$$

Gerak tersebut merupakan gerak pada bidang. Apabila vektor posisi (4.84) lintasan diproyeksikan ke bidang- xy , maka hasil proyeksinya berupa garis lurus. Hal ini dapat dipahami karena nisbah antara komponen selisih koordinat x dan koordinat y selalu tetap, yakni

$$\frac{x(t) - x_0}{y(t) - y_0} = \frac{x_0 - v_{0x}t - x_0}{y_0 - v_{0y}t - y_0} = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}. \quad (4.85)$$

Kasus khusus terjadi misalnya $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ dan $v_{0y} = 0$ maka diperoleh

$$\mathbf{v}(t) = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + (v_{0z} - gt)\hat{\mathbf{k}} \quad (4.86)$$

dan

$$\mathbf{r}(t) = v_{0x}t\hat{\mathbf{i}} + (v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.87)$$

Terlihat bahwa benda bergerak pada bidang- xz . Uraian di atas menunjukkan bahwa gerak di dalam medan gravitasi Bumi yang dianggap konstan tersusun atas tiga buah gerak lurus yang saling bebas.

Andaikan sebuah benda titik dilemparkan dengan kecepatan awal v_0 dengan sudut θ terhadap bidang horizontal. Seperti yang telah disampaikan di atas maka gerak benda titik itu berada pada bidang vertikal. Andaikan yang diambil sebagai bidang vertikal itu adalah bidang- xz . Gerak benda titik tersebut dapat digambarkan sebagai tersusun atas dua buah gerak lurus, yakni gerak lurus arah mendatar (sumbu- x) dan arah vertikal (sumbu- z). Oleh karena itu, $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ dan $v_{0z} = v_0 \sin \theta$. Berdasarkan persamaan (4.86) dan (4.87) diperoleh

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta - gt) \hat{\mathbf{k}} \quad (4.88)$$

dan

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t \hat{\mathbf{i}} + ((v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.89)$$

Koordinat $x(t) = v_0 \cos \theta t$ menunjukkan posisi horizontal, sedangkan $z(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ menunjukkan posisi vertikal atau ketinggian. Ketinggian maksimum dicapai ketika benda berhenti sejenak, yakni pada saat $t = t_m$ ketika $v_y(t_m) = 0$ atau $v_0 \sin \theta - gt_m = 0$. Jadi,

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta}{gt}$$

dan ketinggian maksimum z_{maks} adalah

$$z_{maks} = z(t_m) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}. \quad (4.90)$$

Sementara jangkauan adalah jarak horizontal ketika benda kembali pada ketinggian nol yakni ketika $t = 2t_m$ atau

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{gt}.$$

Saat itu jarak horizontal adalah

$$R = x(t_m) = 2v_0 \cos \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \quad (4.91)$$

Dengan mengubah sudut elevasi θ , jangkauan maksimum dapat dicari, yakni ketika $\sin 2\theta = 1$, yaitu ketika $2\theta = 90^\circ$ atau $\theta = 45^\circ$. Dengan sudut elevasi 45° itu jangkauan horizontal benda adalah $R_{maks} = v_0^2/g$. Persamaan (4.90) dan (4.91) menunjukkan bahwa ketinggian dan jangkauan maksimum dipengaruhi oleh kecepatan awal dan sudut lemparan awal (elevasi). Kedua persamaan tersebut hanya berlaku untuk kasus dengan ketinggian awal dan akhir sama.

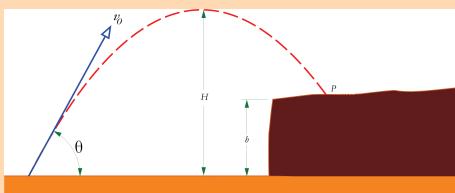
Bahwa lintasan benda titik berupa parabola dapat diperoleh dengan menyatakan waktu menurut $t = x(t)/v_{0x}$. Sehingga dari ungkapan untuk koordinat $z(t)$ yakni $z(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ diperoleh

$$z(x) = v_0 \sin \theta \left[\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right] - \frac{1}{2}g \left[\frac{x}{v_0 \sin \theta} \right]^2 = (\tan \theta)x - \left[\frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \theta} \right] x^2. \quad (4.92)$$

Jelas bahwa persamaan di atas merupakan persamaan parabola.

Uji Ketajaman 4.6

Menembakkan Pelor



Gambar 4.11: Proses terjadinya penembakan

Seseorang sedang melakukan eksperimen, dengan sengaja menembakkan pelor ke arah atas bukit dengan kelajuan awal v_0 . Pelor tersebut jatuh di titik P pada saat t . Tentukan tinggi bukit, tinggi maksimum pelor, jarak horizontal penembak dengan titik jatuh pelor, dan kecepatan pelor sesaat sebelum menembuk titik P , apabila kelajuan awal pelor adalah 5 kali kelajuan di titik tertingginya.

Gerak Melingkar

Suatu benda dikatakan mengalami gerak melingkar jika lintasannya berbentuk lingkaran. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang memiliki jarak yang sama dari sebuah titik tertentu (titik pusat) di bidang yang sama. Jika bidang yang dimaksud adalah bidang- xy dan pusat lingkaran itu adalah titik dengan posisi $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}}$, maka titik-titik dengan posisi \mathbf{r} yang terletak pada lingkaran dengan jari-jari R memenuhi persamaan $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R$. Jika $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ maka $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Sebagai contoh gerak bulan mengitari bumi, atau gerak satelit buatan mengitari bumi, gerak melingkar sepeda motor dalam tong setan, dan masih banyak lagi.



Gambar 4.12: Gambar diambil dari afbeeldingen.gahetna.nl.

Gerak Melingkar Beraturan

Ditinjau gerak partikel pada sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari R . Hal tersebut berarti jarak benda terhadap titik pusat lingkaran selalu sama yaitu sebesar R . Andaikan benda itu bergerak dengan kelajuan tetap. Karena benda bergerak melingkar, maka arah kecepatan benda itu berubah sepanjang lingkaran lintasannya. Jadi kecepatan benda itu mengalami perubahan meskipun kelajuannya tetap. Gerak partikel tersebut mempunyai percepatan. Besar vektor kecepatan yaitu kelajuan tetap, tetapi arahnya berubah dari waktu ke waktu. Oleh karena itu, dalam gerak melingkar, benda mengalami percepatan.

Untuk memudahkan peninjauan, maka titik pusat lingkaran dipilih sebagai titik pangkal sistem koordinat dan lingkaran berada pada bidang- xy . Vektor posisi partikel adalah $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$. Sementara jarak partikel selalu tetap dari pusat koordinat, sehingga $|\mathbf{r}(t)| = R$, atau

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = R^2. \quad (4.93)$$

Dalam hal ini kita mencari $x(t)$ dan $y(t)$ sedemikian rupa sehingga persamaan (4.48) dipenuhi. Salah satu contoh jawaban bagi masalah tersebut adalah

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) \quad (4.94)$$

dan

$$y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0), \quad (4.95)$$

dengan ω dan θ_0 suatu tetapan. Jadi posisi benda diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) \hat{\mathbf{i}} + R \sin(\omega t + \theta_0) \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.96)$$

Apa makna ω dan θ_0 ? Dari mana keduanya diperoleh?

Andaikan pada saat $t = 0$ benda berada di (x_0, y_0) . Dari persamaan (4.96) diperoleh

$$\mathbf{r}(0) = x_0 \hat{\mathbf{i}} + y_0 \hat{\mathbf{j}} = R \cos(\theta_0) \hat{\mathbf{i}} + R \sin(\theta_0) \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.97)$$

Jadi tetapan θ_0 menentukan posisi benda saat $t = 0$.

Contoh 4.6 Gerak Melingkar

Jika $\theta_0 = 0$ maka $x_0 = R$ dan $y_0 = 0$. Benda bergerak melingkar melewati titik $(R, 0)$ pada saat $t = 0$.

Jika $\theta_0 = \pi/2$ maka

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t + \pi/2) \hat{\mathbf{i}} + R \sin(\omega t + \pi/2) \hat{\mathbf{j}} = R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}.$$

Untuk kasus ini benda melewati titik $(0, R)$ pada saat $t = 0$.

Untuk memahami makna ω kita perlu menghitung kecepatan dan percepatan benda yang bergerak menurut persamaan (4.96). Kecepatan benda diperoleh sebagai berikut

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0) \hat{\mathbf{i}} + R\omega \cos(\omega t + \theta_0) \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.98)$$

Kelajuan benda yang bergerak melingkar diperoleh dari persamaan (4.98), yakni

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = R^2 \omega^2 \quad (4.99)$$

atau

$$|\mathbf{v}(t)| = R\omega. \quad (4.100)$$

Dari persamaan (4.100) diperoleh

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}|}{R} = \frac{(ds/dt)}{R} = \frac{R d\theta/dt}{R} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (4.101)$$

Jadi ω merupakan laju perubahan sudut.

Sementara arah kecepatan singgung adalah tegak lurus terhadap vektor posisi. Hal tersebut dapat dibuktikan dengan mengambil produk skalar antara kecepatan singgung dan vektor posisi yaitu

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = -R^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) + R^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0 \quad (4.102)$$

Jika hasil kali skalar antara dua vektor bernilai nol, maka kedua vektor tersebut saling tegak lurus. Oleh karena hasil kali skalar antara vektor kecepatan singgung dengan vektor posisi sama dengan nol, maka kecepatan singgung dan vektor posisi saling tegak lurus.

Waktu yang dibutuhkan oleh benda untuk bergerak sepanjang lingkaran satu kali putaran disebut periode (T). Oleh karena itu dalam satu periode benda menempuh sudut 2π radian. Jika dalam selang waktu selama T benda menempuh sudut 2π radian, maka tiap satu satuan waktu partikel menempuh sudut sebesar $2\pi/T$. Sementara T sendiri adalah rasio panjang lintasan yang ditempuh terhadap besarnya kecepatan singgung (v) tersebut, maka dapat dituliskan

$$T = \frac{K}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.103)$$

Sementara percepatan benda diperoleh dengan menurunkan persamaan (4.98) terhadap waktu yakni

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)\hat{\mathbf{i}} - R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)\hat{\mathbf{j}} = -\omega^2 \mathbf{r}(t). \quad (4.104)$$

Terlihat bahwa arah percepatan yang dialami oleh benda berlawanan dengan arah \mathbf{r} . Jadi arah percepatan menuju ke pusat. Oleh karenanya disebut sebagai percepatan sentripetal. Karena $|\mathbf{r}(t)| = R$ maka

$$|\mathbf{a}(t)| = |-\omega^2 \mathbf{r}(t)| = \omega^2 |\mathbf{r}(t)| = \omega^2 R, \quad (4.105)$$

yang menunjukkan bahwa besarnya percepatan tetap. Berdasarkan persamaan (4.101), persamaan (4.105) dapat dituliskan sebagai

$$|\mathbf{a}(t)| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (4.106)$$

Percepatan sentripetal $\mathbf{a}(t)$ selanjutnya hendak ditulis sebagai $\mathbf{a}_S(t)$. Oleh karena itu benda yang bergerak melingkar mengalami percepatan sentripetal sebesar

$$a_S = \frac{v^2}{R}. \quad (4.107)$$

Dari persamaan (4.104) diperoleh persamaan diferensial yang mengatur gerak melingkar beraturan, yaitu

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{r}(t). \quad (4.108)$$

Persamaan terakhir setara dengan dua persamaan diferensial berikut

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t). \quad (4.109)$$

dan

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y(t). \quad (4.110)$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas dan persamaan (4.77), dapat disimpulkan bahwa gerak melingkar beraturan tersusun atau dapat diuraikan atas dua gerak osilator harmonis.

Gerak Melingkar Berubah Beraturan

Telah dijelaskan bahwa besarnya kecepatan pada gerak melingkar beraturan adalah konstan. Artinya ω pada persamaan (4.101) merupakan tetapan. Pada gerak melingkar berubah beraturan persamaan (4.93), (4.94), (4.95), dan (4.101) masih berlaku. Akan tetapi ω tidak lagi bernilai tetap. Jadi gerak melingkar berubah beraturan memenuhi persamaan

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = R^2.$$

Sebagaimana dalam kajian gerak melingkar beraturan, kita mencari $x(t)$ dan $y(t)$ yang memenuhi persamaan tersebut di atas. Jawaban umum dari persamaan di atas adalah

$$x(t) = R \cos \theta(t)$$

dan

$$y(t) = R \sin \theta(t).$$

Selanjutnya akan dihitung kecepatan dan percepatan gerak melingkar berubah beraturan. Kecepatan benda yang bergerak melingkar beraturan diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -R \frac{d\theta}{dt} \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + R \frac{d\theta}{dt} \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}} \\ &= -\omega(t) R \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + \omega(t) R \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Berdasarkan persamaan (4.111) besarnya kecepatan tangensial dikaitkan dengan besarnya kecepatan sudut oleh persamaan yang sama yaitu

$$|\mathbf{v}| = |\omega(t)|R.$$

Sementara itu, percepatan benda diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (-\omega^2(t)R \cos \theta(t) - \alpha(t)R \sin \theta(t)) \hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + (-\omega^2(t)R \sin \theta(t) + \alpha(t)R \cos \theta(t)) \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Persamaan di atas masih dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_S,$$

dengan percepatan sentripetal diberikan oleh persamaan (4.104), dan percepatan tangensial diberikan oleh

$$\mathbf{a}_T = -\alpha(t)R \sin \theta(t)\hat{\mathbf{i}} + \alpha(t)R \cos \theta(t)\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.113)$$

Pada gerak melingkar berubah beraturan sudut θ dan kelajuan sudut ω berubah sebagaimana koordinat x dan v_x pada gerak lurus berubah beraturan. Oleh karena itu berlaku

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (4.114)$$

dan

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \quad (4.115)$$

dengan α suatu tetapan yang disebut percepatan sudut, dan ω_0 adalah kelajuan sudut awal.

Uji Ketajaman 4.7 Gerak Melingkar

1. Seperti permasalahan pada Contoh 4.6, tentukan posisi benda posisi benda saat $t = 0$
 - a. untuk $\theta_0 = 1/2\pi$
 - b. untuk $\theta_0 = 2/3\pi$

5

Dinamika

Dua truk yang terlihat pada gambar di samping memiliki daya, keduanya sama-sama PS 120. Yang berbeda dari keduanya adalah beban yang diangkut. Truk yang sebelah kiri tidak mengangkut apapun sedangkan truk yang sebelah kanan sarat dengan muatan. Oleh karena itu, massa truk yang sebelah kiri kurang dari massa truk yang sebelah kanan. Truk mana yang lebih mudah menambah kecepatannya? Truk mana yang lebih leluasa untuk berbelok?



5.1 Gerak Menurut Aristoteles

5.2 Hukum Pertama Newton: Hukum Kelembaman

5.3 Hukum Kedua Newton: Seberapa Besar Perubahan Gerak

5.4 Hukum Ketiga Newton: Aksi-Reaksi

5.5 Macam-macam Gaya

5.6 Penerapan Hukum Newton Lebih Lanjut

5.7 Kerangka Acuan Non Inersial: Gaya-gaya Lembam

Tentu dalam kehidupan keseharian Anda, aktivitas seperti mendorong atau menarik benda sering Anda lakukan. Minimal mendorong atau menarik pintu rumah. Hal sederhana lain adalah menarik atau mendorong kursi mendekati meja ketika Anda sedang belajar. Apa yang terjadi ketika Anda menarik atau mendorong kursi yang awalnya diam? Kursi akan bergerak dan akan berhenti ketika Anda menghentikan tarikan atau dorongan yang Anda lakukan. Kesimpulan apa yang dapat Anda ambil dari peristiwa tersebut? Mungkin dalam pikiran Anda terpikir bahwa gaya dorong atau gaya tarik yang Anda lakukan merupakan penyebab terjadinya gerakan atau pergeseran kursi tersebut. Atau secara umum mungkin Anda berpikir bahwa gaya merupakan penyebab gerakan. Jika benar demikian kesimpulan yang Anda ambil, maka ketahuilah bahwa Anda tidak sendirian. Sekitar 2300-an tahun yang lalu, Aristoteles seorang filsuf Yunani kuno yang masyhur pun memiliki pemahaman yang sama dengan Anda, yaitu gaya adalah penyebab gerakan. Aristoteles berpendapat bahwa jika tidak ada gaya yang bekerja pada suatu benda, maka benda tersebut tidak akan bergerak. Rekam jejak dimulainya penjelajahan bidang mekanika adalah sejak Aristoteles menulis tentang masalah-masalah mekanika (*Mηχανικα*) tepatnya pada tahun 384-322 sebelum Masehi.

5.1 Gerak Menurut Aristoteles

Pemikiran Aristoteles tidak hanya tentang gaya sebagai penyebab gerakan, tetapi juga pengelompokan gerakan. Gerak oleh Aristoteles dikelompokkan atas dua jenis, yaitu gerak alamiah dan gerak terpaksa. Gerak alamiah adalah gerak yang dialami benda karena berkaitan dengan sifat alamiah benda tersebut. Maksudnya adalah berkaitan dengan komposisi benda itu yakni kandungan tanah, air, udara, dan api yang ada di dalam benda itu sebab saat itu diyakini bahwa unsur penyusun alam semesta ini adalah keempat hal itu. Dalam pandangan Aristoteles, setiap benda di alam ini memiliki tempat alamiahnya masing-masing. Tempat asal benda-benda tersebut ditentukan menurut komposisi keempat unsur yang terkandung dalam benda. Oleh karena itu, jika benda tidak berada di tempat alamiahnya, maka benda akan berusaha untuk kembali ke tempat alamiahnya. Sebagai contoh kita perhatikan sebongkah batu. Batu memiliki komposisi dengan unsur tanah lebih banyak jika dibandingkan dengan unsur yang lain, sehingga saat batu dilemparkan ke atas, maka batu akan jatuh menuju tempat alamiahnya yakni Bumi. Contoh lain adalah asap. Asap memiliki komposisi sedemikian rupa sehingga unsur udaranya lebih banyak jika dibandingkan dengan unsur yang lain. Oleh karena itu asap akan selalu membumbung ke atas menuju tempat alamiahnya yakni di udara. Sementara kapas dari ketinggian tertentu akan jatuh ke tanah. Akan tetapi gerak jatuhnya tidak secepat batu. Hal ini dikarenakan komposisi penyusun kapas yang berasal dari unsur tanah tidak sebanyak batu. Lalu bagaimana untuk gerak dari benda-benda langit? Bagi pemikiran Aristoteles hukum tentang gerak yang berlaku di Bumi, tidak berlaku untuk benda-benda langit. Sementara itu, gerak terpaksa adalah gerak yang ditimbulkan adanya gangguan dari luar benda. Sebagai contoh gerak suatu benda karena diberi dorongan atau tarikan. Semisal sepeda motor yang bergerak karena mengalami dorongan oleh mesin sepeda motor.

Pandangan Aristoteles memiliki banyak konsekuensi. Konsekuensi-konsekuensi tersebut di antaranya adalah bahwa Bumi haruslah diam mutlak, benda-benda yang lebih berat jatuh ke tanah lebih cepat jika dibandingkan benda yang ringan, dan gaya adalah penyebab gerakan. Pemikiran seperti ini tidak dapat menjelaskan kasus, semisal gerak anak panah yang lepas dari tali busur. Ketika seseorang menarik tali busur yang terdapat anak panahnya dan melepaskannya, maka pada selang waktu dari saat melepaskan tali busur sampai anak panah lepas dari tali busur, anak panah mengalami gerak terpaksa akibat dorongan tali busur yang menegang. Akan tetapi setelah anak panah lepas dari tali busur, anak panah tetap bergerak mendatar meskipun sedikit demi sedikit menurun ketinggiannya. Pertanyaannya, siapa yang memaksa atau mendorong anak panah untuk tetap bergerak? Apa gaya yang bekerja pada anak panah itu dan siapa yang memberi gaya tersebut sehingga anak panah tetap bergerak? Sungguh pandangan Aristoteles tidak mampu menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut.



Gambar 5.1: Aristoteles adalah filsuf Yunani yang hidup antara tahun 384-322 B.C. (www.liveyourmagic.com)

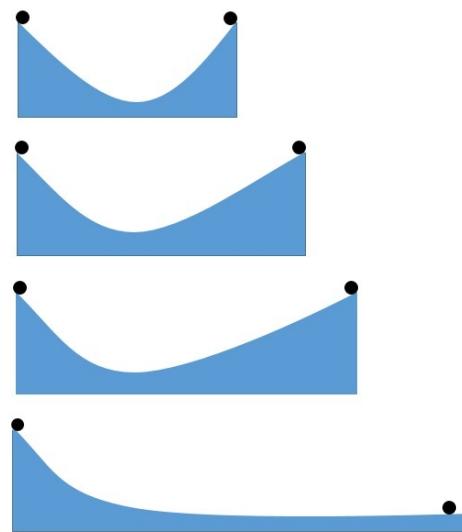
Pandangan Aristoteles tentang gerak alamiah dibantah oleh Galileo Galilei (1564-1642). Bantahan tersebut menggunakan bukti empiris atau bukti yang didasarkan pada eksperimen. Jika saja pandangan Aristoteles itu benar, maka benda yang lebih berat akan jatuh lebih cepat. Eksperimen Galileo tersebut memperlihatkan dengan jelas bahwa jika dua buah batu dengan massa berbeda dijatuhkan dari ketinggian yang sama pada saat bersamaan, maka akan jatuh dan sampai di tanah secara bersamaan pula. Eksperimen Galilei ini konon dilaku-

kan di menara condong Pisa. Akan tetapi, meskipun percobaan di menara Pisa itu membuktikan kesalahan pandangan Aristoteles, pandangan Aristoteles saat itu tetap saja dianut oleh banyak orang, termasuk yang paling getol adalah pihak gereja. Memang, pada kurun itu, pandangan Aristoteles cukup mewarnai gereja. Karena pandangannya berbenturan dengan pandangan Aristoteles yang diyakini oleh pihak gereja, maka Galileo Galilei menghadapi konflik dengan gereja. Pada saat itu, gereja memiliki kekuasaan untuk memberi hukuman. Hukuman yang diterima oleh Galilei termasuk ringan, yakni mendekam sebagai tahanan rumah sampai akhir hayatnya. Akan tetapi, dia tetap berkarya selama di dalam tahanan dan di kemudian hari hasil-hasil karyanya berhasil diselundupkan ke Belanda dan diterbitkan di sana serta menyebar ke berbagai tempat.

5.2 Hukum Pertama Newton: Penegasan Kembali Hukum Kelembaman

Dalam upaya mempelajari gerakan, Galilei melakukan eksperimen dengan menggelindingkan bola pada permukaan miring yang saling berhadapan (lihat Gambar 5.2). Bola tersebut akan terus menggelinding dan akan berhenti sesaat pada tempat yang memiliki ketinggian yang sama dengan ketinggian awalnya. Jika bidang miring yang di sebelah kanan dibuat lebih landai dari sebelumnya, maka bola tetap akan bergerak menggelinding dan akan berhenti sesaat pada tempat yang memiliki ketinggian yang sama dengan ketinggian awalnya (di sebelah kiri). Hanya saja tempat bola berhenti lebih jauh daripada tempat pemberhentian pada eksperimen yang pertama. Hal ini dikarenakan lintasan bidang miringnya lebih landai. Eksperimen ini diteruskan dengan merubah atau menambah kelandaian bidang miring yang di sebelah kanan. Semakin landai, maka bola akan semakin jauh menggelinding dan akan berhenti sesaat pada tempat yang mempunyai ketinggian sama dengan ketinggian awalnya. Menggunakan hasil eksperimen tersebut, maka dapat disimpulkan, jika salah satu sisi pada akhirnya dibuat mendatar, maka bola akan menggelinding terus tanpa berhenti (dengan catatan mengabaikan pengaruh gesekan). Hal tersebut berarti bola akan tetap mempertahankan gerakannya. Secara umum suatu benda memiliki kecenderungan untuk mempertahankan geraknya. Oleh karena itu, benda tersebut dikatakan mempunyai inersia atau kelembaman.

Konsep kelembaman yang ditemukan oleh Galilei memberikan ilham penting bagi Isaac Newton untuk merumuskan pandangannya tentang gerak. Pandangan tersebut dituangkan dalam hukum pertama Newton tentang gerak yang menyatakan “Setiap benda akan terus berada pada keadaan diam atau bergerak dengan kelajuan tetap sepanjang garis lurus jika tidak dipaksa untuk merubah keadaan geraknya itu oleh gaya-gaya yang bekerja padanya”



Gambar 5.2: Gambar paling atas menunjukkan bahwa sebuah bola yang dilepas di sebelah kiri akan menggelinding hingga berhenti di ketinggian yang sama di sebelah kanan. Gambar kedua memperlihatkan peristiwa yang sama kecuali bagian lintasan di sebelah kanan diubah sehingga lebih landai dan panjang. Bola berhenti di sebelah kanan dengan ketinggian yang sama. Gambar yang ketiga memperlihatkan peristiwa yang sama, dengan lintasan yang semakin landai dan panjang. Gambar paling bawah memperlihatkan keadaan ekstrim, yakni bagian lintasan sebelah kanan menjadi mendatar. Bola akan bergerak terus ke kanan (tanpa henti).

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare
 (Lex I, Principia:12).

Pandangan tentang gerak secara lengkap dituangkan dalam karyanya yang berjudul Principia Mathematica Philosophiae Naturalis (Prinsip-prinsip Matematika bagi Filsafat Alam).

Gaya adalah penyebab perubahan gerakan, dan bukan penyebab gerakan.

Hukum pertama Newton sesungguhnya menjelaskan pengertian gaya. Hal ini jelas tersirat dalam ungkapan (Lex I, Principia) di atas. Gaya adalah penyebab perubahan gerakan, dan bukan penyebab gerakan. Oleh karena itu, jika resultan gaya yang bekerja pada sembarang benda lenyap atau sama dengan nol, maka benda itu tidak akan mengalami perubahan gerakan, yakni benda tersebut bergerak lurus dengan kelajuan tetap. Hal tersebut berarti, jika benda titik tersebut pada awalnya diam, maka akan tetap diam. Sementara jika pada awalnya benda tersebut bergerak dengan kecepatan sembarang, maka akan bergerak lurus pada kecepatan tersebut. Sebagai contoh, sebuah perahu cepat di atas danau meskipun mesinnya sudah dimatikan namun tetap bergerak. Tentu masih ingat bahwa peristiwa ini tidak bisa dijelaskan dengan konsep gerak menurut Aristoteles. Tetapi sekarang secara gamblang dapat dijelaskan dengan konsep gerak menurut Galilei dan Newton. Tepat ketika mesin dimatikan, perahu cepat sudah memiliki kecepatan. Perahu cepat berusaha mempertahankan keadaan geraknya, yaitu untuk tetap bergerak dengan kelajuan tersebut karena kelembamannya. Kenyataannya, apabila diamati, perahu cepat pada akhirnya akan berhenti juga. Mengapa demikian? Apakah hukum Newton salah? Semakin lama, perahu bergerak semakin lambat dan akhirnya berhenti. Jadi, perahu mengalami perubahan gerakan. Dalam hal ini dapat diduga adanya gaya yang menyebabkan perubahan gerakan tersebut. Gaya tersebut tidak lain adalah gaya gesek.

Sebagai contoh berikutnya, perhatikan seorang astronaut yang berada jauh dari benda angkasa manapun sehingga efek gravitasi sangat dapat diabaikan. Sebuah alat komunikasi yang semula dipegang oleh astronaut itu tiba-tiba terlempar dari tangannya. Benda itu selanjutnya akan bergerak lurus beraturan tanpa berhenti karena ketidadaan gaya yang bekerja pada benda itu.

Terakhir, kita perhatikan seseorang yang mendorong sebuah meja di atas lantai. Pada saat dorongan diberikan, meja bergerak. Akan tetapi, ketika dorongan dihentikan, meja seolah-olah ikut berhenti. Benarkah meja seketika itu berhenti? Bukankah meja tersebut sudah mempunyai kelajuan tetap ketika dorongan dihentikan? Bukankah seharusnya meja tersebut akan terus bergerak bahkan setelah dorongan dihentikan? Bagaimana hal ini dapat dijelaskan? Keadaannya mirip dengan contoh perahu cepat di atas. Hanya saja gesekan antara meja dan lantai jauh lebih besar jika dibandingkan dengan gesekan antara perahu dan air. Akibatnya, perubahan gerakan akan tampak lebih jelas untuk kasus meja daripada kasus perahu. Dengan kata lain, perlambatan yang diakibatkan oleh gaya gesek meja dan lantai lebih besar daripada yang ditimbulkan oleh gaya gesek perahu dan air. Akibatnya, meja yang meluncur di atas lantai rumah lebih cepat berhenti daripada perahu yang meluncur di atas permukaan danau. Karena terjadinya begitu singkat seolah-olah meja berhenti seketika.



Gambar 5.3: Sir Isaac Newton (gambar diambil dari <http://isisousa2.deviantart.com>)

Contoh 5.1 Gaya fiktif di dalam Bis Kota

Sebuah bola diletakkan di lantai sebuah bus yang sedang bergerak maju dengan kecepatan tetap. Apa yang terjadi dengan bola itu? Apakah bola itu mengalami percepatan? Apa yang terjadi jika bis dipercepat? Kemudian bus direm dalam jangka waktu cukup lama. Apa yang terjadi dengan bola itu?

Ketika bis bergerak dengan kecepatan tetap, bola diam di atas lantai tanpa mengalami percepatan. Ketika bis dipercepat, bola akan mengalami percepatan ke belakang. Ketika bis direm, bola mengalami percepatan ke depan. Perhatikan bahwa dalam kedua peristiwa itu (bus dalam keadaan melaju dengan kecepatan tetap, dalam keadaan dipercepat, dan juga dalam keadaan direm) tidak ada gaya mendatar yang bekerja pada bola. Untuk peristiwa yang pertama, hukum Newton dapat menjelaskannya: resultan gaya yang bekerja pada bola itu nol maka bola tidak mengalami percepatan. Hal yang menarik terjadi pada peristiwa yang kedua dan ketiga, ketika bus itu dipercepat dan direm. Resultan gaya yang bekerja pada bola itu nol, tetapi bola itu bergerak dengan percepatan. Salahkah hukum pertama Newton?



Gambar 5.4: Bus Transjogja

Contoh 5.2 Gaya Fiktif di atas Komidi Putar

Di pasar-pasar malam yang standar, Anda akan selalu menemukan komidi putar. Cobalah sekali-kali naik komidi putar sambil membawa sebuah bola kasti. Ketika komidi putar sedang berputar cobalah meletakkan bola yang Anda bawa di lantainya. Apa yang terjadi dengan bola itu?

Anda akan melihat dengan mata kepala sendiri bahwa bola itu akan bergerak radial keluar dan mengalami percepatan ke arah luar (radial) padahal Anda hanya meletakkannya saja tanpa mendorongnya. Bola mengalami percepatan tanpa ada gaya yang bekerja pada bola itu. Padahal menurut hukum pertama Newton, seharusnya bola itu diam saja di tempat Anda meletakkannya. Salahkah hukum pertama Newton?

Salahkah hukum pertama Newton? Ya. Hukum pertama Newton salah, tetapi untuk kerangka acuan seperti bus yang dipercepat ataupun diperlambat (direm), komidi putar yang sedang berputar, dan beberapa kasus yang lain. **Hukum pertama Newton berlaku hanya untuk kerangka-kerangka acuan khusus.** Kerangka acuan tempat hukum pertama Newton berlaku disebut **kerangka acuan inersial**. **Kerangka acuan tempat hukum pertama Newton tidak berlaku disebut kerangka acuan tak inersial.**

Ketika bus bergerak dengan kecepatan tetap, hukum pertama Newton berlaku di sana. Dalam keadaan tersebut, bus berperan sebagai kerangka acuan inersial. Ketika bus mengalami percepatan atau perlambatan akibat penggeraman, hukum pertama Newton tidak berlaku lagi. Dalam keadaan mengalami percepatan dan perlambatan, bus merupakan kerangka acuan tak inersial.

Bumi kita sendiri sebenarnya juga termasuk kerangka acuan tak inersial. Perputaran Bumi mengakibatkan munculnya beberapa percepatan seperti percepatan sentrifugal dan percepatan Coriolis. Percepatan Coriolis, misalnya, mengakibatkan pembelokan angin pasat. Tetapi untuk kasus-kasus keseharian, Bumi dapat dipan-

Hukum pertama Newton berlaku hanya untuk kerangka-kerangka acuan khusus. Kerangka acuan tempat hukum pertama Newton berlaku disebut kerangka acuan inersial

Bumi kita sendiri sebenarnya juga termasuk kerangka acuan tak inersial.

dang sebagai kerangka acuan inersial.

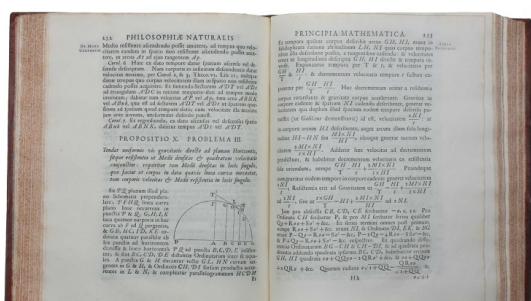
Contoh kerangka acuan inersial adalah kerangka jatuh bebas dalam medan gravitasi. Jika Anda menjatuhkan diri dari sebuah papan loncat di kolam renang, maka Anda, selama jatuh itu, berada dalam kerangka acuan inersial. Para astronaut di dalam pesawat yang sedang jatuh bebas menuju ke pusat Bumi atau planet yang lain sedang berada dalam kerangka acuan inersial.

Uji Ketajaman 5.1 Kerangka Acuan

1. Anda sedang berdiri di stasiun, di pinggir rel kereta. Anda sedang melepas kepergian seseorang. Kereta pergi meninggalkan stasiun dengan kecepatan tetap, menjauh meninggalkan Anda yang masih tetap berdiri termangu di tempat yang sama. Apakah hukum Newton berlaku pada seseorang yang sedang berada di dalam kereta?
2. Seorang agen spionase memasuki suatu daerah target dengan cara terjun dari ketinggian 10000 kaki menggunakan parasut. Ketika ia sedang terjun bebas, apakah hukum Newton berlaku? Kemudian setelah parasut dibuka, apakah hukum Newton berlaku? Jelaskan jawaban Anda.
3. Anda memegang gelas berisi air di tangan Anda. Kemudian Anda melepaskan gelas tersebut. Apa yang terjadi pada gelas dan air di dalamnya? Berlakukah hukum Newton pada peristiwa tersebut?
4. Di masing-masing peristiwa berikut ini, berikanlah penjelasan mengenai keberlakuan hukum Newton.
 - a) Di dalam sebuah pesawat jet yang dipercepat dengan percepatan sebesar percepatan gravitasi di permukaan bumi.
 - b) Di dalam sebuah lift yang diputus talinya sehingga meluncur bebas.
 - c) Di puncak gunung.
 - d) Di dalam ruang vakum.
 - e) Di dalam pesawat ulang-alik yang sedang lepas landas dengan percepatan vertikal sebesar percepatan gravitasi Bumi.

5.3 Hukum Kedua Newton: Seberapa Besar Perubahan Gerak

Telah dijelaskan dalam hukum pertama Newton bahwa gaya adalah penyebab perubahan gerakan. Selanjutnya, hukum kedua Newton menitahkan hubungan antara rambatan gaya dengan perubahan gerakan yang diakibatkannya. Hal penting dan cukup misterius adalah pengertian perubahan gerakan yang dirumuskan dengan sangat teliti oleh Newton. Perubahan gerakan dipahami oleh Newton bukan saja sebagai perubahan kecepatan, melainkan perubahan momentum, yakni perkalian kecepatan benda dengan massa inersialnya, $p = mv$. Jadi, perubahan gerakan sebuah benda dapat berarti perubahan kecepatan maupun perubahan massanya, atau perubahan baik massa maupun



Gambar 5.5: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica dapat diakses pada [tp://www.sophiararebooks.com](http://www.sophiararebooks.com).

kecepatan benda itu. Hukum kedua Newton tentang gerak mengatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sama dengan laju perubahan momentum benda itu.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresse; fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur
 (Lex II, Principia:12).

Oleh karena itu, jika perubahan gerakan yang dimaksudkan dalam hukum pertama adalah perubahan momentum, maka hukum kedua Newton dikemukakan untuk menjawab pertanyaan seberapa jauhkah terjadinya perubahan gerakan pada sembarang benda apabila padanya bekerja beberapa gaya. Secara matematis hukum kedua Newton dapat dituliskan sebagai berikut

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{r} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{r} + m\mathbf{a}, \quad (5.1)$$

dengan \mathbf{a} percepatan benda itu. Notasi $\sum_i \mathbf{F}_i$ berarti jumlahan (secara vektor) semua gaya yang bekerja pada benda itu. Sebagaimana telah dibahas pada bab pengukuran, satuan massa dalam SI adalah kg (kilogram). Sementara, untuk satuan gaya dalam SI adalah N (newton).

Banyak contoh bagi gejala mekanik yang melibatkan perubahan massa benda. Salah satu contoh adalah gerak roket. Selama meluncur, roket menyemburkan hasil pembakaran bahan bakarnya ke belakang. Karena pembakaran bahan bakar itu, massa roket berkurang. Contoh yang lain adalah gerakan komet dalam mengorbit Matahari. Ketika komet berada dekat dengan Matahari, es yang berada di permukaan komet itu menyublim karena terpapar oleh radiasi Matahari yang kuat. Akibatnya, debu-debu yang tersimpan di dalamnya berhamburan keluar. Selanjutnya angin dan radiasi Matahari menerpa debu-debu dan molekul-molekul es itu lari dari komet dalam bentuk ekor komet. Ketika komet jauh dari Matahari komet itu melewati suatu daerah yang disebut awan Oort yang berisi es-es. Selama bergerak dalam awan Oort itu komet menarik es-es sepanjang perjalananannya sehingga massanya bertambah.

Untuk gejala mekanik dengan massa benda yang tidak berubah, berlaku persamaan $dm/dt = 0$, sehingga

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}. \quad (5.2)$$

Untuk hal khusus ini, resultan gaya yang bekerja pada sebuah benda sama dengan perkalian massa inersial dengan percepatan benda itu. Karena gaya dan percepatan merupakan besaran vektor, maka persamaan (5.2) menyatakan bahwa percepatan yang diperoleh oleh suatu benda searah dengan resultan gaya yang bekerja pada benda itu. Berikut adalah prinsip-prinsip penting yang harus selalu diperhatikan dalam penerapan hukum kedua Newton: ruas kiri persamaan (5.2) merupakan jumlahan vektor semua gaya yang bekerja pada benda yang ditinjau. Apabila persamaan (5.2) hendak diterapkan hanya pada suatu bagian dari suatu sistem mekanis, maka lupakanlah gaya-gaya yang tidak bekerja pada bagian itu. Hal ini dapat dilakukan dengan menggambarkan diagram benda bebas.

Apabila persamaan (5.2) hendak diterapkan hanya pada suatu bagian dari suatu sistem mekanis, maka lupakanlah gaya-gaya yang tidak bekerja pada bagian itu.

Besaran skalar m pada persamaan (5.1) adalah massa inersial. Massa inersial suatu benda adalah ukuran kelembaman atau inersia benda itu. Sebagai contoh upaya menghentikan (memperlambat) sebuah balok bermassa 3000 kg yang sedang meluncur di lantai yang licin jauh lebih susah jika dibandingkan dengan upaya menghentikan sebuah balok bermassa 1 kg yang juga sedang meluncur di lantai yang licin. Demikian halnya, berupaya menggerakkan dari keadaan diamnya (mempercepat) balok bermassa 3000 kg di lantai yang licin jauh lebih sulit jika dibandingkan dengan upaya menggerakkan dari keadaan diamnya balok bermassa 1 kg di lantai yang sama.

Ditinjau resultan gaya \mathbf{F} yang bekerja pada benda pertama yang bermassa m_1 dan benda kedua yang bermassa m_2 , dengan $m_2 > m_1$. Jika dikatakan $m_2 > m_1$ berarti benda kedua lebih masif jika dibandingkan dengan benda pertama. Resultan gaya \mathbf{F} menyebabkan benda pertama akan dipercepat misalnya dengan percepatan \mathbf{a}_1 . Secara matematis, kaitan antara gaya itu dengan percepatan benda pertama dapat dituliskan sesuai persamaan (5.2) menurut

$$\mathbf{F} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (5.3)$$

Sementara gaya \mathbf{F} juga bekerja pada benda kedua yang bermassa m_2 , sehingga menyebakan benda tersebut akan dipercepat dengan percepatan semisal \mathbf{a}_2 . Secara matematis, kaitan gaya dan percepatan benda kedua dapat dituliskan sesuai persamaan (5.2) menurut

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{a}_2. \quad (5.4)$$

Dari kedua persamaan terakhir, kita mendapatkan

$$m_1 \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_2. \quad (5.5)$$

atau

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.6)$$

Persamaan (5.6) menegaskan bahwa semakin besar massa sebuah benda, semakin kecil percepatan yang akan diperolehnya dari resultan gaya yang sama. Dalam kehidupan sehari-hari, Anda merasakan bahwa upaya mendorong mobil mogok agar bergerak lebih cepat dari sebelumnya terasa jauh lebih berat jika dibandingkan dengan upaya mendorong sepeda motor. Upaya mendorong sepeda motor lebih berat ketimbang mendorong sepeda angin. Oleh karena itu, persamaan (5.6) menyatakan bahwa massa merupakan ukuran keengganannya dari suatu benda untuk mengubah gerakannya. Semakin besar massa suatu benda semakin enggan benda itu berubah dalam gerakannya. Ingat bahwa bukan keengganannya untuk bergerak, tetapi keengganannya untuk merubah gerak. Keengganannya untuk merubah keadaan gerak sama artinya dengan kecenderungan untuk mempertahankan keadaan gerak atau inersia. Semakin besar massa suatu benda semakin enggan bagi benda itu untuk mengubah gerakannya dan semakin besar pula kemampuannya dalam mempertahankan gerakannya, yakni kelembamannya. Truk bak terbuka tanpa muatan memiliki kelembaman lebih kecil jika dibandingkan dengan truk bak terbuka dengan muatan (lihat gambar depan bab ini) meskipun keduanya mempunyai spesifikasi teknis yang sama. Truk dengan muatan akan lebih sulit mengubah gerakannya semisal bergerak dalam ti-

kungan, karena benda yang memiliki massa yang lebih besar akan memiliki keengganan lebih untuk merubah gerakannya dari pada benda yang bermassa lebih kecil. Ungkapan matematis hukum kedua Newton, semisal persamaan (5.2), merupakan



Gambar 5.6: Sepeda motor memiliki kelembaman lebih kecil jika dibandingkan dengan mobil, sehingga sepeda motor lebih lincah. Artinya, sepeda motor lebih mudah melakukan perubahan gerakan.

pintu menuju didapatkannya persamaan gerak. Jika semua gaya yang bekerja pada sebuah benda telah diketahui dan didaftarkan secara lengkap, lalu dimasukkan ke dalam ruas kiri persamaan (5.2), maka akan didapatkan

$$\sum_i (F_i)_x \hat{\mathbf{i}} + \sum_i (F_i)_y \hat{\mathbf{j}} + \sum_i (F_i)_z \hat{\mathbf{k}} = ma_x \hat{\mathbf{i}} + ma_y \hat{\mathbf{j}} + ma_z \hat{\mathbf{k}}. \quad (5.7)$$

Pengambilan hasil kali skalar kedua ruas persamaan (5.7) dengan $\hat{\mathbf{i}}$ menghasilkan

$$\sum_i (F_i)_x = ma_x \quad (5.8)$$

karena $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1$, $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$. Demikian juga pengambilan hasil kali skalar kedua ruas persamaan (5.8) dengan $\hat{\mathbf{j}}$ dan $\hat{\mathbf{k}}$ berturut-turut menghasilkan

$$\sum_i (F_i)_y = ma_y \quad (5.9)$$

dan

$$\sum_i (F_i)_z = ma_z. \quad (5.10)$$

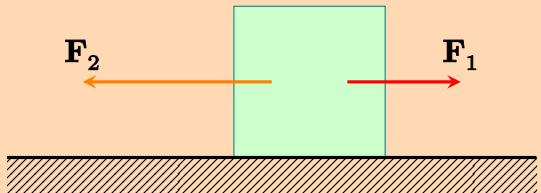
Karena $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$, dan $a_z = d^2z/dt^2$, tiga persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\sum_i (F_i)_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum_i (F_i)_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \sum_i (F_i)_z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (5.11)$$

Persamaan (5.11) inilah disebut **persamaan gerak** bagi benda yang ditinjau, dengan $\sum_i (F_i)_x$ adalah jumlahan komponen sepanjang sumbu- x semua gaya yang bekerja pada benda itu, $\sum_i (F_i)_y$ adalah jumlahan komponen sepanjang sumbu- y semua gaya yang bekerja pada benda itu, dan demikian pula $\sum_i (F_i)_z$. Jadi persamaan gerak berupa beberapa persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan prosedur-prosedur yang dikenal dalam teori persamaan diferensial maupun komputasi. Mendapatkan persamaan gerak adalah langkah penting dalam memahami perilaku sistem mekanik. Untuk mendapatkannya melalui penerapan hukum Newton di atas, Anda harus mengetahui dan mendaftar semua gaya yang bekerja pada benda-benda yang terlibat dalam sistem mekanik yang Anda pelajari. Dalam prakteknya, sering terjadi, ada beberapa gaya yang tidak diketahui dari awal dan merupakan bagian dari masalah yang harus diselesaikan. Dalam hal-hal semacam itu prosedur sederhana di atas tidak berlaku. Oleh karena itu diperlukan untuk merumuskan hukum kedua Newton secara lebih seksama (akurat), yakni semisal dengan menggunakan perumusan Lagrange maupun Hamilton. Tetapi, yang disebut terakhir ini belum layak untuk dibicarakan dalam buku ini.

Uji Ketajaman 5.2

Sebuah benda dikenai dua buah gaya sebagaimana pada gambar. Apabila benda bermassa m tentukanlah percepatan yang dialami benda tersebut.



Uji Ketajaman 5.3 Perubahan Gerak

1. Tiga orang siswa SMA sedang melakukan eksperimen. Sebuah kubus kayu yang bermassa 2 kilogram ditarik dengan tiga buah tali ke arah yang berbeda. Siswa pertama menarik kubus tersebut ke arah utara dengan gaya terukur 30 newton. Orang siswa kedua menarik ke arah barat dengan gaya terukur 40 newton. Sementara siswa ketiga menariknya ke arah tenggara dengan gaya terukur 20 newton. Tentukanlah percepatan yang dialami kubus tersebut.
2. Dua orang sedang memindahkan lemari yang bermassa 60 kilogram. Orang pertama mendorong lemari tersebut ke arah timur dengan gaya 20 newton. Orang kedua mendorong lemari tersebut dengan gaya 35 newton ke arah utara. Tentukan percepatan yang dialami lemari tersebut.
3. Sebuah sepeda motor sedang melaju dengan kecepatan 60 km/jam. Kemudian sepeda motor tersebut direm dengan gaya penggereman 75 newton. Tentukanlah selang waktu antara dimulainya penggereman hingga sepeda tersebut berhenti.
4. Sebuah pesawat komersial memiliki 4 buah mesin jet. Masing-masing mesin jet dapat memberikan gaya dorongan 340 kN. Apabila pesawat tersebut membawa beban total (termasuk massa

pesawat) 500 ton, tentukanlah percepatan lepas landasnya.

5. Sebuah benda bermassa 3 kilogram, mengalami percepatan $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Empat gaya bekerja pada benda tersebut, tiga di antaranya: $\mathbf{F}_1 = 3N\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{F}_2 = -2N\hat{\mathbf{j}}$, dan $\mathbf{F}_3 = 2N\hat{\mathbf{i}} + -2N\hat{\mathbf{j}}$. Tentukan gaya keempat yang bekerja pada benda tersebut.

Massa Gravitasi dan Massa Inersial

Newton mengemukakan dua konsep massa, massa gravitasi dan massa lembam (inersial). Massa gravitasi (m_G) adalah sifat benda yang bertanggung jawab atas bekerjanya gaya gravitasi baik yang dikerjakan pada benda lain maupun yang dialaminya karena benda lain. Massa gravitasi ini muncul pada ungkapan gaya gravitasi Newton pada hukum gravitasinya. Sementara massa inersial (m) adalah sifat benda yang merupakan ukuran keengganannya atau perlawananan (resistansi) terhadap percepatan. Konsep massa inersial muncul dalam hukum Newton tentang gerak. Setiap benda memiliki dua jenis massa itu. Awalnya Newton membedakan massa inersial dari massa gravitasi.

Sekarang kita tinjau besarnya gaya gravitasi (untuk lebih jelasnya lihat bab gravitasi) yang dikerjakan oleh Bumi terhadap suatu benda bermassa gravitasi m_G di tempat dengan ketinggian h di atas permukaannya, yaitu

$$\mathbf{F} = G \frac{M_{\oplus} m_G}{(R_{\oplus} + h)^2}, \quad (5.12)$$

dengan M_{\oplus} adalah massa gravitasi Bumi, dan G adalah tetapan gravitasi umum. Oleh karena itu, berdasarkan hukum kedua Newton tentang gerak, percepatan jatuh bebas benda tersebut di dekat permukaan Bumi adalah

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} \frac{m_G}{m}, \quad (5.13)$$

dengan m adalah massa inersial benda itu. Jika saja massa inersial sama dengan massa gravitasi, maka $m_G/m = 1$ dan

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2}, \quad (5.14)$$

Jadi, percepatan jatuh bebas yang dialami oleh sebuah benda tidak bergantung pada massanya. Artinya percepatan jatuh bebas benda satu akan sama dengan percepatan jatuh bebas benda yang lain meskipun massanya berbeda. Pada abad ke enam Galilei melakukan eksperimen sederhana dengan menjatuhkan dua benda yang memiliki massa yang berbeda secara bersama-sama dari atap menara Pisa. Dua benda tersebut ternyata sampai di tanah pada saat bersamaan. Eksperimen tersebut memberikan petunjuk kemungkinan kesamaan antara massa inersial dan massa gravitasional, $m_G = m$. Galilei mempublikasikan permasalahan ini secara luas. Sementara orang lain berusaha menguatkan dengan memperbaiki ketelitian terkait anggapan kesamaan antara massa gravitasional dengan massa inersial. Hal ini dikarenakan keyakinan akan hasil eksperimen tentu dibatasi oleh ketelitian (lihat kembali bab pengukuran). Simon Stevin pada tahun 1580 memeriksa kesamaan antara massa gravitasional dan

massa inersial. Akan tetapi Newton dengan eksperimenya menggunakan bandul sederhana menghasilkan ketelitian terkait dengan kesamaan antara massa gravitacional dan massa inersial sekitar 10^{-3} . Penelitian terus berlanjut untuk mendapatkan ketelitian yang terus semakin baik. Hingga sekarang ketidakpastian atau ralat bagi anggapan kesamaan antara massa gravitasional dan massa inersial yang terkecil mencapai 10^{-12} ketika Braginskij dan Panov melakukan eksperimen yang lebih teliti pada tahun 1972 [3].

Menguatnya keyakinan bahwa massa gravitasional sama dengan massa inersial membawa konsekuensi bahwa gaya gravitasi yang diderita oleh sebuah benda sebanding dengan massa inersialnya. Selain itu dengan kesamaan ini, dapat ditentukan besarnya tetapan gravitasi umum G . Hal menarik yang lain, kesamaan antara massa gravitasional dan massa inersial menjadi salah satu prinsip dalam teori relativitas umum dan darinya dapat ditarik kesimpulan bahwa gravitasi bukan gaya.

5.4 Hukum Ketiga Newton: Aksi-Reaksi

Ditinjau sembarang benda A yang mengerjakan gaya pada benda B. Hukum ketiga Newton mengatakan bahwa benda B akan melakukan gaya (sebagai reaksi) pada benda A yang besarnya sama tetapi dengan arah yang berlawanan dengan gaya yang dikerjakan oleh benda A pada benda B. Gaya yang dilakukan oleh benda A pada benda B disebut **gaya aksi**. Sementara gaya yang dilakukan oleh benda B pada benda A disebut **gaya reaksi** bagi gaya yang dikerjakan oleh benda A pada benda B. Oleh karena itu setiap gaya yang dikerjakan akan mendapat reaksi. Tidak ada gaya yang tidak mendapatkan reaksi. Hukum ketiga Newton menggambarkan sifat penting yang dimiliki oleh gaya bahwa gaya selalu berpasangan.

Actioni contrariam semper; equaleme esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equeales; in partes contarias dirigi.
 (Lex III, Principia:13)

Berikut contoh-contoh dalam kehidupan sehari-hari yang menunjukkan bahwa gaya selalu berpasangan, dengan besar yang sama, tetapi arah yang berlawanan. Jika Anda mendorong sebuah dinding, maka sebagai reaksinya dinding itu pun mendorong tangan Anda dengan dorongan yang besarnya sama namun arahnya berlawanan dengan dorongan yang Anda lakukan. Dorongan yang Anda lakukan adalah gaya aksi, sedangkan dorongan dinding pada tangan Anda adalah gaya reaksi. Sebuah palu yang dipukulkan pada sebuah paku mengerjakan gaya pada paku itu sebagai gaya aksi. Paku itu akan mereaksinya dengan melakukan gaya yang besarnya sama pada palu namun arahnya berlawanan dengan gaya yang dilakukan oleh palu. Jika Anda mendorong sebuah balok yang terletak di atas permukaan air telaga yang membeku, maka balok itu pun akan mendorong Anda dengan dorongan yang sama dengan yang anda lakukan pada balok itu. Jika Anda menarik sebuah mobil yang mogok, maka mobil itu pun menarik Anda dengan tarikan yang sama kuat.

Contoh 5.3 Gaya Aksi-reaksi di Malioboro

Saat Anda pergi berwisata ke Malioboro Yogyakarta, Anda akan mudah menjumpai andong atau kereta kuda yang siap menawarkan jasanya untuk keliling seputar tempat-tempat wisata di kota Yogyakarta. Sekarang kita pandang andong beserta kudanya sebagai sistem mekanik yang terusun atas dua benda, kereta dan kuda.

Sekali lagi, dalam sistem andong terdapat dua benda yaitu kereta dan kuda. Jika kuda menarik kereta dengan gaya F_K , maka kereta akan menarik kuda dengan gaya yang besarnya sama, tetapi arahnya berlawanan. Gaya yang dilakukan oleh kuda adalah gaya aksi, sedangkan yang dilakukan oleh kereta pada kuda adalah reaksinya. Perhatikan, bahwa gaya aksi bekerja pada kereta, sedangkan reaksinya bekerja pada kuda (yang melakukan aksi).

Gaya lain yang bekerja pada kereta adalah gaya beratnya W_k . Gaya ini dilakukan oleh Bumi pada kuda. Arahnya ke bawah menuju ke pusat Bumi. Sebagai reaksinya, kereta akan menarik Bumi dengan gaya G yang sama besar dengan gaya W_k , tetapi berarah ke atas. Gaya berat adalah gaya aksi. Yang mengalaminya adalah kereta (pusat massa kereta). Sementara reaksinya adalah gaya yang dilakukan oleh kereta pada pusat Bumi. Yang mengalaminya adalah Bumi. Sekali lagi, gaya aksi bekerja pada kereta, sedang gaya reaksinya bekerja pada Bumi (yang melakukan aksi).

Mungkin ada yang bertanya begini, jika kuda menarik kereta dan kereta memberi reaksi dengan menarik kuda dengan gaya yang sama besarnya namun berlawanan arah, bukankah keduanya saling mengimbangi sehingga kereta tidak mungkin mengalami percepatan dan akan tetap diam? Mungkin ada yang berpikir sekutu apapun kuda menarik kereta, tarikannya selalu diimbangi oleh reaksi yang dilakukan oleh kereta sehingga kereta tetap diam dan tidak akan mengalami percepatan. Tetapi, kenyataannya, Anda melihat dengan mata kepala sendiri banyak kereta kuda bergerak lalulalang di Malioboro. Ingat, gaya aksi dan reaksinya bekerja pada benda yang berbeda. Gaya-gaya yang dijumlahkan pada ruas kiri hukum kedua Newton di atas hanyalah gaya-gaya yang bekerja pada benda yang bermassa m yang sedang ditinjau (dalam hal ini kereta). Jadi, gaya reaksi kereta tidak perlu muncul dalam penjumlahan itu sebab gaya reaksi oleh kereta tidak bekerja pada kereta itu sendiri.



Gambar 5.7: Kereta kuda di Malioboro

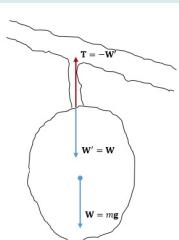
Contoh-contoh yang telah disebutkan menunjukkan bahwa gaya aksi dan reaksi tidak pernah saling mengimbangi karena dua gaya ini bekerja pada benda yang berbeda (yang saling berinteraksi), kecuali jika kedua benda itu kita tinjau secara keseluruhan sebagai satu kesatuan sistem. Gaya aksi dan gaya reaksi tidak pernah bekerja pada benda yang sama. Gaya reaksi bekerja pada benda yang melakukan gaya aksi, tidak pada diri sendiri.

Dalam contoh di atas, jika kuda dan kereta dipandang sebagai satu kesatuan sistem (benda), kedua gaya itu dapat dikatakan bekerja pada benda yang sama (yaitu kuda+kereta), sehingga harus dijumlahkan kalau kita hendak menerapkan hukum kedua Newton untuk kuda dan kereta sebagai sebuah benda. Jika kuda dan kereta sebagai sebuah benda, maka gaya aksi kuda dan reaksi kereta harus dijumlahkan karena keduanya bekerja pada benda kuda+kereta. Keduanya saling menghilangkan. Mengapa benda kuda+kereta mengalami percepatan? Tentu ada gaya lain yang bekerja pada benda kuda+kereta. Gaya yang manakah itu? Kuda menjejak-jejakkan

Gaya aksi dan reaksi tidak pernah saling mengimbangi karena dua gaya ini bekerja pada benda yang berbeda yang saling berinteraksi, kecuali jika kedua benda itu kita tinjau secara keseluruhan sebagai satu kesatuan sistem.

kakinya ke tanah. Kaki-kaki kuda itu secara keseluruhan melakukan gaya terhadap tanah (melalui gaya gesek) dengan arah ke belakang. Oleh karena itu, tanah pun memberikan reaksi dengan gaya yang besarnya sama dan arah berlawanan (ke depan). Jadi, benda kuda+kereta mengalami gaya reaksi dari tanah dengan arah ke depan. Gaya inilah yang menyebabkan benda kuda+kereta mengalami percepatan.

Contoh 5.4 Gaya Aksi-reaksi di Kebun



Perhatikanlah sebuah durian yang tergantung pada dahan pohonnya yang tumbuh di kebun (Gambar 5.8). Andaikan massa durian itu m dan tangkai buah durian itu dianggap sangat ringan. Gaya manakah yang merupakan reaksi bagi gaya berat $\mathbf{W} = mg$? Pertanyaan se macam ini akan sangat mudah untuk dijawab jika kita mengetahui benda atau objek yang melakukan gaya \mathbf{W} itu dan juga benda yang mengalami gaya itu. Telah jelas bahwa gaya berat \mathbf{W} dikerjakan oleh Bumi pada buah durian. Oleh karena itu reaksinya pasti dilakukan oleh buah durian itu pada pihak yang mengerjakannya, yaitu Bumi. Gaya reaksi ini bekerja pada pusat Bumi.

Gambar 5.8: Durian yang menggantung di kebun. Durian itu tidak jatuh ke tanah. Tentu ada gaya yang dilakukan oleh tangkai buah itu agar buah itu tidak jatuh ke tanah. Gaya itu adalah gaya \mathbf{T} . Pertanyaan selanjutnya, bagaimanakah dengan gaya \mathbf{T} ini? Ini gaya reaksi atau gaya aksi? Gaya berat yang dilakukan oleh Bumi pada buah durian akan diteruskan oleh buah itu hingga buah itu menarik gagang atau tangkai buah. Gaya yang dilakukan oleh buah pada gagangnya ini adalah gaya \mathbf{W}' . Jadi, akan ada reaksi dari gagang pada buah durian itu. Reaksi yang dilakukan oleh gagang inilah gaya \mathbf{T} itu.

Lalu, berapakah besarnya gaya \mathbf{W}' ?

Untuk menjawab pertanyaan ini, semua gaya yang bekerja pada buah durian perlu diperiksa dan didaftarkan terlebih dahulu. Terlihat bahwa hanya gaya \mathbf{W} dan gaya tegangan gagang \mathbf{T} saja yang bekerja pada buah durian itu. Oleh karena itu resultan gaya yang bekerja pada buah durian adalah $\sum \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{T}$. Karena benda dalam keadaan setimbang, yakni percepatannya nol, maka berdasarkan hukum kedua Newton diperoleh persamaan

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{T} = m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Jadi, $\mathbf{W} = -\mathbf{T}$. Karena $\mathbf{W}' = -\mathbf{T}$, maka didapatkanlah identitas $\mathbf{W}' = \mathbf{W}$.

Tetapi perlu dicatat bahwa persamaan ini tidak selalu berlaku. Sebagai contoh, jika (karena suatu sebab) bagian atas gagang durian itu putus, maka durian beserta gagangnya jatuh dengan percepatan g maka persamaan (5.15) harus diganti dengan

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{T} = m \cdot \mathbf{g} = \mathbf{W}. \quad (5.16)$$

Oleh karena itu, $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{W}' = \mathbf{0}$.

5.5 Macam-macam Gaya

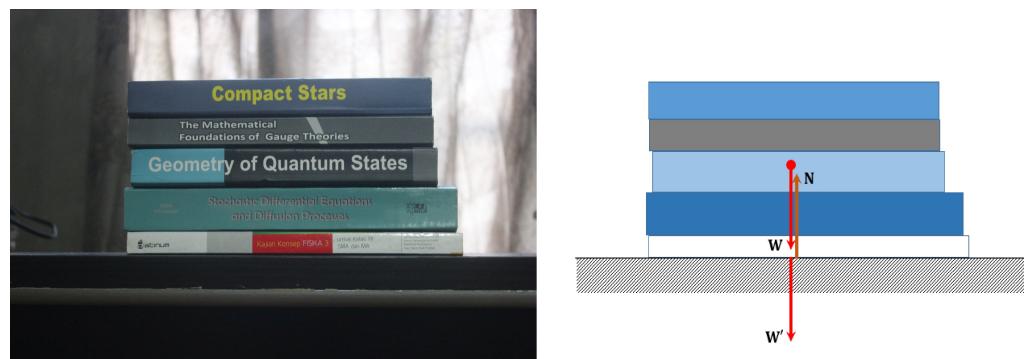
Bermacam-macam gaya dapat Anda temukan di alam ini. Ketika Anda mendorong meja kerja yang cukup berat, otot-otot Anda harus menegang sehingga Anda mendorong meja itu. Dalam beberapa contoh yang telah dibahas di depan, Anda juga telah mengenal gaya berat yang bekerja pada kuda, kereta, dan pada buah durian, serta gaya tegangan yang bekerja pada gagang durian. Dalam beberapa pembicaraan mendatang Anda akan bersinggungan dengan gaya gesek dan gaya normal. Betapa riuhan rendah alam ini dengan berbagai macam gaya.

Gaya Sentuhan

Dua benda atau lebih yang bersentuhan satu dengan yang lain, sesungguhnya saling mengerjakan gaya satu terhadap yang lain. Gaya-gaya ini merupakan perwujudan atau akibat keberadaan gaya-gaya listrik dan magnet yang tergabung sebagai satu kesatuan gaya, yakni gaya elektromagnetik. Ketika dua buah benda bersentuhan, terjadilah interaksi antara molekul-molekul penyusun kedua benda itu yang berada di permukaan masing-masing benda itu. Gaya elektromagnetiklah yang bertanggung-jawab baik atas interaksi antara molekul-molekul di permukaan kedua benda itu maupun ikatan-ikatan antar molekul di masing-masing benda yang bersentuhan itu. Empat contoh gaya sentuhan yang hendak dibahas dalam bagian ini adalah gaya normal, gaya gesek, gaya Stokes, dan gaya penggereman oleh zat alir. Sebuah contoh lain bagi gaya sentuh adalah gaya tekan yang dialami oleh permukaan sebuah benda yang berada di dalam fluida atau zat alir.

Gaya Normal

Ketika tumpukan buku diletakkan di atas meja kayu, maka ada sentuhan antara permukaan meja dengan permukaan sampul buku paling bawah (Gambar 5.9). Buku-buku dan meja kita pandang sebagai sebuah sistem mekanis. Keseluruhan buku itu akan ditarik oleh Bumi dengan gaya berat W (Gambar 5.9 sebelah kanan). Tarikan Bumi ini akan diteruskan oleh buku-buku itu sehingga tumpukan buku-buku itu akan menekan permukaan meja dengan gaya W' . Sebagai reaksinya, meja akan me-



Gambar 5.9: Tumpukan buku di atas meja

lakukan gaya N yang besarnya sama dengan yang dialaminya (yakni sama besarnya dengan gaya W'), tetapi dengan arah berlawanan. Gaya N ini disebut **gaya normal**. Gaya normal inilah yang menjaga buku tertahan di atas meja. Gaya-gaya tersebut sejatinya memiliki garis kerja yang berimpit, tetapi demi kejelasan, garis kerja gaya-gaya itu dalam Gambar 5.9 sedikit digeser.

Sekarang coba Anda bayangkan jika permukaan meja itu diganti dengan busa yang lunak. Apa yang akan terjadi dengan buku-buku itu? Jelas sekali, permukaan busa itu akan sedikit mencekung turun ke bawah (deformasi), sehingga tumpukan buku akan tertahan di sana. Tetapi permukaan busa itu tetap akan memberi reaksi pada gaya tekan tumpukan buku dengan gaya yang besarnya sama namun arahnya berlawanan. Persoalannya, mengapa deformasi permukaan itu tidak terjadi pada permukaan meja? Untuk menjawabnya, perhatikan permukaan meja sebagai sebuah benda. Ketika tumpukan buku ada di atasnya, permukaan meja itu menderita gaya tekan oleh tumpukan buku itu. Karena permukaan meja tidak mengalami deformasi, maka tentu saja ada gaya yang bekerja pada permukaan meja yang mengimbangi gaya tekan tumpukan buku itu. Gaya apakah itu? Karena gaya tekan tumpukan buku itu berarah ke bawah, maka gaya yang mengimbanginya harus berarah ke atas. Gaya yang mengimbangi gaya tekan tumpukan buku itu adalah gaya benda tegar yang merupakan perwujudan atau akibat adanya gaya ikat molekuler yang kuat antar molekul pada permukaan meja. Pada permukaan busa pun sejatinya terdapat gaya semacam ini, namun gaya-gaya ikat molekuler itu tidak sekuat gaya ikat molekuler pada permukaan meja kayu itu sehingga pada awalnya gaya ikat molekuler busa ini tidak mampu mengimbangi gaya tekan tumpukan buku. Tetapi ketika telah terjadi deformasi secukupnya, gaya yang diakibatkan oleh ikatan molekuler itu telah mampu mengimbangi gaya tekan tumpukan buku, maka buku pun tertahan pada cekungan permukaan busa itu.

Kembali ke tumpukan buku yang berada di atas meja. Untuk mengetahui besarnya gaya normal, cukuplah bagi kita untuk hanya menganalisa gaya-gaya yang bekerja pada buku saja. Ada dua gaya yang bekerja pada buku, yaitu gaya berat \mathbf{W} dan gaya normal \mathbf{N} . Oleh karena itu, resultan gaya yang bekerja pada buku itu adalah $\mathbf{W} + \mathbf{N}$. Tetapi, buku dalam keadaan setimbang atau buku tidak memiliki percepatan apapun. Oleh karena itu, dari hukum kedua Newton didapatkanlah persamaan,

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

yang setara dengan pernyataan $\mathbf{N} = -\mathbf{W}$. Hal ini menunjukkan besarnya gaya normal sama dengan besarnya gaya gravitasi, yakni berat tumpukan buku itu.

Jika meja tempat buku tersebut di gerakkan ke atas dengan kecepatan tetap (kecepatan tetap berarti tidak ada percepatan atau percepatannya nol), maka buku pun dalam keadaan setimbang. Maka persamaan (5.17) tetap berlaku dan karenanya berlaku pulalah $\mathbf{N} = -\mathbf{W}$.

Contoh 5.5 Ketika Besarnya Gaya Normal Berbeda dari Besarnya Gaya Berat

Seorang astronaut Indonesia berdiri tegak pada lantai sebuah pesawat yang bergerak vertikal di atas permukaan Bumi. Pesawat itu dipercepat ke atas dengan percepatan a . Jika massa astronaut itu m dan percepatan gravitasi setempat g , tentukan gaya normal yang dilakukan oleh lantai pesawat itu pada astronaut.

Gaya-gaya yang bekerja pada astronaut itu adalah gaya beratnya mg dan gaya normal \mathbf{N} . Karena pesawat itu bergerak vertikal dengan percepatan a ke atas, maka berlaku persamaan

$$mg + \mathbf{N} = ma$$

atau

$$\mathbf{N} = ma - mg = m(a - g).$$

Jika arah vertikal dipilih sebagai sumbu- z dan vektor satunya $\hat{\mathbf{k}}$ ke atas, maka $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}}$ dan $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{k}}$. Oleh karena itu,

$$\mathbf{N} = m(a\hat{\mathbf{k}} - (-g\hat{\mathbf{k}})) = m(a + g)\hat{\mathbf{k}}.$$

Karena dipercepat ke atas, $a > 0$, maka $N = m(a + g) > mg = W$, yakni besar gaya normal lebih besar daripada gaya berat.

Jika $-2g < a < 0$, $N = m(a + g) < mg = W$ yakni pesawat dipercepat ke bawah dengan besar percepatannya kurang dari $2g$, maka besarnya gaya normal kurang dari besarnya gaya berat.

Jika $a = -g$, maka $N = m(-g + g) = 0$. Astronaut itu tidak merasakan gaya normal apapun.

Jika kita berdiri di atas sebuah timbangan pegas, gaya berat yang dilakukan oleh Bumi pada diri kita akan kita teruskan sehingga badan kita melalui kaki kita menekan timbangan. Gaya tekan badan kita itulah yang terbaca pada timbangan. Padahal besar gaya tekan yang kita lakukan pada timbangan karena gaya berat kita itu sama dengan besar gaya normal yang dilakukan oleh permukaan timbangan pada badan kita. Jadi, yang terbaca pada timbangan sebagai bobot badan kita adalah besar gaya normal yang dilakukan oleh permukaan timbangan itu pada badan kita. Jika astronaut pada contoh di atas berdiri di atas timbangan, maka bobot astronaut itu bertambah pada saat $a > 0$, yakni ketika pesawat dipercepat ke atas. Astronaut itu berkurang bobotnya saat $a < 0$. Astronaut itu tanpa bobot ketika $a = -g$.

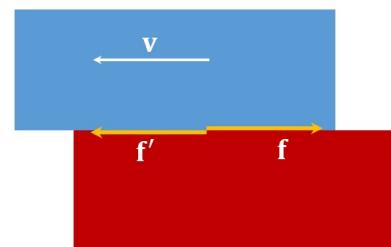
Yang terbaca pada timbangan sebagai bobot badan kita adalah besar gaya normal yang dilakukan oleh permukaan timbangan itu pada badan kita.

Gaya Gesek Kering

Sentuhan permukaan dua buah benda dan gerak relatif antara keduanya menghasilkan gejala-gejala yang menarik untuk dikaji. Cabang sains yang mempelajarinya disebut tribologi. Ketika dua benda bersentuhan sehingga terdapat gaya sentuhan normal dan terdapat perbedaan keadaan gerak antara keduanya, yakni ada gerak relatif antara kedua benda itu, maka akan muncul gaya gesek yang dikerjakan oleh satu benda terhadap yang lain (Gambar 5.10). Arah gaya gesek ini sejajar dengan permukaan yang bersinggungan. Arah gaya gesek selalu berlawanan dengan arah kecepatan ataupun kecenderungan gerak benda. Benda yang berwarna biru pada Gambar 5.10 bergerak ke kiri dengan kecepatan v relatif terhadap benda yang berwarna merah. Sentuhan antara keduanya dapat mengakibatkan gaya gesek f yang dilakukan oleh benda merah pada benda biru. Besarnya gaya gesek yang diderita oleh benda merah bergantung pada gaya normal yang dilakukan oleh benda yang merah pada benda biru dan sifat-sifat permukaan yang saling bersentuhan.

Dalam kehidupan sehari-hari manfaat gaya gesek ini terlihat dari ban sepeda atau mobil yang tidak selip di permukaan aspal, atau tidak selipnya sepatu atau sandal pada lantai, paku yang tidak mudah lepas yang tertanam dalam sepotong kayu, dan lain sebagainya. Anda dapat membayangkan jika gaya gesek ini tidak ada, tentu sepeda dan mobil Anda tidak dapat berjalan karena roda-rodanya selalu selip. Manusia tidak bisa berjalan karena terjadi selip antara sepatu dan lantai. Selain itu, kita tidak akan menjumpai kursi, meja, lemari, atau rumah dari kayu karena paku yang ditanamkan ke dalam kayu akan mudah lepas. Begitulah pentingnya keberadaan gaya gesek dalam kehidupan sehari-hari.

Apa penyebab munculnya gaya gesek? Secara mikroskopis gaya gesek ini disebabkan oleh interaksi melalui terbangunnya gaya ikat antara molekul-molekul yang



Gambar 5.10: Gaya gesek yang dialami benda berlawanan dengan arah kecepatan

Secara mikroskopis gaya gesek ini disebabkan oleh interaksi melalui terbangunnya gaya ikat antara molekul-molekul yang berada di permukaan satu benda dengan molekul-molekul pada permukaan benda yang lain ketika keduanya saling bersentuhan.

Hukum Pertama Amontons:

berada di permukaan satu benda dengan molekul-molekul pada permukaan benda yang lain ketika keduanya saling bersentuhan. Berbagai macam gaya (ikat) antar molekul akan terbangun dengan sendirinya selama permukaan kedua benda itu bersentuhan. Jika kedua permukaan itu berada dalam keadaan-keadaan yang memungkinkan terbangunnya ikatan-ikatan itu dengan baik, maka gaya gesek itu akan semakin kuat. Keadaan-keadaan permukaan yang dimaksud semisal keadaan diam, kedua permukaan saling menekan, serta keadaan-keadaan yang terkait dengan geometri dan sifat-sifat fisis permukaan-permukaan itu. Keadaan-keadaan terakhir ini tercermin pada parameter yang disebut koefisien gesek dan diberi lambang μ . Sebagai contoh, permukaan sol sepatu yang terbuat dari karet dan permukaan jalan beraspal memiliki koefisien gesek cukup besar.

Dalam kaitan ini, dua hukum tentang gaya gesek layak untuk dikemukakan. Kedua hukum itu dikenal sebagai **Hukum Amontons** dan telah ditemukan oleh orang sekitar tahun 1699.

Hukum Pertama Amontons: Gaya gesek sebanding dengan gaya sentuhan normal. Koefisien gesek tidak bergantung pada luas permukaan yang bersentuhan dan gaya normal. Koefisien gesek mendekati tetapan yang bernilai selalu kurang dari satu.

Hukum Kedua Amontons:

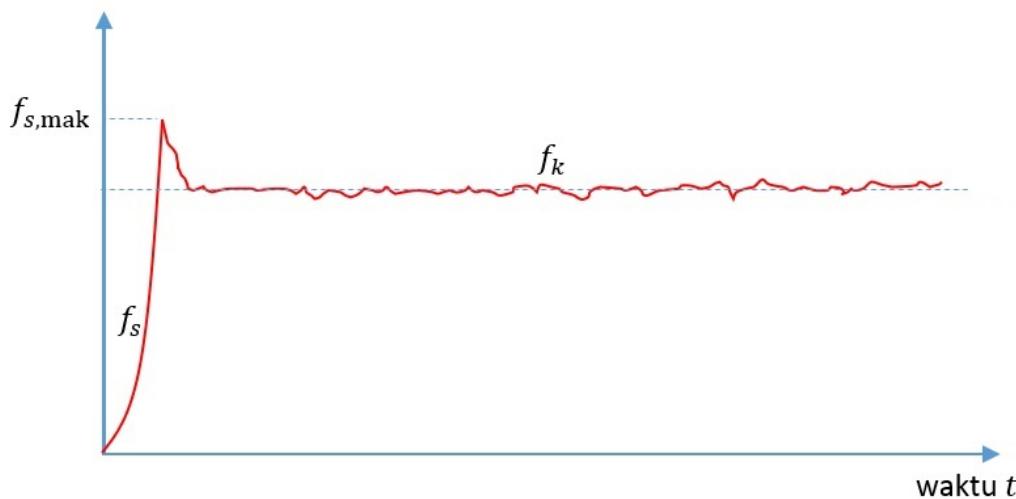
Hukum Kedua Amontons: Koefisien gesek tidak bergantung pada kecepatan relatif benda-benda yang bersentuhan.

Hukum kedua Amontons juga disebut **hukum Coulomb tentang gesekan**.

Jika Anda ingin memindahkan lemari buku yang sarat dengan buku-buku dari satu tempat ke tempat lain, maka Anda dapat melakukannya dengan mendorongnya. Tetapi sering terjadi, ketika Anda mencoba mendorongnya dengan dorongan tertentu ternyata lemari buku itu belum bergeser sedikit pun. Anda berpikir mungkin gaya dorong yang Anda berikan terlalu lemah. Jika kemudian Anda memperbesar sedikit dorongan Anda, ternyata lemari buku itu pun belum juga bergeser. Anda tidak menyerah, dan terus-menerus memperbesar gaya dorong, maka pada suatu saat ketika besarnya dorongan Anda mencapai nilai tertentu, ternyata lemari buku mulai bergeser. Tepat ketika Anda mulai mendorong lemari buku, muncul gaya gesek sebagai penyeimbang yang bekerja pada permukaan lemari buku bagian bawah. Gaya ini disebut **gaya gesek statis** dan diberi lambang f_s . Gaya f_s selalu mengimbangi gaya dorong Anda, sehingga lemari buku belum bergeser. Ketika Anda memperbesar dorongan, maka gaya f_s itu pun ikut membesar menyesuaikan besarnya dorongan yang Anda lakukan (lihat grafik pada Gambar 5.11). Sampai pada suatu saat, besarnya gaya dorong yang Anda berikan mencapai suatu nilai tertentu, besarnya gaya penyeimbang f_s itu pun mencapai nilai yang sama dengan besarnya gaya dorong Anda. Sebut nilai ini $f_{s,mak}$. Hanya saja, kemudian gaya pengimbang itu besarnya berkurang secara drastis (mendadak) dan berubah di sekitar nilai tertentu dan selanjutnya boleh dikatakan tetap pada nilai itu. Tepat ketika besar gaya penyeimbang itu jatuh, lemari buku mulai bergerak. Selain itu, tepat setelah gaya penyeimbang itu mencapai nilai tetapnya, lemari terasa mudah digesek. Pada saat itu, gaya gesek itu disebut **gaya gesek kinetis** dan diberi lambang f_k .

Besarnya gaya gesek statis f_s , ketika mencapai nilai maksimum menurut hukum Amontons adalah

$$f_{s,mak} = \mu_s N, \quad (5.18)$$



Gambar 5.11: Tepat ketika Anda mendorong lemari buku, maka muncul gaya gesek statis f_s yang bekerja pada permukaan lemari buku bagian bawah. Besarnya gaya ini menyesuaikan besarnya gaya dorong yang Anda lakukan. Pada saat tertentu besarnya gaya gesek mencapai maksimum ($f_{s,mak}$) dan setelahnya besar gaya gesek berubah di sekitar nilai tertentu (f_k) yang kurang dari gaya gesek statis maksimum.

dengan N adalah besarnya gaya normal dan μ_s suatu tetapan yang disebut koefisien gesekan statis. Sementara, pada saat lemari sudah bergerak, gaya gesek yang bekerja pada balok adalah gaya gesek kinetis. Besarnya gaya gesek ini adalah

$$f_k = \mu_k N, \quad (5.19)$$

dengan μ_k suatu tetapan yang disebut koefisien gesekan kinetis.

Mungkin pada awalnya Anda menduga bahwa koefisien gesek statis dan kinetis ini sebanding dengan luas bidang sentuh antara kedua permukaan benda. Ternyata tidak. Koefisien gesekan statis dan kinetis tidak bergantung pada luas bidang sentuh kedua benda yang bersentuhan.

Contoh 5.6 Menentukan Koefisien Gesekan Statis dan Kinetis

Telah disebutkan sebelumnya tentang μ_s dan μ_k yang tidak bergantung pada luas bidang sentuh antara kedua permukaan benda. Lalu bagaimana cara menentukan koefisien μ_s dan μ_k tersebut?

Andaikan kita hendak menentukan koefisien gesekan statis antara sebuah balok dan permukaan meja. Yang perlu dilakukan adalah dengan mengangkat salah satu sisi meja sehingga memiliki kemiringan tertentu, katakanlah θ , yang menyebabkan benda itu mulai bergerak meluncur. Tepat ketika permukaan meja memiliki kemiringan sebesar itu, terdapat kesetimbangan gaya

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta \quad (5.20)$$

dan

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s, \quad (5.21)$$

dengan sumbu- x sejajar dengan permukaan meja searah dengan arah meluncurnya balok, sedang

sumbu- y tegak lurus pada permukaan meja. Persamaan (5.20) dapat dituliskan menjadi

$$mg = \frac{N}{\cos \theta} \quad (5.22)$$

yang dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (5.21) dan diperoleh

$$f_s = mg \sin \theta = \frac{N}{\cos \theta} \sin \theta = N \tan \theta. \quad (5.23)$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan

$$\mu_s = \tan \theta_c, \quad (5.24)$$

yang menunjukkan bahwa koefisien gesek statis sama dengan tangen sudut kemiringan saat balok tepat mulai meluncur.

Jika sudut kemiringan melebihi θ , maka balok meluncur dengan besarnya percepatan a_x . Oleh karena itu, komponen gaya pada sumbu- x adalah

$$mg \sin \theta - \mu_k N = ma_x. \quad (5.25)$$

Besarnya gaya normal dalam kasus ini adalah $mg \cos \theta$, dan disubstitusikan ke persamaan (5.25) diperoleh

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta). \quad (5.26)$$

Persamaan (5.26) menunjukkan bahwa dengan mengukur besarnya percepatan a_x , maka koefisien gesek kinetik μ_k dapat ditentukan.

Contoh 5.7 Meniadakan Gaya Gesek

Dalam beberapa hal, orang justru menginginkan berkurangnya atau tiadanya gaya gesek. Oleh karena itu, orang berupaya menguranginya atau meniadakannya sama sekali. Sebagai contoh, dalam permainan karambol, keping-keping karambol diharapkan dapat bergerak pada meja tanpa gesekan sedikitpun. Atau dalam sistem kereta api *Transrapid* yang ada di Jerman, orang berupaya meniadakan gesekan antara kereta dengan relnya (Gambar 5.12). Karena gaya gesek disebabkan oleh adanya pertumbuhan gaya ikat antara molekul-molekul di sebuah permukaan dengan molekul-molekul di permukaan yang lain, maka upaya meniadakan gaya gesek berarti upaya menutup kemungkinan adanya pertumbuhan gaya ikat antar molekul tersebut. Salah satu caranya adalah dengan meletakkan lapisan dari bahan tertentu di antara kedua permukaan itu. Dalam permainan karambol, Butir-butir tepung ini mencegah sentuhan antara keping-keping karambol dan papan ka-



Gambar 5.12: Kereta api cepat *Transrapid* di Jerman menggunakan maglev untuk meniadakan gesekan (www.techmate.com) orang menebarkan tepung pada papan karambol. Butir-butir tepung ini mencegah sentuhan antara keping-keping karambol dan papan ka-

rambol. Dalam hal *Transrapid*, orang menggunakan maglev (singkatan dari *magnetic levitation*), yakni upaya pengangkatan benda-benda dengan pemasangan magnet sedemikian rupa sehingga dua permukaan bersifat sebagai kutub magnet yang senama untuk mencegah agar permukaan bawah kereta tidak bersentuhan dengan rel.

Gaya Stokes dan Gaya Pengereman oleh Zat Alir

Jika sebuah benda bergerak di dalam suatu zat alir atau fluida, maka benda itu akan mengalami gaya hambat yang dilakukan oleh zat alir itu. Terdapat dua kemungkinan jenis gaya hambat oleh zat alir: (a) gaya gesekan karena zat alir yang kental (*viscous*) dengan permukaan benda, dan (b) gaya pengereman (*drag force*) oleh zat alir.

Gaya hambat jenis yang pertama biasa disebut gaya Stokes, yakni berdasarkan nama seorang fisikawan yang pertama kali merumuskannya, yakni George Gabriel Stokes pada tahun 1851. Gaya ini diakibatkan oleh gesekan antara fluida dan permukaan benda. Oleh karena itu, untuk fluida dengan bilangan Reynold yang kecil gaya ini sangat terasa. Semakin kental (*viscous*) suatu fluida semakin kecil bilangan Reynold-nya. Perumusan gaya Stokes yang bekerja pada sebuah benda yang bergerak di dalam zat alir berdasarkan anggapan sebagai berikut: (a) aliran zat alir bersifat tunak atau laminer (lihat bab tentang zat alir), (b) benda yang ditinjau berbentuk bola, (c) benda yang ditinjau bersifat seragam (homogen), (d) permukaan benda bersifat halus. Dengan anggapan semacam itu besarnya gaya Stokes diberikan oleh

$$F_S = 6\pi\eta Rv, \quad (5.27)$$

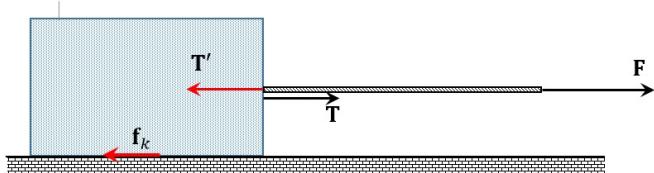
dengan η kekentalan (viskositas) dinamis zat alir, R jari-jari benda yang berupa bola itu, dan v adalah kecepatan relatif benda terhadap zat alir. Arah gaya ini selalu berlawanan dengan arah kecepatan benda.

Gaya hambat zat alir jenis kedua, yakni gaya pengereman oleh zat alir berlaku untuk semua jenis zat alir, termasuk yang ideal, yakni dengan kekentalan rendah (lihat bab yang membicarakan zat alir). Gaya hambat ini tidak disebabkan oleh gesekan antara zat alir dengan permukaan benda yang bergerak di dalam zat alir itu, melainkan disebabkan semata-mata oleh watak aliran zat alir itu dan bentuk geometri benda yang bergerak di dalam zat alir. Besar gaya pengereman ini diberikan oleh

$$F_P = \frac{1}{2}C_P\rho v^2 A, \quad (5.28)$$

dengan ρ kerapatan zat alir, v kecepatan benda relatif terhadap zat alir, A luas efektif benda, yakni luas penampang benda tegak lurus terhadap kecepatan, dan C_p adalah tetapan atau koefisien pengereman yang ditentukan oleh sifat-sifat aliran zat alir dan bentuk geometris benda yang bergerak di dalam zat alir. Arah gaya pengereman ini selalu berlawanan dengan arah kecepatan benda itu. Gaya hambat jenis kedua ini sangat penting dalam perancangan kendaraan dan pesawat terbang. Besar gaya pengereman udara yang dialami oleh mobil sedan yang sedang bergerak tentu kurang dari besar gaya pengereman udara yang dialami oleh truk tronton yang sedang melaju di jalan.

Gaya Tegangan



Gambar 5.13: Gaya Tegangan Tali

Sekarang kita tinjau sebuah balok yang terletak di atas lantai kasar sehingga koefisien gesekan kinetik antar balok dan lantai μ_k . Seperti dalam kasus kereta kuda di atas, pada balok itu pun bekerja gaya normal dan gaya gravitasi Bumi. Keduanya saling melenyapkan karena tidak ada percepatan vertikal. Selanjutnya, andaikan ujung seutas tali dikaitkan dengan kuat pada sisi kanan balok itu dan ujung tali yang lain ditarik mendatar ke kanan dengan gaya F . Andaikan tali itu cukup kuat. Ketika tali ditarik ke kanan oleh tangan kita, ikatan-ikatan pada molekul penyusun tali itu pun bereaksi sehingga melawan tarikan tangan kita sehingga secara berurutan tarikan itu dirambatkan oleh molekul-molekul sepanjang tali itu. Kuatnya tali itu berarti kuatnya ikatan molekuler bahan penyusun tali itu. Karena kaitan ujung tali dengan balok itu cukup kuat, maka tarikan tangan kita akhirnya menyebabkan tali menarik balok ke kanan. Dengan apa tali menarik balok itu ke kanan? Tentu saja dengan gaya yang diteruskan atau dialirkan secara beruntun sepanjang tali itu. Inilah gaya tegangan tali. Sebut gaya ini gaya T . Sebagai reaksi atas gaya oleh tali ini, balok melakukan gaya pada ujung tali dengan gaya yang besarnya sama tetapi dengan arah yang berlawanan, yakni gaya $T' = -T$. Gaya T yang tertera pada gambar seharusnya berada pada garis kerja yang sama dengan gaya T' dan F , tetapi sengaja digeser sedikit ke bawah demi kejelasan gambar. Jadi, ada dua gaya yang bekerja pada tali, yaitu gaya F ke kanan dan gaya reaksi balok $-T$ ke kiri. Kalau massa tali m_t diabaikan, maka berdasarkan hukum kedua Newton,

$$\mathbf{F} - \mathbf{T} = m_t \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (5.29)$$

Jadi, jika tali sangat ringan, $\mathbf{T} = \mathbf{F}$.

Bagaimana jika massa tali tidak dapat diabaikan? Dalam hal ini, tentu saja

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} - m_t \cdot \mathbf{a}. \quad (5.30)$$

Untuk menghitung \mathbf{a} , balok perlu ditinjau sebagai sebuah benda terpisah dari tali. Gaya-gaya yang bekerja pada balok secara horizontal adalah gaya gesek kinetik \mathbf{f}_k yang berarah ke kiri, dan gaya tegangan tali \mathbf{T} ke kanan. Hukum kedua Newton memberikan

$$\mathbf{T} + \mathbf{f}_k = m_b \cdot \mathbf{a}, \quad (5.31)$$

dengan m_b massa balok. Dari persamaan (5.31) didapat

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_b} (\mathbf{T} + \mathbf{f}_k). \quad (5.32)$$

Jika ungkapan untuk percepatan ini dimasukkan ke dalam persamaan (5.30), didapat

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} - \frac{m_t}{m_b} (\mathbf{T} + \mathbf{f}_k). \quad (5.33)$$

Dari persamaan terakhir ini didapatkan

$$\mathbf{T} = \frac{m_b \mathbf{F} - m_t \mathbf{f}_k}{m_b + m_t}. \quad (5.34)$$

Jika sumbu- x mendatar ke kanan dengan vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$, maka $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{f}_k = -\mu_k m_b g \hat{\mathbf{i}}$ dan

$$\mathbf{T} = \frac{m_b F \hat{\mathbf{i}} + m_t \mu_k m_b g \hat{\mathbf{i}}}{m_b + m_t} = \frac{m_b F + \mu_k m_t m_b g \hat{\mathbf{i}}}{m_b + m_t} \hat{\mathbf{i}}. \quad (5.35)$$

Gaya atau Interaksi Fundamental

Yang dimaksud dengan **gaya-gaya mendasar** (fundamental) adalah gaya-gaya yang tidak lagi dapat dijelaskan sebagai perwujudan atau manifestasi gaya-gaya yang lain. Istilah lain untuk gaya mendasar adalah interaksi mendasar. Berbagai gaya yang ada di alam merupakan perwujudan gaya-gaya mendasar itu. Sebagai contoh, gaya gesek yang telah dijelaskan di depan ternyata diakibatkan oleh gaya ikat antar molekul di kedua permukaan. Gaya-gaya ikat antar molekul itu kalau dirunut lebih jauh ternyata disebabkan oleh gaya elektromagnetik. Masih adakah gaya lain sedemikian rupa sehingga gaya elektromagnetik itu merupakan perwujudan gaya-gaya lain itu? Tidak! Oleh sebab itu, gaya elektromagnetik itu adalah gaya mendasar. Terdapat empat gaya atau interaksi mendasar, yaitu gaya gravitasi, gaya elektromagnetik, gaya nuklir kuat, dan gaya nuklir lemah. Tabel 5.1 memperlihatkan watak keempat interaksi mendasar itu. Interaksi mendasar digambarkan sebagai akibat keberadaan pertikel-partikel yang disebut mediator. Sejauh ini, hanya graviton yang masih bersifat dugaan dan belum terlacak keberadaannya. Jika dilihat dari kekuatannya, gravitasi adalah interaksi yang paling lemah dan gaya kuat adalah yang paling kuat. Oleh karena itu, untuk meninjau sistem-sistem fisis dengan massa yang kecil, gravitasi tidak diperhitungkan. Jangkauan interaksi adalah jarak maksimum interaksi itu tidak bisa diabaikan. Interaksi kuat dan lemah memiliki jangkauan sangat pendek. Oleh karena itu jika untuk jarak-jarak makroskopis kedua interaksi ini jelas tidak perlu diperhitungkan.

Tabel 5.1: Empat Interaksi Mendasar

Interaksi Mendasar	Mediator Interaksi	Kekuatan Nisbi	Jangkauan (meter)
Gaya Gravitasi	Graviton	1	∞
Gaya Lemah	Partikel W dan Z	10^{25}	10^{-18}
Gaya Elektromagnetik	Foton	10^{36}	∞
Gaya Kuat	Gluon	10^{38}	10^{-15}

Gravitasi

Mengapa Bulan tetap cantik menggantung di langit dan tidak jatuh ke Bumi? Mengapa buah-buahan yang telah matang jatuh ke tanah ketika gagangnya telah melemah? Begitu juga, mengapa bintang-bintang ganda terus saling setia menempuh perjalanan panjang mereka memutari pusat galaksi? Planet Venus, planet Mars, dan planet-planet lain terkadang dapat dilihat di langit malam atau langit senja, atau saat fajar. Mengapa planet-planet itu dapat terbentuk? Menariknya planet-planet ini tetap berada pada garis edarnya dan tidak saling bertabrakan bahkan menabrak Bumi. Mengapa itu terjadi? Mengapa planet-planet berbentuk bola? Mengapa bintang-bintang lahir dari kumpulan awan-awan molekuler? Mengapa komet Shoemaker Levy 9 pecah berkeping-keping ketika melintas di dekat planet Jupiter? Mengapa ada pasang naik dan pasang turun di laut? Mengapa satelit sputnik terjebak mengorbit Bulan, padahal semula satelit itu direncanakan mendarat di permukaan Bulan?

Penyebab semua gejala atau peristiwa tersebut di atas adalah interaksi gravitasi. Gravitasi adalah interaksi terlemah di antara interaksi-interaksi fundamental yang lain. Oleh karena itu, dalam interaksi ini partikel elementer dapat diabaikan. Interaksi ini terjadi karena adanya massa dan selalu tarik-menarik (atraktif). Untuk lebih jelasnya silakan membuka bab tentang gravitasi di dalam buku ini.

Gaya Lemah (Gaya Nuklir Lemah)

Gaya ini memiliki jangkauan sangat pendek, yakni 10^{-18} meter. Gaya ini juga beraksi pada partikel quark sehingga membentuk proton dan neutron. Gaya ini jauh lebih lemah jika dibandingkan dengan gaya elektromagnetik dan gaya kuat. Gaya inilah yang bertanggungjawab atas terjadinya peluruhan beta. Jika tidak ada gaya lemah ini Matahari tidak akan bersinar, sebab dapur tenaga di dalam inti Matahari menghasilkan tenaga melalui proses ini. Selanjutnya, silakan lihat dalam bab partikel elementer.

Gaya Elektromagnetik

Interaksi ini adalah yang bertanggung jawab atas terbentuknya atom dan molekul serta ikatan-ikatan antar molekul. Interaksi elektromagnetik terjadi antara dua benda yang memiliki muatan listrik. Ada dua jenis muatan: muatan positif dan muatan negatif. Dua benda dengan muatan sejenis saling tolak-menolak. Dua benda dengan muatan tak sejenis tarik-menarik. Gaya inilah yang menyebabkan potongan-potongan kertas tertarik oleh penggaris yang telah digosok dengan rambut kita. Gaya inilah yang membuat mesin fotokopi sedikit mempermudah hidup Anda. Gaya inilah yang bertanggungjawab terjadinya halilintar. Interaksi inilah yang menyebabkan lampu listrik di rumah dapat menyala. Interaksi inilah yang menyebabkan terjadinya bintik-bintik Matahari bermunculan di fotosfer. Gaya inilah yang memberi Anda petunjuk tentang arah di permukaan Bumi. Selanjutnya, tentang gaya ini akan Anda dapatkan dalam bab elektromagnetika.

Gaya Kuat (Gaya Nuklir Kuat)

Inti helium terdiri dari dua proton. Sementara gaya listrik tolak-menolak antara dua proton sebegitu kuatnya. Mengapa dua proton dalam inti helium tidak buyar? Tentulah ada gaya yang lebih kuat daripada gaya tolak-menolak antar proton itu. Gaya yang bertanggung jawab mengikat proton dan neutron di dalam inti adalah gaya nuklir kuat.

Gaya kuat ini bersifat tarik-menarik dan sangat kuat pada jarak kurang dari 10^{-15} m. Gaya kuat ini pulalah yang mengikat partikel-partikel quark sehingga terbentuklah proton dan neutron dan partikel-partikel eksotik subatomik yang lain.

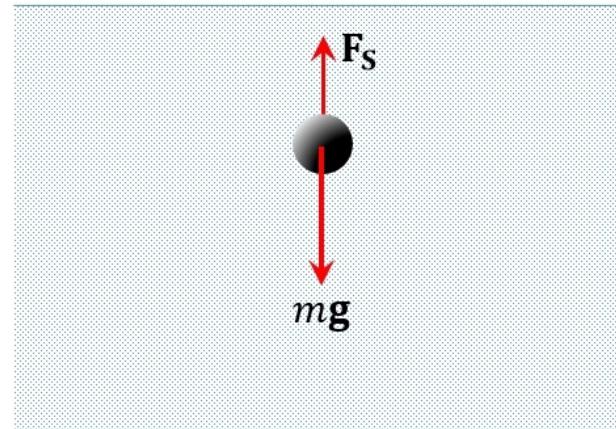
Hal yang menarik dari gaya nuklir kuat ini adalah jangkauannya. Gaya nuklir kuat mempunyai jangkauan yang sangat pendek. Gaya ini berkurang dengan cepat bersamaan dengan bertambahnya jarak pemisah antara partikel-pertikel. Jika partikel-pertikel terpisah sejauh beberapa kali diameter inti, maka gaya nuklir kuat dapat diabaikan. Untuk lebih jelasnya, tentang gaya kuat ini dapat Anda dalami dalam bab partikel elementer.

5.6 Penerapan Hukum Newton Lebih Lanjut

Penerapan hukum Newton tentang gerak menghasilkan persamaan gerak. Persamaan gerak yang dimaksud berupa persamaan diferensial dengan koordinat x , y , dan z sebagai peubah (variabel) tak bebas, yakni peubah yang dicari, dan peubah waktu t sebagai peubah bebas. Jika gaya-gaya yang bekerja pada benda yang kita tinjau sudah diketahui, maka persamaan gerak yang dimaksud diperoleh dari persamaan (5.11). Oleh karena itu, jawaban atau solusi persamaan gerak berupa koordinat x , y , dan z sebagai fungsi waktu t . Jawaban tersebut tidak tunggal kecuali posisi dan kecepatan benda pada suatu saat telah diketahui. Pengetahuan tentang posisi benda dan kecepatan benda pada suatu saat tertentu disebut syarat awal. Inilah watak deterministik mekanika Newton atau mekanika klasik: pengetahuan kita tentang posisi dan kecepatan benda pada suatu saat tertentu telah mencukupi untuk menentukan posisi dan kecepatan benda pada setiap saat, di masa depan maupun di masa lalu.

Kelereng Jatuh Dalam Zat Alir Kental

Sebuah kelereng yang bermassa m dan berjari-jari R jatuh ke dalam sebuah bejana yang berisi oli dengan kekenyalan η dari ketinggian h di atas permukaan oli itu. Jika percepatan gravitasi Bumi setempat g , kita akan menentukan posisi kelereng sebagai fungsi waktu diukur dari permukaan oli selama kelereng itu bergerak dalam oli. Angaikan sumbu- z vertikal dengan titik nol ada di permukaan oli serta arah positif ke atas. Terdapat empat buah gaya yang bekerja pada kelereng itu, gaya berat mg , gaya Stokes, gaya Archimedes, dan gaya penggeraman. Karena ukuran kelereng cukup kecil dan rapat massa kelereng jauh lebih besar jika dibandingkan dengan rapat massa oli, maka gaya Archimedes dan gaya penggeraman dapat diaibaikan. Dalam hal ini, $\sum F_x = \sum F_y = 0$, sedangkan $\sum F_z = -mg - 6\pi\eta Rv_z$. Dari persamaan (5.11) dan persamaan (5.27) diperoleh



Gambar 5.14: Kelereng Jatuh dalam Oli

$$0 = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad 0 = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (5.36)$$

dan

$$-mg - 6\pi\eta R v_z = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (5.37)$$

Persamaan (5.36) menghasilkan

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{0}{m} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{0}{m} = 0 \quad (5.38)$$

yang berarti bahwa

$$\frac{dx}{dt} = v_x = C_x, \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = v_y = C_y, \quad (5.39)$$

dengan C_x dan C_y tetapan. Karena kelereng hanya jatuh dari ketinggian h tanpa ada pelemparan dengan arah mendatar, maka hanya ada kecepatan vertikal saat kelereng itu masuk ke dalam oli. Jadi, saat $t = 0$, $v_x = v_y = 0$. Jadi, $C_x = C_y = 0$ dan

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = 0. \quad (5.40)$$

Ini berarti $x(t)$ dan $y(t)$ tetapan. Kita pilih saja tetapan ini nol. Artinya, kelereng jatuh di permukaan oli di titik $(0,0,0)$.

Sementara itu persamaan (5.37) menghasilkan

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m} v_z = -g. \quad (5.41)$$

Persamaan (5.41) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dv_z}{dt} + \kappa v_z = -g, \quad (5.42)$$

dengan

$$\kappa = \frac{6\pi\eta R}{m}. \quad (5.43)$$

Jika kedua ruas persamaan (5.42) dikalikan dengan faktor $e^{\kappa t}$, maka

$$\left(\frac{dv_z}{dt} + \kappa v_z \right) e^{\kappa t} = -g e^{\kappa t}. \quad (5.44)$$

Persamaan (5.44) setara dengan

$$\frac{d}{dt} (v_z e^{\kappa t}) = -g e^{\kappa t}. \quad (5.45)$$

Dari persamaan (5.45) didapat

$$v_z(t) = -ge^{-\kappa t} \int e^{\kappa t} dt \quad (5.46)$$

atau

$$v_z(t) = -ge^{-\kappa t} \left(\frac{1}{\kappa} e^{\kappa t} + C_z \right) = -\frac{g}{\kappa} - C_z e^{-\kappa t}, \quad (5.47)$$

dengan C_z sebuah tetapan. Ketika $t = 0$, yakni tepat ketika kelereng memasuki permukaan air, $v_z(0) = \sqrt{2h/g}$ karena kelereng jatuh dari ketinggian h . Jadi,

$$v_z(0) = \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\frac{g}{\kappa} - C_z e^{-\kappa \cdot 0} = -\frac{g}{\kappa} - C_z g, \quad (5.48)$$

dan

$$C_z = -\frac{1}{g} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g}{\kappa} \right). \quad (5.49)$$

Kecepatan kelereng dalam oli akhirnya diberikan oleh

$$v_z(t) = -\frac{g}{\kappa} + \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g}{\kappa} \right) e^{-\kappa t}. \quad (5.50)$$

Posisi kelereng sebagai fungsi waktu diperoleh dari persamaan (5.50) dengan meng-integralkannya terhadap waktu sehingga

$$z(t) = -\frac{g}{\kappa} t - \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} + C'_z. \quad (5.51)$$

Ketika $t = 0$, $z(0) = 0$. Oleh karena itu,

$$C'_z = \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g}{\kappa} \right). \quad (5.52)$$

Akhirnya $z(t)$ diberikan oleh

$$z(t) = -\frac{g}{\kappa} t + \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g}{\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa t}), \quad (5.53)$$

dengan κ adalah tetapan yang ditentukan dari persamaan (5.43).

Gaya pada Gerak Melingkar

Ditinjau sebuah benda titik yang bergerak dalam ruang tiga dimensi sedemikian rupa sehingga posisinya sebagai fungsi waktu diberikan oleh

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + R \sin \theta(t) \hat{\mathbf{j}}, \quad (5.54)$$

dengan θ sebagai fungsi waktu dan R tetapan. Karena $z(t) = 0$, benda itu selalu berada pada bidang- xy . Jarak benda itu setiap saat dari titik pusat koordinat, yakni $r(t)$, dapat dihitung melalui

$$r(t)^2 = |\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = (R \cos \theta(t))^2 + (R \sin \theta(t))^2 = R^2. \quad (5.55)$$

Tampak bahwa jarak benda itu $r(t) = R$, yakni bahwa jarak benda itu dari pusat koordinat bersifat tetap. Jadi, benda bergerak sepanjang lingkaran yang berpusat di titik pangkal koordinat di bidang- xy .

Kecepatan benda titik itu dapat dihitung dengan menurunkan posisi benda itu terhadap t . Hasilnya adalah

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = -R \frac{d\theta}{dt} \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + R \frac{d\theta}{dt} \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}}. \quad (5.56)$$

Kecepatan sudut benda itu diberikan oleh $\omega := d\theta/dt$. Sementara percepatannya diperoleh dengan menurunkan kecepatan benda itu sekali lagi. Hasilnya,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= -R \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} - R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + R \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad - R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \hat{\mathbf{j}} \\ &= -R \frac{d^2\theta}{dt^2} (\sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} - \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}}) - R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(t) \hat{\mathbf{j}}) \\ &= \mathbf{a}_T(t) + \mathbf{a}_s(t), \end{aligned} \quad (5.57)$$

dengan

$$\mathbf{a}_T(t) = -R \frac{d^2\theta}{dt^2} (\sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}} - \cos \theta(t) \hat{\mathbf{j}}) \quad (5.58)$$

percepatan tangensial, dan

$$\mathbf{a}_s(t) = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(t) \hat{\mathbf{j}}) \quad (5.59)$$

percepatan sentripetal. Hasilkali skalar $\mathbf{a}_s(t) \cdot \mathbf{a}_T(t) = 0$ setiap saat. Artinya, kedua komponen percepatan itu selalu tegak lurus dari waktu ke waktu. Karena $\mathbf{a}_s(t)$ menuju ke pusat lingkaran, maka komponen ini disebut percepatan sentripetal. Sedangkan komponen $\mathbf{a}_T(t)$ disebut percepatan tangensial. Turunan kedua θ terhadap waktu,

$$\alpha := \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (5.60)$$

tidak lain adalah percepatan sudut. Jika $\alpha = 0$, benda dikatakan mengalami gerak melingkar beraturan. Jika α tetap, benda dikatakan mengalami gerak melingkar berubah beraturan.

Bagaimana menentukan gaya keseluruhan yang bekerja pada benda itu? Gaya keseluruhan yang bekerja pada benda itu dihitung dari hukum kedua Newton.

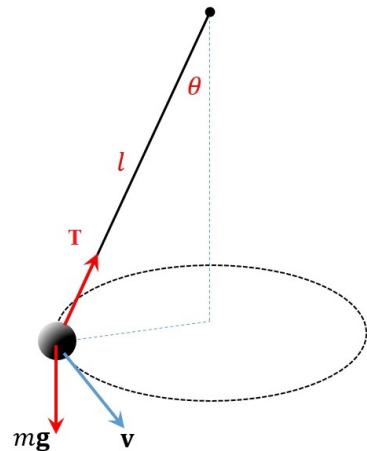
$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a}(t) \\&= m\mathbf{a}_T(t) + m\mathbf{a}_s(t) \\&= -mR \frac{d^2\theta}{dt^2} (\sin \theta(t)\hat{\mathbf{i}} - \cos \theta(t)\hat{\mathbf{j}}) - mR \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (\cos \theta(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(t)\hat{\mathbf{j}}) . \\&= -mR\alpha (\sin \theta(t)\hat{\mathbf{i}} - \cos \theta(t)\hat{\mathbf{j}}) - mR\omega^2 (\cos \theta(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(t)\hat{\mathbf{j}}) .\end{aligned}\tag{5.61}$$

Jadi, harus ada gaya senilai $m\mathbf{a}_s(t)$ yang berarah menuju pusat lingkaran. Gaya tersebut, misalnya, dapat berupa gaya tegangan tali, gaya normal oleh permukaan silinder bagian dalam, gravitasi benda-benda angakasa, dll. Gaya-gaya luar tersebut diperlukan untuk menimbulkan percepatan sentripetal $\mathbf{a}_s(t)$. Selain itu, harus ada juga gaya senilai $m\mathbf{a}_T(t)$ yang berarah tangensial yang menimbulkan percepatan tangensial. Gaya ini misalnya berasal dari gaya dorong mesin motor yang sedang bergerak pada tikungan, atau gaya gravitasi Bumi bagi bandul yang digerakkan dengan tali sehingga mengalami gerak melingkar vertikal.

Bandul Melingkar

Sekarang ditinjau sebuah bola bermassa m yang diikat dengan salah satu ujung seutas tali ringan dengan panjang l . Tali diandaikan cukup ringan tetapi kuat. Ujung tali yang lain dipegang dan diayunkkan sedemikian rupa sehingga bola itu berputar dengan laju tetap pada bidang mendatar dan tali membentuk sudut θ terhadap garis vertikal seperti yang ditunjukkan Gambar 5.15. Akan ditunjukkan bahwa sudut θ yang dibentuk oleh tali dengan garis vertikal tergantung pada besar kecepatan tangensial v . Semakin besar kecepatan tangensial v , semakin besar sudut θ , tetapi θ tidak akan melebihi 90° . Gaya-gaya yang bekerja pada bola adalah gaya berat $\mathbf{W} = mg$ dan gaya tegangan tali \mathbf{T} . Sementara untuk gaya hambat udara dapat diabaikan. Percepatan yang dialami oleh bola adalah percepatan sentripetal \mathbf{a} yang berarah ke pusat lingkaran. Jadi, berdasarkan hukum kedua Newton diperoleh

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{W} = m\mathbf{a}_s.\tag{5.62}$$



Gambar 5.15: Bandul yang bergerak melingkar

Pada arah vertikal (ke atas dipilih sebagai positif) persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$T \cos \theta - mg = 0.\tag{5.63}$$

Ke arah pusat atau mendatar (ke pusat dipilih sebagai arah positif) persamaan persamaan (5.62) dapat ditulis sebagai

$$T \sin \theta = ma_s = m \frac{v^2}{l \sin \theta}.\tag{5.64}$$

Dari persamaan (5.63) didapatkan bahwa

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}. \quad (5.65)$$

Jika ungkapan untuk T ini disubstitusikan ke dalam persamaan (5.64), maka

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{l \sin \theta}. \quad (5.66)$$

Persamaan (5.66) menunjukkan bahwa besarnya kecepatan tangensial bola adalah

$$v = \sqrt{l \sin \theta g \tan \theta}. \quad (5.67)$$

Besarnya $l \sin \theta$ sama dengan jari-jari lingkaran (r) yang merupakan lintasan horizontal bola, sehingga besarnya kecepatan tangensial bola dapat dituliskan sebagai

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}. \quad (5.68)$$

Persamaan (5.68) menunjukkan bahwa kecepatan tangensial bola bergantung pada sudut θ yang dibentuk oleh tali dengan garis vertikal, atau dapat dikatakan pula sebaliknya. Tetapi sudut θ tidak akan melebihi 90° , karena jika melebihi sudut 90° , maka besarnya kecepatan tangensial menjadi besar sekali yakni mendekati tak berhingga.

Penjelasan tersebut juga dapat dipaparkan dengan cara yang berbeda. Dari persamaan (5.66) dapat diperoleh

$$\sin^2 \theta = \frac{v^2}{gl} \cos \theta,$$

atau

$$\cos^2 \theta + \frac{v^2}{gl} \cos \theta - 1 = 0. \quad (5.69)$$

Jika $x = \cos \theta$, maka persamaan terakhir ini setara dengan

$$x^2 + \frac{v^2}{gl} x - 1 = 0, \quad (5.70)$$

yaitu persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = v^2/gl$, dan $c = -1$. Penyelesaiannya adalah

$$x = \cos \theta = \frac{-\frac{v^2}{gl} \pm \sqrt{\frac{v^4}{g^2 l^2} + 4}}{2} = \frac{v^2}{2gl} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4g^2 l^2}{v^4}} \right). \quad (5.71)$$

Nilai $\cos \theta$ tidak mungkin negatif pada kuadran pertama, sehingga diperoleh

$$\cos \theta = \frac{v^2}{2gl} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4g^2 l^2}{v^4}} \right). \quad (5.72)$$

Jika tali dalam posisi mendatar, maka $\theta = 90^\circ$, yakni $\cos \theta = 0$. Ini terjadi apabila v^2 besar sekali menuju ke tak berhingga sehingga rasio $4g^2/v^2$ menuju nol.

5.7 Kerangka Acuan Non Inersial: Gaya-gaya Lembam

Telah dijelaskan melalui dua contoh sebelumnya bahwa hukum pertama Newton tentang gerak tidak berlaku di sembarang kerangka. Hukum itu hanya berlaku di kerangka-kerangka inersial. Kerangka-kerangka acuan yang kita temukan dalam kehidupan keseharian, kebanyakan adalah kerangka acuan tak-inersial. Hukum Newton pertama tidak berlaku pada kerangka-kerangka acuan semacam itu. Bumi sendiri bukan merupakan kerangka acuan inersial. Bumi berputar pada porosnya dengan kala putaran sekitar 24 jam.

Ketika bis kota yang Anda tumpangi direm oleh sopir, badan Anda terdorong ke depan. Jika Anda tidak siap, Anda dapat terjatuh menungging. Siapa yang telah mendorong Anda? Ketika bis kota itu menambah kecepatannya, mungkin karena mengejar bis kota yang lain, Anda akan merasakan dorongan ke belakang. Jika tidak ada sandaran dan Anda tidak berpegangan erat-erat, Anda akan terjengkang. Siapa lagi yang mendorong Anda? Di tempat lain, ketika bis kota itu berbelok di tikungan ke arah kiri, Anda akan merasa di dorong ke samping kanan. Semakin cepat bis itu berbelok, semakin kuat dorongan yang Anda alami. Jika Anda tidak berpegangan dengan erat Anda akan terlempar ke samping kanan. Siapa yang melakukannya?

Dorongan-dorongan yang Anda alami dalam berbagai kesempatan yang diceritakan di atas disebabkan oleh kerangka acuan yang Anda diam di atasnya. Kerangka acuan itu bukan kerangka acuan inersial. Di setiap kerangka acuan tak inersial muncul berbagai macam gaya fiktif. Istilah lain untuk gaya-gaya ini adalah **gaya inersial** atau **gaya lebam**. Gaya-gaya ini diakibatkan oleh upaya benda-benda dalam mempertahankan keadaan gerak.

Gaya inersial yang mendorong Anda ke samping kanan saat bis kota itu membelok ke kiri disebut **gaya sentrifugal**. Benda apapun yang berada pada kerangka acuan yang berputar akan mengalami gaya sentrifugal. Gaya setrifugal ini dapat ditemukan dalam berbagai fenomena astronomis. Kepeatan bintang-bintang yang berotasi dapat dijelaskan dengan menggunakan gaya lebam ini.

Gaya lebam yang lain juga muncul dalam kerangka acuan yang berputar. Gaya ini disebut **gaya Coriolis**. Gaya ini muncul jika benda bergerak relatif terhadap kerangka berputar dengan kecepatan tidak sejajar dengan sumbu rotasi. Gaya inilah misalnya yang menyebabkan kemiringan aliran sungai yang menuju ke arah utara di belahan Bumi utara dengan ketinggian air di sisi timur sungai lebih tinggi jika dibandingkan dengan ketinggian di sisi barat. Gaya Coriolis adalah penyebab berputarnya bidang ayun bandul Foucault. Gaya Coriolis juga berperan dalam gejala angin siklon.

6

Kerja dan Tenaga

Mengapa truk yang mengangkut pisang ini dapat bergerak? Hampir semua orang dengan mudah dapat menjawabnya, yakni karena keberadaan roda-roda yang berputar. Lalu, mengapa roda-roda itu dapat berputar? Karena ada mesin. Mengapa mesin dapat menggerakkan roda-roda truk itu? Jawabnya, karena piston-piston dalam mesin itu melakukan torka yang memutar roda melalui batang pemutar. Mengapa piston-piston itu mampu mengerjakan torka?



2.1 Tenaga Kinetik

2.2 Kerja

2.3 Medan Gaya Lestari dan Tenaga Potensial

2.4 Hukum Kelestarian Energi Mekanik

Telah dijelaskan bahwa gaya bukanlah penyebab gerak. Sebuah benda titik tetap bergerak (dengan kecepatan tetap) meskipun resultan gaya yang bekerja padanya nol. Gaya adalah penyebab perubahan gerak. Lalu apa yang menyebabkan terjadinya gerakan? Setiap benda yang bergerak, memiliki tenaga kinetik yang didefinisikan sebagai $(1/2)mv^2$, dengan m massa lembam benda itu dan v kecepatan benda itu. Jika benda itu diam, maka tenaga kinetiknya nol. Jadi, ada kaitan antara tenaga kinetik dengan gerak. Dulu, ketika kita masih belajar di bangku SMA, kita memahami bahwa sebuah benda titik ber massa gravitasi m yang berada pada ketinggian h dari atas permukaan tanah memiliki tenaga potensial sebesar mgh . Tenaga potensial benda itu tidak dapat dilepaskan dari keberadaan Bumi. Jika benda itu dijauhkan dari Bumi dan dibawa ke tempat yang terisolir dari benda atau planet apapun, maka tidak ada relevansinya untuk berbicara tentang tenaga potensial. Jadi, tenaga potensial menyangkut dua benda: benda titik itu dan Bumi. Hal yang lebih umum dari yang terakhir ini adalah energi potensial yang dimiliki oleh dua benda titik bermassa semisal m_1 dan m_2 yang bernilai $-Gm_1m_2/r^2$ (lihat Bab 9 untuk lebih rincinya). Jika kedua benda itu dijauhkan, maka tenaga potensial keduanya berkurang. Sebaliknya, jika keduanya lebih didekatkan, maka tenaga potensial kedua benda itu bertambah. Jadi, jauh dekatnya benda-benda titik itu menentukan energi potensial benda itu. Dengan kata lain, energi potensial benda terkait dengan konfigurasi benda-benda itu.



Ketika kita memanasi sebuah batang besi di atas kompor, suhu batang besi itu meningkat. Pemanasan memberikan sesuatu pada batang sehingga suhu batang itu meningkat. Sesuatu itu sering disebut **bahang** atau **kalor**. Bahang merupakan salah satu bentuk tenaga. Bentuk tenaga ini di antaranya terkait dengan suhu batang besi itu. Selain terkait dengan suhu, secara umum bentuk tenaga ini juga terkait dengan volume dan tekanan. Selanjutnya, mengapa tangan dan kaki Anda dapat digerakkan? Setiap kita telah mafhum bahwa kontraksi otot menyebabkan terjadinya gerakan anggota tubuh kita. Akan tetapi, apa yang menyebabkan kontraksi otot itu? Kontraksi otot terjadi karena adanya perubahan yang terkait dengan ikatan kimiawi pada otot-otot kita. Terjadinya perubahan itu terkait dengan suatu bentuk tenaga yang dikenal sebagai tenaga kimiawi.

Gambar 6.1: Suhu besi yang dibakar meningkat karena adanya tenaga yang diterima oleh besi.

ian singkat di atas, terlihat bahwa bentuk-bentuk tenaga terkait dengan keadaan-keadaan (yang diindikasikan oleh besaran-besaran semisal kecepatan, jarak antar benda, temperatur, dan ikatan-ikatan kimiawi) sistem yang dipelajari. Tenaga kinetik sebuah benda terkait dengan keadaan gerak benda itu. Tenaga potensial terkait dengan konfigurasi benda-benda titik. Bahang terkait dengan keadaan termodinamik, dan tenaga kimiawi terkait dengan keadaan kimiawi benda. Oleh karenanya, tenaga kita pahami sebagai besaran skalar dengan dimensi ML^2T^{-2} yang terkait dengan keadaan-keadaan benda atau sistem. Satuan untuk tenaga dalam SI adalah $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ atau joule.

6.1 Tenaga Kinetik

Tenaga kinetik sebuah benda adalah tenaga yang terkait dengan keadaan gerak benda itu. Keadaan gerak sebuah benda ditengarai dengan momentum benda itu. Jika massa benda selama pengamatan tidak berubah, maka keadaan gerak benda cukup ditengarai dari kecepatannya. Karenanya, keadaan gerak suatu objek bergantung pada tempat pengamatan (kerangka acuan) dan tenaga kinetik bergantung pula pada kerangka acuan. Karena terkait dengan keadaan gerak, maka tenaga kinetik sebuah benda dapat dituliskan sebagai selisih antara tenaga keseluruhan benda itu dari tenaga yang diukur dari kerangka tempat benda itu diam. Berdasarkan teori relativitas khusus Einstein, tenaga keseluruhan sebuah benda bermassa m jika diukur dari kerangka sembarang acuan adalah

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dengan c cepat rambat cahaya dalam ruang hampa dan v kecepatan benda jika diukur dari kerangka itu. Sementara tenaga benda itu jika diukur dari kerangka diamnya adalah $E_0 = mc^2$. Tenaga kinetik benda itu diberikan oleh

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (6.1)$$

Faktor dalam kurung di ruas kanan dapat ditulis dalam bentuk deret Taylor sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Tenaga kinetik benda itu menjadi

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} mv^2 + \dots$$

Dalam hal kecepatan benda yang cukup rendah jika dibandingkan dengan cepat rambat cahaya dalam ruang hampa (v/c cukup kecil), maka suku-suku setelahnya dapat diabaikan. Jadi, tenaga kinetik benda itu adalah

$$T = \frac{1}{2} mv^2. \quad (6.2)$$

Karena $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, maka tenaga kinetik tersebut dapat dituliskan sebagai

$$T = \frac{1}{2} m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}). \quad (6.3)$$

Ungkapan ini tentu saja dapat ditulis dalam bentuk lain sebagai

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m}, \quad (6.4)$$

dengan \mathbf{p} adalah momentum benda itu. Momentum sebuah benda adalah perkalian kecepatan benda itu dengan massanya. Jadi, momentum benda yang kita tinjau adalah $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Sekarang saatnya kita membicarakan pengaruh gaya bagi tenaga kinetik sebuah benda. Jika resultan gaya yang bekerja pada sebuah benda tidak nol, maka penyebab perubahan kecepatan tidak nol, akibatnya terjadi perubahan gerakan benda. Jika terjadinya perubahan kecepatan itu hanya menyangkut perubahan arah, maka, menurut ungkapan di atas, tenaga kinetik benda tidak berubah. Jika perubahan kecepatan itu menyangkut besarnya kecepatan, maka akan terjadi perubahan tenaga kinetik. Berdasarkan persamaan (6.4), perubahan tenaga kinetik diberikan oleh

$$dT = \frac{\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Karena perubahan momentum tiap satu satuan waktu sama dengan gaya keseluruhan yang bekerja pada benda itu, maka

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.5)$$

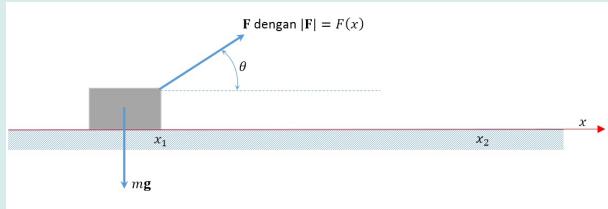
Laju perubahan tenaga kinetik dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.6)$$

Tiga contoh berikut memperlihatkan bahwa bekerjanya sebuah gaya pada sebuah benda menyebabkan perubahan tenaga kinetik. Perubahan itu dapat bernilai positif (penambahan) dan dapat pula bernilai negatif (pengurangan). Jadi, bekerjanya gaya pada sebuah benda dapat dimaknai sebagai pemindahan tenaga kinetik dari atau ke dalam benda itu.

Contoh 6.1

Sebuah balok bergerak sepanjang garis lurus (sumbu-x) pada lantai licin dengan kecepatan tetap ke kanan. Mulai titik x_1 benda itu menderita gaya yang selalu membentuk sudut θ terhadap lintasan benda itu (lihat Gambar 6.2). Besar gaya yang bekerja pada benda itu bertambah secara linier terhadap koordinat x , yakni $F(x) = \beta x$, dengan β tetapan positif. Jika pada saat $t = 0$ balok itu berada di titik $x = 0$, tentukan perubahan tenaga kinetik benda itu selama benda bergerak dari x_1 ke x_2 , dengan menghitung kecepatan di kedua titik itu.



Gambar 6.2: Balok begerak sepanjang garis lurus di bawah pengaruh gaya yang besarnya berubah-ubah.

Jadi, harus dicari $x(t)$ yang memenuhi persamaan di atas. Jawaban umum atas permasalahan ini dapat dilihat dalam buku-buku yang membahas persamaan diferensial. Jika $\cos \theta > 0$, fungsi $x(t)$ yang memenuhi persamaan diferensial di atas adalah

$$x(t) = Ae^{\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t}, \quad (6.8)$$

dengan A dan B sembarang tetapan. Karena saat $t = 0$ balok berada di $x(0) = 0$, maka

$$x(0) = 0 = Ae^{\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}} \cdot 0} + Be^{-\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}} \cdot 0} = A + B$$

Jadi, $A = -B$ dan

$$x(t) = A \left(e^{\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t} \right) = 2A \sinh \left(\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t \right)$$

Kecepatan mendatar balok itu adalah

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2A \cosh \left(\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t \right)$$

Jika pada saat t_1 balok berada di x_1 , kecepatan balok di x_1 adalah

$$v_1 = \frac{dx}{dt}(t_1) = 2A \cosh \left(\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}}t_1 \right).$$

Jika pada saat t_2 balok berada di x_2 , kecepatan balok di x_2 adalah

$$v_2 = \frac{dx}{dt}(t_2) = 2A \cosh \left(\sqrt{\frac{\beta \cos \theta}{m}} t_2 \right).$$

Berdasarkan identitas fungsi hiperbolik $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ untuk sembarang bilangan riil α , perubahan tenaga kinetik balok itu adalah

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\beta(x_2^2 - x_1^2) \cos \theta.$$

Apakah hasil serupa juga didapatkan untuk $\cos \theta > 0$? Ya, tentu saja. Pembuktiannya silakan digunakan untuk latihan.

Contoh 6.2

Masih terkait dengan contoh sebelumnya. Tentukan perubahan tenaga kinetik benda itu selama benda bergerak dari x_1 ke x_2 , dengan menggunakan ungkapan perubahan tenaga kinetik yang diberikan oleh persamaan (6.5) di atas.

Pergeseran $d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan itu selalu tegak lurus terhadap gaya berat $m\mathbf{g}$, maka gaya berat tidak menyebabkan perubahan tenaga kinetik. Oleh karena itu, perubahan tenaga kinetik hanya diakibatkan oleh gaya luar \mathbf{F} saja. Perubahan tenaga kinetik merupakan penjumlahan perubahan-perubahan kecil akibat pergeseran-pergeseran kecil $d\mathbf{r}$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} \beta x \cos \theta dx = \beta \cos \theta \int_{x_1}^{x_2} x dx \\ &= \frac{1}{2}\beta(x_2^2 - x_1^2) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Terlihat bahwa perubahan tenaga kinetik positif. Dalam hal ini, balok mendapatkan tambahan tenaga kinetik oleh bekerjanya gaya luar \mathbf{F} itu. Gaya luar itu "menambahkan" tenaga kinetik ke dalam balok.

Contoh 6.3

Sebuah balok bergerak sepanjang garis lurus (sumbu-x) pada lantai dengan kecepatan tetap ke kanan. Mulai titik x_1 lantai kasar sehingga timbul gesekan antara benda itu dengan lantai. Massa balok itu m , percepatan gravitasi setempat \mathbf{g} , dan koefisien gesekan kinetis μ . Tentukan perubahan tenaga kinetik benda itu selama benda bergerak dari x_1 ke x_2 .

Seperti dalam contoh sebelumnya, pergeseran $d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan itu selalu tegak lurus terhadap gaya berat $m\mathbf{g}$. Oleh karena itu, gaya berat tidak menyebabkan perubahan tenaga kinetik. Jadi, perubahan tenaga kinetik hanya diakibatkan oleh gaya gesek saja. Perubahan tenaga kinetik diberikan oleh

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f}_\mu \cdot d\mathbf{r} = - \int_{x_1}^{x_2} mg\mu dx = mg\mu \int_{x_1}^{x_2} dx \\ &= -mg\mu(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Terlihat bahwa perubahan tenaga kinetik negatif. Hal ini menunjukkan bahwa bekerjanya gaya gesek menyebabkan pengurangan tenaga kinetik balok. Gaya gesek itu "mengambil" tenaga kinetik dari balok itu.

Uji Ketajaman 6.1

- Perhatikan sebuah benda yang bergerak melingkar beraturan. (a) Apakah pada benda itu bekerja sebuah gaya? (b) Apakah kecepatan benda itu mengalami perubahan? (c) Apakah tenaga kinetik benda itu berubah?
 - Dari contoh di atas terlihat bahwa penerapan persamaan (6.5) untuk menghitung perubahan tenaga kinetik tidak bergantung pada posisi benda pada saat $t = 0$ maupun positif atau negatifnya nilai $\cos \theta$. Buktikan bahwa hal inipun sebenarnya juga berlaku jika perhitungan selisih tenaga kinetik menggunakan kecepatan balok di kedua titik x_1 dan x_2 .
 - Buktikan ungkapan $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ untuk sembarang bilangan riil α jika
- $$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{dan} \quad \cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}.$$
- Sebuah benda bergerak dengan kecepatan 1000 km/jam. Hitunglah tenaga kinetik benda itu terlebih dahulu dengan persamaan (6.1), lalu dengan persamaan (6.2). Tentukan selisih antara kedua hasil perhitungan di atas.
 - Sebuah mobil bermassa 2 ton bergerak di jalan raya dengan kecepatan 50 km/jam relatif terhadap tanah. Mobil itu didahului oleh sebuah sepeda motor bermassa 120 kg yang melaju dengan kecepatan 60 km/jam relatif terhadap tanah. (a) Hitunglah tenaga kinetik mobil dan motor itu diukur dari tanah. (b) Hitunglah kecepatan relatif sepeda motor dilihat dari mobil. (c) Berapa tenaga kinetik sepeda motor jika diukur dari mobil.

6.2 Kerja

Apakah kerja itu? Kerja sesungguhnya adalah energi atau tenaga. Tetapi energi yang bagaimana? Kerja selalu terkait dengan gaya yang bekerja pada sebuah benda atau sistem, sementara gaya menyebabkan perubahan gerakan atau kecepatan. Perubahan kecepatan yang disebabkan oleh gaya itu bisa menimbulkan perubahan tenaga kinetik, baik menambah atau mengurangi. Jika bekerjanya sebuah gaya pada sebuah benda menyebabkan bertambahnya tenaga kinetik benda itu, maka dapat dibayangkan adanya pemindahan tenaga (entah asalnya) ke dalam benda oleh gaya tersebut. Jika bekerjanya gaya itu, menyebabkan berkurangnya tenaga kinetik benda itu, maka dapat dibayangkan adanya pemindahan tenaga dari dalam benda (entah tujuannya) oleh gaya tersebut. Tetapi, secara umum bekerjanya sebuah gaya pada sebuah sistem selalu mengakibatkan pemindahan tenaga (tidak harus berupa tenaga kinetik) dari atau ke dalam sistem. Pemindahan energi itu menyebabkan perubahan energi yang dimiliki oleh sistem. Kerja yang dilakukan oleh sebuah gaya pada sebuah sistem adalah perubahan tenaga sistem akibat bekerjanya gaya itu. Jika kerja yang dilakukan oleh sebuah gaya pada sebuah sistem itu dilambangkan dengan W

dan perubahan tenaga sistem akibat bekerjanya gaya itu dilambangkan dengan ΔE , maka

$$W = \Delta E. \quad (6.11)$$

Andaikan \mathcal{E} adalah energi yang dipindahkan oleh gaya itu, maka \mathcal{E} tidak harus sama dengan perubahan energi sistem (ΔE). Mengapa? Karena kemungkinan ada proses pemindahan energi dalam bentuk lain dari atau ke dalam sistem oleh mekanisme lain yang menyertai bekerjanya gaya itu. Jadi, secara umum

$$W = \Delta E = \mathcal{E} + \delta, \quad (6.12)$$

dengan δ adalah pemindahan tenaga dari atau ke dalam sistem oleh mekanisme lain itu. Karena energi yang dipindahkan oleh gaya itu sama dengan perubahan energi kinetik, maka

$$W = \Delta E = \Delta T + \delta, \quad (6.13)$$

Sebagai contoh, tengoklah kembali Contoh 6.1. Perubahan tenaga kinetik benda adalah $\Delta T = -mg\mu(x_2 - x_1)$. Energi senilai $mg\mu(x_2 - x_1)$ ini adalah energi yang dipindahkan oleh gaya gesek dari balok. Jadi, dalam hal ini, $\mathcal{E} = -mg\mu(x_2 - x_1)$. Berapakah perubahan energi balok itu? Apakah perubahan itu sama dengan ΔT ini? Tidak! Terkait dengan bekerjanya gaya gesek, terdapat konversi energi kinetik itu menjadi kalor dan mekanisme pemindahan energi kalor (bahang) itu ke berbagai benda yang terlibat dalam gesekan itu. Ingat, terbakarnya sebuah meteorit adalah akibat gesekan permukaan meteorit itu dengan atmosfer. Kampas rem dan cakram rem pada kendaraan akan menjadi panas sehabis kendaraan itu mengalami penge-reman. Jadi, selama balok itu mengalami gesekan dengan lantai, pemindahan kalor terus terjadi. Dari mana energi kalor itu? Dalam hal ini terjadi konversi energi, dari energi kinetik menjadi energi kalor. Karena temperatur permukaan bawah balok itu bertambah, maka balok menerima sejumlah kalor. Tetapi, lantai pun juga menerima kalor sebab suhu lantai yang dilalui oleh balok itu juga bertambah. Jadi, balok dan lantai keduanya menerima kalor. Secara keseluruhan terjadi proses sebagai berikut: gaya gesek mengambil energi kinetik balok itu dan mengubahnya menjadi kalor lalu mendistribusikannya baik ke dalam balok (melalui permukaan bagian bawahnya) maupun ke dalam lantai melalui permukaannya. Jadi, dalam hal ini, δ adalah kalor yang diterima oleh balok. Jadi, perubahan energi balok diberikan oleh

$$\Delta E = -mg\mu(x_2 - x_1) + \delta, \quad (6.14)$$

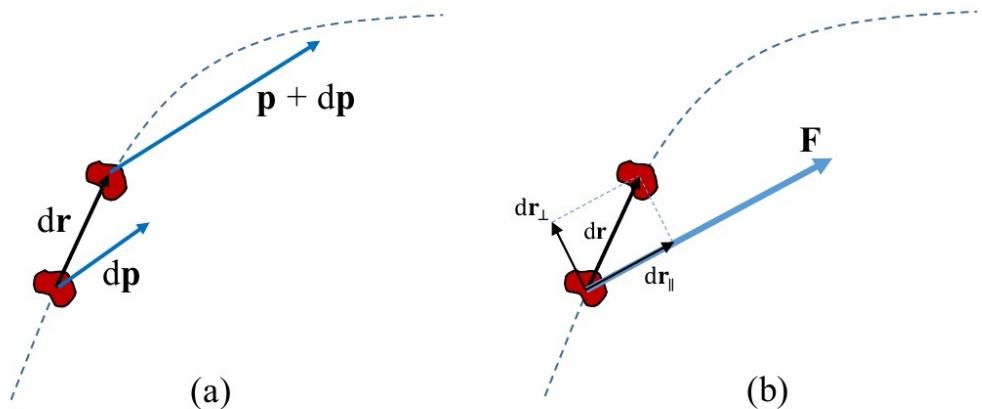
dengan $\delta > 0$. Oleh karena itu, kerja yang dilakukan oleh gaya gesek pada balok adalah $W = -mg\mu(x_2 - x_1) + \delta$. Atas berlakunya gejala semacam ini, gaya gesek digolongkan sebagai gaya yang **dissipatif**.

Kerja Sepanjang Pergeseran Kecil

Jika \mathbf{F} adalah gaya keseluruhan yang bekerja pada sebuah benda (sistem) dan gaya itu hanya menyebabkan perubahan energi kinetik benda semata, artinya, tanpa disertai adanya pemindahan tenaga dalam bentuk lain dari atau ke dalam benda, maka kerja yang dilakukan oleh gaya itu pada sistem sama dengan perubahan energi kinetik sistem. Oleh karena itu, berdasarkan persamaan (6.5), kerja oleh gaya pada benda

terkait dengan pergeseran benda itu. Jika benda bergeser sejauh dr (lihat Gambar 6.3(a)), maka kerja yang dilakukan oleh gaya selama pergeseran itu adalah

$$dW = \mathbf{F} \cdot dr. \quad (6.15)$$



Gambar 6.3: Sebuah benda bergerak sepanjang sebuah lintasan. (a) Perubahan momentum benda ketika bergeser sejauh dr . (b) Gaya yang menyebabkan perubahan momentum dan penguraian pergeseran relatif terhadap gaya.

Pergeseran dr dapat diuraikan atas pergeseran yang tegak lurus terhadap gaya, yakni dr_{\perp} , dan yang sejajar dengan gaya, yakni dr_{\parallel} (Gambar 6.3 (b)). Jadi, $dr = dr_{\perp} + dr_{\parallel}$. Oleh karena itu,

$$dW = \mathbf{F} \cdot dr = \mathbf{F} \cdot (dr_{\perp} + dr_{\parallel}) = \mathbf{F} \cdot dr_{\perp} + \mathbf{F} \cdot dr_{\parallel}. \quad (6.16)$$

Karena $\mathbf{F} \cdot dr_{\perp} = 0$, maka

$$dW = \mathbf{F} \cdot dr_{\parallel}. \quad (6.17)$$

Selanjutnya, andaikan terdapat n gaya tak disipatif yang bekerja pada benda itu, semisal $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, dan \mathbf{F}_n . Masing-masing gaya itu akan menimbulkan perubahan momentum benda menurut hukum kedua Newton:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad \dots \quad \mathbf{F}_n = \frac{d\mathbf{p}_n}{dt},$$

dengan $d\mathbf{p}_i/dt$ adalah laju perubahan momentum benda akibat gaya \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Masing-masing gaya itu akan menimbulkan perubahan energi kinetik senilai

$$dT_i = \frac{\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}_i}{m} = dr \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \cdot dr.$$

Jadi, kerja yang dilakukan oleh masing-masing gaya pada benda selama benda mengalami pergeseran dr adalah

$$dW_i = dT_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.18)$$

Perubahan tenaga kinetik keseluruhan benda adalah

$$\begin{aligned} dT &= dT_1 + dT_2 + \cdots + dT_n \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} \\ &= dW_1 + dW_2 + \cdots + dW_n. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Perubahan energi kinetik dT ini ternyata merupakan jumlahan atas kerja yang dilakukan oleh masing-masing gaya. Perubahan energi kinetik keseluruhan benda dalam persamaan terakhir dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} dT &= dT_1 + dT_2 + \cdots + dT_n \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Terlihat bahwa perubahan keseluruhan energi kinetik benda tidak lain adalah kerja yang dilakukan oleh gaya keseluruhan. Jadi, kerja yang dilakukan oleh gaya keseluruhan pada benda selama benda bergeser sejauh $d\mathbf{r}$ adalah jumlahan kerja yang dilakukan oleh masing-masing gaya:

$$dW = dW_1 + dW_2 + \cdots + dW_n. \quad (6.21)$$

Kerja Sepanjang Lintasan

Sekarang perhatikan kembali benda yang sama sebagaimana dibicarakan pada bagian sebelumnya. Sebuah benda bergerak sepanjang lintasan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 6.4. Pada benda itu bekerja sebuah gaya $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ yang bergantung pada posisi benda (baik besar maupun arahnya). Pertanyaannya, berapakah kerja yang dilakukan oleh gaya itu sepanjang lintasan yang disusuri oleh benda itu? Andaikan gaya yang bekerja bukan gaya yang *disipatif*. Untuk menghitungnya, perlu bagi kita untuk memotong-motong lintasan itu atas pergeseran-pergeseran kecil $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \dots, \Delta\mathbf{r}_n$ (pergeseran-pergeseran kecil itu tidak harus sama satu dengan yang lain). Untuk masing-masing potongan semisal $\Delta\mathbf{r}_i$ kita ambil nilai gaya di titik pangkal pergeseran, yakni $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$ (lihat Gambar 6.4). Kerja yang dilakukan oleh gaya itu untuk pergeseran $\Delta\mathbf{r}_i$ diberikan oleh

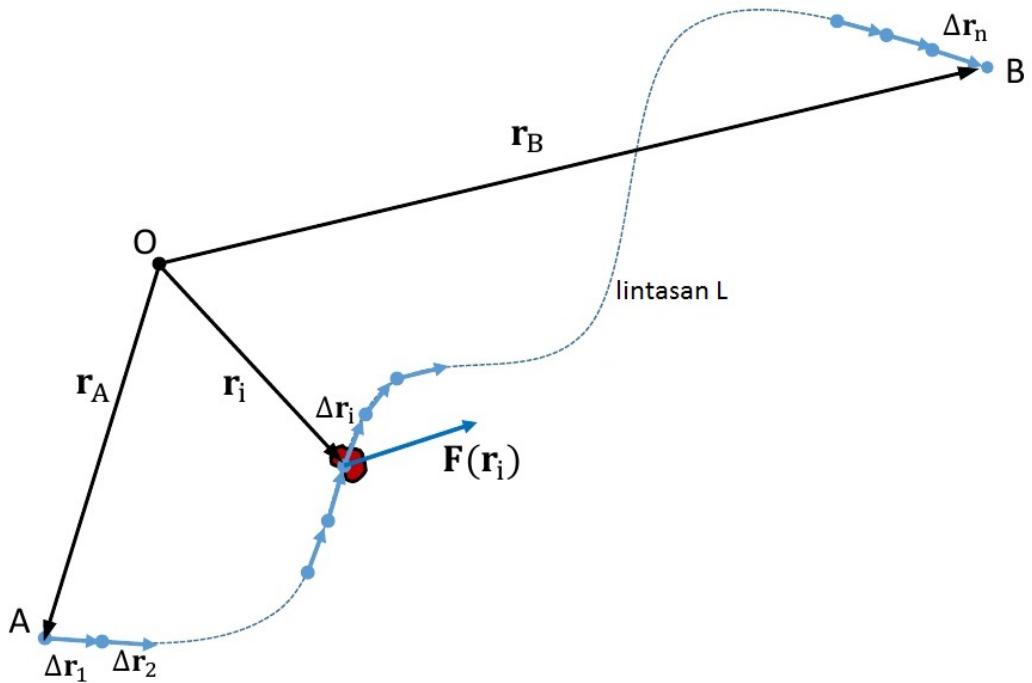
$$\Delta W_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i,$$

untuk semua i dari 1 sampai n . Kerja keseluruhan yang dilakukan oleh gaya tersebut sepanjang lintasan dari titik A sampai titik B kira-kira sama dengan jumlahan keseluruhan kerja untuk masing-masing pergeseran (mengapa?). Jadi, kerja keseluruhan yang dilakukan oleh gaya tersebut sepanjang lintasan dari titik A sampai titik B diberikan oleh persamaan

$$W_{A \rightarrow B} \approx \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n \quad (6.22)$$

atau

$$W_{A \rightarrow B} \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta\mathbf{r}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i. \quad (6.23)$$



Gambar 6.4: Kerja oleh gaya \mathbf{F} sebagai fungsi posisi pada benda yang bergerak sepanjang lintasan dari titik A ke titik B. Lintasan di potong-potong atas pergeseran-pergeseran kecil $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \dots \Delta\mathbf{r}_n$. Kerja keseluruhan kira-kira sama dengan jumlahan kerja oleh gaya pada masing-masing pergeseran.

Semakin kecil pergeseran-pergeseran yang dipilih, yakni semakin besar bilangan n (semakin banyak pergeseran), nilai jumlahan yang di kanan semakin dekat dengan nilai kerja $W_{A \rightarrow B}$. Secara matematis, hal tersebut dapat ditulis sebagai

$$W_{A \rightarrow B} = \lim_{\Delta\mathbf{r}_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i. \quad (6.24)$$

Limit yang berada di ruas kanan lazim ditulis sebagai

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6.25)$$

dan dibaca sebagai integral lintasan gaya \mathbf{F} sepanjang lintasan L . Jadi,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.26)$$

Jika pergeseran $d\mathbf{r}$ diuraikan menurut

$$dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}},$$

dan gaya maka $\mathbf{F}(x, y, z)$ diuraikan menurut

$$\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + F_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + F_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}},$$

maka

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_L F_x(x, y, z)dx + \int_L F_y(x, y, z)dy + \int_L F_z(x, y, z)dz \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y, z)dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y(x, y, z)dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z(x, y, z)dz. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Integral-integral pada baris terakhir persamaan (6.27) adalah integral biasa, namun yang diintegalkan, yakni fungsi F_x , F_y , dan F_z , masing-masing merupakan fungsi yang bergantung pada tiga peubah x , y , dan z . Koordinat x , y , dan z dalam integrasi-integrasi ini tidak bebas satu dari yang lain sebab persamaan lintasan mengikat x , y , dan z satu dengan yang lain, sehingga koordinat yang satu bergantung pada yang lain. Berikut kita tinjau sebuah kasus agar pernyataan-pernyataan di atas menjadi lebih jelas.

Contoh 6.4

Sebuah benda bergerak di lantai sedemikian rupa sehingga lintasan benda itu berupa garis lurus. Anggap lantai itu sebagai bidang-xy sehingga titik-titik di sepanjang lintasan benda memiliki koordinat $z = 0$. Andaikan lintasan benda itu berawal dari titik $A = (-2, -2, 0)$ dan berakhir di titik $B = (3, 13, 0)$. Salah satu gaya yang bekerja pada benda itu adalah $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$. Hitunglah kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} sepanjang lintasan itu.

Dalam hal ini $F_x = 2x$, $F_y = x$, dan $F_z = 4$. Persamaan lintasannya adalah $y = 3x + 4$ dan $z = 0$ (dari mana?). Karena koordinat z harus selalu nol (lintasannya ada di lantai), maka $dz = 0$. Dari persamaan $y = 3x + 4$, kita mendapatkan $dy = 3dx$. Berdasarkan persamaan (6.27), kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y, z) dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y(x, y, z) dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z(x, y, z) dz \\
 &= \int_{-2}^3 2x dx + \int_{-2}^{13} x dy + \int_0^0 4 dz \\
 &= \int_{-2}^3 2x dx + \int_{-2}^{13} 3x dx \\
 &= [9 - 4] + \frac{3}{2} [169 - 4] \\
 &= 252,5 \text{ satuan}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Contoh 6.5

Sebuah benda bergerak di lantai sedemikian rupa sehingga lintasan benda itu berupa parabola dengan persamaan $y = 2x^2$ dan $z = 0$ dari titik $A = (-2, 4, 0)$ menuju titik $B = (3, 9, 0)$. Salah satu gaya yang bekerja pada benda itu adalah $\mathbf{F}_1(x, y, z) = 2y\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + 4x^2y\hat{\mathbf{k}}$. Hitunglah kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F}_1 sepanjang lintasan itu.

Dalam hal ini $F_x = 2y$, $F_y = y^2$, dan $F_z = 4x^2y$. Karena lintasannya ada di lantai, maka $dz = 0$ (lantai dipilih sebagai bidang-xy). Berdasarkan persamaan (6.27), kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F}_1

diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y, z) dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y(x, y, z) dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z(x, y, z) dz \\
 &= \int_{-2}^3 2y dx + \int_4^9 y^2 dy + \int_0^0 4x^2 y dz \\
 &= \int_{-2}^3 2x^2 dx + \int_4^9 y^2 dy \\
 &= \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^3 + \left[\frac{1}{3}y^3 \right]_4^9 \\
 &= \frac{70}{3} + \frac{665}{3} = \frac{735}{3} = 245 \text{ satuan}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Jika medan gaya \mathbf{F} merupakan resultan beberapa medan gaya, yakni $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{F}_n(\mathbf{r})$, maka kerja oleh medan gaya $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sepanjang lintasan L dapat dihitung menurut

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_L [\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{F}_n(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_L \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_L \mathbf{F}_n(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Jadi, merupakan jumlahan kerja oleh masing-masing gaya sepanjang lintasan L .

Uji Ketajaman 6.2

- Perhatikan kembali Contoh 6.1. Andaikan balok itu memiliki kerapatan seragam dan terbuat dari besi dengan massa 1 kg. Andaikan pula percepatan gravitasi setempat 10 m/s^2 , $x_2 - x_1 = 0,5 \text{ m}$, dan koefisien gesekan balok itu dengan lantai 0,6. Jika ternyata permukaan balok bagian bawah itu sampai ketebalan 0,01 m mengalami perubahan suhu 1 kelvin, tentukan kerja yang telah dilakukan oleh gaya gesek pada balok itu.
- Hitunglah kerja yang dilakukan oleh gaya gravitasi Bumi pada sebuah benda yang bergerak mengelilingi Bumi pada ketinggian 10 km di atas khatulistiwa dengan periode setengah hari jika benda itu bergerak selama 2 hari.
- Tentukan sebuah keadaan pada balok yang memungkinkan pernyataan bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya gesek pada balok sama dengan perubahan tenaga kinetik balok.
- Perkirakan kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya pada Contoh 6.4 dan Contoh 6.5 dengan memotong-potong lintasan atas n buah pergeseran kecil sedemikian rupa sehingga komponen pergeseran $\Delta x_i = (x_B - x_A)/n$. Setelah jumlahan kerja atas n pergeseran itu didapatkan, ambillah limit n menuju ke tak berhingga. Bandingkan yang Anda dapatkan dengan yang didapatkan pada contoh-contoh tersebut di atas. Catatan: untuk mempermudah pekerjaan silakan menggunakan komputer.

5. Andaikan lintasan L_1 adalah lintasan yang berawal di titik A dan berakhir di titik B, sedangkan L_2 adalah lintasan yang berawal di titik B dan berakhir di titik C. Andaikan pula bahwa lintasan L adalah lintasan yang berawal dari titik A dan berakhir di titik C yang diperoleh dengan menyambung lintasan L_1 dan L_2 . Tunjukkan bahwa kerja oleh suatu medan gaya \mathbf{F} sepanjang L memenuhi

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.31)$$

6. Jika $-L$ adalah lintasan yang diperoleh dari L dengan jalan membalikkan arahnya, tunjukkan bahwa

$$\int_{-L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.32)$$

6.3 Medan Gaya Lestari dan Tenaga Potensial

Sebuah benda bergerak di atas tanah dengan lintasan berupa persegi panjang. Pada awalnya, benda itu berada di atas titik A (berada di tanah) dengan ketinggian h_1 meter di atas permukaan tanah. Benda bergerak ke atas secara vertikal sehingga ketinggiannya mencapai h_2 meter di atas titik A. Berikutnya, benda bergerak mendatar sehingga akhirnya sampai di titik dengan ketinggian h_2 meter di atas titik B (juga berada di tanah) yang berjarak l dari titik A. Selanjutnya benda bergerak turun sehingga ketinggiannya dari tanah tinggal h_1 meter. Pada akhirnya benda bergerak mendatar menuju titik awalnya, yakni di atas titik A dengan ketinggian h_1 . Akan sangat mudah bagi Anda untuk membuktikan bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya gravitasi Bumi sama dengan nol, meskipun diandaikan bahwa percepatan gravitasi tetap di sekitar permukaan tanah. Dalam bab tentang gravitasi akan diperlihatkan bahwa kerja oleh gaya gravitasi selalu nol untuk lintasan tertutup apapun. Sifat ini mengakibatkan medan gaya gravitasi digolongkan sebagai medan gaya lestari.

Secara umum, suatu medan gaya dikatakan sebagai medan gaya lestari (konseratif) jika kerja oleh medan gaya itu selalu nol untuk lintasan tertutup apapun. Secara matematis, suatu medan gaya dikatakan lestari jika

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (6.33)$$

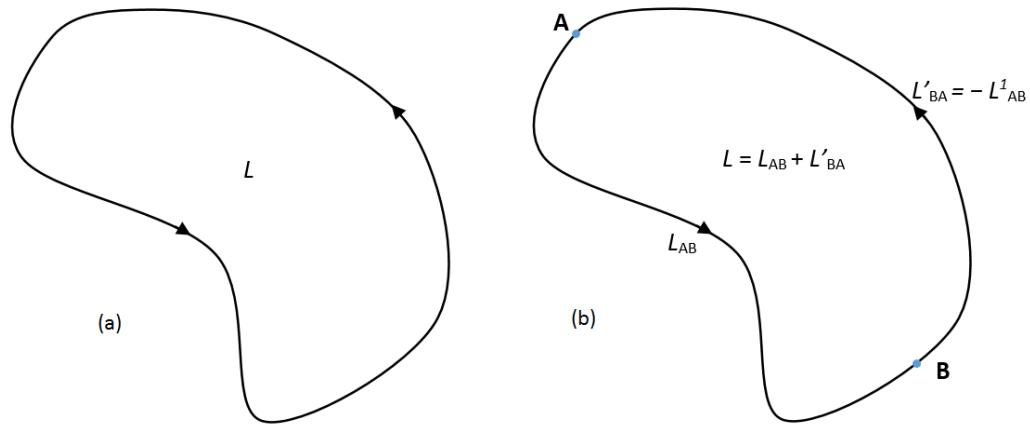
untuk lintasan tertutup L apapun (Gambar 6.5 (a)). Integral lintasan tertutup lazim diberi lambang tersendiri yakni dengan dibubuh lingkaran pada tanda integralnya, yakni

$$\oint.$$

Jadi, sebuah medan gaya \mathbf{F} dikatakan lestari jika

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (6.34)$$

untuk semua lintasan tertutup L .



Gambar 6.5: (a) Lintasan tertutup L sembarang. (b) Lintasan tertutup L merupakan gabungan (sambungan) antara dua lintasan L_{AB} dan lintasan L'_{BA} untuk sembarang dua titik A dan B pada lintasan L . Lintasan L'_{BA} sama dengan lintasan L^1_{AB} dengan arah berlawanan.

Sekarang ambil sembarang dua titik A dan B pada lintasan tertutup L . Andai-kan lintasan L_{AB} adalah lintasan yang berawal dari titik A dan berakhir di titik B sebagaimana diperlihatkan oleh Gambar 6.5(b), sedangkan lintasan L'_{BA} lintasan yang berawal dari titik B menuju ke titik A. Terlihat bahwa lintasan tertutup L merupakan lintasan L_{AB} dilanjutkan dengan lintasan L'_{BA} . Jika lintasan L^1_{AB} adalah lintasan dari A menuju B melalui jalur yang sama dengan lintasan L'_{BA} dengan arah berlawanan, maka lintasan L^1_{AB} sama dengan lintasan $-L'_{BA}$. Oleh karena itu, kerja yang dilakukan oleh sebuah medan gaya \mathbf{F} sepanjang lintasan tertutup L sama dengan kerja oleh medan gaya itu sepanjang lintasan L_{AB} dilanjutkan kerja sepanjang lintasan L'_{BA} , yakni

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L'_{BA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-L^1_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.35)$$

Karena

$$\int_{-L^1_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{L^1_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6.36)$$

maka kerja yang dilakukan oleh medan gaya \mathbf{F} sepanjang lintasan tertutup L dapat ditulis sebagai

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{L^1_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.37)$$

Jika medan gaya itu merupakan medan gaya lestari, maka dari persamaan terakhir didapat

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{L_{AB}^1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (6.38)$$

atau

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}^1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.39)$$

Persamaan terakhir mengungkapkan bahwa kerja yang dilakukan oleh medan gaya lestari sepanjang lintasan L_{AB} sama dengan kerja oleh medan gaya itu melalui lintasan L_{AB}^1 . Karena lintasan L sembarang, maka persamaan (6.39) juga menegaskan kenyataan penting tentang medan gaya lestari, yakni bahwa kerja yang dilakukan oleh medan gaya lestari tidak bergantung pada lintasan yang dilalui, melainkan hanya bergantung pada titik pangkal dan titik ujung lintasan.

Oleh karena itu, sudah semestinya terdapat sebuah medan skalar, yakni sebuah besaran skalar yang bergantung pada posisi, katakanlah $U(\mathbf{r})$, sedemikian rupa sehingga kerja oleh medan gaya lestari \mathbf{F} dari titik A menuju titik B (melalui lintasan yang manapun) diberikan oleh

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B). \quad (6.40)$$

Besaran (medan) skalar U disebut **tenaga potensial** terkait dengan medan gaya lestari \mathbf{F} . Perlu ditegaskan di sini, tenaga potensial hanya terkait dengan medan gaya lestari. Persamaan (6.40) dapat ditulis sebagai

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{A \rightarrow B} = -\Delta U(\mathbf{r}). \quad (6.41)$$

Jadi, kerja oleh medan gaya lestari sama dengan minus perubahan tenaga potensial. Jika yang kita tinjau adalah pergeseran kecil $d\mathbf{r}$, maka usaha oleh medan gaya tersebut adalah $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dan perubahan tenaga potensialnya pun juga sangat kecil, dU . Oleh karena itu,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU. \quad (6.42)$$

Berdasarkan hitung kalkulus untuk vektor, persamaan terakhir ini setara dengan ungkapan

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \left[\frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (6.43)$$

Jika pada medan gaya lestari \mathbf{F} itu dikenai operator rotasi, maka didapatkan

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla U = 0. \quad (6.44)$$

Jadi, jika \mathbf{F} medan gaya lestari, maka $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Apakah akan berlaku sebaliknya? Apakah jika $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ berlaku, maka dapat disimpulkan bahwa \mathbf{F} merupakan medan gaya lestari? Tidak harus. Semuanya kembali pada topologi ruang yang kita tinjau. Tetapi, jika kita membatasi peninjauan pada ruang-ruang dengan topologi

sederhana, maka jawabnya positif, yakni bahwa medan gaya \mathbf{F} dengan $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ adalah medan gaya yang lestari.

Contoh 6.6

Perhatikan medan gaya \mathbf{F} dengan $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\kappa \mathbf{r}$ dan κ sebuah tetapan. Tentukan apakah medan gaya tersebut lestari atau tidak? Tentukan tenaga potensial yang sesuai untuk medan gaya itu.

Jika medan gaya tersebut dikenai operator rotasi, maka didapatkan $\nabla \times \mathbf{F} = -\kappa \nabla \times \mathbf{r}$. Jika dihitung berdasarkan persamaan (??) di Bab ??, didapat $\nabla \times \mathbf{r} = 0$. Jadi, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Ini berarti bahwa medan gaya tersebut adalah medan gaya lestari seandainya medan gaya tersebut didefinisikan di seluruh ruang, misalnya.

Selanjutnya, hendak dicari medan skalar U yang bergantung pada x , y , dan z sedemikian rupa sehingga persamaan (6.43) dipenuhi. Jika kita pilih $U_1(x, y, z) = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)/2$, maka persamaan (6.43) terpenuhi. Jika C sebuah tetapan, maka $U_1 + C$ pun juga memenuhi persamaan (6.43). Jadi, untuk sebuah medan gaya lestari, medan tenaga potensial yang bersesuaian tidak tunggal.

Contoh yang baru saja dibahas tersebut menyiratkan bahwa energi potensial yang terkait dengan medan gaya lestari tidak tunggal. Nilai tenaga potensial yang satu berbeda dari yang lain karena adanya sebuah tetapan. Hal ini terkait dengan kebebasan pengambilan titik acuan tempat energi potensial bernilai nol. Jadi, pengambilan titik dengan nilai tenaga potensial nol merupakan kebebasan. Inilah yang menyebabkan bahwa nilai energi potensial tidak memiliki arti fisis, melainkan beda energi potensiallah yang memiliki arti fisis.

Persamaan (6.43) mengatakan kepada kita cara mendapatkan medan gaya apabila tenaga potensial benda yang kita tinjau diketahui. Pertama kali kita lihat cermati contoh sederhana berikut.

Contoh 6.7

Sebuah benda berada pada pengaruh sebuah medan gaya sehingga tenaga potensialnya dapat ditentukan dari persamaan

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} \kappa x^2,$$

dengan κ sebuah tetapan positif. Tentukan medan gaya yang memengaruhi benda itu.

Penerapan persamaan (6.43) secara langsung menghasilkan

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla U(x, y, z) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \kappa x^2 \right) \hat{\mathbf{i}} = -\kappa x \hat{\mathbf{i}}.$$

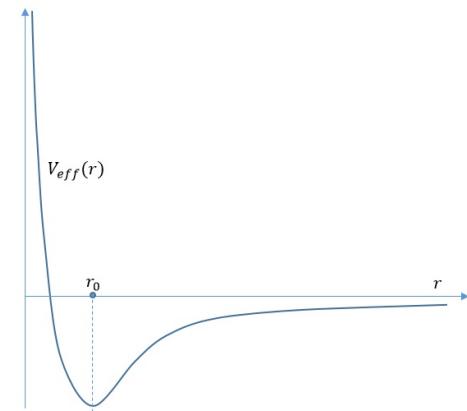
Jadi, $F = -\kappa x$. Medan gaya ini adalah medan gaya pemulih semisal yang diakibatkan oleh pegas ideal dengan tetapan pegas κ .

Secara umum, jika tenaga potensial hanya bergantung pada sebuah koordinat, semisal x saja, maka medan gaya lestari yang terkait dengan tenaga potensial itu merupakan minus kemiringan atau gradien grafik tenaga potensial terhadap koordinat itu. Dengan melihat grafik tenaga potensial itu, kita dapat melihat keberadaan dan sifat-sifat medan gaya lestari yang terkait dengan tenaga potensial itu. Sebagai contoh perhatikan tenaga potensial efektif sebuah benda angkasa dengan momen-

tum sudut tidak nol yang berada di bawah pengaruh medan gravitasi benda angkasa lain yang sangat masif yang diperlihatkan oleh Gambar 6.6. Dalam grafik itu tenaga potensial digambarkan sebagai fungsi jarak (dilambangkan dengan r) benda angkasa itu dari sebuah benda angkasa lain yang lebih masif sebagai pusat gravitasi. Grafik tenaga potensial tersebut memiliki kemiringan negatif misalnya di sebelah kiri titik r_0 pada sumbu r . Hal ini berarti terdapat gaya yang mendorong benda angkasa itu menjauhi pusat gravitasi jika saja benda itu berada pada jarak kurang dari r_0 dari pusat gravitasi. Jika benda itu berada pada jarak r_0 dari pusat gravitasi, benda itu tidak menderita gaya apapun sebab pada jarak r_0 itu tenaga potensial memiliki nilai ekstrem, yakni kemiringan grafiknya nol. Jika benda itu berada pada jarak lebih dari r_0 , benda itu akan menderita gaya yang arahnya menuju pusat gravitasi sebab kemiringan grafik tenaga potensial di wilayah itu positif.

Di wilayah yang jaraknya dari pusat gravitasi kurang dari r_0 , semakin dekat dengan pusat gravitasi, semakin besar nilai mutlak kemiringan grafik tenaga potensial. Hal ini berarti bahwa semakin dekat dengan pusat gravitasi semakin besar (kuat) gaya yang mendorong benda itu menjauhi pusat gravitasi. Di wilayah yang jaraknya dari pusat gravitasi lebih dari r_0 , semakin jauh dari pusat gravitasi semakin kecil nilai mutlak kemiringan grafik tenaga potensial. Hal ini berarti, bahwa semakin jauh dari pusat gravitasi, gaya yang menarik benda itu ke pusat gravitasi semakin lemah.

Di manakah benda angkasa itu mungkin berada? Mungkin benda itu berada pada jarak r yang kurang dari r_0 ? Mungkinkah benda itu berada pada jarak r yang lebih dari r_0 ? Kapan-kapan terjadi bahwa benda itu selalu berada pada jarak sejauh r_0 dari pusat gravitasi? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita perlu memahami satu konsep lagi yang dikenal sebagai tenaga mekanik benda itu. Dalam subbab berikut ini kita akan membicarakan konsep penting tersebut.

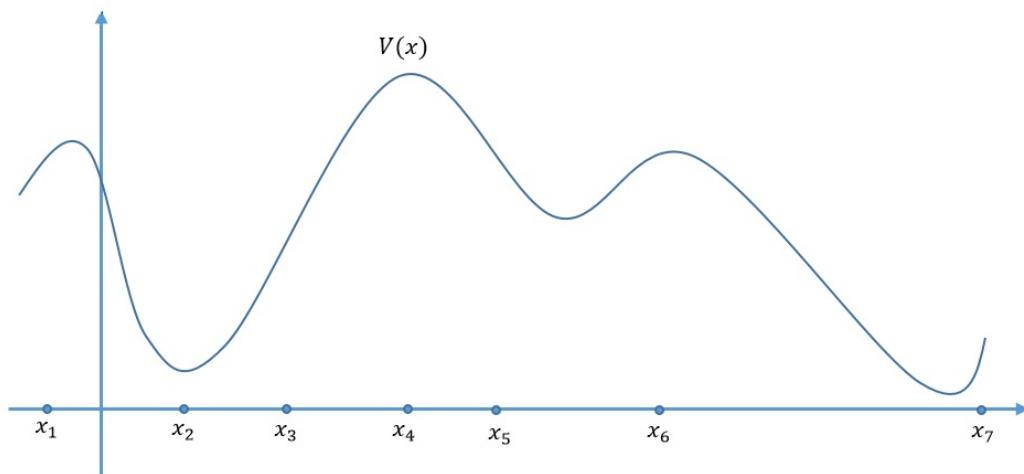


Gambar 6.6: Tenaga potensial efektif sebagai fungsi jarak sebuah benda angkasa dari pusat medan gravitasi .

Uji Ketajaman 6.3

1. Ujilah lestari tidaknya medan-medan gaya berikut:
 - (a) $\mathbf{F}_1(x, y, z) = 2y^2\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + 4x^2y\hat{\mathbf{k}}$
 - (b) $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \alpha x\hat{\mathbf{i}} + \beta y\hat{\mathbf{j}} + \gamma x\hat{\mathbf{k}}$, dengan α , β , dan γ adalah tetapan-tetapan.
 - (c) $\mathbf{F}_3(\mathbf{r}) = \kappa [\exp(-\alpha x)\hat{\mathbf{i}} + \exp(-\beta y)\hat{\mathbf{j}} + \exp(-\gamma z)\hat{\mathbf{k}}]$, dengan κ , α , β , dan γ adalah tetapan-tetapan.
2. Hitung kerja yang dilakukan oleh medan gaya \mathbf{F}_3 dalam soal no.1 di atas pada sebuah benda yang bergerak menyusuri lintasan berupa setengah lingkaran yang menghubungkan titik $(0, 0, 0)$ ke titik $(0, 0, 4)$ dengan tiga cara.
3. Buktikan bahwa medan gaya gravitasi yang ditimbulkan oleh sebuah partikel titik, medan gaya listrik yang ditimbulkan oleh muatan titik, dan gaya pegas merupakan medan-medan lestari.
4. Andaikan koefisien gesekan antara sebuah balok dan lantai bergantung pada posisi menurut $\mu(x, y) = \beta x$. Apakah gaya gesekan tersebut merupakan medan gaya lestari.

5. Perhatikan grafik yang diperlihatkan pada Gambar 6.7. Grafik tersebut menggambarkan tenaga potensial V yang dimiliki oleh sebuah benda yang bergerak pada garis lurus (sumbu- x). Dalam grafik diperlihatkan juga titik-titik pada sumbu- x , yaitu $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, dan x_7 .
- (a) Di titik manakah benda memiliki tenaga potensial paling besar?
 - (b) Di titik manakah benda mengalami gaya paling kuat?
 - (c) Di titik manakah benda menderita gaya paling lemah?
6. Masih terkait dengan soal sebelumnya,
- (a) Sebutkan wilayah-wilayah sepanjang sumbu- x tempat benda tersebut mengalami gaya dengan arah ke kanan.
 - (b) Sebutkan wilayah-wilayah sepanjang sumbu- x tempat benda tersebut mengalami gaya dengan arah ke kiri.
 - (c) Sebutkan wilayah-wilayah sepanjang sumbu- x tempat benda tersebut tidak mengalami gaya.



Gambar 6.7: Tenaga potensial sebuah benda sebagai fungsi koordinat x .

6.4 Hukum Kelestarian Tenaga Mekanik

Medan gaya lestari umumnya tak dissipatif. Oleh karena itu, kerja yang dilakukan oleh medan gaya ini juga sama dengan perubahan tenaga kinetik benda akibat pengaruh medan itu. Jadi, kita memperoleh ungkapan

$$dW = dT = -dU, \quad (6.45)$$

dengan dT adalah perubahan tenaga kinetik benda akibat bekerjanya medan gaya lestari itu dan dU adalah perubahan tenaga potensial benda itu terkait dengan medan gaya lestari yang kita bicarakan. Persamaan terakhir masih dapat ditulis sebagai

$$dT + dU = d(T + U) = dE_m = 0. \quad (6.46)$$

Besaran $E_m = T + U$ yang merupakan jumlah antara tenaga kinetik benda dan tenaga potensialnya disebut **energi mekanik sistem**. Jadi, berdasarkan persamaan (6.46), energi mekanik sistem bersifat lestari. Persamaan tersebut merupakan ungkapan matematis bagi hukum kelestarian energi mekanik benda yang berada di bawah pengaruh medan gaya lestari.

Ungkapan lain hukum kelestarian tenaga mekanik diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (6.46) di dua titik yang berbeda, sehingga diperoleh

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \quad (6.47)$$

Hukum kelestarian tenaga mekanik ini memberikan banyak kemanfaatan. Contoh-contoh berikut memperlihatkan penerapan hukum kelestarian tenaga mekanik tersebut.

Contoh 6.8

Sebuah balok mula-mula bergerak dengan kecepatan tetap sebesar v pada lintasan mendatar yang licin. Mulai titik A, lintasan licin itu menanjak cukup jauh.

(a) Berapakah ketinggian maksimum yang dapat dicapai oleh balok itu jika percepatan gravitasi setempat sebesar g .

(b) Nyatakan ketinggian maksimum itu sebagai fungsi dari tenaga mekanik balok.

(a) Ketinggian maksimum tercapai ketika kecepatan balok nol. Berdasarkan hukum kelestarian tenaga mekanik dan aggaran bahwa di sekitar permukaan Bumi percepatan gravitasi tetap serta pengambilan bagian lintasan yang mendatar sebagai acuan nilai tenaga potensial gravitasi Bumi, maka didapatkan

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh_{mak}.$$

Jadi, ketinggian maksimum yang dapat dicapai oleh balok itu adalah $h_{mak} = v^2/2g$.

(b) Tenaga mekanik benda bersifat tetap. Pada saat balok masih berada pada lintasan mendatar, tenaga potensialnya nol sehingga tenaga mekanik balok sama dengan tenaga kinetiknya, yakni $E_m = mv^2/2$. Dari persamaan hukum kelestarian tenaga mekanik di atas, kita mendapatkan ungkapan berikut

$$h_{mak} = E_m/mg.$$

Terlihat semakin besar tenaga mekanik yang dimiliki oleh balok, semakin tinggi ketinggian maksimum yang dapat dicapai oleh balok itu.

Contoh 6.9

Sebuah proton dengan muatan $1,6 \times 10^{-19}$ C ditembakkan pada sebuah inti atom oksigen $^{16}_8\text{O}$ dari jarak 20 cm. Tentukan kecepatan proton minimum agar proton dapat menyentuh permukaan inti oksigen itu.

Perlu diingat bahwa tenaga potensial listrik yang dimiliki oleh dua muatan q_1 dan q_2 yang terpisah oleh jarak sejauh r adalah

$$U = \frac{kq_1 q_2}{r},$$

dengan $k = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$. Jari-jari inti oksigen diperoleh menurut (lihat bab Fisika Nuklir)

$$R_O = r_0 A^{1/3},$$

dengan $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$ meter dan $A = 16$ nomor massa oksigen. Berdasarkan data-data itu, kita mendapatkan $R_O = 3,0 \times 10^{-15}$ m. Dengan anggapan bahwa efek hentakan balik yang dialami oleh inti oksigen diabaikan, hukum kelestarian tenaga mekanik menghasilkan

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{kq_p q_O}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{kq_p q_O}{R_O}, \quad (6.48)$$

dengan v_1 adalah kecepatan saat ditembakkan dari jarak $r_1 = 20$ cm, q_p muatan proton, q_O muatan inti oksigen, $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg massa proton, dan v_2 kecepatan proton pada saat di permukaan inti oksigen. Kecepatan penembakan minimum diperoleh saat proton hanya mampu menyentuh permukaan inti oksigen. Dengan kata lain, $v_2 = 0$. Jadi,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{kq_p q_O}{R_O} - \frac{kq_p q_O}{r_1},$$

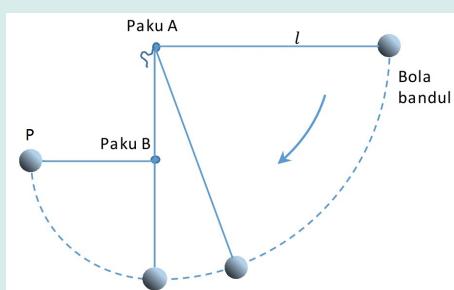
atau

$$v_1^2 = \frac{2kq_p q_O}{m} \left(\frac{1}{R_O} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (6.49)$$

Berdasarkan data-data yang ada dan melalui perasamaan terakhir diperoleh kecepatan penembakan minimal $v_1 = 2,35 \times 10^7$ m/s.

Penerapan serupa untuk medan gaya gravitasi menghasilkan kecepatan minimal yang dibutuhkan oleh sebuah benda untuk dapat lepas dari pengaruh atau ikatan gravitasi sebuah benda angkasa (planet ataupun satelit) jika benda itu dilempar menjauhi benda angkasa itu. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat di dalam bab tentang gravitasi.

Contoh 6.10



Gambar 6.8: Bandul yang digantung pada paku A dilepaskan dari posisi mendatar dan menyangkut pada paku B.

Sebuah bola kecil bermassa m diikat pada ujung seutas tali yang sangat ringan. Ujung tali yang lain diikatkan pada paku A yang tertancap pada dinding vertikal sedemikian rupa panjang tali efektif yang menghubungkan bola dengan paku A adalah l . Andaikan percepatan gravitasi setempat g dan tepat $l/2$ di bawah paku A ditancapkan juga sebuah paku B pada dinding. Mula-mula bola diletakkan dekat dengan dinding sehingga tali membentang lurus mendatar. Setelah itu bola dilepaskan sehingga mengayun menyusuri bagian sebuah lingkaran dengan jari-jari l . Tali tersangkut pada paku B ketika melewatinya dan bola terus mengayun tetapi sekarang

menyusuri potongan sebuah lingkaran dengan jari-jari $l/2$ (lihat Gambar 6.8).

- Tentukan kecepatan benda saat benda itu berada di titik paling bawah. Berapakah tegangan tali saat itu?
- Tentukan kecepatan bola pada saat berada di titik P. Berapakah tegangan tali saat itu?
- Apakah bola dapat mencapai titik A kembali?

Jawab:

(a) Andaikan permukaan tanah dianggap acuan untuk tenaga potensial gravitasi Bumi dengan potensial nol di sana. Dengan menggunakan hukum kelestarian tenaga mekanik, kita mendapatkan

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2, \quad (6.50)$$

dengan m massa bola itu, $v_1 = 0$ saat benda dilepaskan, ketinggian h_1 adalah ketinggian paku A dari tanah, v_2 adalah kecepatan pada saat bola berada di titik paling bawah, dan h_2 adalah ketinggian titik terbawah itu. Oleh karena itu

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gl$$

dan $v_2 = \sqrt{2gl}$. Tegangan tali saat itu adalah

$$T = m\frac{v_2^2}{l} + mg = m\frac{2gl}{l} + mg = 3mg.$$

(b) Selanjutnya, tetap dengan hukum kelestarian tenaga mekanik, kita mendapatkan persamaan

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P, \quad (6.51)$$

dengan v_p dan $h_P = h_2 + l/2$ berturut-turut adalah kecepatan bola dan ketinggiannya saat bola sampai di titik P. Jadi,

$$gl + gh_2 = \frac{1}{2}v_P^2 + gh_2 + gl/2.$$

Dengan sedikit langkah aljabar,

$$v_P^2 = gl$$

dan $v_P = \sqrt{gl}$. Tegangan tali pada saat bola di titik P adalah

$$T = m\frac{v_P^2}{(l/2)} = 2mg.$$

(c) Kita kembali menuliskan hukum keletarian tenaga mekanik,

$$\frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A, \quad (6.52)$$

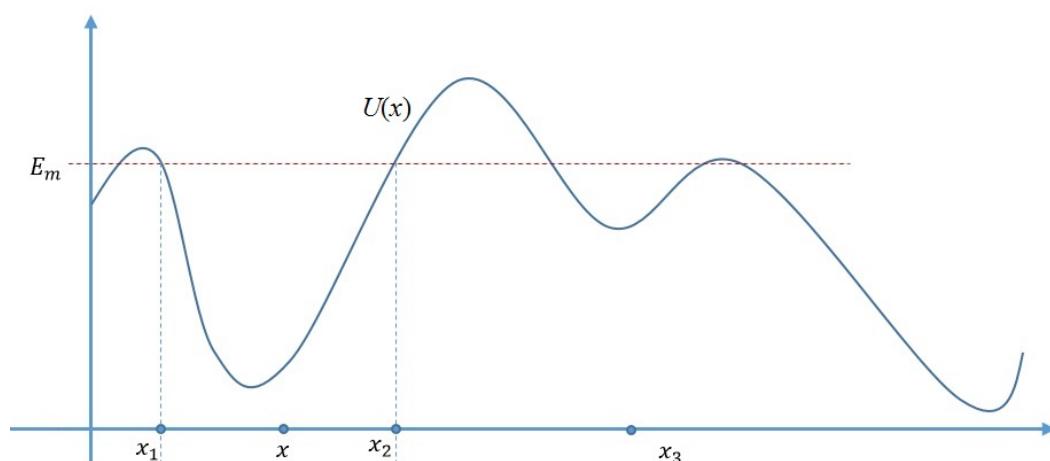
dengan v_A adalah kecepatan bola jika sampai di titik A dan $h_A = h_1$ adalah ketinggian titik A dari tanah. Dengan menggunakan data-data yang ada, yakni $v_P^2 = gl$ dan $h_P = h_1 - (l/2)$, persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{2}gl + g(h_1 - \frac{l}{2}) = \frac{1}{2}v_A^2 + gh_1,$$

yang setara dengan $v_A = 0$. Jadi, bola tiba di titik A dengan kecepatan nol.

Sifat penting bahwa tenaga potensial tidak memiliki nilai mutlak terlihat dalam contoh ini. Cobalah untuk menyelesaikan persoalan di atas dengan mengambil ketinggian titik A sebagai acuan tenaga potensial, yakni dengan mengambil nilai tenaga potensial di ketinggian itu nol. Tunjukkan bahwa pengambilan acuan itu tidak berpengaruh pada hasil yang akan diperoleh.

Karena hukum kelestarian tenaga mekanik, pengurangan tenaga potensial berarti penambahan tenaga kinetik dan sebaliknya, penambahan tenaga potensial berarti pengurangan tenaga kinetik. Jika tenaga mekanik yang dimiliki oleh benda lebih besar dari nilai tenaga potensial di suatu tempat, maka benda itu dimungkinkan untuk mencapai tempat itu asalkan ada lintasan yang mencapai tempat itu sedemikian rupa sehingga sepanjang lintasan itu tenaga potensial tidak melebihi tenaga mekanik. Perhatikan Gambar 6.9. Andaikan sebuah benda berada dalam pengaruh sebuah



Gambar 6.9: Tenaga potensial U sebuah benda sebagai fungsi koordinat x . Energi mekanik E_m yang dimiliki oleh benda menentukan wilayah-wilayah yang dapat dijelajahi oleh benda.

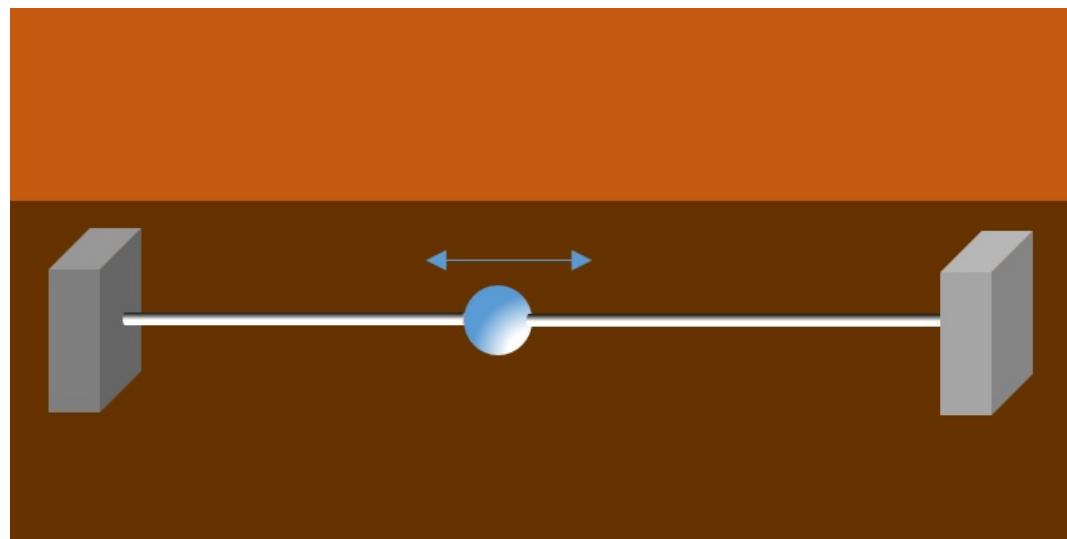
medan gaya lestari dengan tenaga potensial U yang digambarkan oleh grafik pada Gambar 6.9 itu. Andaikan pula bahwa energi mekanik yang dimiliki oleh benda itu sebesar E_m dan benda mula-mula berada di sebuah titik pada sumbu- x di antara titik x_1 dan x_2 . Seandainya saja benda mampu melewati titik x_1 ke arah kiri dan kemudian berada sedikit di sebelah kiri x_1 , maka saat itu $T(x) = E_m - U(x) < 0$ sebab $E_m < U(x)$ untuk x sedikit di sebelah kiri x_1 . Tetapi hal ini mustahil mengingat tenaga kinetik tidak mungkin negatif. Artinya benda tidak mungkin melewati titik x_1 . Dengan alasan yang sama, kita pun mendapatkan kesimpulan yang sama bahwa benda tidak mungkin melewati titik x_2 . Jadi, jika awalnya benda berada di wilayah antara x_1 dan x_2 dengan energi mekanik seperti diperlihatkan oleh Gambar 6.9, maka selamanya benda itu akan berada pada wilayah itu.

Kembali ke Gambar 6.6. Tenaga potensial $V_{eff}(r)$ manjak hingga menuju tak berhingga di wilayah yang dekat dengan pusat gravitasi, $r = 0$. Tenaga mekanik berapapun yang dimiliki oleh benda angkasa itu tidak mungkin akan melebihi tenaga potensial di wilayah itu. Jadi, terdapat "tanggul" yang tidak mungkin dapat dilewati oleh benda angkasa itu untuk mencapai pusat gravitasi. Jika tenaga mekanik benda angkasa itu positif atau nol, maka benda angkasa itu bebas bergerak ke manapun kecuali melewati tanggul di sekitar pusat gravitasi. Jika energi mekanik benda angkasa itu kurang dari nol, maka gerak benda angkasa itu terbatas sedemikian rupa

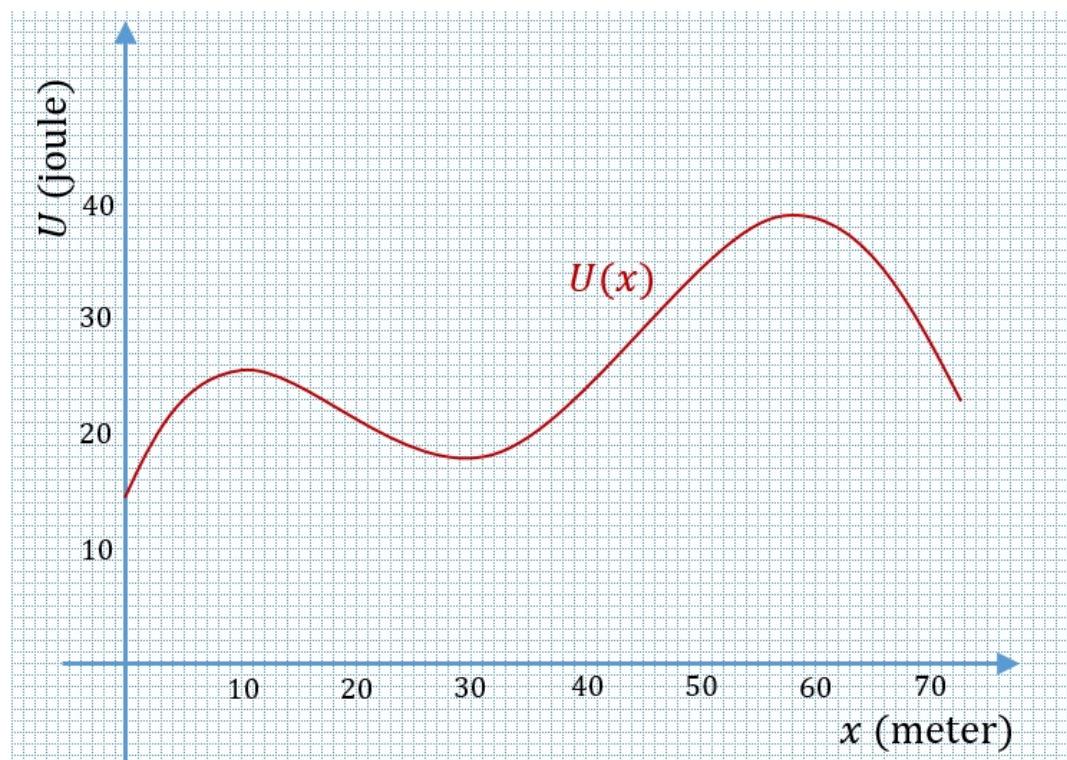
sehingga ada tanggul di sebelah kiri yang mencegahnya menuju ke pusat gravitasi dan tanggul di sebelah kanan yang mencegahnya untuk meninggalkan pusat gravitasi menuju ke tak berhingga. Dalam hal terakhir ini, benda angkasa itu dikatakan dalam keadaan terikat. Jika energi mekanik benda angkasa itu sama dengan energi minimum tenaga potensial efektif benda itu, maka benda itu tidak pernah lebih jauh dan tidak pernah pula lebih dekat ke pusat gravitasi daripada r_0 . Itu berarti, benda bergerak dalam orbit sedemikian rupa sehingga jaraknya dari pusat gravitasi selalu sama, yakni r_0 . Jadi, benda bergerak menyusuri sebuah lingkaran.

Uji Ketajaman 6.4

1. Tenaga potensial pegas diberikan oleh $U(x) = (1/2)kx^2$, dengan k tetapan pegas itu dan x simpangan atau pertambahan panjang pegas itu.
 - a) Buatlah grafik tenaga potensial pegas sebuah benda yang diikat pada ujung pegas itu.
 - b) Jika tenaga mekanik benda yang diikat pada ujung pegas itu E_m , tentukan simpangan maksimum benda yang diikat pada ujung pegas itu. Tentukan pula kecepatan maksimum yang dimiliki oleh benda itu.
 - c) Masih terkait soal 1b hitung pula kecepatan maksimum benda itu.
2. Perhatikan Gambar 6.10. Sebuah bola pejal di beri lubang dan di pasang pada pipa sehingga bola pejal itu bebas bergerak sepanjang pipa itu tanpa gesekan. Pipa tempat bola bergerak itu dipasang pada tanggul di kedua ujungnya sehingga membatasi gerak bola sepanjang pipa. Jika gerak bola itu dirumuskan sebagai gerak pada garis lurus (sumbu- x) sepanjang pipa itu, dapatkah Anda merumuskan tanggul itu sebagai potensial secara matematis jika
 - (a) tanggul-tanggul itu tegar.
 - (b) tanggul-tanggul itu elastis dan memenuhi hukum Hooke.
3. Sebuah benda bermassa m bergerak di dalam kotak kubus yang diletakkan di atas lantai. Ukuran kubus itu cukup besar jika dibandingkan dengan ukuran benda titik itu. Rusuk kubus itu L dan percepatan gravitasi Bumi g . Jika gerak benda itu dipandang sebagai gerak benda dalam ruang tiga dimensi dengan koordinat x , y , dan z masing-masing bervariasi dari minus tak berhingga ($-\infty$) sampai tak berhingga (∞), dapatkah Anda menggambarkan tenaga potensial benda itu secara matematis sebagai fungsi dari x , y , dan z ?
4. Perhatikan Gambar 6.11 yang memperlihatkan grafik tenaga potensial yang terkait dengan sebuah medan gaya lestari yang bergantung pada koordinat x . Sebuah benda bermassa 1 kg digerakkan sepanjang sumbu- x dengan diberi kecepatan awal 9 m/s ke kanan pada saat berada di titik $x = 0$.
 - (a) Berapakah tenaga mekanik benda itu?
 - (b) Dari grafik tersebut tentukan kerja yang dilakukan oleh medan gaya tersebut dari saat benda berada di titik $x = 0$ meter hingga sampai di titik $x = 70$ meter.
 - (c) Tentukan perubahan tenaga kinetik dari saat benda berada di titik $x = 0$ meter hingga sampai di titik $x = 70$ meter.
 - (d) Dari grafik itu buatlah sektsa grafik untuk kecepatan benda sebagai fungsi x .



Gambar 6.10: Bola pejal berlubang yang dipasang pada pipa hingga dapat bergerak sepanjang pipa dan dibatasi di antara dua tanggul .



Gambar 6.11: Energi potensial U sebagai fungsi posisi x bagi benda yang bergerak sepanjang sumbu- x .

7

Tumbukan, Impuls, dan Momentum

Galaksi-galaksi Antennae Galaxies, juga dikenal sebagai NGC 4038/NGC 4039, merupakan sepasang galaksi yang saling berinteraksi dalam konstelasi Corvus. Galaksi-galaksi tersebut sedang dalam fase ketika tumbukan awan-awan yang tersusun atas debu dan gas, dengan keterlibatan medan magnetik, menyebabkan pembentukan bintang secara cepat. Galaksi-galaksi ini ditemukan oleh William Herschel dalam tahun 1785.



7.1 Pusat Massa

7.2 Momentum Linier dan Impuls

7.3 Tumbukan

Coba pikirkan, apa yang terjadi ketika sebuah bola kasti dipukul oleh seorang pemain kasti dengan galah pemukul? Atau bola tenis dipukul dengan raket tenis? Bola tersebut mendapat kecepatan awal yang cukup tinggi setelah terjadi tumbukan atau benturan dengan tongkat pemukul ataupun raket. Akibatnya, bola tersebut mampu meluncur di udara menempuh jarak yang cukup jauh. Tetapi, apa yang terjadi apabila sebuah bola kasti atau bola tenis itu dipukul dengan sepotong lidi? Bola golf maupun bola tenis bergerak sama sekali. Bahkan lidi itulah yang akan terpental (kalau tidak patah). Mengapa hal ini terjadi?

Pernahkah melihat roket yang sedang meluncur menuju ke ruang angkasa? Mengapa harus ada hasil pembakaran yang disemburkan dengan deras oleh roket itu belakang? Mengapa pesawat terbang menggunakan baling-baling yang cukup kuat untuk menggerakkan udara sehingga tersembruh ke belakang? Mengapa kapal mesin perlu baling-baling yang menggerakkan air ke arah belakang untuk dapat bergerak di atas air? Semua pertanyaan-pertanyaan itu bermuara pada konsep tentang momentum linier, impuls, dan hukum kelesetarian momentum linier. Kita akan mendapatkan jawaban atas keheranan-keherenan semacam itu di sini. Mari kita mencari jawabannya.

Gejala yang terkait dengan momentum adalah tumbukan. Gejala ini juga penting untuk dibicarakan. Banyak peristiwa atau fenomena yang terkait dengan gejala ini. Cekungan-cekungan besar yang ditemukan di permukaan Bumi dan juga di permukaan Venus, Merkurius, serta Mars terbentuk karena tumbukan-tumbukan antara planet-planet itu dengan benda-benda angkasa yang lain pada masa awal tata surya kita. Tumbukan juga digunakan oleh para fisikawan untuk lebih memahami bangunan atom dan inti atom. Partikel-partikel dipercepat sebelum dibenturkan dengan partikel lainnya. Dari tumbukan itu, berbagai hal dapat dihitung.

7.1 Pusat Massa

Untuk meninjau gerak benda-benda besar, mobil misalnya, tidak diperlukan untuk meninjau gerak setiap partikel mobil. Tinjauan gerak untuk keseluruhan mobil dapat diwakili oleh satu titik saja. Satu titik tersebut disebut sebagai **pusat massa**. Mobil tersusun atas banyak partikel, sehingga dapat disebut sebagai sistem partikel. Sesungguhnya massa mobil terkonsentrasi pada satu titik saja dan gaya-gaya yang bekerja pada mobil dapat diwakilkan pada titik tersebut. Titik itu adalah pusat massa.

Pusat massa suatu sistem partikel adalah titik yang padanya massa seluruh partikel terkonsentrasi dan gaya-gaya eksternal dikenakan.

Andaikan sebuah sistem terdiri atas n buah benda, masing-masing benda tersebut memiliki massa m_1, m_2, \dots, m_n dan terletak di posisi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, maka pusat massa sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{r}_{pm} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (7.1)$$

atau secara singkat dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r}_{pm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (7.2)$$

dengan $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Apabila diuraikan dalam masing-masing komponennya, persamaan 7.2 dapat dituliskan sebagai

$$x_{pm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad y_{pm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad z_{pm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (7.3)$$

Untuk benda yang kontinu, pusat massa dapat dihitung dengan menggunakan integral

$$x_{pm} = \frac{1}{M} \int x dm; \quad y_{pm} = \frac{1}{M} \int y dm; \quad z_{pm} = \frac{1}{M} \int z dm, \quad (7.4)$$

dengan dm adalah penggal massa yang sangat kecil. Integral ini memudahkan, ka-

rena untuk benda yang kontinu, diperlukan waktu yang sangat lama apabila harus menghitung satu persatu untuk setiap partikel penyusunnya.

Uji Ketajaman 7.1 Pusat Massa

1. Empat buah benda titik masing-masing bermassa 2 kg , 4 kg , 3 kg , dan 1 kg membentuk persegi dengan panjang sisi 2 m . Tentukanlah pusat massa sistem 4 buah benda tersebut.
2. Tentukan pusat massa cakram yang telah dilubangi dengan lubang berbentuk persegi. Cakram tersebut berjari-jari R dan persegi sebagai lubangnya, salah satu titik sudutnya berada di pusat cakram, dan titik sudut yang berseberangan berada di pinggiran cakram, sehingga diagonal persegi tersebut adalah R .
3. Sebuah batang silinder sepanjang L , memiliki rapat massa $\rho = 2e^x$, dengan x adalah posisi titik relatif terhadap salah satu ujung batang silinder tersebut. Tentukanlah pusat massa batang silinder tersebut.

7.2 Momentum Linier dan Impuls

Apakah yang dimaksud dengan **momentum**? Konsep momentum pertama kali di gagas oleh filsuf Yunani kuno Descartes. Oleh Descartes, konsep ini digunakan untuk menggambarkan "banyaknya gerak". Konsep momentum selanjutnya juga digunakan pada abad ke empat belas oleh pemikir Perancis, John Buridan. Konsep ini digunakan untuk menjelaskan gagasan Newton mengenai besaran yang mewakili *gerak* suatu benda.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materie conjunctim.

Def. II, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, hal. 2

Menurut Newton, besaran gerak adalah ukuran yang muncul dari kecepatan dan massa benda. Setiap materi memiliki momentum.

Batasan Momentum Linier dan Impuls

Telah jelas bagi kebanyakan kita bahwa menghentikan sebuah truk sarat pasir lebih berat dibandingkan dengan menghentikan sebuah sepeda motor yang bergerak dengan kecepatan yang sama. Maka kita katakan bahwa truk itu memiliki momentum linier yang lebih besar dibandingkan dengan sepeda motor. Lalu, apakah yang disebut momentum linier itu? Sebuah partikel bermassa m yang bergerak dengan kecepatan v memiliki momentum linier p yang merupakan perkalian antara kecepatan partikel itu dengan massanya. Jadi, momentum merupakan perkalian sebuah vektor (dalam hal ini kecepatan) dengan skalar (dalam hal ini massa). Tegasnya,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (7.5)$$

Untuk selanjutnya momentum linear kita sebut dengan momentum saja. Kalau kita perhatikan dari persamaan (7.5), maka momentum adalah besaran vektor, karena merupakan perkalian vektor kecepatan \mathbf{v} dengan massa inersial partikel m . Karenanya momentum memiliki dimensi MLT^{-1} dan satuan SI bagi momentum linier adalah $kg \cdot m/dt$ (tidak ada nama khusus yang diberikan untuk satuan momentum). Karena massa benda selalu positif, maka arah momentum selalu sama dengan arah kecepatannya.

Ternyata momentum merupakan besaran dinamik yang lebih banyak memberikan informasi ketimbang kecepatan itu sendiri. Truk sarat pasir yang disebutkan di muka mempertegas kenyataan ini. Mengapa demikian?

Selanjutnya marilah kita gunakan hukum kedua Newton tentang gerak untuk melihat kaitan antara momentum sebuah partikel dengan resultan gaya yang bekerja pada partikel itu. Sesuai dengan yang diuraikan dalam Bab Dinamika, hukum kedua Newton tentang gerak mengatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada sebuah benda berbanding lurus dengan percepatan yang dialami oleh benda itu. Secara matematis,

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (7.6)$$

Percepatan benda pada suatu saat dipahami sebagai perubahan kecepatan benda itu tiap satu satuan waktu. Bila pada suatu saat selama selang waktu Δt benda mengalami perubahan kecepatan senilai $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$, maka percepatan yang dialami oleh benda itu adalah perbandingan $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ untuk Δt yang sangat kecil menuju nol. Jadi, persamaan (7.6) dapat dituliskan sebagai

$$\sum \mathbf{F} = m\Delta\mathbf{v}/\Delta t \quad (7.7)$$

untuk Δt yang sangat kecil menuju nol. Karena $m\Delta\mathbf{v} = m\mathbf{v}(t + \Delta t) - m\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t) = \Delta\mathbf{p}(t)$, maka

$$\sum \mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t \quad (7.8)$$

untuk Δt yang sangat kecil menuju nol. Jadi, hukum kedua Newton dapat diungkapkan sebagai berikut resultan gaya yang bekerja pada sebuah benda sama dengan perubahan momentum benda itu tiap satu satuan waktu. Dan sesungguhnya inilah yang dikatakan oleh Newton dalam bukunya "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis". Bentuk persamaan (7.8) terlihat lebih umum dari pada yang anda pelajari pada Bab Dinamika. Persamaan (7.8) bukan hanya berlaku untuk gerak benda dengan massa yang tetap tetapi berlaku pula untuk gerak benda dengan massa yang berubah-ubah. Sebagai contoh, persamaan (7.8) dapat diterapkan untuk gerak roket yang sedang meluncur ke angkasa. Dalam keadaan semacam itu roket mengalami perubahan massa karena bahan bakarnya berkurang.

Andaikan sekumpulan gaya tetap (katakanlah, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$) bekerja pada sebuah benda selama selang waktu Δt . Besaran vektor yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{I} = (\sum \mathbf{F})/\Delta t \quad (7.9)$$

disebut **impuls** yang diterima oleh benda itu dari resultan gaya yang bekerja pada benda itu selama selang waktu Δt . Dari persamaan (7.8) terlihat dengan jelas bahwa

$$\Delta \mathbf{p} = (\sum \mathbf{F})/\Delta t = \mathbf{I}. \quad (7.10)$$

Jadi, impuls yang diterima oleh sebuah benda sama dengan perubahan momentum benda itu.

Momentum Sistem Dua Partikel dan Kelestariannya

Perhatikan dua benda, sebut saja benda pertama dan kedua, yang saling berinteraksi, tetapi keduanya dalam keadaan terisolasi dari lingkungan sekitarnya. Kedua benda itu saling melakukan gaya interaksi satu kepada yang lain masing-masing sebesar \mathbf{F}_{12} dan \mathbf{F}_{21} , dengan arah saling berlawanan.

Andaikan \mathbf{p}_1 momentum benda pertama dan \mathbf{p}_2 momentum benda kedua. Maka penerapan hukum kedua Newton tentang gerak kita dapatkan:

$$\mathbf{F}_{12} = \Delta \mathbf{p}_1 / \Delta t \quad (7.11)$$

dan

$$\mathbf{F}_{21} = \Delta \mathbf{p}_2 / \Delta t \quad (7.12)$$

untuk Δt yang sangat kecil menuju nol. Bila kita memandang masalah ini dari benda pertama, maka gaya \mathbf{F}_{12} yang dialami oleh benda pertama akibat kehadiran benda kedua merupakan reaksi bagi gaya \mathbf{F}_{21} yang dilakukan oleh benda pertama pada benda kedua. Dan sebaliknya, bila kita memandang masalah ini dari sisi benda kedua, maka gaya \mathbf{F}_{21} yang dialami oleh benda kedua akibat kehadiran benda pertama merupakan reaksi bagi gaya \mathbf{F}_{12} yang dilakukan oleh benda kedua pada benda pertama. Kemudian, kalau kita memandang kedua benda itu bersama-sama sebagai sebuah benda (sistem), maka baik gaya \mathbf{F}_{12} maupun gaya \mathbf{F}_{21} bekerja pada sistem yang sama, yakni sistem dua benda itu. Karena $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, maka

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (7.13)$$

Karena sistem dua benda ini terisolasi, maka hanya kedua gaya itulah yang bekerja pada sistem kita. Jadi, persamaan (7.20) menyatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada sistem dua benda itu nol. Akibatnya, dari hukum kedua Newton tentang gerak yang baru saja dirumuskan kembali dengan konsep momentum, diperoleh bahwa momentum total sistem dua benda itu lestari artinya

$$\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/\Delta t = 0 \quad (7.14)$$

atau

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{tetapan.} \quad (7.15)$$

Persamaan (7.22) inilah yang dikenal dengan hukum kelestarian momentum linear untuk sistem dua benda. Jadi, jika resultan gaya yang bekerja pada suatu sistem

dua benda yang terisolasi lenyap, maka jumlahan momentum benda-benda penyusun sistem itu tetap. Tetapi, dalam hal ini perlu dicatat bahwa momentum masing-masing benda bisa saja berubah (misalnya karena tumbukan, dll.), tetapi jumlahan momentum benda-benda itu haruslah tetap. Banyak hal yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari sesungguhnya mengajari kita kaidah tersebut di atas. Misalnya hentakan ke belakang yang dialami oleh seorang serdadu atau pemburu sesaat setelah menarik pelatuk sepotong senapan. Dalam hal ini, sistem dua benda tersusun atas serdadu dan senapannya di satu pihak dan peluru di pihak lain. Mula-mula serdadu+senapan dan peluru dalam keadaan diam. Jadi, momentum sistem nol. Ketika peluru ditembakkan, maka sekarang peluru memiliki momentum. Oleh karena itu serdadu+senapan harus terhentak ke belakang agar jumlahan momentum peluru dan serdadu+senapan tetap nol.

Contoh 7.1 Benda pecah

Sebuah benda dengan massa $m_1 + m_2$ dilempar ke atas dengan kecepatan \mathbf{v}_0 . Di udara, benda tersebut pecah menjadi dua, yang satu bermassa m_1 melaju ke atas dengan kecepatan \mathbf{v}_1 . Sementara yang lain bermassa m_2 dan melaju ke bawah. Tentukan kecepatan benda kedua tersebut.

Dengan menggunakan hukum kelestarian momentum, maka momentum sebelum benda pecah dan sesudah pecah sama

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}_0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \quad (7.16)$$

dengan \mathbf{v}_2 adalah kecepatan benda kedua. Dari persamaan di atas dapat diperoleh

$$\mathbf{v}_2 = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{v}_0 - m_1\mathbf{v}_1}{m_2}. \quad (7.17)$$

Uji Ketajaman 7.2 Momentum Linier

1. Sebuah bola seberat 800 gram melaju dengan kelajuan tetap 6 m/dt kemudian menabrak dinding. Bola tersebut memantul dengan kelajuan 4 m/dt. Hitunglah perubahan momentum linier bola tersebut.
2. Sebuah bandul balistik dengan massa M ditembak dengan peluru yang bermassa m . Apabila bandul balistik tersebut naik setinggi h setelah ditembak, tentukanlah kecepatan peluru.

Momentum Sistem Banyak Partikel dan Kelestariannya

Perhatikan dua benda titik, sebut saja benda pertama dan kedua, yang saling berinteraksi, tetapi keduanya dalam keadaan terisolasi dari lingkungan sekitarnya. Kedua benda itu saling melakukan gaya interaksi satu dengan yang lain masing-masing se-nilai \mathbf{F}_{12} dan \mathbf{F}_{21} , dengan arah saling berlawanan. Gaya \mathbf{F}_{12} dilakukan oleh benda kedua pada benda pertama, sedangkan gaya \mathbf{F}_{21} dilakukan oleh benda pertama pada benda kedua. Keduanya, tentu saja, merupakan pasangan aksi-reaksi.

Andaikan \mathbf{p}_1 momentum linear benda pertama dan \mathbf{p}_2 momentum benda kedua. Penerapan hukum kedua Newton tentang gerak memberikan

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad (7.18)$$

dan

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (7.19)$$

Apabila kita memandang masalah ini dari benda pertama, maka gaya \mathbf{F}_{12} yang dialami oleh benda pertama akibat kehadiran benda kedua merupakan reaksi bagi gaya \mathbf{F}_{21} yang dilakukan oleh benda pertama pada benda kedua. Dan sebaliknya, apabila kita memandang masalah ini dari sisi benda kedua, maka gaya \mathbf{F}_{21} yang dialami oleh benda kedua akibat kehadiran benda pertama merupakan reaksi bagi gaya \mathbf{F}_{12} yang dilakukan oleh benda kedua pada benda pertama. Kemudian, kalau kita memandang kedua benda itu bersama-sama sebagai sebuah benda (sistem), maka baik gaya \mathbf{F}_{12} maupun gaya \mathbf{F}_{21} bekerja pada sistem yang sama, yakni sistem dua benda itu. Karena $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, maka

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (7.20)$$

Karena sistem dua benda ini terisolasi, maka hanya kedua gaya itulah yang bekerja pada sistem kita. Jadi, persamaan (7.20) menyatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada sistem dua benda itu nol. Akibatnya, dari hukum kedua Newton tentang gerak kita dapatkan bahwa momentum keseluruhan sistem dua benda itu lestari. Artinya,

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0 \quad (7.21)$$

atau

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0. \quad (7.22)$$

Persamaan (7.22) inilah yang dikenal dengan **hukum kelestarian momentum linear** untuk sistem dua benda. Jadi, jika resultan gaya yang bekerja pada suatu sistem dua benda lenyap (sama dengan nol), maka jumlahan momentum benda-benda penyusun sistem itu tetap. Tetapi, dalam hal ini perlu dicatat bahwa momentum masing-masing benda bisa saja berubah (misalnya karena tumbukan, dll.), tetapi jumlahan momentum benda-benda itu haruslah tetap.

Banyak hal yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari sesungguhnya mengajari kita kaidah tersebut di atas. Misalnya hentakan ke belakang yang dialami oleh seorang serdadu atau pemburu sesaat setelah menarik pelatuk sepotong senapan. Dalam hal ini, sistem dua benda tersusun atas serdadu dan senapannya di satu pihak dan peluru di pihak lain. Mula-mula serdadu+senapan dan peluru dalam keadaan diam. Jadi, momentum sistem nol. Ketika peluru ditembakkan, maka sekarang peluru memiliki momentum. Oleh karena itu serdadu+senapan harus terhentak ke belakang agar jumlahan momentum peluru dan serdadu+senapan tetap nol.

Sekarang kita tinjau N buah benda titik dengan massa m_1, m_2, \dots , dan m_N . Andaikan pada benda pertama bekerja resultan gaya

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^L + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1N}, \quad (7.23)$$

dengan \mathbf{F}_1^L gaya luar yang bekerja pada benda pertama, \mathbf{F}_{12} gaya yang dilakukan oleh benda kedua pada benda pertama, \mathbf{F}_{13} gaya yang dilakukan oleh benda ketiga pada benda pertama, dan seterusnya. Demikian juga untuk benda kedua, gaya keseluruhan yang bekerja pada benda kedua adalah

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2^L + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2N}. \quad (7.24)$$

Jadi, gaya yang bekerja pada benda nomor i (dengan $i = 1, 2, \dots, N$) adalah

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^L + \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \cdots + \mathbf{F}_{i(i-1)} + \mathbf{F}_{i(i+1)} + \cdots + \mathbf{F}_{iN}, \quad (7.25)$$

karena $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$. Jika sistem N buah benda itu dipandang sebagai satu kesatuan, maka gaya keseluruhan yang bekerja pada sistem adalah jumlahan gaya-gaya yang bekerja pada masing-masing benda, yaitu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1^L + \mathbf{F}_2^L + \mathbf{F}_3^L + \cdots + \mathbf{F}_N^L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^L, \quad (7.26)$$

karena gaya-gaya antar benda saling menghapus (besarnya sama tetapi arahnya berlawanan). Berdasarkan hukum Newton kedua tentang gerak, perubahan momentum benda nomor i adalah

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^L, \quad (7.27)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, N$. Jadi, dari persamaan (7.26) dan (7.27), didapatkan

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \cdots + \mathbf{p}_N) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (7.28)$$

dengan

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \cdots + \mathbf{p}_N, \quad (7.29)$$

momentum keseluruhan yang dimiliki oleh sistem. Jika sistem itu terpencil dari pengaruh atau gaya luar, maka $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1^L + \mathbf{F}_2^L + \mathbf{F}_3^L + \cdots + \mathbf{F}_N^L = \mathbf{0}$ dan

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \mathbf{0}. \quad (7.30)$$

Sekarang, kita kembali ke persamaan (7.29). Persamaan itu dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N, \\ &= \frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \cdots + m_N \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Jika \mathbf{p} ditulis sebagai $\mathbf{p} = (\sum_i m_i) \mathbf{V} = M \mathbf{V}$, dengan $M = \sum_i m_i$ jumlahan massa

semua benda titik, maka

$$M\mathbf{V} = \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots + m_N\mathbf{r}_N). \quad (7.32)$$

Jika kedua ruas persamaan (7.32) dibagi dengan M , maka diperoleh

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots + m_N\mathbf{r}_N}{M} \right) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (7.33)$$

dengan

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots + m_N\mathbf{r}_N}{M} \quad (7.34)$$

adalah pusat massa sistem itu (lihat Subbab 8.81). Jadi, momentum linear keseluruhan sistem tidak lain adalah perkalian kecepatan pusat massa dengan massa keseluruhan sistem. Dari persamaan (7.28) terlihat bahwa

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A}, \quad (7.35)$$

dengan $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/dt = d^2\mathbf{R}/dt^2$ adalah percepatan pusat massa. Jadi, percepatan pusat massa ditentukan oleh resultan gaya yang bekerja pada keseluruhan benda titik. Jika resultan gaya yang bekerja pada keseluruhan sistem nol, maka $d\mathbf{V}/dt = 0$, yaitu bahwa pusat massa sistem bergerak dengan kecepatan tetap.

7.3 Tumbukan

Sering kita lihat peristiwa-peristiwa di sekitar kita yang merupakan peristiwa tumbukan. Misalnya tabrakan antara dua buah kendaraan. Peristiwa tumbukan terjadi pada semua ukuran, dari yang berukuran astronomis (tumbukan antara dua galaksi, tumbukan antar bintang dan lain sebagainya), sampai yang berukuran mikroskopis tumbukan antara atom-atom ataupun partikel-partikel elementer.

Secara formal tumbukan didefinisikan sebagai berikut :

Sebuah tumbukan adalah suatu peristiwa yang terisolasi ketika dua atau beberapa benda melakukan gaya yang cukup kuat satu pada yang lain dalam waktu yang sangat singkat.

Jadi, menurut definisi di atas, gaya-gaya yang bekerja pada sistem merupakan gaya-gaya internal, yakni gaya-gaya yang dilakukan oleh anggota-anggota sistem pada anggota-anggota yang lain. Berdasarkan definisi di atas, pada peristiwa tumbukan tidak harus terjadi sentuhan atau kontak antara benda-benda yang terlibat dalam tumbukan itu. Syarat bahwa tumbukan adalah peristiwa yang terisolasi dapat dipenuhi dengan anggapan bahwa gaya-gaya interaksi antara benda-benda yang terlibat dalam tumbukan itu diasumsikan lebih besar dari gaya-gaya luar yang ada. Pada peristiwa tumbukan orang harus secara ketat membedakan fase-fase tumbukan : sebelum, selama dan sesudah.

Untuk menjelaskan peristiwa tumbukan cukup dibutuhkan dua kaidah. Kedua-duanya telah kita pelajari, yakni : hukum kelestarian tenaga dan hukum kelestarian

momentum linier. Dalam buku ini kita hanya akan membicarakan tumbukan satu dimensi, artinya, kecepatan-kecepatan benda-benda sebelum terjadinya tumbukan segaris dengan kecepatan-kecepatan benda-benda sesudah terjadinya tumbukan.

Jenis-Jenis Tumbukan

Hukum kelestarian momentum berlaku untuk semua jenis tumbukan. Sedangkan hukum kelestarian energi mekanik sangat tergantung dari jenis tumbukannya. Ada tiga jenis tumbukan, yaitu tumbukan lenting sempurna, tumbukan lenting sebagian dan tumbukan tidak lenting sama sekali.

Tumbukan lenting sempurna. Meskipun dalam kenyataan sehari-hari tidak pernah kita temukan peristiwa tumbukan lenting sempurna, akan tetapi uraian tentang jenis tumbukan semacam ini akan bermanfaat untuk memahami jenis-jenis tumbukan yang lain. Memang ada peristiwa tumbukan yang dapat kita anggap merupakan tumbukan lenting sempurna. Contoh yang lazim diberikan untuk memberi gambaran tentang tumbukan lenting sempurna adalah bola yang dijatuhkan ke atas lantai. Jika bola itu menumbuk lantai dengan tumbukan lenting sempurna, maka bola itu akan terpantul sehingga mampu mencapai ketinggian sebagaimana pada saat ia pertamakali dijatuhkan. Demikian pula pada pemantulan yang kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya. Bila saja hal ini memang dapat terjadi, maka bola itu tidak akan pernah diam selamanya. Ya ... selamanya. Tetapi rasanya kita tidak pernah menjumpai peristiwa seperti itu. Ok. Tetapi, untuk sementara, anggap saja hal itu terjadi. Pada tumbukan jenis ini baik hukum kelestarian momentum maupun hukum kelestarian energi mekanik berlaku.

Suatu tumbukan dikatakan lenting sempurna bila jumlahan tenaga kinetik benda-benda yang bertumbukan baik sebelum dan sesudah sumbukan sama. Sistem dua benda yang mengalami tumbukan lenting sempurna mempunyai momen total awal

$$\mathbf{P}_0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 \hat{i} + m_2 \mathbf{v}_2 \hat{i} \quad (7.36)$$

dan tenaga kinetik awal total

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \quad (7.37)$$

Andaikan setelah tumbukan terjadi, kecepatan benda pertama dan kedua berturut-turut \mathbf{v}'_1 dan \mathbf{v}'_2 . Oleh karena itu, momentum total kedua benda itu setelah tumbukan adalah

$$\mathbf{P}_{ak} = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_1 \hat{i} + \mathbf{v}'_2 \hat{i}. \quad (7.38)$$

Sementara tenaga kinetik total setelah tumbukan adalah

$$T_{ak} = \frac{1}{2} m_1 v'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2^2. \quad (7.39)$$

Jika peristiwa tumbukan yang digambarkan di atas merupakan tumbukan lenting sempurna, maka haruslah $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{ak}$ dan $T_0 = T_{ak}$, yakni kedua persamaan berikut haruslah berlaku

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (7.40)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2. \quad (7.41)$$

Selanjutnya, dalam kajian tentang tumbukan yang harus dilakukan adalah menghitung v'_1 dan v'_2 dari kedua persamaan terakhir ini. Komplikasi (kesulitan) perhitungan sepenuhnya tergantung pada hal-hal yang diketahui dari sistem dua benda itu. Dari persamaan (5.13) didapatkan persamaan

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2), \quad (7.42)$$

sedang dari persamaan (5.14) diperoleh

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 \quad (7.43)$$

atau

$$m_1 v_1^2 - m_1 v'^2_1 = m_2 v'^2_2 - m_2 v_2^2 \quad (7.44)$$

atau

$$m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \quad (7.45)$$

Bila persamaan (5.15) dibagi dengan persamaan (5.16), maka didapatkan

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \quad (7.46)$$

atau

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = 1. \quad (7.47)$$

Secara umum perbandingan

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (7.48)$$

disebut koefisien restitusi atau pemulih. Jadi, tumbukan lenting sempurna adalah tumbukan dengan koefisien restitusi $e = 1$.

Uji Ketajaman 7.3 Tumbukan Lenting Sempurna

1. Sebuah bola bilyar bermassa m ditumbukkan dengan bola bilyar lain yang diam dan juga bermassa m dengan kelajuan v . Apabila bola bilyar yang digunakan untuk menumbuk kemudian diam, tentukanlah kelajuan bola bilyar yang ditumbuk. Diasumsikan tumbukan yang terjadi adalah lenting sempurna.
2. Sebuah bola bermassa m dijatuhkan ke lantai dari ketinggian h . Apabila tumbukan yang terjadi

antara bola dan lantai, tentukan ketinggian bola maksimum setelah menumbuk lantai.

Tumbukan lenting sebagian. Pada tumbukan lenting sebagian, hukum kelestanarian momentum tetap berlaku, tetapi hukum kelestarian energi mekanik tidak berlaku. Setelah tumbukan ada sebagian energi mekanik yang berubah menjadi energi panas, bunyi atau energi yang lain. Tumbukan ini dicirikan oleh koefisien pemulihnya yang mempunyai nilai antara nol dan satu, yakni $0 < e < 1$.

Uji Ketajaman 7.4 Tumbukan Lenting Sebagian

1. Sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian h . Apabila setelah memantul dari lantai, bola selalu kembali ke $3/4$ ketinggian sebelumnya. Apabila setelah pantulan pertama bola berpindah secara horizontal sejauh x , tentukanlah jarak horizontal maksimum yang dapat ditempuh bola. Diasumsikan setelah bola tidak lagi memantul, bola diam, tidak menggelinding.
2. Mengapa benda yang cenderung padat, memiliki koefisien restitusi yang lebih tinggi dibandingkan benda yang mudah mengalami deformasi? Jelaskan.

Tumbukan tidak lenting sama sekali. Pada tumbukan inipun hukum kelestanarian momentum tetap berlaku. Sebagaimana jenis tumbukan sebelumnya, hukum kelestarian energi mekanik tidak berlaku. Yang membedakan dari jenis tumbukan sebelumnya adalah lenyapnya koefisien pemulih, $e = 0$. Setelah tumbukan kedua benda melekat menjadi satu dan bergerak dengan kecepatan yang sama. Ada sebagian energi mekanik yang berubah menjadi energi panas, bunyi atau energi yang lain.

Uji Ketajaman 7.5 Tumbukan Tak Lenting

Sebuah mobil dengan massa m melaju dengan kecepatan tetap v_m . Secara tiba-tiba ditabrak dari belakang oleh sebuah truk bermassa M yang melaju dengan kecepatan v_t . Apabila setelah tabrakan truk dan mobil menempel, tentukan kecepatan mobil dan truk setelah tabrakan.

8

Gerak Benda Tegar

Gerak ikan merupakan gerak yang sangat rumit tetapi menarik untuk dicermati. Jamak dipahami bahwa ikan bergerak dengan sirip. Benarkah hal itu? Gerak ikan melibatkan interaksi antara gerak benda terdeformasi dan air. Tubuh ikan merupakan benda terdeformasi yang tidak mengalami perubahan volume. Benda terdeformasi semacam ini dalam beberapa kajian dapat dimodelkan dengan beberapa benda tegar tersambung. Oleh karena itu penting untuk memahami gerak benda tegar.



8.1 Orientasi, Kecepatan, dan Percepatan

8.2 Hubungan Variabel Linier dan Variabel Sudut

8.3 Tenaga Kinetik dan Momen Inersia

8.4 Sumbu Sejajar dan Sumbu Tegak

8.5 Momen Gaya

8.6 Dinamika

8.7 Kesetimbangan

8.8 Usaha, Tenaga, dan Daya

8.9 Momentum Sudut

8.10 Menggelinding

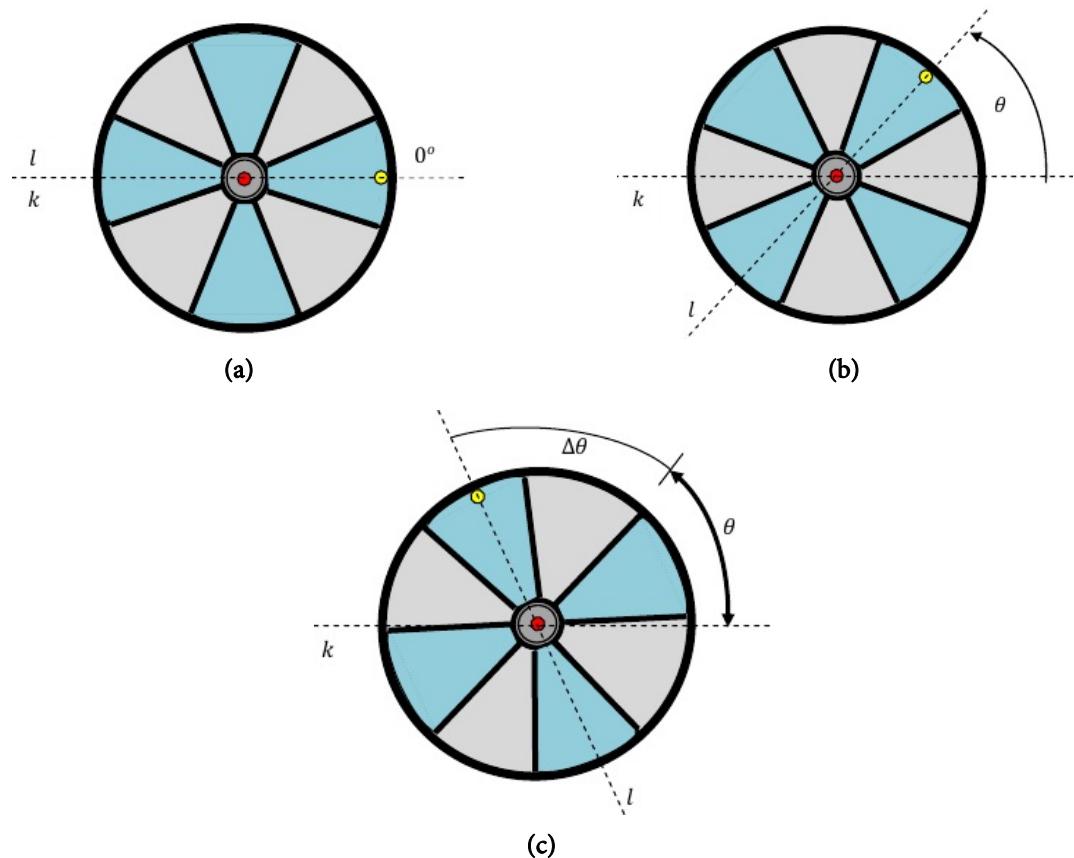
8.11 Beberapa Benda Khusus

8.12 Topik Khusus

Gerak translasi merupakan gerak sebuah benda titik yang mengalami gerak seperti gerak lurus, gerak parabola dan gerak melingkar. Pada gerak translasi, hal yang menjadi pokok perhatian adalah posisi dan pergeseran. Benda dikatakan mengalami gerak translasi apabila posisinya berubah. Artinya, benda itu mengalami pergeseran. Pergeseran suatu benda dapat dimaknai sebagai perpindahan dari satu titik ke titik yang lain dengan maupun tanpa memperhitungkan lintasan benda yang dilaluinya. Dalam bab terdahulu, posisi suatu benda dan perubahannya setiap saat sebagai fungsi waktu telah dibahas secara rinci. Kecepatan (sesaat), misalnya, didefinisikan sebagai pergeseran posisi tiap satu satuan waktu. Konsep penting yang dibicarakan setelah pembicaraan tentang kecepatan adalah konsep tentang percepatan, yakni perubahan kecepatan per satu satuan waktu. Gerak kemudian diklasifikasikan berdasarkan perilaku percepatan ini. Ada gerak lurus beraturan ada gerak lurus berubah beraturan, gerak melingkar beraturan, gerak melingkar berubah beraturan, dan lain sebagainya.

8.1 Orientasi, Kecepatan, dan Percepatan

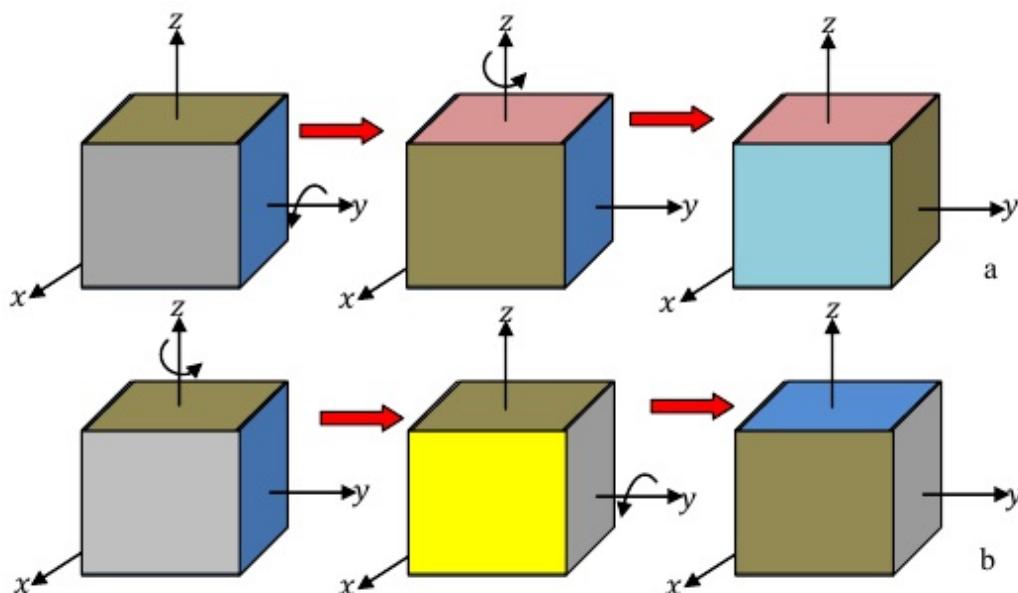
Kita dalam bagian ini masih akan membicarakan tentang gerak. Akan tetapi, gerak yang akan dibicarakan menyangkut orientasi dan perputaran. Gerak semacam ini dikenal sebagai perputaran atau rotasi. Orientasi dalam gerak rotasi merupakan timpalan bagi posisi dalam gerak translasi, sedangkan perputaran adalah timpalan bagi pergeseran. Untuk memahami orientasi perhatikan Gambar 8.1. Gambar 8.1(a) dan 8.1(b) memperlihatkan benda yang sama dengan orientasi berbeda. Jika posisi sebuah benda diungkapkan melalui vektor posisi, maka orientasi sebuah benda biasanya diungkapkan melalui sudut yang dibentuk oleh sebuah garis khayal yang menempel pada benda itu (garis l , misalnya) dan garis lain (garis k , misalnya) yang hendak disepakati sebagai garis pangkal atau acuan.



Gambar 8.1: Roda yang sama dengan orientasi berbeda.

Gambar 8.1(a) memperlihatkan benda ketika memiliki orientasi 0° , artinya garis l berimpit dengan garis acuan k . Sementara Gambar 8.1(b) memperlihatkan benda yang sama ketika memiliki orientasi θ , artinya garis l membentuk sudut θ dengan garis acuan k . Gambar 8.1(c) memperlihatkan benda tersebut mengalami perubahan orientasi (perputaran) sejauh $\Delta\theta$ dari orientasi semula, yakni θ . Sama halnya seperti perpindahan, perubahan orientasi pun memiliki arah positif dan negatif. Lazimnya disepakati bahwa perubahan orientasi yang searah putaran jarum jam ditulis sebagai perputaran negatif, sedangkan yang berlawanan dengan arah perputaran jarum jam disebut perputaran positif.

Tanda perputaran baik yang negatif maupun yang positif tidak berarti bahwa perputaran merupakan besaran vektor seperti pergeseran pada permasalahan gerak lurus. Namun demikian, tanda positif dan negatif untuk kecepatan dan percepatan

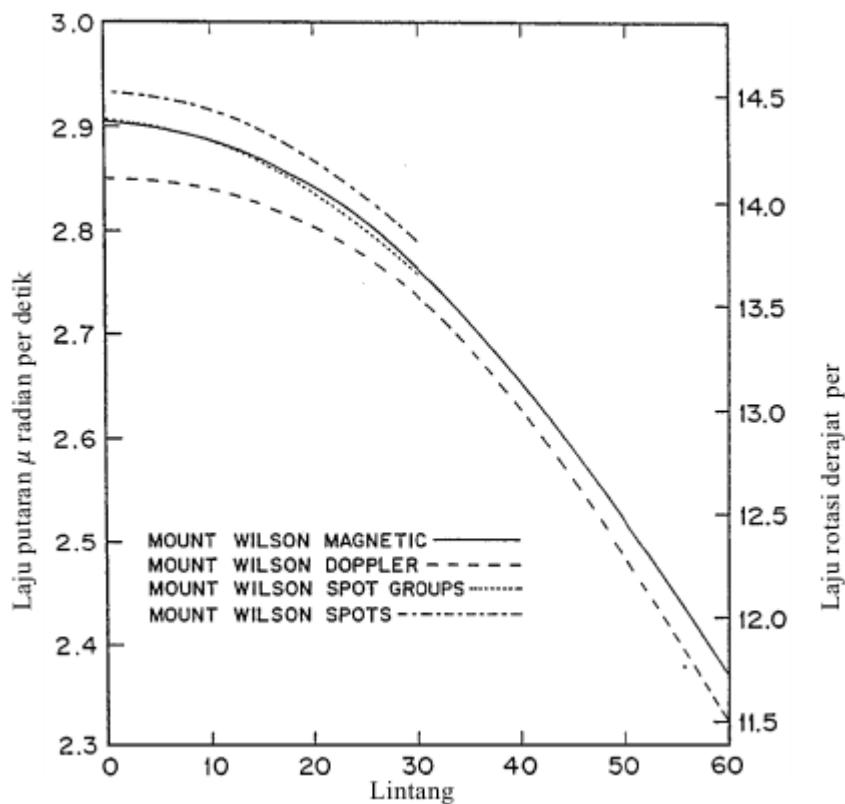


Gambar 8.2

sudut menunjukkan bahwa keduanya merupakan besaran vektor. Mengapa demikian? Mari perhatikan Gambar 8.2. Sebuah kotak dengan sisi-sisi yang berbeda warna diputar sebanyak dua kali masing-masing sejauh 90° . Terlebih dahulu kotak diputar terhadap sumbu y (sebagai sumbu putar) selanjutnya diputar terhadap sumbu z, hasilnya ditunjukkan pada Gambar 8.2a paling kanan. Sekarang perputaran dimulai dari keadaan semula, tetapi terlebih dahulu kotak diputar terhadap sumbu z kemudian diputar terhadap sumbu y, hasilnya ditunjukkan pada Gambar 8.2b paling kanan. Keduanya menunjukkan hasil yang berbeda bukan? Hal ini membuktikan bahwa perputaran bukan merupakan besaran vektor karena jika perputaran merupakan besaran vektor sifat penjumlahan perputaran harus menunjukkan hasil yang sama. Bukankah salah satu sifat penjumlahan vektor adalah komutatif, yakni $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$?

Selain orientasi dan perputaran, masih ada satu konsep lagi yang tak kalah penting, yakni sumbu rotasi. Sumbu rotasi adalah tempat kedudukan titik-titik yang bergeming terhadap perubahan orientasi, yakni titik-titik yang tidak mengalami pergeseran. Garis yang tegak lurus bidang Gambar 8.1 (terlihat sebagai titik merah) dan melalui titik perpotongan garis l dan garis k merupakan sumbu rotasi bagi gerak rotasi yang dibicarakan di depan. Berdasarkan sumbu rotasi, gerak rotasi dibedakan atas gerak rotasi murni dan gerak campuran rotasi dan translasi. Gerak rotasi murni dapat dipisahkan atas dua jenis, yakni gerak rotasi dengan sumbu tetap dan gerak rotasi dengan sumbu berpresesi. Gerak turbin air di PLTA dan gerak piringan hitam merupakan dua contoh gerak rotasi murni. Gerak gasing, gerak rotasi Bumi, dan gerak kipas angin tertentu merupakan contoh gerak rotasi dengan presesi. Sementara itu, gerak roda mobil, gerak roda sepeda dan sepeda motor merupakan contoh gerak campuran antara rotasi dan translasi. Sudut $\Delta\theta$ disebut sudut perputaran dan diukur dalam radian. Satu radian adalah sudut yang nilainya merupakan nisbah (ratio) antara panjang tali busur suatu lingkaran dan jari-jari lingkaran tersebut. Panjang tali busur pada suatu lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$ maka dalam satu lingkaran penuh terdapat sudut 2π radian. Jadi satu radian sama dengan $360^\circ / 2\pi = 57,3^\circ$.

Banyak contoh benda yang mengalami rotasi dengan sumbu rotasi tetap maupun



Gambar 8.3: Grafik yang menggambarkan variasi kelajuan sudut rotasi di permukaan Matahari terhadap sudut lintang dengan metode berbeda. Grafik ini memperlihatkan kesenjangan kecepatan di berbagai titik di Matahari sehingga gerak rotasi Matahari bukanlah gerak rotasi benda tegar.

sumbu rotasi berubah. Contoh kasus seperti roda atau silinder yang menggelinding di jalan dilihat oleh pengamat yang diam di jalan dan sejenisnya merupakan contoh gerak rotasi dengan sumbu rotasi berubah. Sementara Bumi atau Bulan berputar pada porosnya, mata gerinda, roda gila (*fly wheel*) pada mesin, dan gerak benda sejenis merupakan contoh gerak rotasi dengan sumbu rotasi tetap. Namun demikian, gerak seperti perputaran Matahari pada porosnya, tidak akan dibahas dalam kesempatan ini karena uraian berikut akan dibatasi hanya untuk gerak-gerak benda tegar. Seperti diketahui, Matahari dan juga bintang-bintang yang lain tersusun atas gas. Akibatnya terdapat kesenjangan gerak antara bagian-bagian gas di dalam Matahari dan bintang-bintang itu. Oleh karena itu, gerak rotasi Matahari dan bintang-bintang yang lain tidak termasuk gerak benda tegar.

Benda-benda tegar merupakan benda-benda yang dalam keadaan apapun tidak mengalami perubahan bentuk maupun ukuran. Dengan kata lain, jarak antar titik-titik di dalamnya tetap. Benda-benda seperti Bumi, batu, bola baja, kayu, kaca, dan sejenisnya merupakan contoh benda tegar. Benda tegar selalu mengalami gerak benda tegar. Sebuah benda dikatakan mengalami gerak benda tegar apabila dalam gerakannya jarak antar titik di dalam benda itu tidak mengalami perubahan. Oleh karena itu, yang mengalami gerak benda tegar tidak harus berupa benda tegar. Fluida, jel, dan bahan granular mungkin saja mengalami gerak benda tegar, asalkan jarak antar partikel-partikel tetap. Gerak semisal aliran tunak fluida ideal pada saluran pipa dapat dikatakan sebagai gerak benda tegar. Dalam beberapa tinjauan, para astrophisikawan sering menganggap gerak rotasi bintang-bintang sebagai gerak benda tegar. Artinya, dianggap tidak ada kesenjangan gerakan antara satu bagian bintang dengan bagian yang lain.

Uji Ketajaman 8.1

1. Sebutkanlah gejala-gejala alam atau sistem-sistem fisis yang melibatkan gerak rotasi!
2. Untuk masing-masing jawaban pada pertanyaan no.1 sebutkanlah sumbu rotasinya.
3. Apakah rotasi Bumi termasuk ke dalam golongan gerak rotasi dengan sumbu tetap? Jelaskan jawaban Anda!
4. Samakah gerak melingkar dan gerak rotasi?

Andaikan sebuah benda tegar mengalami gerak rotasi murni dengan sumbu putar tetap. Pada saat $t = t_1$ orientasinya θ_1 . Sejenak kemudian pada saat $t = t_2$ benda memiliki orientasi θ_2 . Maka kecepatan sudut rata-rata dari saat t_1 hingga t_2 didefinisikan sebagai rasio antara perubahan orientasi dengan selang waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perubahan orientasi tersebut. Jadi, kecepatan sudut rata-rata, ditulis sebagai ω_{rat} , diberikan oleh

$$\omega_{rat} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad (8.1)$$

Sekarang tinjau perubahan orientasi yang terjadi dalam selang waktu yang amat sangat singkat. Andaikan pada saat t benda memiliki orientasi $\theta(t)$ dan andaikan pada saat $t + \Delta t$ setelahnya benda memiliki orientasi $\theta(t + \Delta t)$. Oleh karena itu, kecepatan sudut rata-rata benda itu dari saat t hingga $t + \Delta t$ adalah

$$\omega_{rat} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \quad (8.2)$$

Selanjutnya kecepatan sudut sesaat benda tersebut (untuk singkatnya, disebut saja dengan kecepatan sudut) didefinisikan sebagai kecepatan rata-rata benda itu dari saat t hingga $t + \Delta t$ untuk selang waktu Δt yang menuju nol. Jadi, kecepatan sudut sesaat diberikan oleh

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (8.3)$$

Contoh 8.1

Sebuah benda berputar sedemikian rupa sehingga orientasinya sebagai fungsi waktu diberikan oleh

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t, \quad (8.4)$$

dengan θ_0 dan ω_0 suatu tetapan. Berapakah kecepatan sudut benda yang berotasi itu?

Kecepatan sudut sesaat benda itu adalah

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0.$$

Contoh 8.2

Sebuah benda berputar sedemikian rupa sehingga orientasinya sebagai fungsi waktu diberikan oleh

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (8.5)$$

dengan θ_0 , ω_0 , dan α tetapan-tetapan. Berapakah kecepatan sudut benda tersebut?

Kecepatan sudut benda yang berotasi tersebut adalah

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t$$

Andaikan sebuah benda tegar melakukan gerak rotasi. Pada saat $t = t_1$ kecepatan sudut benda tegar tersebut ω_1 dan sesaat kemudian pada $t = t_2$ kecepatan benda tegar tersebut ω_2 . Dengan demikian, percepatan sudut rata-rata dari saat t_1 hingga t_2 didefinisikan sebagai rasio antara perubahan kecepatan sudut benda dengan selang waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perubahan kecepatan tersebut. Jadi, percepatan sudut rata-rata, ditulis sebagai α_{rat} diberikan oleh

$$\alpha_{rat} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad (8.6)$$

Sekarang tinjau perubahan orientasi yang terjadi dalam selang waktu yang amat sangat singkat. Andaikan pada saat t benda memiliki kecepatan sudut $\omega(t)$ dan pada saat $t + \Delta t$ benda memiliki kecepatan sudut $\omega(t + \Delta t)$. Oleh karena itu, percepatan sudut rata-rata benda itu dari saat t hingga $t + \Delta t$ adalah

$$\alpha_{rat} = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}. \quad (8.7)$$

Selanjutnya, percepatan sudut sesaat didefinisikan sebagai

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (8.8)$$

Besaran ini merupakan ukuran perubahan gerak rotasi benda itu. Apabila dalam perputarannya, sebuah benda memiliki percepatan sudut yang tidak sama dengan nol, maka dikatakan bahwa perputaran benda itu mengalami perubahan. Satuan untuk percepatan sudut adalah radian per detik kuadrat atau rad/dt^2 . Percepatan sudut juga merupakan besaran vektor. Arahnya ditentukan juga dengan kaidah tangan kanan. Apabila arah keempat jari selain ibu jari mengikuti arah rotasi, maka vektor percepatan sudut mengikuti arah ibu jari.

Percepatan sudut sesaat benda yang melakukan gerak rotasi sebagaimana diceritakan pada Contoh 1.1 adalah nol. Hal ini berarti kecepatan sudut benda itu konstan. Benda mengalami gerak rotasi beraturan. Sementara percepatan sudut benda yang berotasi pada Contoh 1.2 adalah $d\omega/dt = \alpha$. Tampak bahwa percepatan sudut benda kedua konstan. Benda mengalami gerak rotasi berubah beraturan.

Benda yang mengalami gerak rotasi sedemikian rupa sehingga sumbu rotasinya tetap dan kecepatan sudutnya juga tetap disebut gerak rotasi beraturan disingkat

GRB. Sementara gerak rotasi benda dengan sumbu rotasi tetap dan percepatan sudutnya juga tetap disebut gerak rotasi berubah beraturan disingkat GRBB. GRBB memiliki kesamaan pola dengan GLBB. Tabel 8.1 selengkapnya menyajikan kesamaan pola-pola yang dimaksud.

Tabel 8.1: Perbandingan antara GRBB dan GLBB

Gerak Lurus Berubah Beraturan	Gerak Rotasi Berubah Beraturan
$v(t) = v_0 + at$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v(t)^2 = v_0^2 + 2ax(t)$	$\omega(t)^2 = \omega_0^2 + 2\alpha t^2$
$x(t) = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$\theta(t) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$

Uji Ketajaman 8.2

1. Selain dalam radian, apakah kecepatan sudut dan percepatan sudut juga dapat dinyatakan dalam derajat?
2. Sebuah rotor motor listrik berotasi sedemikian rupa sehingga orientasinya sebagai fungsi waktu diberikan oleh persamaan

$$\theta(t) = \theta_{maks} \sin(\omega t),$$

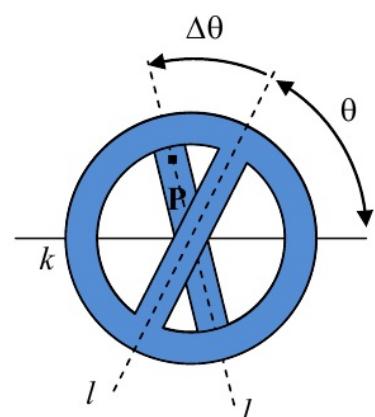
dengan ω suatu tetapan yang memiliki satuan detik⁻¹. Sebutkanlah satuan untuk θ_{maks} ! Jelaskan makna tetapan θ_{maks} . Gerak apa sesungguhnya yang dialami oleh rotor itu? Apa makna tetapan ω ? Mungkinkah $\theta(t)$ mencapai 2π radian?

8.2 Hubungan Variabel Linier dan Variabel Sudut

Setiap titik pada benda tegar yang melakukan gerak rotasi akan mengalami pergeseran. Sebagai contoh adalah titik P pada Gambar 8.4. Andaikan r jarak titik P itu dari sumbu rotasi. Perubahan orientasi sejauh $\Delta\theta$ menyebabkan titik P bergerak melintasi busur sepanjang Δs dengan sudut pembuka $\Delta\theta$. Karena jari-jari busur r dan $\Delta\theta$ diukur dalam radian, maka

$$\Delta s = r\Delta\theta. \quad (8.9)$$

Dari Persamaan 8.9 terlihat bahwa semakin jauh titik P dari sumbu putar, maka semakin panjang tali busur yang dilintasinya. Busur Δs merupakan jarak tempuh linier titik P selama benda mengalami perubahan orientasi sejauh $\Delta\theta$. Apabila perubahan orientasi $\Delta\theta$ ditempuh dalam waktu Δt , maka titik P menempuh jarak Δs selama selang waktu itu juga. Laju linier v didefinisikan sebagaimana pada gerak lurus, yakni nisbah antara Δs dengan Δt untuk Δt



Gambar 8.4

yang menuju nol. Jadi, dengan memanfaatkan Persamaan 8.3, diperoleh

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r \frac{d\theta}{dt}$$

atau

$$v(t) = r\omega \quad (8.10)$$

Persamaan 8.10 memberikan informasi bahwa semakin jauh dari pusat rotasi semakin tinggi laju liniernya. Kecepatan sudut sejatinya merupakan vektor, yaitu vektor yang besarnya sama dengan ω arahnya ditentukan dengan kaidah tangan kanan: jika empat jari menunjukkan arah perputaran, maka ibu jari yang tegak menunjukkan arah vektor kecepatan sudut ω (Gambar 8.5). Gambar 8.5 itu juga memperlihatkan sebuah benda titik yang bergerak melingkar mengelilingi sumbu putar yang melalui pusat koordinat dengan laju sudut ω . Jika vektor posisi setiap saat benda itu \mathbf{r} besarnya vektor \mathbf{r} menunjukkan jarak benda itu dari koordinat, sedangkan jarak benda itu dari sumbu adalah $r \sin \theta$. Oleh karena itu, besarnya kecepatan singgung adalah

$$v = |\mathbf{v}| = \omega r \sin \theta = |\omega| |\mathbf{r}| \sin \theta = |\omega \times \mathbf{r}|.$$

Perhatikan bahwa arah $\omega \times \mathbf{r}$ bersesuaian dengan arah vektor \mathbf{v} . Oleh karena itu,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (8.11)$$

Secara umum, untuk rotasi benda tegar dengan kecepatan sudut ω , sebuah titik pada benda itu yang memiliki vektor posisi \mathbf{r} yang diukur dari salah satu titik pada sumbu memiliki kecepatan tangensial yang juga diberikan oleh persamaan (8.11). Silakan dibuktikan bahwa persamaan (8.11) tidak bergantung pada pengambilan titik pangkal vektor \mathbf{r} asalkan berada di sepanjang sumbu putar.

Contoh 8.3



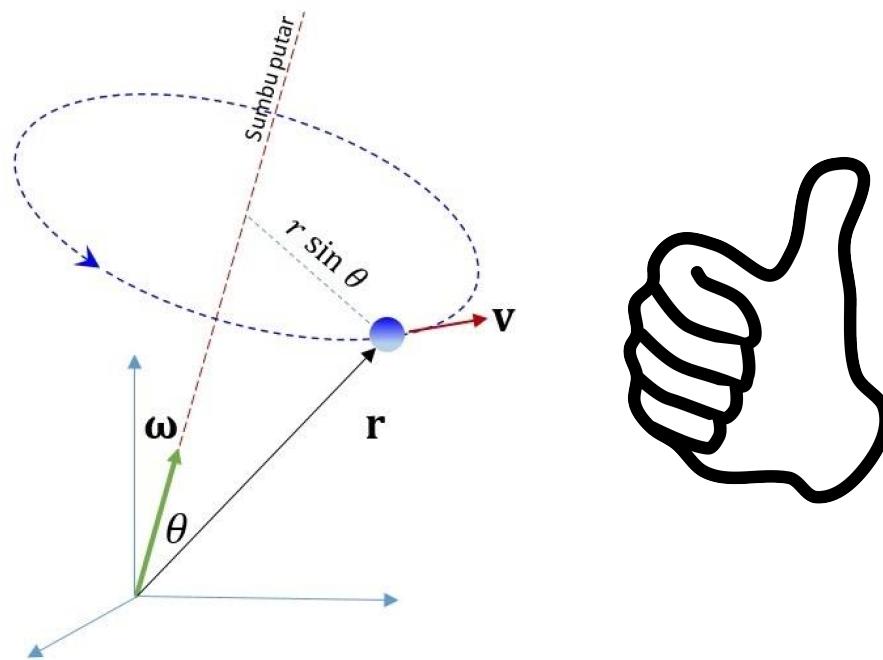
Gambar 8.6

Perhatikan sepeda angin yang Anda miliki. Misalkan roda belakang sepeda itu memiliki radius $R = 50$ cm. Roda gigi depan (dekat pedal) selalu lebih besar jejarinya dibandingkan dengan roda gigi pada pusat roda belakang. Kedua roda gigi itu dihubungkan dengan rantai. Andaiakan roda gigi depan memiliki jejeri $R_1 = 15$ cm, sedangkan jejeri roda gigi belakang $R_2 = 10$ cm. Apabila roda gigi depan dikayuh dengan kecepatan sudut 4,0 radian per detik, (a) berapakah kecepatan linier roda gigi belakang? (b) berapakah kecepatan sudut roda gigi belakang? (c) berapakah laju sepeda Anda?

- (a) Dalam hal ini kecepatan sudut roda gigi depan adalah $\omega_1 = 4,0 \text{ rad/dt}$. Laju linier titik-titik di pinggir roda gigi depan dihitung dengan menggunakan persamaan (8.10). Jadi, kecepatan linier titik-titik di pinggir roda gigi depan diberikan oleh

$$v_1 = R_1 \omega_1 = (0,15m)(4,0 \text{ rad/dt}) = 0,6m/\text{dt}.$$

Laju linier ini disalurkan ke roda gigi belakang melalui rantai sehingga titik-titik di pinggir roda gigi belakang memiliki laju linier 0,6 meter/dt.



Gambar 8.5: Vektor kecepatan sudut ditentukan dengan kaidah tangan kanan. Jika empat jari menentukan arah memutar maka ibu jari menunjukkan arah vektor kecepatan sudut. Kecepatan linier $v = \omega \times r$.

(b) Kecepatan sudut roda gigi belakang dihitung juga melalui persamaan (8.10). Menurut persamaan itu

$$0,6m/dt = v_2 = R_2\omega_2 = (0,1m)\omega_2.$$

Dari persamaan terakhir ini, jelaslah bahwa $\omega_2 = 6,0 \text{ rad}/\text{dt}$.

(c) Kecepatan sepeda Anda sama dengan kecepatan linier titik-titik pada pinggir roda belakang. Karena roda gigi belakang menempel pada roda belakang dan sepasang dengan roda belakang, maka roda belakang berputar dengan kecepatan sudut yang sama dengan kecepatan sudut roda gigi belakang. Jadi, roda belakang sepeda Anda berputar dengan kecepatan sudut $6,0 \text{ rad}/\text{dt}$. Titik-titik di pinggir roda belakang memiliki laju linier sebesar

$$v = R\omega_2 = (0,5m)(6,0\text{rad}/\text{dt}) = 3,0m/\text{dt}.$$

Jadi, sepeda Anda bergerak ke depan dengan laju 3,0 meter/detik. Selamat bersepeda gembira!

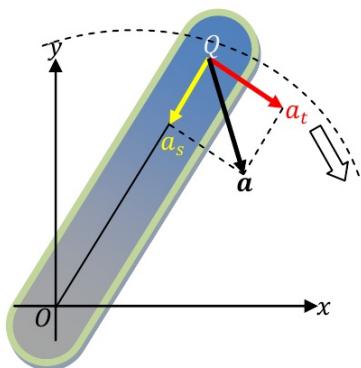
Andaikan kecepatan sudut benda yang berotasi berubah sebesar $\Delta\omega$, maka laju linier sebuah titik yang berada pada benda itu sejauh r dari sumbu putar akan berubah pula. Besarnya diberikan oleh $\Delta v = r\Delta\omega$. Percepatan linier atau tangensial a_t dari titik itu didefinisikan, sebagaimana pada gerak lurus, sebagai nisbah antara Δv dengan selang waktu Δt untuk Δt yang menuju nol. Jadi, dengan memanfaatkan persamaan (8.10), diperoleh

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r \frac{d\omega}{dt}$$

atau

$$a(t) = r\alpha \quad (8.12)$$

Jadi, semakin jauh sebuah titik pada benda dari sumbu rotasi, semakin besar percepatan yang dialaminya.



Gambar 8.7: Sebuah benda tegar dengan sumbu putar tetap

Perhatikan Gambar 8.7! Sebuah benda tegar berotasi di sekitar sumbu putar tetap O . Titik Q pada benda tersebut mengalami percepatan linier sebesar a . Percepatan linier ini terbagi dua komponen percepatan dengan arah menyinggung lintasan rotasi dan ke arah pusat rotasi. Percepatan yang menyinggung lintasan rotasi adalah percepatan tangensial a_t seperti didefinisikan pada persamaan (8.12). Sementara percepatan yang mengarah ke sumbu rotasi adalah percepatan sentripetal a_s yang didefinisikan seperti pada pembahasan gerak melingkar dengan nilai percepatan

$$a_s = \frac{v^2}{r} \quad (8.13)$$

Suku sebelah kanan persamaan tersebut mengandung besaran v , sehingga dengan menggunakan persamaan (8.12) percepatan sentripetal dapat diperoleh sebagai

$$a_s = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2. \quad (8.14)$$

Oleh karena itu, percepatan linier titik Q pada benda tegar tersebut merupakan jumlahan percepatan tangensial dan percepatan sentripetal $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_s$. Karena merupakan penjumlahan vektor (lihat Gambar 8.7, percepatan tangensial ditandai dengan anak panah warna merah dan percepatan sentripetal ditandai dengan anak panah warna kuning) maka percepatan linier a memiliki nilai sebesar

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_s^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = \sqrt{r^2(\alpha^2 + \omega^4)}$$

sehingga diperoleh

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (8.15)$$

Sekarang perhatikan kembali persamaan (8.11) yang menggambarkan kecepatan tangensial sebuah titik pada sebuah benda tegar yang mengalami gerak rotasi dengan kecepatan sudut ω . Jika kedua ruas persamaan diturunkan terhadap waktu akan diperoleh

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}$$

Suku pertama ruas paling kanan merupakan hasil kali silang antara vektor percepatan sudut dan vektor posisi titik pada benda tersebut. Hasil kali silang ini merupakan percepatan tangensial,

$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = \mathbf{a}_t.$$

Sementara itu, suku keduanya merupakan hasil kali silang antara vektor kecepatan sudut dengan vektor kecepatan tangensial titik pada benda. Karena ω selalu tegak lurus dengan \mathbf{v} maka

$$|\omega \times \mathbf{v}| = |\omega||\mathbf{v}| \sin 90^\circ = \omega v,$$

Selanjutnya, kita dapat mengalikan suku terakhir persamaan di atas dengan r/r , sehingga diperoleh

$$\omega v \frac{r}{r} = \frac{v^2}{r}.$$

Dapat dilihat bahwa arah $\omega \times \mathbf{v}$ mengarah ke sumbu putar. Jadi, $\omega \times \mathbf{v}$ adalah percepatan sentripetal \mathbf{a}_s . Terlihat bahwa dalam gerak rotasi benda tegar secara umum percepatan setiap titik pada benda tegar itu dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_s. \quad (8.16)$$

Contoh 8.4

Apabila pada saat Anda melewati jembatan di pinggir desa, Anda memperkuat kayuhan kaki pada pedal sepeda, sehingga roda gigi depan mengalami percepatan sudut tetap sebesar 2,0 radian per detik kuadrat, berapakah kecepatan sepeda Anda setengah menit setelah melewati jembatan itu?

Percepatan linier yang dialami oleh titik-titik di pinggir roda gigi depan dihitung dari persamaan (8.12). Hasilnya,

$$a_1 = R_1 \alpha_1 = (0,15m)(2,0\text{rad}/\text{dt}^2) = 0,3\text{m}/\text{dt}^2.$$

Karena roda gigi depan dan roda gigi belakang dihubungkan dengan rantai, maka titik-titik di pinggir roda gigi belakangpun juga mengalami percepatan linier sebesar ini, $a_2 = 0,3\text{m}/\text{dt}^2$. Percepatan sudut gigi belakang dan roda belakang sama karena memiliki titik pusat yang sama. Percepatan sudutnya diberikan oleh

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{R_2} = \frac{0,3\text{ m}/\text{dt}^2}{0,1} = 3,0\text{ rad}/\text{dt}^2.$$

Oleh karena itu, percepatan linier titik-titik pada pinggir roda belakang dan tentu saja juga percepatan linier sepeda adalah

$$a = R\alpha_2 = (0,5m)(3,0\text{rad}/\text{dt}^2) = 1,5\text{m}/\text{dt}^2.$$

Setengah menit setelah Anda memulai percepatan (yakni sejak melewati jembatan di pinggir desa), sepeda Anda memiliki kelajuan

$$v = v_0 + at = 3,0\text{m}/\text{dt} + (1,5\text{m}/\text{dt}^2)(30\text{dt}) = 48\text{m}/\text{dt}^2.$$

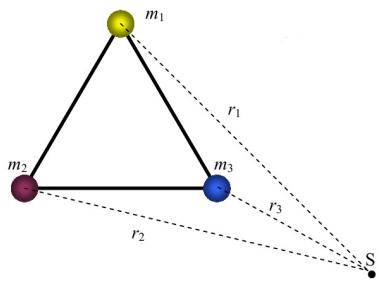
Betapa kuatnya Anda, mampu mengayuh sepeda hingga secepat itu.

Uji Ketajaman 8.3

1. Nyatakan secara sederhana hubungan antara kecepatan sudut sepasang roda gigi yang bersinggungan.
2. Bandingkanlah desain sepeda sekarang dan sepeda jaman dulu. Sepeda jaman dulu mempunyai desain dengan kayuhan yang langsung menempel pada salah satu rodanya. Ini berbeda dari sepeda sekarang, antara kayuhan dan roda belakang dihubungkan dengan sebuah rantai. Menurut Anda, lebih menguntungkan desain yang mana? Mengapa?
3. Sistem tata surya kita berada di suatu galaksi yang berbentuk spiral, yakni Bimasakti. Untuk meyeberang dari satu tepian ke tepian yang lain Galaksi ini, cahaya membutuhkan waktu sekitar 100.000 tahun. Bila diukur dari pusat Bimasakti, sistem tata surya kita kira-kira berada sejauh $3/5$ jari-jarinya. Seandainya galaksi Bimasakti dapat dianggap rotor dengan laju sudut sama dengan laju sudut Bumi mengelilingi Matahari, hitunglah kecepatan linier sistem tata surya kita.

8.3 Tenaga Kinetik dan Momen Inersia

Ditinjau sebuah model molekul yang berupa tiga buah bola kecil bermassa m_1 , m_2 dan m_3 . Bola-bola tersebut dipasang pada titik-titik sudut kerangka kayu ringan yang berbentuk segitiga sama sisi (lihat Gambar 8.8). Model molekul itu mengalami gerak rotasi mengelilingi sumbu putar S dengan kecepatan sudut ω berlawanan terhadap arah perputaran jarum jam. Masing-masing bola kecil tersebut akan memiliki laju linier yang besarnya berbeda-beda karena jaraknya dari sumbu rotasi S juga berbeda-beda pula. Bola pertama berkelajuan linier $v_1 = r_1\omega$. Bola kedua memiliki laju linier $v_2 = r_2\omega$. Sementara bola ketiga berkelajuan linier $v_3 = r_3\omega$. Jarak masing-masing bola merupakan jarak tegak lurus terhadap sumbu putar.



Gambar 8.8: Model molekul dengan tiga buah bola kecil

Oleh karena itu, tenaga kinetik keseluruhan model tersebut merupakan jumlahan tenaga kinetik masing-masing bola dan diberikan oleh

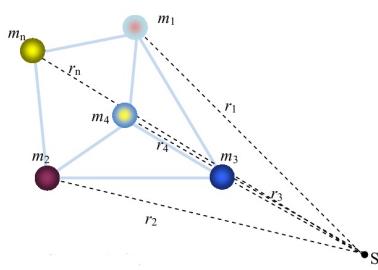
$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \frac{1}{2}m_3(r_3\omega)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\omega^2 \end{aligned}$$

Besaran I yang didefinisikan oleh

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 \quad (8.17)$$

disebut momen inersia atau momen kelembaman dari model molekul itu terhadap sumbu putar S . Sehingga, tenaga kinetik model molekul yang berotasi tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (8.18)$$



Gambar 8.9: Model molekul yang terdiri dari n buah massa terhubung dengan batang ringan

Tinjauan tenaga kinetik rotasi benda tegar memiliki padanan bagi tenaga kinetik benda yang bergerak secara translasi. Sudut θ merupakan timpalan bagi koordinat x , kecepatan sudut ω timpalan bagi kecepatan v dan percepatan sudut α timpalan bagi percepatan a , maka momen kelembaman I merupakan timpalan bagi massa m . Hal ini terlihat jelas dari persamaan (8.18) yang memiliki pola yang sama dengan ungkapan tenaga kinetik dalam gerak translasi. Tenaga kinetik benda titik yang bergerak translasi adalah setengah massa dikalikan dengan kuadrat kecepatan benda $T_{trans} = (1/2)mv^2$, sedangkan tenaga kinetik benda tegar yang bergerak berotasi adalah setengah momen inersia dikalikan dengan kuadrat kecepatan sudutnya $T_{rot} = (1/2)I\omega^2$.

Akan tetapi perlu diingat bahwa padanan ini tidak serta merta sama persis. Hal ini dikarenakan pada gerak translasi massa m memiliki nilai yang selalu tetap untuk sembarang gerakan yang dialami oleh benda tegar. Sementara itu, pada gerak rotasi momen inersia I nilainya benar-benar bergantung pada pemilihan sumbu rotasi yang berarti posisi benda terhadap bidang putar dan distribusi massa pada benda tegar yang ditinjau. Keadaan ini benar-benar menunjukkan bahwa posisi dan besarnya massa merupakan hambatan atau resistensi bagi kecepatan benda terutama untuk gerak rotasi.

Sekali lagi mari ditinjau sebuah model molekul dengan jumlah atom yang cukup banyak, semisal sebanyak n buah atom yang terhubung satu dengan lainnya dengan batang yang sangat ringan seperti diperlihatkan pada Gambar 8.9. Masing-masing atom dimodelkan dengan bola yang bermassa m_1, m_2, m_3, m_4 , dan m_n . Model ini mengalami gerak rotasi dengan sumbu putar S dengan kecepatan sudut ω berlawanan arah jarum jam. Andaikan jarak masing-masing bola dari sumbu putar S adalah r_1, r_2, r_3, r_4 , dan r_n maka laju linier masing-masing bola dapat dituliskan sebagai $v_1 = r_1\omega$ untuk bola pertama, $v_2 = r_2\omega$ untuk bola kedua, $v_3 = r_3\omega$ untuk bola ketiga, $v_4 = r_4\omega$ untuk bola keempat, dan $v_n = r_n\omega$ untuk bola ke- n . Seperti halnya pada model molekul sebelumnya, maka tenaga kinetik yang dimiliki oleh model molekul ini juga merupakan jumlahan tenaga kinetik masing-masing bola sejumlah n tersebut dan dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \frac{1}{2}m_3(r_3\omega)^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n(r_n\omega)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots + m_nr_n^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2\right) \omega^2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, tenaga kinetik keseluruhan model molekul itu dapat ditulis sebagai

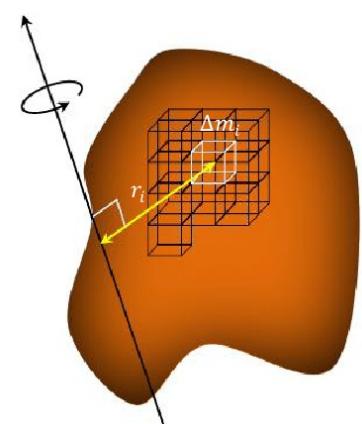
$$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

dengan momen inersia sistem model molekul tersebut secara jelas dapat dituliskan sebagai

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (8.19)$$

Sekarang ditinjau kasus untuk sembarang benda tegar kontinyu. Tanda penjumlahan pada persamaan (8.19) mengisyaratkan untuk dapat memungkinkan membagi suatu benda tegar kontinyu atas potongan-potongan dengan ukuran sekecil mungkin untuk mendapatkan momen inersianya seperti diperlihatkan Gambar 8.10.

Momen kelembaman sebuah benda bergantung pada rapat massa benda itu, sumbu rotasi yang dipilih dan bentuk serta ukuran benda tersebut. Untuk benda-benda yang tersusun atas benda-benda titik yang jumlahnya berhingga momen inersianya terhadap suatu sumbu selalu dapat ditentukan dengan mudah. Sementara itu, untuk benda-benda tegar kontinyu, momen inersia benda tersebut dapat ditentukan dengan kesulitan bergantung pada beberapa hal. Secara umum, untuk benda tegar kontinyu perhitungan momen inersia dilakukan dengan memotong-motong benda itu atas kotak-kotak kecil (lihat Gambar 8.10). Semakin kecil potongan-potongannya berarti semakin baik. Semakin kecil potongan-potongannya berarti juga semakin banyak potongan-potongan yang ada. Potongan-potongan itu diperlukan sebagai benda-benda titik. Oleh karena itu, momen inersia benda



Gambar 8.10: Sebuah benda tegar sembarang yang dibagi atas sejumlah penggal volume sebanyak N

tegar kontinyu tersebut merupakan jumlahan sebagaimana persamaan sebelumnya (persamaan (8.19)), yaitu

$$I_N = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \quad (8.20)$$

Momen inersia I_N yang dihitung dengan persamaan (8.20) bukanlah momen inersia sebenarnya benda yang ditinjau. Momen inersia I_N itu hanyalah momen inersia benda tersebut dengan anggapan benda tersebut dipotong-potong atas N buah kotak-kotak kecil. Jika pemotongan itu sedemikian rupa sehingga jumlah kotak-kotak kecil itu menuju tak berhingga maka ukuran kotak-kotak potongan itu semakin kecil sehingga Δm_i menuju nol. Dalam keadaan demikian momen inersia I_N sama dengan momen inersia benda yang ditinjau. Jadi,

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N. \quad (8.21)$$

Limit jumlah potongan $N \rightarrow \infty$ dalam persamaan (8.21) berarti pula limit $\Delta m_i \rightarrow 0$. Oleh karena itu, persamaan (8.21) dapat dituliskan sebagai

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i m_i r_i^2 = \int_M r^2 dm \quad (8.22)$$

dengan V adalah volume keseluruhan benda yang bermassa M tersebut. Dengan pembatasan yang telah disebutkan di depan maka integral pada persamaan (8.22) benar-benar *hanya* menyisakan perhitungan yang terkait dengan geometri benda. Oleh karenanya persamaan (8.22) dapat ditulis sebagai $I = \rho g$, dengan $g = \int_V r^2 dV$ adalah faktor geometri.

Lebih jauh benda tegar yang ditinjau mungkin saja memiliki geometri berdimensi satu (berupa garis) atau dua (berupa permukaan/luasan). Untuk benda tegar dengan berdimensi satu dan dua unsur volume dV berturut-turut diganti dengan unsur garis (dl) dan unsur luasan (dA). Sementara rapat massa volume ρ diganti rapat massa linier λ dan rapat massa luasan σ . Jadi

$$dm = \lambda dl$$

dan

$$dm = \sigma dA.$$

Sehingga dalam hal kerapatan konstan faktor geometrik g diberikan oleh berturut-turut $g = \int_L r^2 dl$ dan $g = \int_A r^2 dA$.

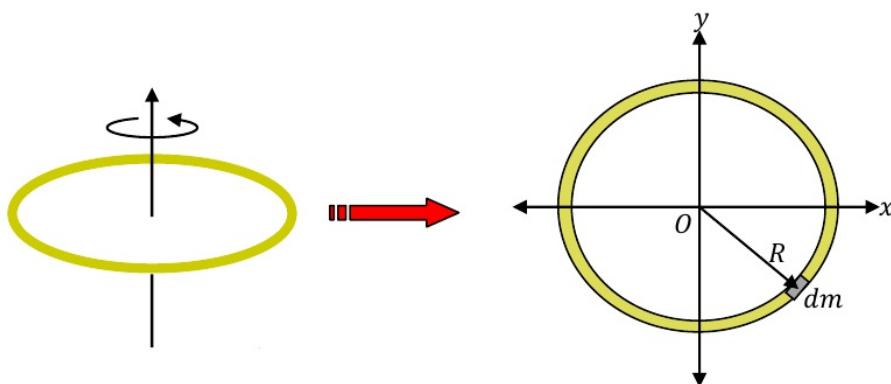
Berikut akan disajikan beberapa contoh perhitungan momen inersia untuk benda-benda tegar yang memiliki simetri dan homogen.

Cincin Homogen

Sebuah benda tegar berbentuk cincin homogen bermassa M dengan jejari R seperti ditunjukkan pada Gambar 8.11. Andaikan rapat massa cincin tersebut λ dan diputar melalui pusat cincin dan tegak lurus bidang cincin maka dapat ditentukan momen inersia cincin sebagai berikut. Penggal cincin dm yang melintasi sudut $d\theta$ sama dengan massa persatuan panjang λ dikalikan dengan panjang penggal cincin dl yakni

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta.$$

Dengan menggunakan persamaan momen inersia dan memasukkan persamaan di atas serta mengganti r dengan R karena jarak setiap penggal dari sumbu putar selalu

Gambar 8.11: Cincin tipis berjari-jari R

R , maka diperoleh

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\theta \\ &= R^3 \lambda (2\pi - 0) \\ &= (2\pi R \lambda) R^2. \end{aligned}$$

Nilai $2\pi R \lambda$ tidak lain adalah massa keseluruhan cincin M sehingga diperoleh momen inersia cincin

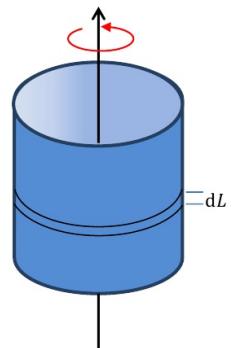
$$I = MR^2. \quad (8.23)$$

Faktor geometrik untuk cincin tipis adalah $g = 2\pi R^2$.

Silinder Tipis

Berikutnya hendak ditinjau silinder tipis berjari-jari R dengan ketinggian L . Dibayangkan silinder tersebut tersusun atas cincin berjari-jari R dengan ketebalan dL . Dari kasus sebelumnya setiap cincin tersebut memiliki momen inersia $dI = dMR^2$ dengan dM adalah massa tiap cincin tersebut. Jadi $dM = \sigma(2\pi R)dL$. Oleh karena itu, $dI = \sigma 2\pi R^3 dL$. Jadi, momen inersia silinder itu diberikan oleh

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_0^L \sigma 2\pi R^3 dL \\ &= (2\pi RL)\sigma R^2 \end{aligned}$$



atau

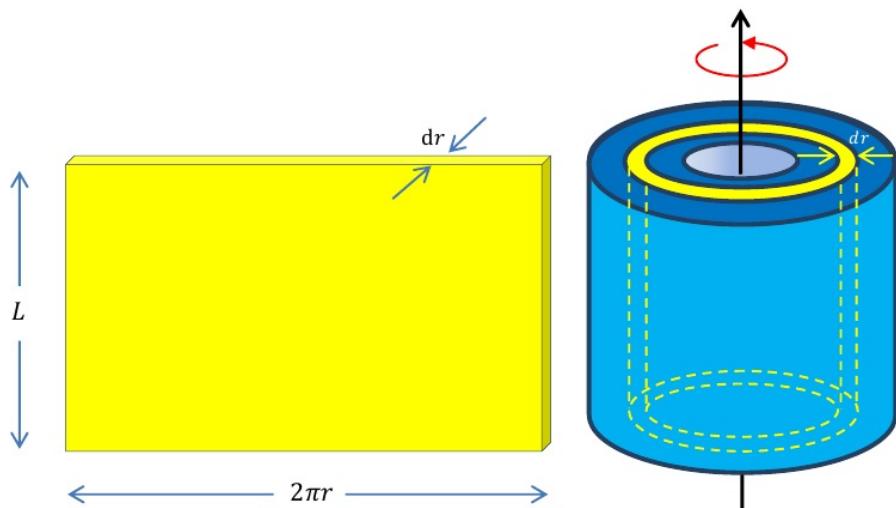
$$I = MR^2 \quad (8.24)$$

dengan M adalah massa silinder.

Cakram Homogen

Cakram homogen dengan jari-jari R bermassa M diputar dengan sumbu putar melalui pusat cakram secara tegak lurus terhadap bidang cakram. Cakram tersebut dapat dibayangkan sebagai tersusun atas cincin-cincin sepusat dengan ketebalan dr . Massa tiap cincin adalah $dm = \sigma 2\pi r dr$. Momen inersia tiap cincin berdasarkan kasus pertama adalah $dI = dm r^2 = \sigma 2\pi r dr r^2 = 2\pi \sigma r^3 dr$. Oleh karena itu, momen inersia cakram diberikan oleh

Gambar 8.12: Silinder homogen tipis berjari-jari R

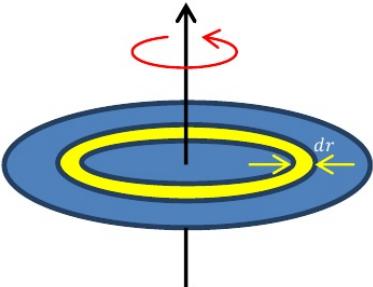


Gambar 8.14: Silinder berongga homogen dengan jari-jari R_2 dan R_1

$$\begin{aligned}
 I &= \int dI = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr \\
 &= \frac{1}{2}(\pi R^2 \sigma) R^2 \\
 &= \frac{1}{2} M R^2.
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Silinder Berongga Homogen

Berikutnya adalah silinder dengan jari-jari R_2 yang berongga berupa silinder dengan jari-jari R_1 . Silinder berongga tersebut dapat dipandang sebagai silinder-silinder tipis seperti pada kasus ketiga. Volume masing-masing silinder tipis itu sama dengan volume lembaran yang digambarkan di sebelah kiri dengan ketebalan dr , ketinggian L , dan lebar $2\pi r$ yaitu $dV = L(2\pi r)dr$. Sementara itu, dengan ρ sebagai rapat massa silinder, massa masing-masing silinder tersebut adalah



Gambar 8.13: Cakram homogen berjari-jari R Momen inersia silinder-silinder tipis tersebut adalah

$$dI = dm r^2 = \rho L 2\pi r^3 dr.$$

Oleh karena itu, momen inersia silinder diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 I &= \int dI = \int r^2 dm \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} r^2 (\rho L 2\pi r dr) \\
 &= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \\
 &= \frac{\pi\rho L}{2} (R_2^4 - R_1^4).
 \end{aligned}$$

Dengan mengingat kembali bahwa volume cincin/silinder adalah

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

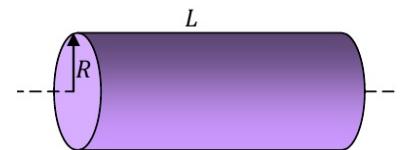
maka

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^4 - R_1^4) \\ &= \frac{1}{2}\pi L \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \\ &= \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Silinder Pejal Homogen

Silinder pejal homogen berjejari R dan bermassa M terhadap sumbu pusatnya memiliki momen inersia

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (8.27)$$



Momen inersia tersebut dapat diperoleh sebagai berikut. Cara untuk mendapatkannya serupa dengan cara yang digunakan pada silinder berongga pada kasus keempat. Perbedaannya hanya pada jari-jari rongga. Untuk kasus ini jari-jari rongga sama dengan nol. Jadi, momen inersia diberikan oleh

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \\ &= \frac{1}{2}M(R_1^2 + 0) \\ &= \frac{1}{2}MR^2. \end{aligned}$$

Perhatikan kembali proses mendapatkan momen inersia pada kasus nomor pertama, kedua, ketiga, keempat, dan kelima tampak bahwa jika silinder memiliki massa yang sama maka ketebalan atau ketinggian silinder tidak berpengaruh. Ketinggian silinder hanya akan memberi pengaruh terhadap momen inersia jika silinder diputar dengan sumbu putar membentuk sudut lebih dari nol dengan sumbu silinder.

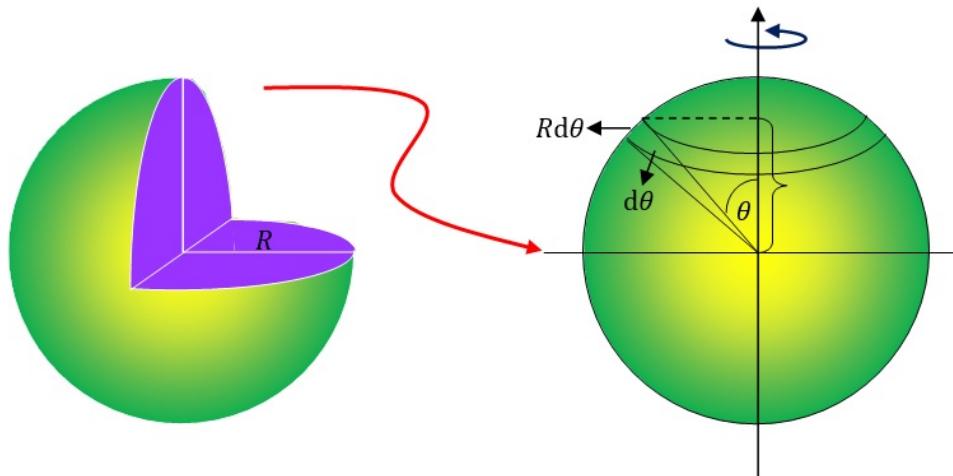
Bola Berongga

Kulit bola (bola berongga) homogen bermassa M berjejari R terhadap sumbu yang melalui pusatnya memiliki momen inersia

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \quad (8.28)$$

Nilai ini diperoleh dengan membagi bola atas strip-strip setebal $Rd\theta$. Setiap strip yang telah dibagi memiliki luas area $dA = 2\pi R \sin \theta (Rd\theta)$ karena jarak tiap strip ke sumbu putar adalah $R \sin \theta$. Oleh karena itu massa tiap strip adalah

$$dm = dA\sigma = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \sigma$$



Gambar 8.16: Bola berongga berjari-jari R .

dengan σ adalah rapat massa per satuan luas. Dengan mengambil batas integrasi 0 sampai π , momen inersia dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int_0^\pi (R \sin \theta)^2 (\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta) \\ &= \sigma 2\pi R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \\ &= 1(-1) - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, momen inersia diberikan oleh

$$I = \sigma 2\pi R^4 \left(\frac{4}{3} \right).$$

Karena massa kulit bola $M = \sigma 4\pi R^2$ maka didapatkan

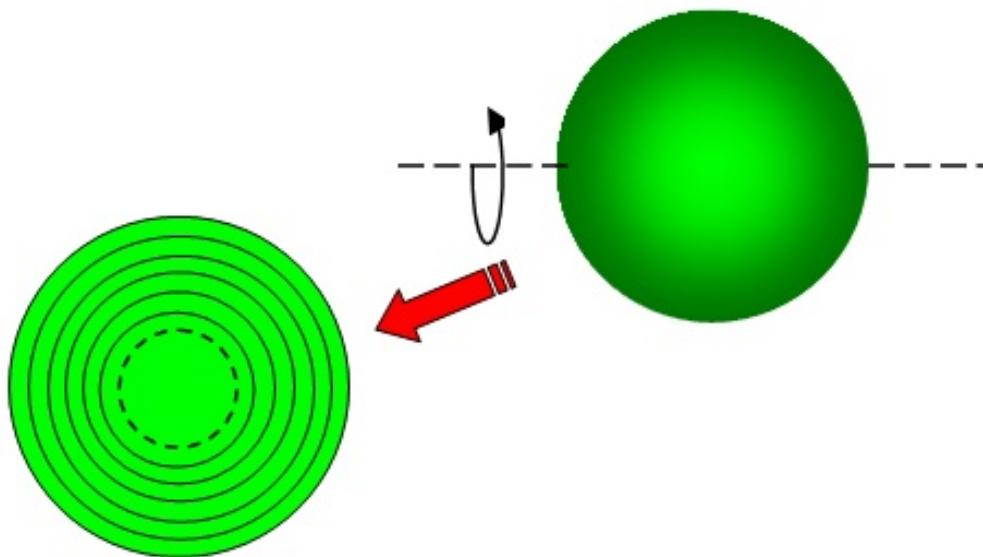
$$I = \frac{2}{3}(\sigma 4\pi R^2)R^2 = \frac{2}{3}MR^2.$$

Bola Pejal

Bola pejal homogen bermassa M berjejari R terhadap sumbu yang melalui pusatnya mempunyai momen inersia

$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8.29)$

Untuk mendapatkan nilai ini terlebih dahulu bola dikuliti menjadi lapisan-lapisan



Gambar 8.17: Bola pejal berjari-jari R .

yang sangat tipis dengan volume dV . Mengingat volume bola $4/3\pi r^3$, nilai dV adalah $dV = 4\pi r^2 dr$ dengan dr adalah jarak tebal lapisan. Andaikan ρ adalah rapat massa per satuan volume $\rho = M/V$, maka lapisan bola masing-masing memiliki nilai sebesar

$$dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Selanjutnya dengan menggunakan hasil momen inersia bola berongga $I = \frac{2}{3}MR^2$ diperoleh

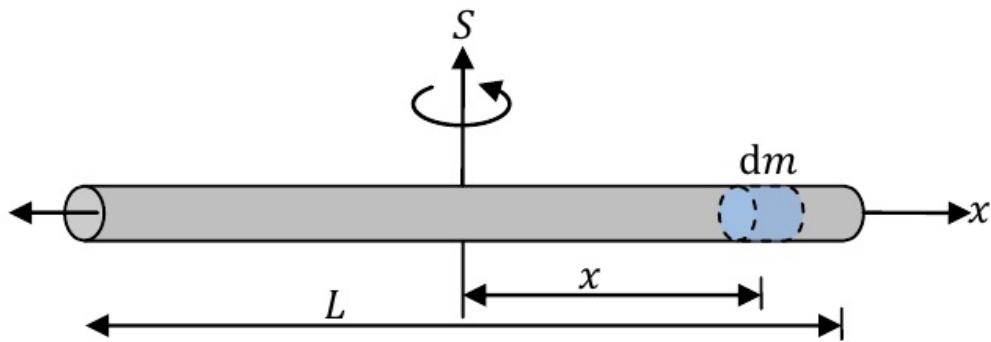
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{3} dm r^2 \\ &= \int_0^R \frac{2}{3} r^2 (\rho 4\pi r^2 dr) \\ &= \frac{8}{3} \pi \rho \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{8}{3} \pi \rho \left(\frac{R^5}{5} - 0 \right) \\ &= \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \end{aligned}$$

dengan $M = \rho \pi R^3$ maka

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) R^5 \\ &= \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned}$$

Batang Tegar Homogen

Sebuah batang tegar homogen dengan panjang L seperti ditunjukkan pada Gambar 8.18. Andaikan massa batang M dan diputar tepat ditengah batang dengan sumbu tegak lurus batang (andaikan sumbu putar itu sumbu- y), momen inersia benda



Gambar 8.18: Batang sepanjang L diputar di tengah-tengah batang

dapat dihitung sebagai berikut. Oleh karena itu sematkan koordinat xy seperti pada gambar dan ambillah penggal dm pada batang. Dengan rapat massa linier batang λ , massa penggal dm dapat dituliskan sebagai

$$dm = \lambda dm = \frac{M}{L} dx.$$

Oleh karena itu, momen inersia batang adalah

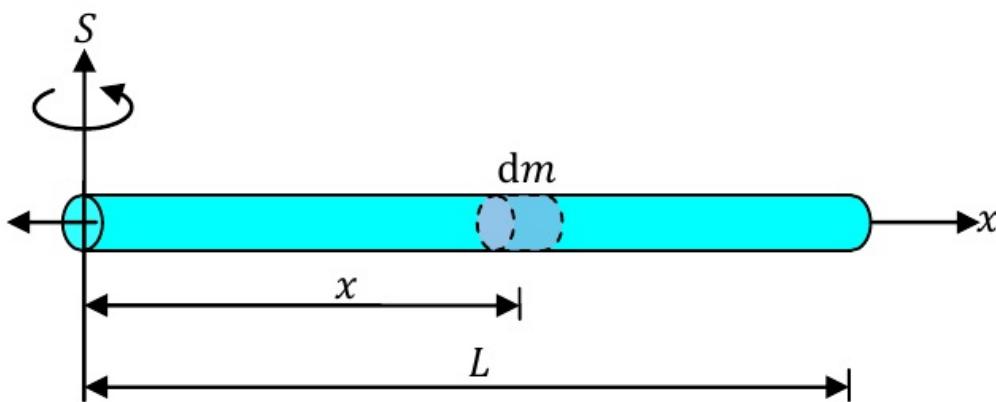
$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \left(\frac{M}{L} dx \right) \\ &= \frac{M}{L} \left(\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{L}{2}\right)^3}{3} \right) \\ &= \frac{M}{L} \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right) \end{aligned}$$

atau

$$I = \frac{1}{12} ML^2. \quad (8.30)$$

Batang Tegar Homogen

Sebuah batang dengan karakteristik seperti pada kasus sebelumnya, tetapi sekarang batang diputar di salah satu ujungnya seperti ditunjukkan pada Gambar 8.19 maka momen inersia dapat dihitung sebagai berikut. Secara keseluruhan cara mendapatkan momen inersianya serupa dengan cara yang dilakukan pada batang yang diputar tepat ditengah batang seperti pada kasus sebelumnya. Perbedaannya terletak pada batas pengintegralannya yakni jika batang diputar tepat di tengah batang batas integralnya dari $-1/2L$ sampai dengan $+1/2L$, sedangkan jika diputar pada salah satu ujung batang batas integralnya dari 0 sampai dengan L . Oleh karena itu,



Gambar 8.19: Batang sepanjang L diputar di salah satu ujung batang.

momen inersia batang dapat diperoleh menurut

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int_0^L x^2 \left(\frac{M}{L} dx \right) \\ &= \frac{M}{L} \left(\frac{L^3}{3} - 0 \right) \\ &= \frac{ML^3}{3} \end{aligned}$$

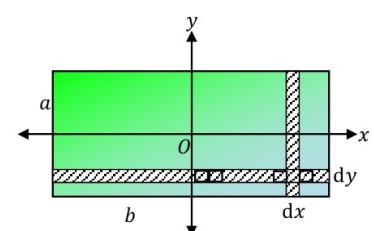
atau

$$I = \frac{1}{3} ML^2. \quad (8.31)$$

Lempeng Tegar Homogen

Sebuah lempeng benda tegar homogen berbentuk persegi panjang seperti ditunjuk pada Gambar 8.20. Andaikan rapat massa lempeng σ dan diputar terhadap sumbu z tepat di tengah lempeng tegak lurus bidang lempeng, momen inersia benda tersebut dapat dihitung sebagai berikut.

Perhatikan gambar sekali lagi. Dengan membayangkan lempeng itu sebagai tersusun atas setrip-setrip yang sejajar dengan sumbu- x dengan tebal dy , maka masing-masing setrip dapat dipandang sebagai batang. Sekarang perhatikan sebuah setrip mendatar yang terletak pada ordinat y sembarang. Kita dapat memotong setrip tersebut menjadi potongan-potongan kecil, yang masing-masing memiliki panjang dx . Karena rapat massa luasan seragam maka massa potongan dengan luas $dxdy$ adalah $dm = \sigma dxdy$. Bagian ini menyumbang momen inersia sebesar $dI = r^2 dm = (x^2 + y^2) \sigma dxdy$. Oleh



Gambar 8.20: Lempeng dengan panjang b dan lebar a

karena itu, setrip tersebut memiliki momen inersia sebesar

$$\begin{aligned} dI_y &= \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\sigma dx dy \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 j_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} + y^2 x j_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \right) \sigma dy \\ &= \left(\frac{1}{12}b^3 + y^2 b \right) \sigma dy. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, momen inersia keseluruhan lempeng adalah

$$\begin{aligned} \int dI_y &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \left(\frac{1}{12}b^3 + y^2 b \right) \sigma dy \\ &= \sigma \left(\frac{1}{12}b^3 a + \frac{1}{12}a^3 b \right) \\ &= \frac{\sigma ab}{12}(a^2 + b^2) \end{aligned} \tag{8.32}$$

dengan $M = \sigma ab$ maka

$$I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2). \tag{8.33}$$

Uji Ketajaman 8.4

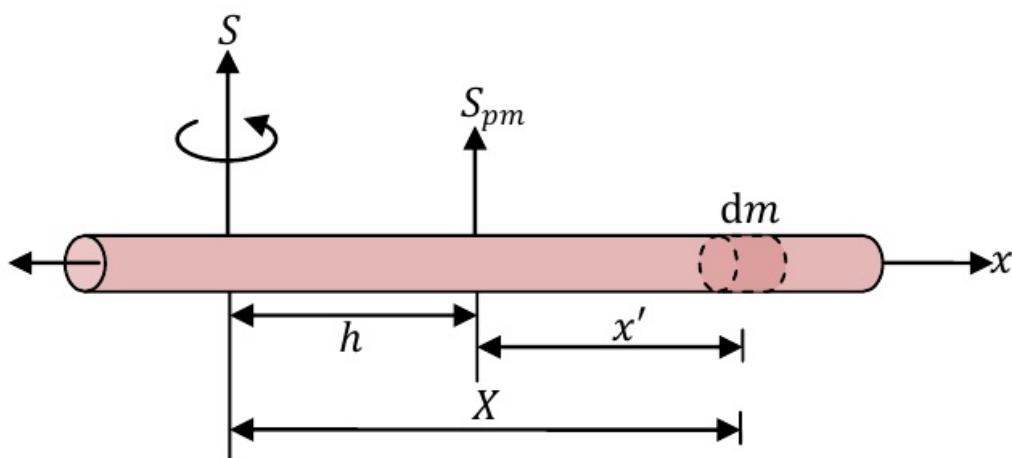
- Perhatikan kembali gambar cincin pada kasus pertama perhitungan momen inersia. Andaikan benda tidak ada yang berubah, tentukan momen inersia cincin jika diputar di sumbu pada bidang cincin yang melalui pusat cincin.
- Perhatikan kembali gambar lempeng pada kasus terakhir perhitungan momen inersia. Andaikan karakteristik lempeng tidak ada yang berubah, tentukan momen inersia lempeng jika diputar melalui pusat salah satu ujung sisi panjangnya.
- Sebuah cakram memiliki rapat massa yang tidak seragam, tetapi bergantung pada jarak dari pusat diberikan oleh $\sigma(r) = \alpha e^{\beta r^2}$, dengan α dan β suatu tetapan. Andaikan jari-jari cakram tersebut R , dan massa cakram tersebut adalah M , tentukan momen inersia cakram tersebut jika diputar terhadap sumbu putar yang melalui pusat cakram dan tegak lurus bidang cakram.
- Sama dengan nomor 4, bedanya sumbu putar adalah garis pada bidang cakram melalui pusat cakram.
- Sebuah elipsoida pejal dengan sumbu panjang sepanjang sumbu- z diputar terhadap sumbu- z . Jika, setengah sumbu panjang elipsoida itu a dan setengah sumbu pendeknya b , tentukan momen inersia untuk
 - rapat massa ρ seragam
 - rapat massa $\rho = \alpha e^{\beta(x^2+y^2)^2}$, dengan α dan β suatu tetapan
 - apabila bagian bola di pusat elipsoida dengan jari-jari r_0 diambil.

8.4 Teorema Sumbu Sejajar dan Sumbu Tegak

Teorema 8.1

Andaikan sebuah benda bermassa M memiliki momen inersia I_{pm} terhadap sebuah sumbu putar S_{pm} yang melalui pusat massanya, maka momen inersia benda tersebut terhadap sumbu putar S yang sejajar dengan sumbu putar S_{pm} dan berjarak h dari S_{pm} adalah

$$I = I_{pm} + Mh^2. \quad (8.34)$$



Gambar 8.21: Batang sepanjang P diputar pada jarak h dari pusat massa batang.

Teorema 8.4 dapat dibuktikan dengan mengambil kasus khusus. Pembuktian untuk kasus umum, silakan digunakan untuk latihan. Andaikan diambil salah satu benda tegar homogen semisal batang dengan panjang P dan rapat massa persatuannya panjang λ . Karena batang homogen maka pusat massa batang berada tepat di tengah-tengah batang. Dari Gambar 8.21 jarak penggal batang dm dari sumbu putar massa S_{pm} adalah x' dan jarak penggal itu dari sumbu S adalah X . Sementara itu, jarak sumbu putar S dari sumbu S_{pm} adalah h , sehingga

$$X = h + x'.$$

Momen inersia batang terhadap sumbu putar S yang sejajar sumbu pusat massa S_{pm} adalah

$$\begin{aligned} dI &= r^2 dm = X^2 \lambda dx' \\ &= (h + x')^2 \lambda dx' \\ &= (h^2 + 2hx' + x'^2) \lambda dx' \\ \int_P dI &= \int_P h^2 \lambda dx' + \int_P 2hx' \lambda dx' + \int_P x'^2 \lambda dx'. \end{aligned}$$

Suku kedua persamaan terakhir menghasilkan koordinat pusat massa x_{pm} . Karena pusat massa batang berada di titik nol, maka $\int_P 2hx' \sigma dx' = 2hx_{pm}M = 0$. Oleh

karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} I &= \int_P h^2 \sigma dx' + \int_P 2hx' \sigma dx' + \int_P x'^2 \sigma dx' \\ &= h^2 M + I_{pm}. \end{aligned}$$

Contoh 8.5

Andaikan sebuah batang dengan panjang P dan berkerapatan seragam λ . Batang tersebut terletak pada sumbu x . Hendak dihitung momen inersia batang yang tegak lurus terhadap batang yang jaraknya $\frac{1}{3}P$ dari pusat massa dengan dua cara, dengan cara langsung maupun dengan teorema sumbu sejajar.

Momen inersia batang dapat dihitung sebagai berikut. Momen inersia penggal dm diberikan oleh

$$\begin{aligned} dI &= r^2 dm \\ &= x^2 \lambda dx' \\ &= \left(\frac{P}{3} - x' \right)^2 \lambda dx' \\ &= \left(\frac{P^2}{9} - \frac{2}{3}Px'^2 + x'^2 \right) \lambda dx'. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, momen inersia batang adalah

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{1}{2}P}^{\frac{1}{2}P} \frac{P^2}{9} \lambda dx' - \int_{-\frac{1}{2}P}^{\frac{1}{2}P} \frac{2}{3}Px'^2 \lambda dx' + \int_{-\frac{1}{2}P}^{\frac{1}{2}P} x'^2 \lambda dx' \\ &= \frac{MP^2}{9} + 0 + \frac{1}{12}MP^2 \\ &= \frac{7}{36}MP^2. \end{aligned}$$

Integral suku kedua nol karena integral tersebut merupakan integral fungsi genal dengan batas yang berlawanan. Selanjutnya momen inersia batang dapat dihitung dengan menggunakan teorema sumbu sejajar dan hasilnya sama dengan yang di atas.

Teorema 8.2: Teorema Sumbu Tegak

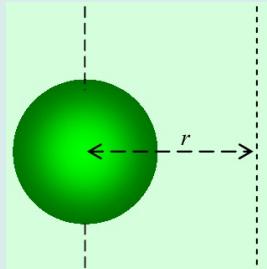
Ditinjau sebuah benda planar. Andaikan S_1 dan S_2 sumbu yang ada pada bidang benda itu dengan S_1 tegak lurus S_2 . Sementara S_3 sumbu yang tegak lurus bidang benda dan melalui titik perpotongan antara S_1 dan S_2 . Jika I_1 momen inersia benda relatif terhadap S_1 , I_2 momen inersia benda relatif terhadap S_2 , dan I_3 momen inersia benda relatif terhadap S_3 maka

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Bukti untuk teorema di atas sangat sederhana dan silakan digunakan sebagai latihan dengan mengambil S_1 sebagai sumbu x , S_2 sebagai sumbu y , dan S_3 sebagai sumbu z , sedangkan benda planar berada pada bidang xy .

Contoh 8.6

Hitunglah momen inersia dari sebuah bola pejal homogen yang berjejari R dan bermassa M terhadap sumbu putar yang terletak sejauh r dari pusat bola itu.



Gambar 8.22: Bola pejal diputar melalui sumbu sejajar dengan sumbu pusat bola sejauh r

Karena bola homogen, maka pusat bola merupakan pusat massanya. Oleh karena itu menurut persamaan (8.29) momen inersia bola pejal diberikan oleh

$$I_{pm} = \frac{2}{5}MR^2.$$

Gambar 8.22 memperlihatkan situasi ini. Momen inersia bola itu terhadap sumbu putar yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} I &= I_{pm} + Mr^2 \\ &= \frac{2}{5}MR^2 + Mr^2 \end{aligned}$$

Uji Ketajaman 8.5

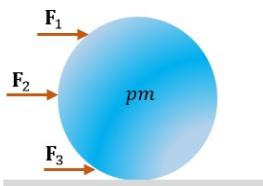
1. Dapatkah disimpulkan bahwa benda yang massanya lebih besar selalu memiliki momen inersia yang lebih besar?
2. Jika ada dua butir telur yang sedang diputar di atas meja, bisakah kita membedakan kedua telur tersebut mana yang merupakan telur mentah dan mana yang telur matang?
3. Sama-sama terhadap sumbu yang membujur sepanjang tubuh, sikap yang manakah yang menghasilkan momen inersia lebih besar : merentangkan kedua tangan ke samping (kanan dan kiri) ataukah meluruskan kedua tangannya menempel di badan?
4. Dapatkah disimpulkan bahwa momen-momen inersia terhadap sumbu putar yang sama dapat dijumlahkan atau dikurangkan secara aljabar?
5. Dengan menggunakan konsep energi kinetik rotasi buktikan bahwa besar momen inersia sebuah batang yang diputar melalui salah satu ujungnya sebesar $\frac{1}{3}ML^2$ dan juga memenuhi teorema sumbu sejajar! (lihat kembali Gambar 8.19)

8.5 Momen Gaya

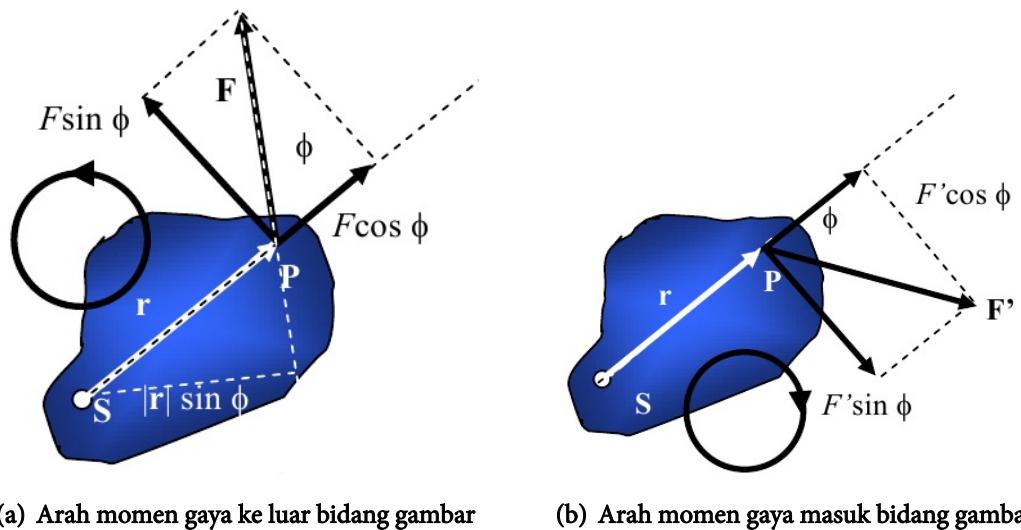
Gaya tunggal maupun jamak yang dikerjakan pada sebuah benda memiliki dampak beragam. Gaya tunggal akan memberikan kemungkinan gerak translasi (percepatan linier) dan gerak rotasi (percepatan sudut). Sementara gaya dalam jumlah lebih dari satu akan memungkinkan adanya kesetimbangan selain dua kemungkinan di atas. Hal ini ditentukan oleh letak garis kerja gaya-gaya tersebut. Perhatikan Gambar 8.23.

Berdasarkan gambar tersebut dapat dipahami bahwa gaya F_1 cenderung memicu benda untuk berotasi searah putaran jarum jam, F_2 cenderung memicu percepatan linier jika garis kerja gaya itu tepat melalui titik yang disebut pusat massa benda itu, dan gaya F_3 cenderung memicu percepatan sudut sehingga benda akan bergerak berlawanan arah dengan jarum jam.

Gaya yang bekerja pada sebuah benda yang tidak dapat dipandang sebagai sebuah benda titik akan memungkinkan timbulnya percepatan sudut selain percepatan linier. Penyebab percepatan sudut ini adalah momen gaya atau torka. Momen gaya atau torka inilah yang merupakan timpalan gaya dalam gerak rotasi. Untuk memahami konsep momen gaya itu perhatikan sebuah benda yang berotasi dengan sumbu putar S seperti diperlihatkan oleh Gambar 8.24. Pada benda



Gambar 8.23: Benda tegar yang dikenakan gaya di tiga titik berbeda.



(a) Arah momen gaya ke luar bidang gambar

(b) Arah momen gaya masuk bidang gambar

Gambar 8.24: Arah Momen Gaya

tersebut diandaikan bekerja sebuah gaya \mathbf{F} dengan pangkal gaya pada titik P yang memiliki vektor posisi \mathbf{r} diukur dari sebuah titik pada sumbu S . Momen gaya atau torka τ oleh gaya \mathbf{F} terhadap sumbu S adalah suatu besaran vektor yang besarnya ditentukan oleh

$$|\tau| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \phi. \quad (8.35)$$

Padahal $\mathbf{F} \sin \phi$ merupakan besar komponen vektor \mathbf{F} yang tegak lurus terhadap vektor \mathbf{r} . Jadi momen gaya dari gaya \mathbf{F} dapat ditulis sebagai $|\tau| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}_\perp|$, dengan $|\mathbf{F}_\perp| = |\mathbf{F}| \sin \phi$. Selain itu $|\mathbf{r}_\perp| = |\mathbf{r}| \sin \phi$ adalah jarak tegak lurus garis kerja gaya bagi \mathbf{F} . Jadi besar momen gaya sama dengan hasil kali antara lengan gaya dengan besar gaya itu sendiri.

Ke manakah arah τ ? Pada Gambar 8.24 diperlihatkan sebuah lingkaran berarah. Arah perputaran pada lingkaran ini searah dengan siklus vektor \mathbf{r} dilanjutkan vektor \mathbf{F} . Arah momen gaya τ ditentukan dengan kaidah tangan kanan. Apabila empat jari mengikuti arah perputaran lingkaran tersebut, maka arah ibu jari menunjukkan arah momen gaya τ . Untuk kasus di atas arah torka keluar dari bidang gambar. Gambar 8.24 memperlihatkan situasi yang lain. Arah siklus vektor \mathbf{r} dilanjutkan dengan vektor \mathbf{F}' searah dengan perputaran jarum jam. Oleh karena itu, arah momen gaya bagi gaya \mathbf{F}' masuk bidang gambar. Selain itu, arah momen gaya juga dapat ditentukan dengan menandai arah putaran lingkaran yang ditunjukkan pada masing-masing gambar tersebut. Arah putaran seperti ditunjukkan pada Gam-

bar 8.24 menjadikan momen gaya bernali negatif (putaran berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sedangkan pada Gambar 8.24 menjadikan momen gaya bernali positif (putaran searah dengan arah putaran jarum jam). Penentuan negatif dan positif ini akan memberikan kemudahan untuk menentukan besar momen gaya yang diakibatkan oleh keberadaan dua gaya atau lebih pada sebuah benda.

Sebelum membahas besar momen gaya pada sebuah benda yang menderita dua gaya atau lebih, perlu diketahui bahwa sumbu S dapat dipilih di setiap tempat pada benda dan sumbu ini menjadi acuan tunggal untuk semua gaya yang berkerja pada benda yang dimaksud. Namun demikian, yang sebenarnya terjadi adalah bahwa titik yang ditunjuk tersebut hanyalah sebuah anggapan bahwa benda mengalami rotasi dengan sumbu di titik itu. Hal ini akan memberikan kemudahan untuk menjawab seberapa besar momen gaya yang dikerjakan oleh dua gaya atau lebih pada sebuah benda.

Andaikan terdapat tiga buah gaya yang diberikan oleh sebuah benda pada titik kerja yang berbeda yakni \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , dan \mathbf{F}_3 seperti ditunjukkan pada Gambar 8.25. Ketiga gaya itu mengakibatkan resultan torka relatif pada titik S . Dengan panjang masing-masing lengan gaya secara berturut-turut adalah r_1 , r_2 dan r_3 , serta kaidah yang dijelaskan oleh Gambar 8.24 dan 8.25 diperoleh

$$\tau_1 = +F_1 r_1,$$

$$\tau_2 = +F_2 r_2,$$

dan

$$\tau_3 = -F_3 r_3.$$

Oleh karena itu, resultan momen gaya relatif terhadap sumbu S adalah

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = +F_1 r_1 + F_2 r_2 - F_3 r_3.$$

Jadi untuk sejumlah n buah gaya \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , $\mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ yang bekerja pada sebuah benda dengan besar lengan gaya masing-masing gaya $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ memberikan resultan momen gaya sebesar

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n = \epsilon_1 F_1 r_1 + \epsilon_2 F_2 r_2 + \epsilon_3 F_3 r_3 + \dots + \epsilon_n F_n r_n.$$

dengan $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dan seterusnya bernilai ± 1 dan menunjukkan arah momen gaya. Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

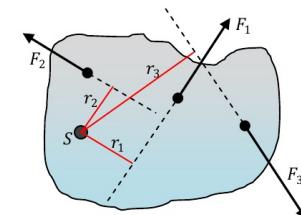
$$\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_i F_i r_i. \quad (8.36)$$

Dengan memperhatikan persamaan (8.35) dan Gambar 8.24 dan 8.25 terlihat bahwa momen gaya adalah vektor yang ditentukan oleh

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (8.37)$$

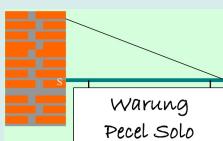
dan persamaan (8.36) dapat ditulis dalam bentuk

$$\tau = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \quad (8.38)$$



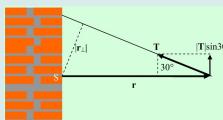
Gambar 8.25: Sebuah benda yang menderita tiga buah gaya pada titik berbeda

Contoh 8.7



Gambar 8.26

Papan nama sebuah warung makan disokong oleh tali seperti diperlihatkan oleh Gambar 8.26. Andaikan papan nama tersebut memiliki massa sedemikian rupa sehingga tali memiliki tegangan sebesar 50N , panjang tali $1,5$ meter dan membentuk sudut 30° terhadap horizontal. Hitunglah besarnya torka yang dilakukan oleh tegangan tali terhadap sumbu S ! Ke mana arahnya?



Gambar 8.27

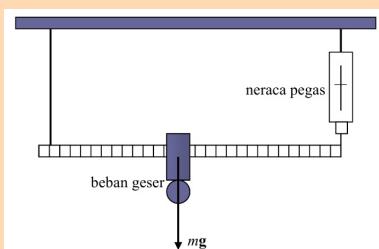
Dalam hal ini pangkal gaya berada di ujung tali sebelah kanan. Oleh karena itu, vektor posisi r berpangkal di sumbu S dan berujung di titik pangkal gaya. Ada dua cara untuk menghitung besar torka tegangan tali. Pertama dengan jalan mengitung besarnya komponen gaya tegangan yang tegak lurus pada vektor r ini. Dari Gambar 8.27 terlihat bahwa komponennya besarnya $|T| \sin 30^\circ = (50\text{N})(\sin 30^\circ) = 25\text{N}$. Besarnya vektor r tidak lain adalah (panjang tali) dikali $(\cos 30^\circ) = (1,5\text{meter})(0,867) = 1,3\text{meter}$. Jadi, besar torka tegangan tali adalah $(25\text{N})(1,3\text{m}) = 32,5\text{N.m}$.

Cara lain adalah dengan menghitung lengan gaya $|r_{\perp}|$ bagi T . Dari gambar tampak bahwa panjang lengan gaya ini adalah $|r_{\perp}| = |r| \sin 30^\circ = (1,3\text{m})(0,5) = 0,65\text{meter}$. Jadi, besar torka gaya tegangan tali adalah $|r_{\perp}| |T| = (0,65\text{meter})(50\text{N}) = 32,5\text{N.m}$. Sama dengan hasil yang diperoleh melalui cara pertama. Arah torka ditentukan dengan kaidah tangan kanan. Torka ini berarah ke luar bidang gambar.

Uji Ketajaman 8.6

1. Mengapa gagang penarik pintu selalu dipasang di pinggir jauh dari engsel?
2. Mengapa kayuhan sepeda terasa semakin berat pada saat kita memindah roda gigi belakang ke roda gigi yang lebih kecil?
3. Sebuah pesawat komersial memiliki 4 buah mesin jet. Dalam sebuah perjalanan, salah satu mesin mengalami kerusakan. Pilot mematikan salah satu mesin, sehingga pesawat meluncur hanya dengan dua mesin. Mesin yang manakah yang dimatikan? Jelaskan mengapa pilot harus melakukan hal tersebut.

Uji Ketajaman 8.7 Neraca Geser



Gambar 8.28

Bila beban geser pada Gambar 8.28 digeser ke kanan maka ceritakanlah berapa Newton yang terbaca pada neraca pegas? Bila beban digeser jauh ke pinggir kiri berapa Newton yang terbaca pada neraca pegas? Mengapa neraca pegas memperlihatkan berat yang berbeda padahal beban geser itu hanya digeser saja, yakni tidak diganti dengan beban yang bobotnya lain? Apa komentar Anda?

8.6 Dinamika

Ditinjau sebuah bola bermassa m yang dipasang pada ujung sebuah batang yang sangat ringan. Panjang batang itu misalkan l . Ujung lain dipasang bebas pada sebuah sumbu S sehingga bola dapat berotasi. Pada bola bekerja sebuah gaya \mathbf{F} , sebagaimana yang perlihatkan pada Gambar 8.29, menyebabkan bola bergerak melingkar. Gaya tersebut memiliki komponen yang tegak lurus terhadap batang. Komponen ini menyebabkan terjadinya percepatan tangensial. Kita sebut percepatan ini a . Menurut hukum kedua Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Besar momen gaya \mathbf{F} yang bekerja pada bola itu adalah $\tau = F_{\perp}l$ dan secara vektor momen gaya dapat dituliskan sebagai

$$\tau = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times (\mathbf{F}_{\perp} + \mathbf{F}_{\parallel}) = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{l} \times m\mathbf{a},$$

dengan $\mathbf{l} \times \mathbf{F}_{\parallel} = 0$. Karena \mathbf{l} dan \mathbf{a} tegak lurus maka besarnya vektor $\mathbf{l} \times m\mathbf{a}$ adalah $lm\mathbf{a}$. Sementara $\mathbf{a} = l\alpha$. Oleh karena itu, besarnya $|\tau|$ diberikan oleh

$$|\tau| = |\mathbf{l} \times m\mathbf{a}| = ml^2\alpha. \quad (8.39)$$

Berdasarkan definisi besarnya momen inersia, maka persamaan (8.39) dapat dituliskan sebagai

$$\tau = I\alpha. \quad (8.40)$$

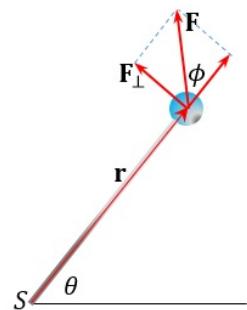
Terlihat bahwa persamaan (8.40) menampilkan pola sebagaimana hukum kedua Newton $F = ma$ dalam gerak translasi. Persamaan (8.40) menyatakan hukum kedua Newton tentang gerak untuk rotasi. Untuk masalah yang lebih kompleks, misalnya terlibatnya banyak gaya atau sistem yang tersusun atas sekian banyak benda titik (lihat sistem molekul seperti Gambar 8.8 atau Gambar 8.9), hukum kedua Newton itu tetap berlaku, tetapi bentuknya menjadi lebih umum, yakni

$$\sum \tau = I\alpha \quad (8.41)$$

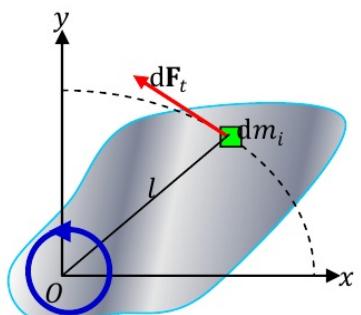
dengan $\sum \tau$ adalah resultan momen gaya luar yang dikerjakan pada benda atau sistem yang bersangkutan.

Bagaimana jika benda merupakan benda tegar kontinyu yang dapat dibagi atas penggal-penggal massa yang sangat kecil? Andaikan sebuah benda tegar yang diputar melalui sumbu koordinat tetap berimpit dengan sumbu z seperti ditunjukkan pada Gambar 8.30. Penggal volume dV memiliki massa sebesar dm , ini adalah ukuran yang sangat kecil. Karena seluruh benda mengalami gerakan berputar di sekitar sumbu yang sama, maka setiap penggal pada benda akan memiliki percepatan singgung yang sama juga. Namun demikian, tidak semua penggal merasakan gaya yang sama sehingga untuk masing-masing penggal massa semisal merasakan gaya sebesar dF . Dengan menggunakan hukum kedua Newton untuk masing-masing penggal massa (dapat dipilih sembarang penggal massa) pada benda dapat dituliskan sebagai

$$d\mathbf{F} = adm.$$



Gambar 8.29



Gambar 8.30: Sebuah benda tegar diputar melalui sumbu O

Sementara itu, dengan definisi besarnya momen gaya dan andaikan jarak penggal massa dimaksud dari sumbu rotasi adalah l maka diperoleh

$$|d\tau| = |I \times dm\mathbf{a}| = dml^2\alpha.$$

atau

$$|d\tau| = dml^2\alpha. \quad (8.42)$$

Persamaan (8.42) dapat diintegrasikan pada kedua sisinya untuk keseluruhan massa benda

$$\begin{aligned} \int |d\tau| &= \int l^2\alpha dm \\ &= \alpha \int l^2 dm \end{aligned}$$

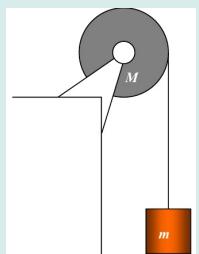
dan secara umum diperoleh

$$\sum \tau = I\alpha \quad (8.43)$$

yang sama dengan persamaan (8.41). Pada persamaan (8.43) suku sebelah kiri menunjukkan resultan momen gaya yang bekerja pada benda, sedangkan I merupakan momen inersia benda tegar yang ditinjau. Penting untuk lebih dicermati bahwa andaikan terdapat n buah gaya yang bekerja pada benda, hanya gaya-gaya yang memiliki komponen tangensial dan tidak melalui sumbu putar sajalah yang memberikan kontribusi pada persamaan tersebut. Hal ini dikarenakan gaya dengan komponen radial dan gaya yang melalui sumbu putar memiliki momen gaya sama dengan nol.

Contoh 8.8

Seutas tali ringan yang cukup panjang digulung pada katrol yang bermassa $M = 2,5\text{ kg}$ dengan jejari $R = 20\text{ cm}$ yang telah dipasang pada pinggiran meja (Gambar 8.31). Ujung yang lain diberi beban sebesar $m = 1,2\text{ kg}$. Hitunglah percepatan turun ke bawah yang dialami oleh beban!

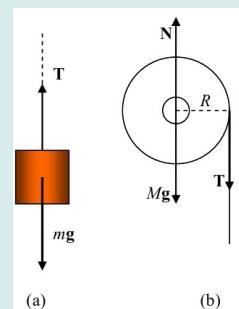


Gambar 8.31

Untuk menjawab masalah ini, diperlukan dua diagram benda bebas. Yang pertama diagram benda bebas dari beban. Yang lain adalah diagram benda bebas dari katrol. Diagram benda bebas yang pertama disajikan dalam Gambar 8.32 (a) yang kedua pada Gambar 8.32 (b). Dari Gambar 8.32 (a) didapat

$$T - mg = ma \quad (8.44)$$

arah ke bawah ditulis negatif. Dari diagram bebas Gambar 8.32 (b) kita mendapatkan persamaan untuk torka. Ada tiga gaya yang bekerja pada katrol, gaya tegangan tali T , gaya berat mg dan gaya normal N . Gaya normal dan gaya berat saling meniadakan. Kedua gaya tersebut juga bekerja sepanjang garis yang melalui sumbu rotasi. Akibatnya tidak ada sumbangan torka dari



Gambar 8.32

kedua gaya ini. Torka hanya disumbang oleh gaya tegangan tali, besarnya adalah $-TR$. Tanda negatif diberikan karena arahnya masuk bidang gambar (ini disepakati). Hukum kedua Newton untuk rotasi memberikan

$$-TR = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

(lihat penyelesaian momen inersia beberapa kasus benda simetri). Karena $\alpha = \frac{a}{R}$, maka

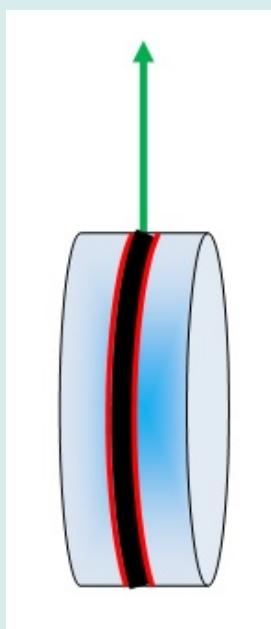
$$T = -\frac{1}{2}Ma. \quad (8.45)$$

Dari persamaan (8.44) dan (8.45) didapatkan

$$a = -g \frac{2m}{M + 2m} = -9,8m/dt^2.$$

Contoh 8.9 Yo-yo

Sebuah yo-yo bergerak yang terbuat dari dua buah cakram yang dihubungkan dengan sumbu berupa silinder pejal. Berapa percepatan menggelinding ke bawah yo-yo tersebut jika tali ringan yang dipasang padanya sepanjang h . Anggap tidak ada gesekan antara tali dan dinding kedua cakram yo-yo.



Gambar 8.33: Yo-yo adalah contoh benda dengan prinsip gerak menggelinding

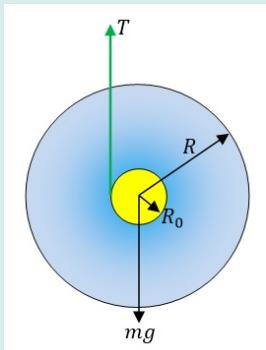
Pada saat yo-yo menggelinding ke bawah secara menggelinding, yo-yo akan kehilangan tenaga potensial yang diakibatkan perubahan ketinggian. Akan tetapi pada saat yang bersamaan, yo-yo akan mendapatkan tenaga kinetik yang berasal dari tenaga kinetik translasi dan rotasi. Andaikan massa yo-yo $2M+m$ atau \mathcal{M} yakni dengan M massa cakram dan m massa poros, serta panjang tali yang diukur dari permukaan tanah mendekati h maka yo-yo kehilangan tenaga potensial sebesar $\mathcal{M}gh$. Andaikan berkurangnya tenaga potensial diwujudkan sebagai tenaga kinetik, maka dengan v_{pm} adalah kecepatan linier melalui pusat massa yo-yo dan ω adalah kecepatan sudutnya, yo-yo akan mendapatkan tenaga kinetik translasi sebesar $\frac{1}{2}\mathcal{M}v_{pm}^2$ dan tenaga kinetik rotasi sebesar $\frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2$, dengan $\mathcal{J} = (2I_c + I_p)$ yang masing-masing I_c adalah momen inersia cakram dan I_p adalah momen inersia porosnya. Pada saat yo-yo kembali merambat ke atas, tenaga kinetik berkurang sebesar penambahan tenaga potensial.

Gerakan yo-yo selanjutnya dapat dianalisis dengan menggunakan hukum kedua Newton. Perhatikan Gambar 8.34, yakni sebuah yo-yo dengan jari-jari dalam R_0 dan jari-jari luar R serta massa yo-yo adalah m . Andaikan a adalah percepatan linier yo-yo, maka dengan penerapan hukum kedua Newton untuk gerak linier, diperoleh

$$\sum F = T - \mathcal{M}g = \mathcal{M}a \quad (8.46)$$

dengan T adalah tegangan tali yo-yo. Sementara itu untuk gerak rotasinya diperoleh

$$\sum \tau = TR_0 = \mathcal{J}\alpha. \quad (8.47)$$



Yo-yo bergerak ke bawah berarti percepatan liniernya negatif. Sementara itu, percepatan sudut yo-yo berputar berlawanan arah jarum jam sedemikian rupa sehingga bernilai positif. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.47) hubungan antara percepatan sudut dan percepatan linier yo-yo dapat dituliskan sebagai

$$TR_0 = -\frac{\mathcal{J}a}{R_0}$$

dengan $a = -\alpha R_0$. Dengan menuliskan persamaan (8.46) dalam bentuk

$$T = \mathcal{M}(a + g)$$

Gambar 8.34: Diagram benda bebas sebuah yo-yo

dan memasukkannya dalam persamaan (8.47), maka diperoleh percepatan yo-yo menggelinding ke bawah adalah

$$a = -\frac{g}{\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{M}R_0^2} + 1\right)}. \quad (8.48)$$

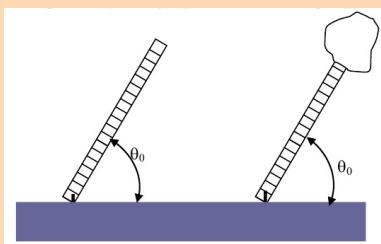
Persamaan (8.48) merupakan persamaan gerak menggelinding ke bawah yo-yo ideal dengan percepatan konstan. Selanjutnya dari persamaan (8.48) dapat pula diperoleh tegangan tali yo-yo yakni dengan memasukkannya ke persamaan (8.46) sedemikian rupa sehingga diperolah

$$T = \frac{\mathcal{J}\mathcal{M}g}{\mathcal{J} + \mathcal{M}R_0^2}. \quad (8.49)$$

Perlu diketahui bahwa tegangan ini juga berlaku ketika yo-yo menggelinding ke atas, mengapa?

Uji Ketajaman 8.8

Dua buah penggaris dengan massa dan panjang yang sama diberi lubang kecil pada ujungnya masing-masing.



Gambar 8.35

Dengan sebuah sangkutan kawat, kedua penggaris itu dipasang pada permukaan meja melalui lubangnya masing-masing seperti pada Gambar 8.35, sehingga kawat tersebut berfungsi sebagai engsel dan kedua penggaris itu dapat berayun. Ujung atas salah satu penggaris ditempel dengan plastisin. Kemudian kedua penggaris itu diatur sehingga memiliki kecondongan yang sama, katakanlah θ_0 . Jika, kemudian keduanya dilepas, maka penggaris yang manakah yang akan lebih dulu jatuh membujur di atas meja?

8.7 Kesetimbangan

Kesetimbangan merupakan salah satu hal penting dalam kehidupan keseharian. Dalam bidang teknik kontruksi bangunan pada konstruksi gedung, jembatan, atap se-

buah stadion, dan struktur bangunan lain sangat bergantung pada kesetimbangan. Begitu pula pada mesin biologis tubuh mahluk hidup, misalnya kesetimbangan pada tulang, otot, dan urat. Kesetimbangan yang dimiliki oleh setiap benda atau sistem tersebut sangat erat hubungannya dengan gaya-gaya dan momen-momennya yang berkerja pada benda tersebut.

Baik benda itu dalam keadaan diam maupun bergerak, keduanya dapat saja menderita gaya luar baik tunggal maupun jamak. Gaya luar tersebut mengakibatkan dua dampak terhadap benda. Pertama, dengan tidak memperhatikan letak titik kerja sejumlah gaya yang bekerja pada sebuah benda akan memengaruhi gerak translasi pada benda. Kedua, bergantung pada titik kerja sejumlah gaya berada, momen gaya total yang bekerja pada sebuah benda memengaruhi gerak rotasi benda. Sebuah benda tegar dikatakan dalam kesetimbangan apabila benda itu tidak mengalami *perubahan* gerak translasi maupun gerak rotasi. Artinya, benda itu tidak mengalami percepatan translasi dan tidak pula mengalami percepatan sudut. Berdasarkan hukum kedua Newton, baik untuk gerak translasi maupun rotasi, benda tegar berada dalam keadaan setimbang manakala resultan gaya dan resultan momen gaya yang bekerja pada benda itu lenyap. Secara matematis

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{dan} \quad \sum \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Penting untuk dicatat, benda tegar yang berada dalam keadaan setimbang tidak harus diam. Ia boleh bergerak, tetapi kecepatan translasi dan kecepatan sudutnya harus tetap. Untuk lebih jelasnya, mari kita pahami beberapa kasus berikut.

Andaikan sebuah benda bermassa M mengalami beberapa gaya luar di titik yang berbeda, seperti ditunjukkan pada Gambar 8.36. Gaya luar tersebut sejumlah n buah gaya yakni $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ dengan vektor posisi masing-masing titik kerja gaya relatif terhadap sumbu koordinat adalah $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \dots, \mathbf{l}_n$. Maka persamaan dinamika benda dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathbf{F}_{total} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = Ma \quad (8.50)$$

dan

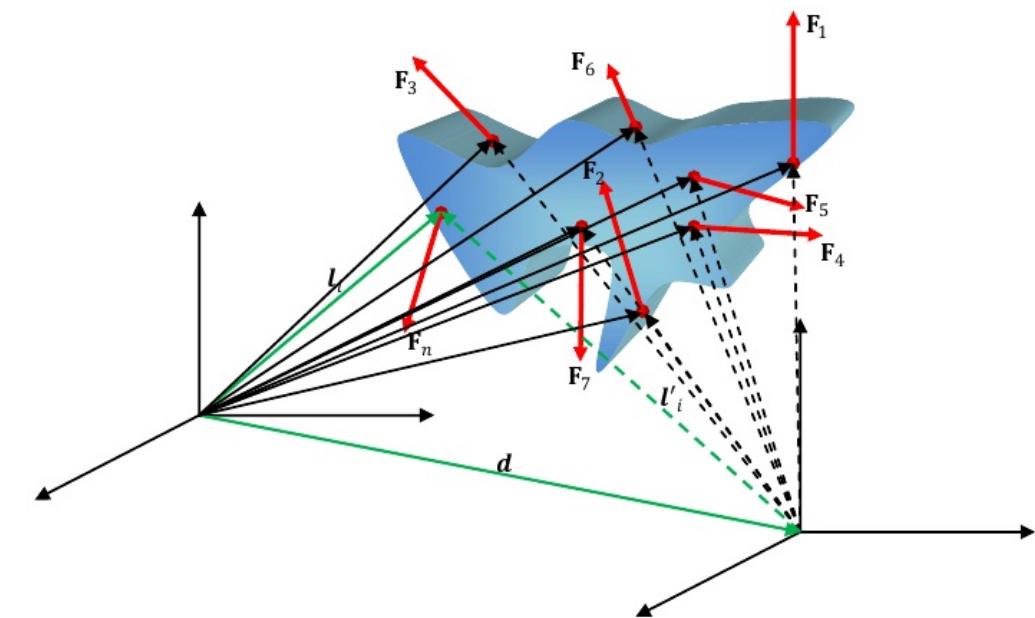
$$\boldsymbol{\tau}_{total} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \dots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i)$$

atau

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \quad (8.51)$$

dengan I adalah momen inersia benda. Besaran a pada persamaan (8.50) adalah percepatan benda yang diakibatkan oleh gaya total \mathbf{F}_{total} sedangkan $d\mathbf{L}/dt$ adalah perubahan momentum sudut tiap satu satuan waktu yang diakibatkan oleh momen gaya total $\boldsymbol{\tau}_{total}$. Seperti yang telah diungkapkan sebelumnya bahwa keadaan setimbang mensyaratkan bahwa baik kecepatan translasi maupun kecepatan sudut tidak mengalami perubahan. Oleh karena itu, baik percepatan translasi a maupun percepatan sudut $\boldsymbol{\alpha}$ keduanya bernilai nol sehingga

Sebuah benda tegar dikatakan dalam kesetimbangan apabila benda itu tidak mengalami *perubahan* gerak translasi maupun gerak rotasi.



Gambar 8.36: Sebuah benda tegar sembarang dikenai sejumlah gaya sebanyak n .

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = M\mathbf{a} = 0 \quad (8.52)$$

dan

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{l}'_i \times \mathbf{F}_i) = 0. \quad (8.53)$$

Dari uraian di atas dapat dilihat bahwa kunci dari kesetimbangan benda adalah jumlahan gaya dan momen gaya yang bekerja pada benda sama dengan nol. Namun demikian, apakah syarat ini dapat berlaku untuk kerangka acuan (koordinat) yang berbeda? Untuk gerakan translasi benda tentu hal ini tidak menjadi persoalan sehingga persamaan (8.52) tetap dapat berlaku. Bagaimana dengan gerakan rotasi benda?

Teorema 8.3: Teorema Invariansi Kesetimbangan

Kesetimbangan benda tegar tidak bergantung pada titik acuan pengamatan.

Teorema di atas dapat dibuktikan sebagai berikut. Perhatikan kembali Gambar 8.36. Andaikan pengamat yang lain mengambil titik acuan yang berbeda. Vektor posisi titik acuan pengamat yang lain itu adalah \mathbf{d} . Dengan pengambilan titik acuan semacam itu, vektor-vektor posisi masing-masing titik kerja gaya terlihat sebagai $\mathbf{l}'_1, \mathbf{l}'_2, \mathbf{l}'_3, \dots, \mathbf{l}'_n$ seperti ditunjukkan oleh anak panah putus-putus pada gambar. Vektor-vektor posisi \mathbf{l}'_i dapat dinyatakan dalam vektor-vektor posisi \mathbf{l}_i sebagai berikut $\mathbf{l}'_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{d}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \tau'_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{l}'_i \times \mathbf{F}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i - \mathbf{d}) \times \mathbf{F}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{d} \times \mathbf{F}_i).
 \end{aligned}$$

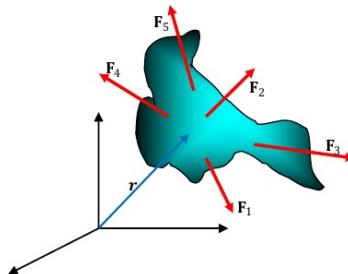
Karena

$$\left(\mathbf{d} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) = \mathbf{d} \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

maka

$$\sum_{i=1}^n \tau'_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n \tau_i = 0. \quad (8.54)$$

Dengan demikian teorema di atas terbukti.



Gambar 8.37: Sebuah benda mengalami lima gaya sebidang dan bertitik tangkap di titik yang sama.

Kasus berikutnya adalah kesetimbangan yang dialami oleh sebuah benda akibat adanya sejumlah gaya seperti diperlihatkan pada Gambar 8.37. Gaya-gaya tersebut tidak sejajar tetapi dari gambar dapat diketahui bahwa gaya-gaya tersebut sebidang, yakni \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 , dan \mathbf{F}_5 . Setiap gaya yang bekerja pada benda tegar dapat dianggap memiliki titik tangkap pada sembarang titik sepanjang garis kerja gaya. Andaiakan resultan gaya yang bekerja pada benda tersebut sama dengan nol dan titik tangkap semua gaya-gaya tersebut sama maka benda dalam keadaan setimbang.

Contoh 8.10

Berapakah berat papan nama “Warung Pecel Solo” pada Contoh 6?

Papan nama pada Contoh 6 merupakan contoh kesetimbangan, yakni tiadanya percepatan baik translasi maupun rotasi. Dalam kasus seperti itu akan berlaku bahwa jumlahan torka-torka dan jumlahan gaya-gaya lenyap. Torka yang bekerja pada batang mendatar selain oleh gaya tegangan tali, juga oleh

gaya berat papan yang bekerja kira-kira di tengah batang. Arah torka ini berlawanan dengan arah torka tegangan tali. Jadi,

$$32,5 \text{ N.m} - \frac{1}{2}|\mathbf{r}|W = 0.$$

Dari persamaan ini didapatkan $W = 2(32,5 \text{ N.m})/|\mathbf{r}| = 50 \text{ N}$

Contoh 8.11

Sebuah batang homogen yang sangat ringan dengan panjang 0,6 meter diberi lubah kecil di tengah-tengah. Kemudian batang itu dipasang di dinding dengan memakunya tepat pada lubang kecil itu. Pada ujung batang sebelah kiri digantungkan selembar baju bermassa 0,3 kg dan yang sebelah kanan selembar jaket bermassa 0,5 kg. Dapat diduga bahwa batang akan “njomplang” ke kanan. Agar itu tak terjadi, batang di sebelah kiri paku ditahan dengan menekannya ke bawah. (a) Bila percepatan gravitasi Bumi setempat $10 \text{ m}/\text{dt}^2$, dimanakah gaya penahan itu harus dilakukan agar gaya penahan itu minimum? (b) Berapakah gaya yang dibutuhkan untuk menahan batang itu? (c) berapakah gaya penahan yang dilakukan oleh paku?

Gambar ?? memperlihatkan situasi dalam persoalan di atas. Dalam gambar, \mathbf{W}_b adalah gaya berat baju, \mathbf{W}_j gaya berat jaket dan \mathbf{F}_p gaya penahan pada paku. Dalam masalah ini, sebagai sumbu putar adalah paku.

(a) Karena resultan torka terhadap paku harus nol, maka dari Gambar ?? tampak bahwa

$$lF + (0,3\text{m})W_b + (0,0\text{m})F_p - (0,3\text{m})W_j = 0.$$

(Momen gaya yang arahnya masuk bidang gambar ditulis negatif). Persamaan ini semakna dengan

$$lF = (0,3\text{m})(0,5\text{kg})(10\text{m}/\text{dt}^2) = 0,6\text{N.m}$$

atau

$$F = \frac{0,6\text{N.m}}{l}.$$

Persamaan terakhir ini mengatakan, F minimum apabila l maksimum, yakni 0,3 meter. Jadi, gaya yang dibutuhkan untuk menahan kayu itu minimum bila dilakukan diujung kayu sebelah kiri.

(b) Besar gaya minimum ini adalah

$$F_{min} = \frac{0,6\text{N.m}}{0,3\text{m}} = 2\text{N}.$$

(c) Gaya pada paku diperoleh dengan konsep kesetimbangan gaya

$$F + F_p - W_b - W_j = 0.$$

(Gaya yang arahnya ke bawah ditulis negatif). Dari persamaan terakhir ini didapatkanlah

$$F_p = W_b + W_j - F_{min} = 5\text{N} + 3\text{N} - 2\text{N} = 6\text{N}$$

dengan arah ke atas.

Uji Ketajaman 8.9

1. Mengapa sebuah tongkat yang panjang sering digunakan oleh pemain sirkus untuk membantu kesetimbangannya ketika berjalan di atas tali?
2. Jika pada sebuah benda bekerja lebih dari satu gaya sedemikian rupa sehingga titik tangkapnya sama, buktikan bahwa terdapat satu titik acuan sehingga resultan momen gaya total nol jika dilihat dari titik acuan itu. Apakah dapat disimpulkan bahwa benda dalam kesetimbangan?

8.8 Usaha, Tenaga, dan Daya

Seperti halnya posisi, kecepatan, percepatan, dan lainnya yang memiliki padanan pada gerak rotasi maka usaha, tenaga, dan daya juga demikian. Dengan menggunakan teorema usaha-tenaga seperti pada gerak translasi, dapat diperoleh padanan untuk ketiganya dalam gerak rotasi.

Perhatikan kembali Gambar 8.29. Sebuah benda bermassa m yang dihubungkan dengan batang tak bermassa sepanjang l . Gaya F bekerja pada benda sedemikian rupa seperti ditunjukkan pada gambar. Gaya ini mengakibatkan benda berotasi dengan sudut rotasi θ . Anggap bahwa selama berotasi tidak ada gaya luar lain yang bekerja. Anggap pula bahwa pengaruh gaya ini hanya mengakibatkan perubahan tenaga kinetik T . Pada saat tertentu katakanlah t_1 tenaga kinetik benda T_1 dan pada saat t_2 tenaga kinetik benda T_2 . Berdasarkan teorema usaha-tenaga maka keadaan ini dapat diwujudkan dalam bentuk

$$\Delta T = T_2 - T_1 = W. \quad (8.55)$$

Dalam gerak translasi tenaga kinetik dinyatakan sebagai $1/2(mv^2)$, dengan v merupakan kecepatan gerak translasi benda. Karena $v = r\omega$ maka tenaga kinetik rotasi dapat dinyatakan dalam bentuk $1/2(mr^2\omega^2)$. Oleh karena itu, tenaga kinetik untuk kasus di atas memenuhi persamaan

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}ml^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}ml^2\omega_1^2 = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Sehingga diperoleh

$$\Delta T = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = W. \quad (8.56)$$

yang memberikan penegasan bahwa usaha W yang dilakukan gaya sebesar F pada benda merubah tenaga kinetiknya dari T_1 menjadi T_2 . Persamaan (8.56) ini memberi petunjuk kepada kita adanya kemungkinan padanan untuk teorema usaha-tenaga pada gerak rotasi.

Untuk perputaran sebesar $d\theta$ maka benda menempuh pergeseran sejauh db yang diberikan oleh $db = ld\theta$. Oleh karena itu, usaha yang dilakukan oleh gaya F adalah

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin \phi)ld\theta$$

dengan $F l \sin \phi = \tau$ maka

$$dW = \tau d\theta. \quad (8.57)$$

Dengan mengintegralkan ke dua sisi dan mengambil batas θ_1 sampai θ_2 untuk sisi sebelah kanan, maka persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta. \quad (8.58)$$

Selanjutnya untuk memperoleh daya yang dimiliki oleh benda, dapat diperoleh dengan jalan menghitung laju perubahan tenaga kinetik benda yakni

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \left(2 \frac{d\omega}{dt} \omega \right) \\ &= I \frac{d\omega}{dt} \omega \\ &= I \omega \end{aligned}$$

atau

$$\frac{dT}{dt} = \tau \omega = P. \quad (8.59)$$

Hasil ini juga dapat diperoleh dengan menurunkan kedua sisi persamaan (8.57) terhadap waktu. Ungkapan yang disajikan dalam persamaan (8.59) ini merupakan padanan daya pada gerak translasi yakni $P = Fv$ dan juga padanan lain yakni $dT = F_x dx$. Meski pun ungkapan-ungkapan di atas ini diturunkan dari kasus khusus sebuah benda titik yang diperlihatkan oleh Gambar 8.29 tetapi ungkapan-ungkapan di atas berlaku untuk benda tegar secara umum. Kenyataan ini dapat ditunjukkan dengan meninjau baik benda tegar yang tersusun atas benda-benda titik maupun benda tegar kontinyu.

8.9 Momentum Sudut

Padanan bagi momentum linier pada gerak translasi adalah momentum sudut. Jika **momentum linier** merupakan perkalian kecepatan suatu benda dengan massaanya, maka **momentum sudut** adalah perkalian kecepatan sudut suatu benda yang berotasi dengan momen inersianya. Jadi, apabila sebuah benda yang berotasi dengan kecepatan ω mempunyai momen inersia I , maka momentum sudut \mathbf{L} benda itu didefinisikan sebagai vektor

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (8.60)$$

Jadi, momentum sudut searah dengan kecepatan sudut, yakni ditentukan dengan kaidah putar kanan. Untuk sebuah benda titik, definisi ini sejalan dengan yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Andaikan sebuah benda bermassa m mengalami gaya dengan lengan gaya sebesar r dari sumbu rotasi. Selanjutnya andaikan benda itu memiliki kecepatan singgung sebesar v yang tegak lurus dengan lengan gaya. Maka besarnya momentum sudut benda seperti yang telah dinyatakan pada persamaan (8.60) dapat tuliskan kembali dalam bentuk

$$L = I\omega = (mr^2)\frac{v}{r} = r(mv) = rp. \quad (8.61)$$

dengan I momen inersia benda dan p besar momentum linier. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam perkalian vektor yakni

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \times \mathbf{p}. \quad (8.62)$$

Terlihat bahwa pada persamaan (8.61) selain sebagai padanan bagi momentum linier pada gerak translasi, momentum sudut L juga memiliki keterkaitan secara langsung dengan momentum linier.

Cermati kembali Gambar 8.29. Pada gerak linier, total gaya yang bekerja pada sebuah benda dapat dinyatakan sebagai laju perubahan momentum linier benda. Sehingga dengan menggunakan persamaan yang telah diperoleh pada persamaan (8.37), untuk kasus tersebut pada Gambar 8.29 momen gaya benda dapat dinyatakan ulang dalam bentuk

$$\tau = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (8.63)$$

Andaikan persamaan (8.63) ditambah sebuah suku yang bernilai nol maka tidak akan memberikan pengaruh apapun terhadap momen gaya benda. Hal ini dapat dilakukan dalam rangka untuk mempermudah mendapatkan persamaan baru yakni momentum sudut dari persamaan ini. Suku tersebut adalah $d\mathbf{l}/dt \times \mathbf{p} = 0$ karena \mathbf{v} dan \mathbf{p} sejajar. Oleh karena itu, persamaan (8.63) dapat juga ditulis sebagai

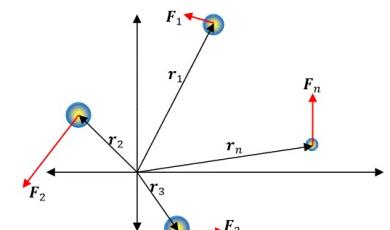
$$\tau = \mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{p}. \quad (8.64)$$

Persamaan ini dalam bentuk yang berbeda yakni dengan aturan turunan hasil kali skalar, sedemikian rupa sehingga

$$\tau = \frac{d}{dt}(\mathbf{l} \times \mathbf{p}). \quad (8.65)$$

Dengan menggunakan persamaan (8.62) yang dinyatakan dalam perkalian hasil kali silang maka diperoleh

$$\tau = \frac{d(\mathbf{l} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (8.66)$$



Gambar 8.38: Momentum sudut dari n buah benda titik.

yang bermakna bahwa momen gaya merupakan laju perubahan momentum sudut. Persamaan (8.66) juga merupakan padanan hukum kedua Newton untuk gerak translasi $\mathbf{F} = dp/dt$. Dari hasil ini, yang menjadi sebuah catatan bahwa gaya \mathbf{F} menyebabkan perubahan momentum linier \mathbf{p} sedangkan momen gaya τ menyebabkan perubahan momentum sudut \mathbf{L} .

Andaikan terdapat n buah benda titik yang masing-masing mengalami sebuah gaya $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$, seperti diperlihatkan oleh Gambar 8.38. Benda-benda titik tersebut masing-masing memiliki vektor posisi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$. Masing-masing gaya menyebabkan perubahan momentum linier $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n$, sedangkan masing-masing momen gaya menyebabkan perubahan momentum sudut $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \dots, \mathbf{L}_n$. Andaikan kecepatan benda-benda tersebut suatu saat adalah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ dan

massa masing-masing benda berturut-turut adalah $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Momentum sudut masing-masing benda diberikan oleh $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$. Momentum sudut total sistem benda itu diberikan oleh

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (8.67)$$

Perubahan momentum sudut tiap satu satuan waktu dapat diperoleh dengan menuangkan persamaan (8.67) terhadap waktu

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i). \quad (8.68)$$

Jika setiap suku jumlahan yang muncul pada ruas paling kanan diselesaikan didapatkan

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (8.69)$$

Suku pertama ruas kanan jelas sama dengan nol. Sementara suku kedua ruas kanan dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}, \quad (8.70)$$

dengan $\boldsymbol{\tau}$ adalah torka total yang bekerja pada sistem n buah partikel itu. Jadi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (8.71)$$

Akhirnya kita dapatkan ungkapan yang serupa dengan ungkapan yang kita dapatkan untuk partikel tunggal.

Sejauh ini yang kita bicarakan adalah sistem n benda titik yang bergerak masing-masing secara bebas. Sekarang kita tinjau seandainya n buah benda titik itu bergerak secara tegar, yakni bahwa masing-masing benda titik tidak bergerak bebas melainkan sedemikian rupa sehingga *jarak antar benda-benda titik satu dengan yang lain selalu tetap*, sebagaimana titik-titik pada benda tegar. Andaikan salah satu benda titik terlihat bergerak melingkar memutari suatu sumbu, maka syarat bahwa jarak antar benda titik itu selalu konstan mengakibatkan bahwa semua benda titik yang lain juga bergerak melingkar dengan kecepatan sudut yang sama walaupun dengan jari-jari lintasan melingkar yang berbeda. Andaikan kecepatan sudut benda-benda tersebut ω . Maka momentum sudut masing-masing benda titik tersebut relatif terhadap sebuah titik adalah

$$\mathbf{L}_i^{\text{titik}} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i). \quad (8.72)$$

Dengan menggunakan teorema faktor tengah yang telah dibahas di Bab Peranti Matematik. maka diperoleh

$$\mathbf{L}_i^{\text{titik}} = m_i[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i]. \quad (8.73)$$

Karena $\mathbf{r}_i = r_i \hat{\mathbf{r}}_i$ dan $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$ maka $\mathbf{L}_i^{\text{titik}}$ dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{L}_i^{\text{titik}} = m_i r_i^2 \omega [\hat{\boldsymbol{\omega}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) \hat{\mathbf{r}}_i]. \quad (8.74)$$

Oleh karena itu, momentum sudut total relatif terhadap satu titik tetap adalah

$$\mathbf{L}^{\text{titik}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i^{\text{titik}} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega [\hat{\boldsymbol{\omega}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) \hat{\mathbf{r}}_i]. \quad (8.75)$$

Momentum sudut terhadap sumbu putar adalah

$$\mathbf{L}^{\text{sumbu}} = (\mathbf{L}^{\text{titik}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}) \hat{\boldsymbol{\omega}}. \quad (8.76)$$

Besarnya $\mathbf{L}^{\text{titik}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\text{titik}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega [\hat{\boldsymbol{\omega}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) \hat{\mathbf{r}}_i] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega [|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2 - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega [1 - \cos^2 \theta_i] \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i \omega \\ &= \sum_{i=1}^n I_i \omega, \end{aligned} \quad (8.77)$$

dengan $I_i = m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i$ adalah momen inersia benda nomor i terhadap sumbu putar. Oleh karena itu, persamaan (8.76) dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{L}^{\text{sumbu}} = \left(\sum_{i=1}^n I_i \omega \right) \hat{\boldsymbol{\omega}} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (8.78)$$

dengan $I = \sum_{i=1}^n I_i$ adalah momen inersia total sistem terhadap sumbu putar. Jika persamaan terakhir diturunkan terhadap waktu maka akan diperoleh

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}^{\text{sumbu}} = \frac{d}{dt} I \boldsymbol{\omega} = I \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \hat{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \right). \quad (8.79)$$

Untuk kasus arah kecepatan sudut tetap, maka

$$\tau = \frac{d}{dt} \mathbf{L}^{\text{sumbu}} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \hat{\boldsymbol{\omega}} = I \boldsymbol{\alpha} \hat{\boldsymbol{\omega}} = I \boldsymbol{\alpha} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = I \boldsymbol{\alpha}, \quad (8.80)$$

dengan $\boldsymbol{\alpha} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)$ dan $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}$ sehingga $\boldsymbol{\alpha} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}$.

Sebuah benda mungkin saja menderita banyak gaya yang mengakibatkan sejumlah momen gaya bekerja pada benda tersebut. Tentu saja jumlahan atau resultan momen gaya tersebut dimungkinkan sama dengan nol. Andaikan momen gaya yang bekerja pada suatu benda sama dengan nol maka berlaku hukum kelestarian momentum sudut. Jika torka yang bekerja pada sebuah benda sama dengan nol maka momentum sudut benda konstan. Jika gaya total pada gaya itu juga nol maka berdasarkan hukum Newton tentang gerak translasi maka momentum linier itu nol. Secara matematis hukum ini dapat dinyatakan sebagai

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \sum \tau = 0$$

maka

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Kembali ke sistem mekanik yang diperlihatkan oleh Gambar 8.38 dengan masing-masing benda titik bergerak sendiri-sendiri (tidak harus gerak benda tegar). Pusat massa sistem benda titik tersebut didefinisikan sebagai titik di dalam ruang dengan posisi \mathbf{R} yang ditentukan dari persamaan

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}.$$

Jika $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$, maka persamaan terakhir dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i(t)}{M}. \quad (8.81)$$

Selama pergerakan masing-masing benda itu, $\mathbf{R}(t)$ mengimbangi kebergantungan pusat massa terhadap fungsi t , jadi pusat massa sistem benda itu juga berubah.

Sekarang kita hitung momen gaya total oleh gravitasi relatif terhadap pusat sistem koordinat. Momen gaya gravitasi itu hendak dituliskan sebagai τ_g . Jadi

$$\tau_g = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}.$$

Jika momen gaya total itu kita hitung relatif terhadap pusat massa maka kita dapatkan

$$\tau_g = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i \mathbf{g} = 0.$$

Jadi pusat massa boleh juga dipahami sebagai titik tumpu atau titik acuan sedemikian rupa sehingga momen gaya total akibat gaya gravitasi sama dengan nol, atau titik tumpu sehingga momen-momen gaya gravitasi mencapai kesetimbangan. Oleh karena itu, pusat massa disebut juga titik berat.

Jika kedua ruas persamaan (8.81) diturunkan terhadap waktu maka

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i(t)}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t)}{M}. \quad (8.82)$$

atau $M\mathbf{V} = \mathbf{P}$. Selanjutnya, jika persamaan (8.82) diturunkan terhadap waktu diperoleh

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (8.83)$$

Jika terdapat kesetimbangan gaya, yakni $\sum \mathbf{F}_i = 0$ maka $d\mathbf{V}/dt = 0$ yakni pusat massa bergerak dengan kecepatan konstan meskipun masing-masing benda titik bergerak dengan kecepatan yang berubah-ubah. Hal ini menunjukkan bahwa gaya total bekerja pada pusat massa sistem benda titik itu. Apakah torka total sama dengan torka oleh gaya total?

Andaikan

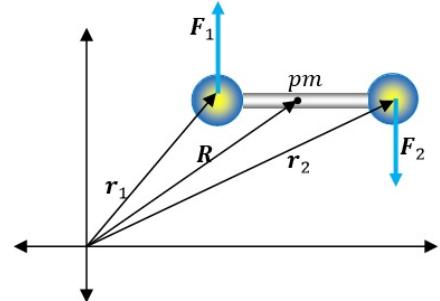
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n$$

gaya total yang bekerja pada sistem. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (8.37), momen gaya yang bekerja pada pusat massa

$$\begin{aligned} \tau_{pm} &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{R} \times \frac{d(M\mathbf{V})}{dt}. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Mengingat momen gaya total yang bekerja pada sistem adalah $\tau = \sum \tau_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ maka τ_{pm} tidak sama dengan τ . Maka momen gaya yang bekerja pada pusat massa tidak sama dengan momen gaya total, yakni momen gaya total yang bekerja pada sistem tidak sama dengan momen gaya yang diakibatkan oleh resultan gaya yang bekerja pada sistem. Meskipun momen gaya total sama dengan nol, momen gaya total belum tentu sama dengan nol. Untuk lebih memahami hal ini, perhatikan sistem mekanik yang ditunjukkan pada Gambar 8.39.

Pada gambar itu terlihat bahwa gaya yang bekerja pada masing-masing benda memiliki arah berlawanan. Andaikan $|\mathbf{F}_1|$ sama dengan $|\mathbf{F}_2|$. Gaya total yang bekerja pada sistem itu adalah resultan kedua gaya. Oleh karena itu, gaya yang bekerja pada pusat massa sama dengan nol dan momen gaya τ_{pm} oleh gaya total terhadap titik manapun sama dengan nol. Tetapi momen gaya total terhadap titik acuan manapun tidak sama dengan nol.



8.10 Perpaduan Translasi dan Rotasi

Sadarkah Anda bahwa sering kali dalam setiap kesempatan berhubungan dengan fenomena fisika yang disebut menggelinding? Ketika sedang menaiki kendaraan baik sepeda angin, sepeda motor, becak, pedati, atau mungkin juga mobil, maka Anda sedang terhubung dengan konsep menggelinding.

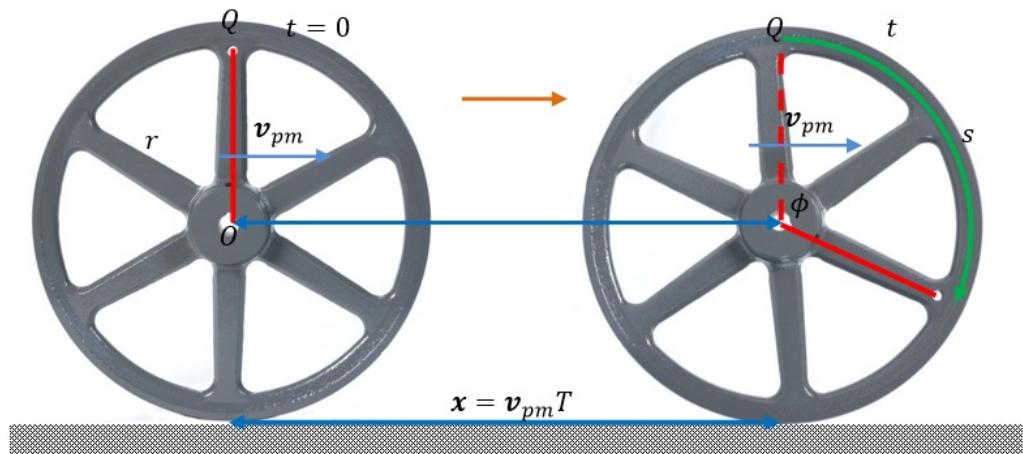
Menggelinding merupakan perpaduan antara gerak translasi dan gerak rotasi. Seperti yang disampaikan melalui teorema Charles.

Teorema 8.4: Teorema Charles

Pergeseran umum yang mungkin terjadi pada sebuah benda tegar adalah gabungan antara gerak translasi dan rotasi

Gambar 8.39: Sistem dua benda titik yang menderita gaya \mathbf{F}_1 dan \mathbf{F}_2 .

Perhatikan Gambar 8.40, yang memperlihatkan sebuah silinder tanpa tergelincir. Andaikan kecepatan menggelindungnya v_{pm} dan jarak yang ditempuh sejauh



Gambar 8.40: Sebuah roda menggelinding terhadap poros O dengan kecepatan v_{pm}

x. Ketika sedang bergerak terlihat bahwa garis merah (juga titik Q) ikut berrotasi menempuh sudut ϕ sehingga garis busur yang dilalui titik tersebut sama dengan perpindahan pusat massa O sejauh $x = s$. Andaikan jari-jari roda adalah r maka s dapat dituliskan sebagai

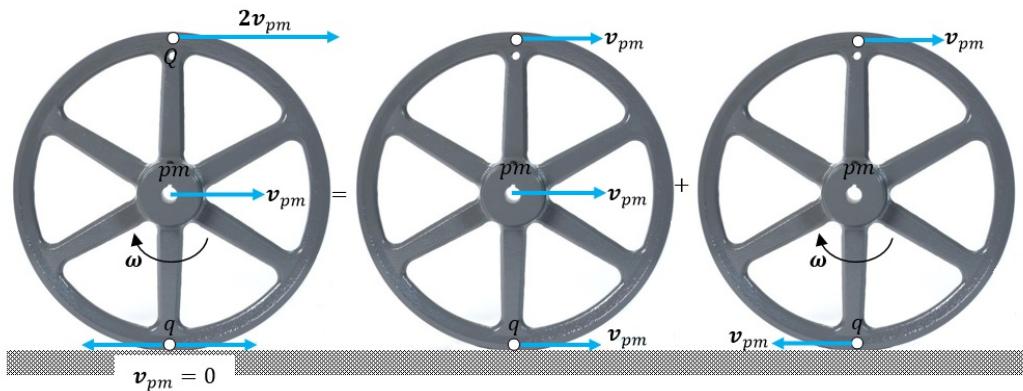
$$s = r\phi.$$

Kecepatan linier v_{pm} sama dengan perubahan posisi pusat massa atau x terhadap waktu yang dibutuhkan sedangkan kecepatan rotasi ω sama dengan perubahan sudut ϕ terhadap waktu yang sama. Oleh karena itu,

$$v_{pm} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\phi) = \frac{dr}{dt}\phi + r\frac{d\phi}{dt} = r\omega. \quad (8.85)$$

Dengan kecepatan linier tersebut, percepatan roda terhadap pusat massanya adalah

$$a_{pm} = \frac{dv_{pm}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = \frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha. \quad (8.86)$$



Gambar 8.41: Sebuah roda mengalami gerak translasi sekaligus rotasi. Kecepatan linier dituliskan sebagai v_{pm} dan kecepatan sudut roda ω

Seperti yang telah dinyatakan dalam Teorema 8.10, sebuah benda dalam hal ini roda dimungkinkan untuk mengalami gerak translasi dan rotasi. Gambar 8.41 memperlihatkan bahwa gerak menggelinding dapat dipandang sebagai "jumlahan" antara gerak translasi (gambar tengah) dan gerak rotasi (gambar paling kanan). Pada

gambar paling kiri, kecepatan linier di titik q sama dengan nol karena merupakan jumlah dua kecepatan linier dengan arah yang berbeda, sedangkan di titik Q kecepatan linier roda $2v_{pm}$ karena berasal dari dua kecepatan linier dengan arah yang sama. Sementara kecepatan sudut roda ω adalah kecepatan sudut yang berasal dari gerak rotasi murni.

Terkait dengan kecepatan linier di titik Q yakni $2v_{pm}$ dan kecepatan linier di titik q yakni $v_{pm} = 0$, dapat ditinjau melalui gerak rotasi murni roda saja. Perhatikan titik q di dasar roda pada Gambar 8.42. Titik ini dapat dijadikan titik pusat rotasi setiap titik yang ada pada tepi roda. Titik-titik pada tepi roda memperlihatkan kecepatan singgung atau kecepatan linier yang selalu tegak lurus terhadap perpanjangan garis yang diambil dari titik q . Karena titik q menjadi pusat rotasi, titik-titik di tepi roda mempunyai kecepatan sudut yang sama yakni ω . Oleh karena itu, titik yang terletak di titik Q atau di puncak roda akan memiliki kecepatan linier sebesar

$$v_{puncak} = (2r)\omega = 2v_{pm} \quad (8.87)$$

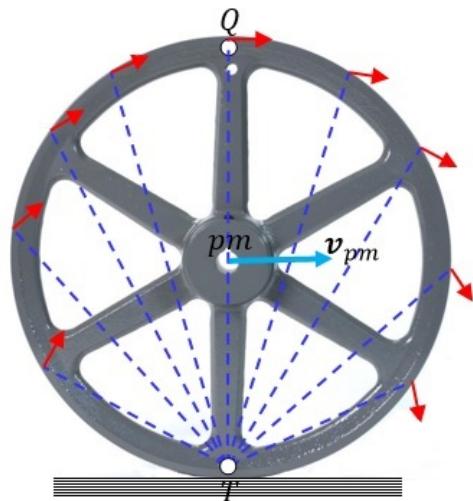
dan di titik q atau di titik dasar roda kecepatan linier roda sebesar

$$v_{dasar} = (0.r)\omega = 0. \quad (8.88)$$

Telah disepakati bahwa gerak menggelinding merupakan gabungan antara gerak rotasi murni dan gerak translasi murni. Dari kesepakatan ini dapat diambil kesimpulan bahwa tenaga kinetik roda T_{roda} yang bergerak menggelinding juga merupakan jumlah tenaga kinetik rotasi T_{rotasi} dan tenaga kinetik translasi T_{trans} . Tinjau kembali Gambar 8.42. Titik q merupakan titik kontak antara roda dengan bidang landasan (lantai). Titik ini dapat dijadikan sumbu putar roda. Dengan menggunakan teorema sumbu sejajar dan andaikan roda dianggap sebagai sebuah cakram homogen dengan momen inersia roda terhadap pusat massa I_{pm} , maka momen inersia roda terhadap titik q adalah

$$I_q = I_{pm} + Mr^2 \quad (8.89)$$

dengan M adalah massa total roda. Persamaan (8.89) dan $v_{pm} = rw$ akan memberikan tenaga kinetik roda T_{roda} menggelinding sebagai



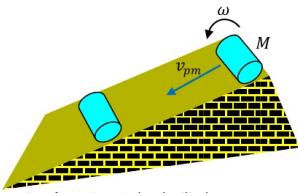
Gambar 8.42: Rotasi murni sebuah roda dengan kecepatan sudut sebesar ω dan kecepatan linier roda sebesar v_{pm}

$$\begin{aligned} T_{roda} &= \frac{1}{2}(I_{pm} + Mr^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{pm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{pm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{pm}^2 \\ &= T_{rotasi} + T_{trans}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Selanjutnya, persamaan (8.90) dapat diterapkan semisal untuk kasus seperti ditunjukkan pada Gambar 8.43. Sebuah silinder homogen bermassa M , dengan panjang L , dan berjari-jari r . Tinggi puncak bidang miring dan kemiringan bidang seca-

ra berturut-turut adalah h dan θ . Silinder bergerak menggelinding tanpa tergelincir dengan kecepatan sudut ω dan kecepatan linier v_{pm} . Dengan menggunakan nilai momen inersia silinder pejal dan $\omega = v_{pm}/r$, persamaan (8.90) dapat diungkapkan sebagai

$$\begin{aligned} T_{silinder} &= \frac{1}{2}I_{pm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{pm}^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{pm}\left(\frac{v_{pm}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{pm}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{I_{pm}}{r^2} + M\right)v_{pm}^2. \end{aligned} \quad (8.91)$$



Andaikan dipandang sistem tersusun atas silinder dan Bumi, maka dengan menggunakan teorema kelestarian tenaga mekanik E , besar kecepatan linier pusat massa pada saat silinder mencapai dasar bidang miring v_{pm1} dapat diperoleh dari

Gambar 8.43: Sebuah silinder menggelinding tanpa slip pada sebuah bidang dengan kemiringan yakni θ

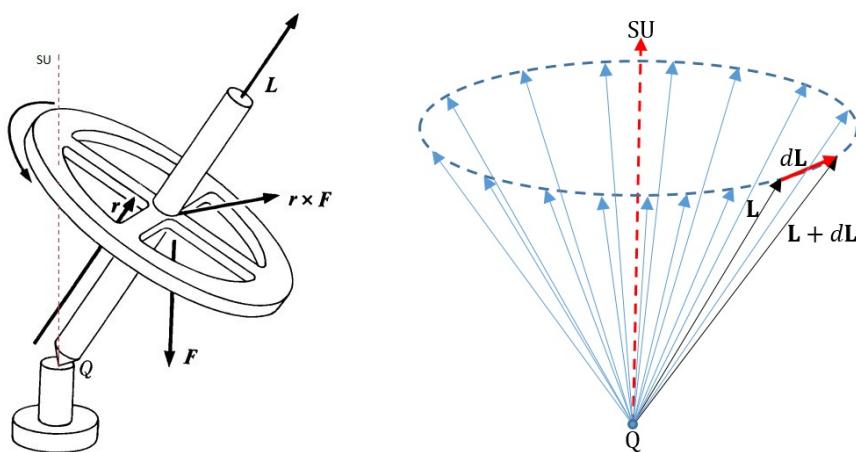
$$\begin{aligned} E_{awal} &= E_{akhir} \\ T_{awal} + V_{awal} &= T_{akhir} + V_{akhir} \\ 0 + Mgh &= \frac{1}{2}\left(\frac{I_{pm}}{r^2} + M\right)v_{pm1}^2 + 0, \end{aligned}$$

$$v_{pm1} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{I_{pm}}{Mr^2} + 1\right)}}. \quad (8.92)$$

8.11 Topik Khusus dalam Rotasi

Gerak Giroskop dan Gasing

Giroskop merupakan peranti yang digunakan sebagai acuan orientasi dengan menggunakan prinsip momentum sudut. Giroskop memiliki sumbu utama (SU) lihat Gambar 8.44. Giroskop secara umum terdiri dari sebuah "piringan" dengan sumbu yang bebas bergerak. "Piringan" yang dimaksud tidak harus berupa piringan atau cakram yang penting "piringan" memiliki kesetangkupan sumbu. Artinya setiap bagian piringan di satu titik akan ditemukan pada bagian piringan yang lain yang berseberangan dengan sumbu. Andaikan r_i adalah vektor posisi suatu bagian piringan giroskop yang bermassa m_i , maka akan ada bagian piringan yang lain yang bermassa m_k terletak pada posisi r_k , dengan $m_i = m_k$ dan $r_i = r_k$, sedemikian rupa sehingga r_i , r_k , dan ω terletak pada satu bidang datar dengan ω membagi sudut antara r_i dan r_k menjadi sama besar. Akibatnya, penjumlahan kedua ruas paling kanan persamaan (8.75) saling melenyapkan, sehingga momentum sudut piringan terhadap titik manapun yang berada pada sumbu putar selalu searah dengan kecepatan sudut piringan. Sumbu piringan ini dapat memiliki sembarang orientasi. Walaupun sumbu piringan mengalami sembarang orientasi, hal ini tidak memengaruhi kecepatan sudut piringan.



Gambar 8.44: Giroskop mengalami torka akibat gaya berat yang menuntun "presesi" momentum sudut terhadap sumbu utama.

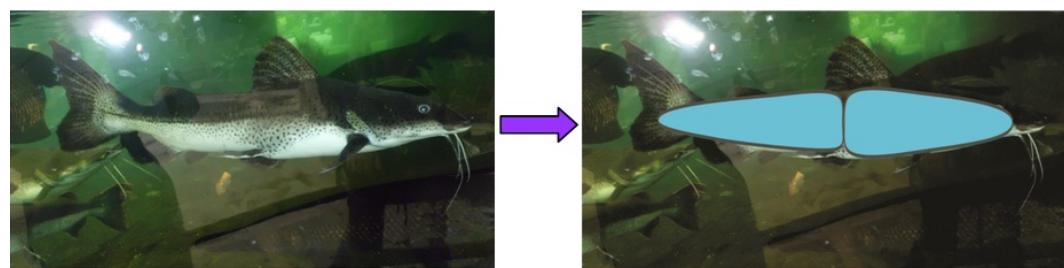
Gaya berat piringan giroskop yang bekerja pada pusat massa piringan yang berada pada sumbu piringan mengakibatkan torka $r \times F$. Karena piringan memiliki momentum sudut L maka torka tersebut mengakibatkan adanya perubahan momentum sudut piringan sebesar dL setiap satu satuan waktu yang arahnya sejajar dengan arah torka yang mendatar. Akibatnya perubahan momentum sudut selalu mengarah mendatar, sehingga besarnya momentum sudut konstan. Ini berarti momentum sudut mengalami gerak memutar sumbu utama giroskop. Gerak ini disebut *gerak presesi*. Jadi keberadaan gaya berat menuntun sumbu piringan giroskop untuk berpresesi bukan menjatuhkan piringan.

Prinsip gerak giroskop banyak digunakan di berbagai bidang teknologi. Pembuatan girokompas untuk salah satu peranti pada kapal laut, pesawat terbang, pesawat luar angkasa, dan berbagai kendaraan bermotor. Sementara itu, efek gerak giroskop terjadi pada gerak gasing, bumerang, dan beberapa jenis benda lainnya.

Pengantar Gerak Benda Tegar Tersambung

Pernahkah Anda mengamati secara serius hewan-hewan seperti ular, buaya, atau hewan melata yang lainnya? Sebagian mungkin pernah. Sering kali saat berkunjung ke kebun binatang yang menjadi salah pusat perhatian adalah perilaku hewan melata seperti ular misalnya. Bagi sebagian orang ular merupakan hewan yang sangat menggelikan sekaligus mengerikan. Menggelikan karena cara bergerak ular tersebut dan mengerikan karena bisa beracun. Ular yang tidak memiliki kaki ternyata mampu bergerak melata di tanah, menaiki pepohonan, dan bahkan berenang. Lalu, bagaimana cara ular melakukan aktivitas tersebut? Ular bergerak dengan cara mengubah bentuk geometri badannya. Menariknya perubahan bentuk tubuh ular jika dilihat lebih jeli, diikuti dengan perubahan volume tubuhnya yakni dapat mengecil dan membesar sesuai dengan kehendak gerak yang diinginkannya.

Sementara itu, hewan seperti ikan dan sejenisnya diyakini oleh kebanyakan masyarakat bergerak menggunakan sirip. Namun, apakah benar ikan bergerak dengan menggunakan sirip? Jika benar, bagaimana dengan ikan semisal ikan Patin sebesar lengan dapat bergerak dengan hanya mengandalkan dua sirip selebar telunjuk atau bagaimana dengan ikan seperti Lumba-lumba atau bahkan Paus? Sirip ikan sebenarnya bukan alat untuk menggerakkan badan ikan akan tetapi hanya untuk membantu keseimbangan gerakan ikan. Sama seperti ular, ikan juga bergerak dengan



Gambar 8.45: Ikan dapat dimodelkan menjadi dua buah benda tegar tersambung

cara mengubah bentuk tubuhnya. Akan tetapi, perubahan bentuk tubuh ikan tidak diikuti oleh perubahan volume tubuhnya.

Dalam rangka mengubah bentuk tubuhnya, hewan-hewan seperti disebutkan pada paragraf di atas dapat dimodelkan dengan benda-benda tegar yang tersambung menjadi satu bagian. Semisal ikan, dapat dimodelkan menjadi dua buah atau tiga buah benda tegar. Sementara ular dapat dimodelkan menjadi sejumlah n buah benda tegar. Benda-benda tegar tersebut dihubungkan dengan engsel-engsel sedemikian rupa sehingga dinamakan **Benda Tegar Tersambung**.

9

Matahari kita merupakan salah satu dari milyaran bintang yang ada di Bimasakti. Matahari merupakan pusat tata surya kita. Akan tetapi, tidak setiap bintang merupakan pusat tata surya. Jadi tidak setiap bintang memiliki planet. Bagaimana kita dapat mengetahui bahwa sebuah bintang merupakan pusat sebuah tata surya? Bintang yang terlihat bergoyang-goyang dapat dipastikan merupakan pusat tata surya karena bintang semacam itu mengorbit pusat massa tata surya yang tidak terlalu jauh dari pusat bintang itu.

9.1 Hukum Kepler

9.2 Gravitasi Oleh Benda Titik

9.3 Gravitasi Oleh Benda-benda Besar

9.4 Massa Lembam versus Massa Gravitasi

9.5 Gravitasi Newton dan Hukum Kepler

9.6 Medan Gravitasi

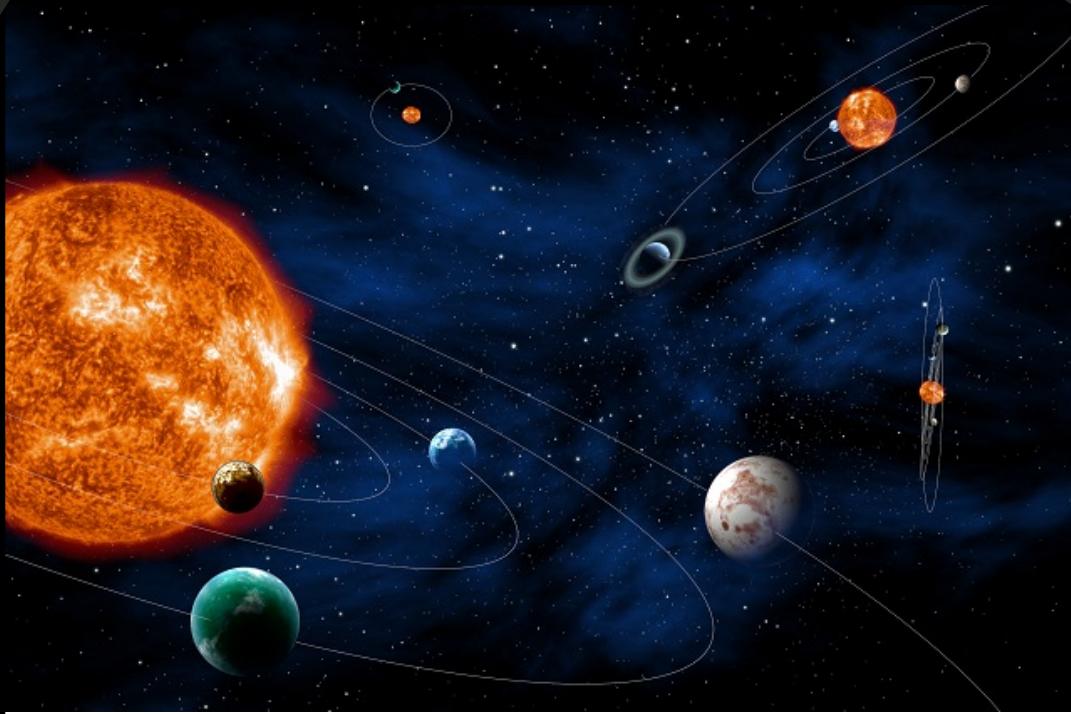
9.7 Tenaga Potensial Gravitasi

9.8 Orbit Satelit

9.9 Pandangan Einstein tentang Gravitasi

9.10 Topik Khusus

9.11 Lebih Jauh tentang Gravity Probe-B



Indonesia memang kaya. Banyak anugrah yang patut disyukuri. Tengoklah lingkungan sekitar Anda. Mudah bagi Anda untuk menemukan berbagai macam jenis buah-buahan. Pada saat musim buah tiba, Anda akan melihat berbagai jenis buah bergelantungan pada tangkai-tangkai pohonnya. Semenjara di tanah buah-buah busuk berserakan. Mengapa selalu saja buah-buahan itu jatuh ke tanah? Mengapa saat buah terlepas dari tangkainya tidak melayang atau menjauh dari Bumi? Tentu akan menjadi sangat menarik andai saja kita mau membandingkan fenomena gerak buah-buahan tersebut dengan fenomena gerak Bulan, Matahari, dan bintang-bintang yang ada di langit. Jika buah-buahan itu terlepas dari tangkainya, tidak ada lagi yang menahan buah-buahan itu dan buah-buahan itu akan jatuh ke tanah (Bumi). Mengapa Bulan, Matahari, dan bintang-bintang yang ada di langit tidak jatuh ke Bumi meskipun tiada tangkai yang menahan benda-benda angkasa itu? Andaikan kita selama ini tidak begitu peduli dengan gejala-gejala tersebut, maka mungkin saat inilah kita dapat mulai mempedulikannya dan menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut. Dengan demikian, kita tidak lagi menganggap jatuhnya buah-buahan atau dedaunan kering hanya sekedar menjadi pertanda perubahan musim semata akan tetapi sesuatu yang lebih penting dari pada itu. Di dalamnya terdapat pengetahuan, sarat dengan makna yang dapat membawa kita untuk semakin dewasa dalam memandang alam dan semakin mengenali watak dan perilakunya. Hal inilah yang selanjutnya dapat kita manfaatkan sebagai panduan untuk bersikap dengan baik terhadap watak dan perilaku alam semesta.

Dalam bab ini kita akan mengenali dan memahami gravitasi, sesuatu yang menyebabkan jeruk, sawo, durian dan dedaunan jatuh ke tanah. Gravitasi juga merupakan sesuatu yang menyebabkan bulan tetap beredar mengelilingi Bumi pada lintasannya dan Bumi serta planet-planet lain beredar "mengelilingi" Matahari pada lintasannya yang berbentuk elips. Gravitasi adalah interaksi paling lemah di antara interaksi-interaksi mendasar yang lain semisal elektromagnetik, interaksi kuat (yang bertanggung jawab terhadap bersatunya proton-proton dan netron-netron dalam inti atom) dan interaksi lemah (yang bertanggung jawab terhadap adanya peluruhan beta). Oleh karena interaksi gravitasi sangat lemah, gravitasi dapat diabaikan semisal dalam kajian partikel-partikel elementer. Bukan hanya itu, gravitasi pun terlalu lemah untuk dapat diamati, semisal antara benda-benda seukuran buah kelapa, bahkan juga untuk benda-benda yang memiliki massa beribu-ribu kilogram. Interaksi gravitasi baru teramat apabila benda-benda yang terlibat dalam sistem memiliki ukuran (dalam hal ini massa) yang sangat besar seperti Bulan, Bumi, planet-planet, Matahari, dan bintang-bintang, serta benda-benda langit lainnya. Kekuatan interaksi gravitasi kira-kira 10^{-38} kali interaksi kuat, 10^{-36} kali interaksi elektromagnetik, dan 10^{-25} kali interaksi lemah. Interaksi gravitasi memiliki jangkauan tak terhingga sama seperti interaksi elektromagnetik. Sementara jangkauan untuk interaksi kuat dan lemah berturut-turut hanya 10^{-15} m dan 10^{-18} m.

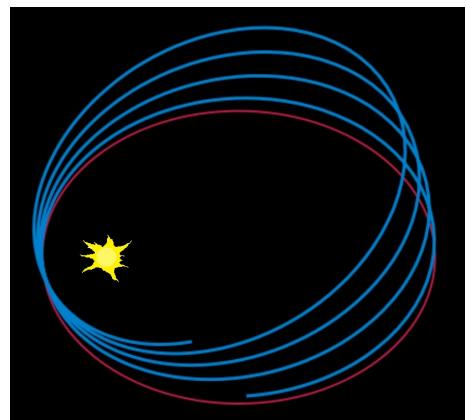
Secara umum gravitasi berkaitan langsung dengan pengamatan benda-benda langit. Pengamatan terhadap benda-benda langit sudah dilakukan oleh manusia sejak dahulu kala. Keterangan adanya pengamatan pertama kali ditemukan di India, yakni di *Rig Veda* pada 2000 SM. Pada saat itu, hasil pengamatan yang dilakukan sebelum 2000 SM tidak dituliskan dalam sebuah buku melainkan hanya melalui pengajaran dari generasi ke generasi. Sekitar tahun 1800 SM, *Yajnavalkya* mengamati keserasan gerak antara Matahari dan Bulan. *Lagadha* pada tahun 1350 SM menulis teks tentang astronomi. Ramalan perbintangan sekitar tahun tersebut telah melibatkan posisi Matahari, planet-planet, serta menganggap Matahari sebagai bintang. Pada abad ke 5, *Aryabhatta* mengemukakan teori *heliosentrik* gravitasi, yang kemudian diterjemahkan sebagai "*Aryabhatta's Magnum Opus*". Dia menuliskan bahwa 1.582.237.500 putaran Bumi sama dengan 57.753.336 orbit Bulan. Pada abad ke 7 SM buku yang ditulis oleh *Brahmagupta*, menjelaskan keliling Bumi sebagai 5000 *Yojana*¹ (36.000 km). Selain jejak sejarah tersebut masih terdapat beberapa catatan sejarah lain yakni oleh para pengamat benda langit dari Mesir, Babilonia, Yunani, Cina, dan Arab.

Pada abad ke 16 *Nicholas Kopernik* menjelaskan kerumitan gerak planet-planet dalam bentuk lintasan yang mengelilingi Matahari, semisal planet Merkurius, Venus, Bumi, Mars, Jupiter, dan Saturnus. Sistem Kopernik ini selanjutnya diadopsi oleh Galilei dan Kepler yang seperti kita ketahui kemudian keduanya menghasilkan banyak hal penting di bidang ilmu astronomi dan astrofisika. *Yohannes Kepler* (1571-1630) sendiri dalam menyusun hukum-hukum peredaran benda-benda langit menggunakan data-data yang telah diperolehnya bersama gurunya, yakni astronom Denmark, bernama *Tycho Brahe* yang hampir 20 tahun mengamati secara langsung untuk mengumpulkan data-data gerak benda-benda langit. Data-data itu sampai saat ini masih merupakan data-data yang sahih, hingga pada akhirnya *Isaac Newton* (1642-1727) yang lahir setahun setelah kematian Galilei mampu menjelaskan gerak planet-planet dalam tata surya itu dengan hukum yang lebih mendasar, yakni hukum tentang gerak dan gravitasi Newton. Hukum-hukum Kepler yang empiristik diperoleh dari hukum-hukum (postulasi) Newton.

¹1 Yojana=7,2 mil

Satu hal yang gagal dijelaskan oleh gravitasi Newton adalah presesi perihelion orbit Merkurius. Seperti yang telah kita ketahui, bahwa Merkurius mempunyai orbit yang paling eksentrik di antara orbit-orbit planet yang lain, dengan eksentrisitas 0,206. Oleh karena itu, presesi perihelion orbit Merkurius lebih mudah teramat dibandingkan dengan presesi perihelion orbit planet yang lain. Hasil pengamatan memperlihatkan bahwa perihelion orbit Merkurius mengalami presesi lebih dari 15° tiap abad [?].

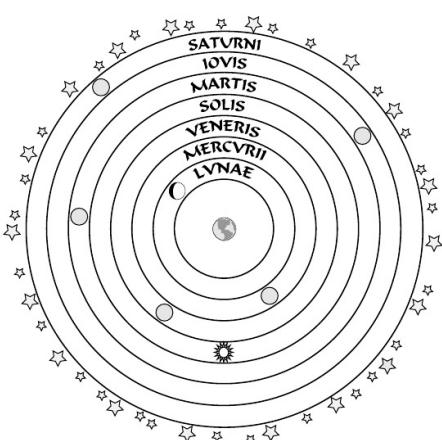
Jawaban atas persamaan gerak yang dirumuskan untuk gerak planet-planet berdasarkan hukum tentang gerak dan gravitasi Newton tidak menghasilkan informasi tentang presesi perihelion orbit Merkurius. Hal berikutnya yang gagal dijelaskan oleh gravitasi Newton adalah pembelokan cahaya oleh gravitasi. Hukum gravitasi Newton mensyaratkan kepemilikan massa agar sebuah partikel dapat dipengaruhi oleh gravitasi. Foton, partikel cahaya, tidak memiliki massa. Oleh karena itu, menurut Newton, tidak dipengaruhi oleh gravitasi. Dalam kenyataan, banyak hasil pengamatan yang memperlihatkan gejala pembelokan cahaya oleh gravitasi. Untuk menjelaskan kedua gejala alam itu diperlukan teori baru tentang gravitasi. Salah satu teori baru tentang gravitasi yang dapat menjelaskan kedua gejala alamiah tersebut adalah teori gravitasi Einstein.



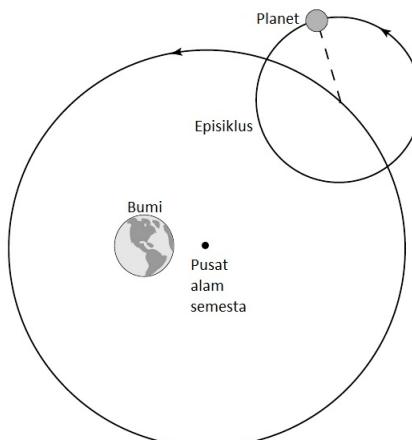
Gambar 9.1: Presesi perihelion orbit Merkurius

9.1 Hukum Kepler

Dahulu orang mengira bahwa Bumi merupakan pusat alam semesta. Bumi dipandang sebagai pelat datar yang sangat luas (bahkan mungkin tak bertepi), sedangkan langit dikira sebagai atap melengkung tempat Matahari, Bulan, bintang-bintang dan segala macam benda langit beredar pada lintasannya masing-masing. Setelah diketahui bahwa Bumi ternyata berupa sebuah bola raksasa, pandangan itu sedikit bergeser, tetapi Bumi tetap dipandang sebagai pusat alam semesta. Sementara Matahari, Bulan dan berbagai benda langit berputar mengelilingi Bumi pada bola-bola langit. Masing-masing benda beredar pada masing-masing bola langit. Begitulah pandangan Eudoxus pada abad ke 3 SM. Dalam pandangan ini, Bumi ditempatkan sebagai pusat alam semesta. Jadi, pandangan Eudoxus bersifat geosentris. Seorang



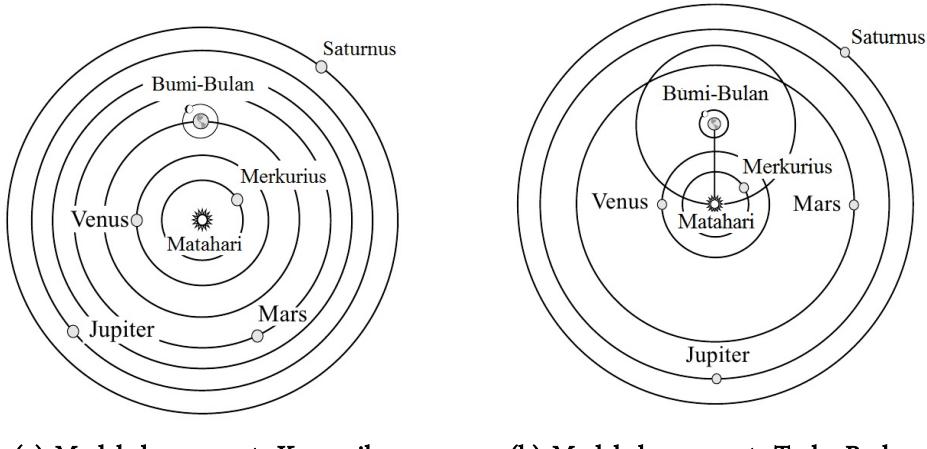
(a) Model alam semesta Eudoxus.



(b) Model alam semesta Ptolemeus.

Gambar 9.2: Model Alam Semesta

astrolog sekaligus pakar geografi Yunani kuno yang bernama Claudius Ptolemeus yang hidup antara tahun 100-170 Masehi membawa pandangan baru tentang alam semesta. Dalam pandangan ini, Bumi dianggap diam di suatu tempat sementara



Gambar 9.3: Model Alam Semesta

planet-planet bergerak menyusuri lingkaran yang disebut sebagai *episiklus*. Pusat episiklus bergerak menyusuri lingkaran besar yang berpusat di suatu titik diam bersama Bumi.

Pandangan bahwa Bumi merupakan pusat alam semesta mulai ditinggalkan oleh sarjana-sarjana muslim abad pertengahan dan diperkuat oleh seorang sarjana Polandia bernama Nikolai Kopernik (Copernicus) (1473-1543 Masehi) dalam bukunya *De revolutionibus orbium coelestrium* (Tentang Peredaran Bola-bola Langit). Dalam model kosmologi Kopernik Matahari merupakan pusat alam semesta, planet-planet bergerak mengelilingi Matahari dan Bulan mengelilingi Bumi. Tycho Brahe pun memiliki pandangan yang tersendiri tentang alam semesta. Sebagaimana Eudoxus, Brahe menempatkan Bumi sebagai alam semesta. Sementara Matahari dan Bulan bergerak mengelilingi Bumi. Selanjutnya planet-planet bergerak mengelilingi Matahari.

Seperti telah disinggung sebelumnya, menjelang akhir abad ke enam belas, Tycho Brahe mengepalai sebuah observatorium besar di Denmark. Di sana, ia melakukan pengukuran posisi planet-planet selama duapuluh tahun secara seksama dengan peranti yang dinamakan *quadran*. Data-data yang diperoleh Brahe ini kemudian 'diwarisi' oleh asistennya, yakni Johannes Kepler, astronom berkebangsaan Jerman. Dari data-data Brahe itulah kemudian Kepler mendapatkan pola-pola menarik tentang orbit dan periode planet-planet dalam berevolusi mengelilingi Matahari. Kepler menyatakan pola-pola keteraturan itu dalam tiga hukum empirisnya. Pola-pola yang didapatkan Kepler ini sejalan dengan pandangan Kopernik bahwa Matahari merupakan pusat alam semesta. Berikut hendak dibicarakan hukum empirik Kepler satu per satu.

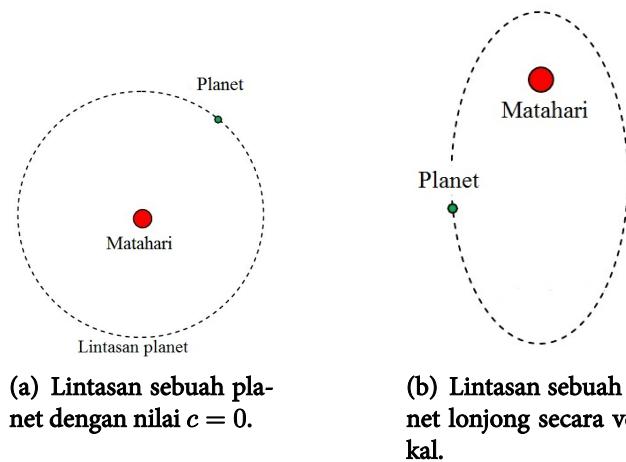
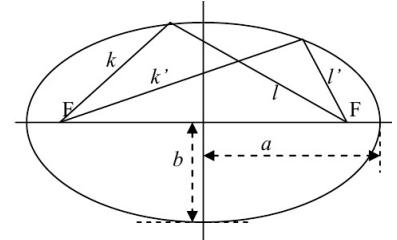
Hukum Pertama Kepler

Hukum pertama Kepler menyatakan bahwa semua planet bergerak pada lintasan yang berbentuk elips dengan Matahari terletak pada salah satu titik fokusnya. Untuk memahami hukum pertama ini, perhatikanlah Gambar 9.4. Pada gambar tersebut

but diperlihatkan sebuah elips dengan setengah sumbu panjang a dan jarak $2a$ disebut sebagai **sumbu panjang**. Terlihat pula pada gambar, setengah sumbu pendek b dan jarak $2b$ disebut sebagai **sumbu pendek**. Elips secara matematis dapat didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya dari dua titik tetap (titik ini disebut titik fokus F) memiliki jumlahan yang sama, misalnya $k + l$ sama dengan $k' + l'$. Dapat ditunjukkan bahwa jumlahan ini sama dengan dua kali sumbu panjang, sehingga dapat dinyatakan bahwa

$$k + l = k' + l' = 2a.$$

Jarak masing-masing titik fokus dari titik pusat elips kita sebut c dan memenuhi kaitan $a^2 = b^2 + c^2$. Jika c mengecil, maka panjang b mendekati a dan elips tampak lebih ‘gemuk’ mendekati bentuk sebuah lingkaran. Jika jarak antara kedua titik fokus itu nol, maka $b = a$. Dalam hal ini, elips tidak lain adalah sebuah lingkaran. Jadi, lingkaran adalah kasus khusus dari elips.



Gambar 9.4: Sebuah elips dengan setengah sumbu panjang a dan setengah sumbu pendek b .

Gambar 9.5: Bentuk lintasan planet

Sebaliknya, semakin jauh jarak antara kedua titik fokus, semakin lonjong elips itu. Keadaan ekstrem terjadi ketika jarak antar fokus sama dengan jarak sumbu panjang, yakni ketika $c = a$. Dalam hal ini elips berupa sebuah garis lurus. Perbandingan antara c dan a dikenal sebagai eksentrisitas atau **kelonjongan** yakni

$$e = \frac{c}{a}. \quad (9.1)$$

Jadi, lingkaran adalah elips dengan kelonjongan nol. Sementara garis adalah elips dengan kelonjongan satu.

Selain lintasan-lintasan yang telah ditunjukkan di atas, masih terdapat bentuk lintasan lain seperti lintasan berbentuk parabola dan hiperbola. Lintasan parabola memiliki kelonjongan elips lebih dari satu, yakni

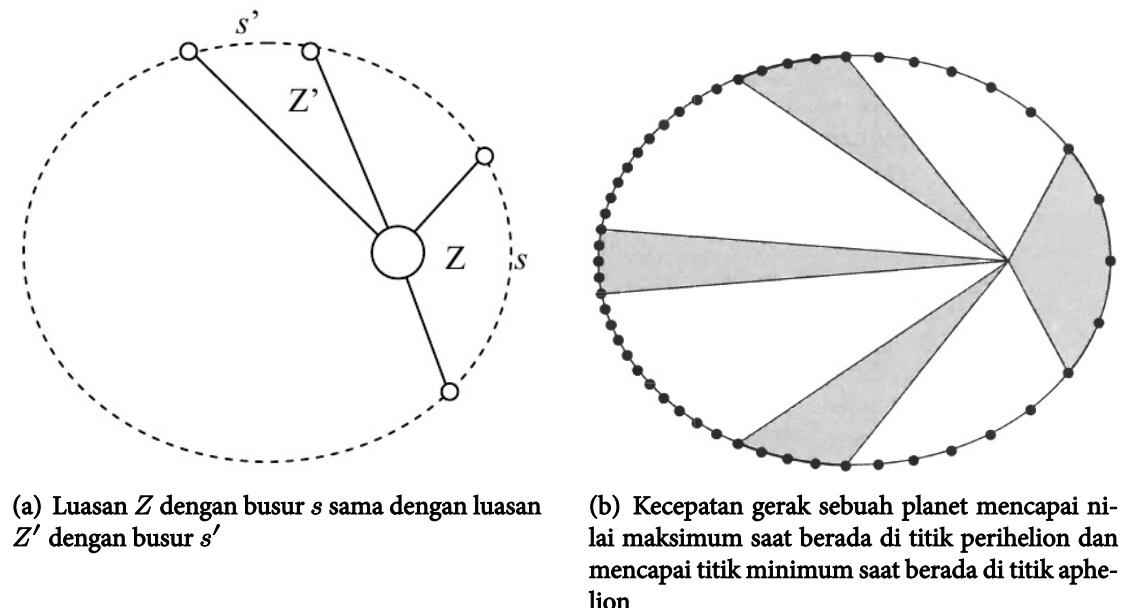
$$e > 1. \quad (9.2)$$

Lintasan semacam ini biasanya dimiliki oleh benda-benda langit yang mengorbit Matahari semisal beberapa komet tertentu. Jika sebuah benda langit mengorbit Matahari dengan eksentrisitas orbit lebih dari satu, maka orbit benda langit itu terbuka. Artinya, benda langit itu hanya sekali mengunjungi Matahari.

Gambar 9.5(c) memperlihatkan orbit sebuah planet mengelilingi Matahari. Sesuai dengan hukum pertama Kepler, orbit planet itu berbentuk elips dan Matahari berada pada salah satu titik fokusnya. Titik A disebut titik aphelion dan merupakan titik paling jauh (dari Matahari atau sebuah bintang) yang dilewati oleh planet-planet. Sementara titik yang paling dekat yang dilewati oleh planet disebut titik perihelion, yakni titik P .

Hukum Kedua Kepler

Hukum kedua Kepler menyatakan bahwa jari-jari vektor yang menghubungkan Matahari ke sebuah planet akan menyapu luasan yang sama dalam waktu yang sama. Untuk memahami hukum kedua Kepler mari perhatikan Gambar 9.6(a). Luas wilayah yang kita sebut Z sama dengan luas wilayah yang kita sebut Z' . Tetapi, busur s lebih panjang dibandingkan dengan busur s' . Hukum kedua Kepler memastikan bahwa busur s dan busur s' ditempuh oleh planet pada selang waktu yang sama. Akibatnya, dalam menempuh busur s' planet bergerak lebih cepat dibandingkan dengan ketika planet menempuh busur s . Oleh karena itu, semakin dekat ke perihelion, semakin cepat planet itu bergerak.



Gambar 9.6: Revolusi

Sementara, semakin dekat ke aphelion, semakin lambat planet itu bergerak (Gambar 9.6(b)). Pada subbab berikutnya akan dijelaskan bahwa hal ini terkait dengan kelestarian momentum sudut planet.

Hukum Ketiga Kepler

Hukum ketiga Kepler menyatakan bahwa kuadrat kala revolusi sebuah planet sebanding dengan pangkat tiga setengah sumbu panjang orbit planet itu sendiri. Angkaikan T_P kala revolusi suatu planet dan a_P setengah sumbu panjang orbit planet itu, maka hukum ketiga Kepler dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$\frac{T_P^2}{a_P^3} = C, \quad (9.3)$$

dengan C suatu tetapan yang nilainya berbanding terbalik dengan massa Matahari (lihat uraian mendatang). Apabila setengah sumbu panjang orbit Bumi disepakati sebagai 1 SA (SA singkatan dari satuan astronomis), dan kala revolusi dinyatakan dengan satu tahun bumi, maka $C = 1$. Akan tetapi, C dapat dinyatakan dalam bentuk yang lain, yaitu

$$C = (365,5 \times 24 \text{ jam})^2 / (1 \text{ SA})^3 \approx 76947984,0 \text{ jam}^2/\text{SA}^3.$$

Tabel 9.1: Data Planet

Planet	Periode (tahun)	Setengah Sumbu Panjang	Eksentrisitas
Merkurius	0.241	0.387	0.206
Venus	0.615	0.723	0.007
Bumi	1.000	1.000	0.017
Mars	1.881	1.524	0.093
Jupiter	11.86	5.203	0.048
Saturnus	29.46	9.539	0.056
Uranus	84.01	19.18	0.047
Neptunus	164.8	30.06	0.009

Dengan mengukur setengah sumbu panjang orbit atau jarak rata-rata suatu planet orang dapat menghitung kala revolusi planet itu. Atau sebaliknya, dengan mengukur kala revolusi suatu planet orang dapat menghitung jarak rata-rata planet itu dari Matahari.

Contoh 9.1

Komet Kopff memiliki eksentrisitas orbit 0,54. Jarak Komet Kopff pada saat berada di titik perihelion dari Matahari pada 2 Juli 1996 adalah 1,58 SA. Hitung setengah sumbu panjang orbitnya, dan hitung juga jarak komet itu ketika di titik aphelion dari Matahari. Hitung kala revolusi orbitnya. Hitung Bulan dan tahun ketika komet tersebut untuk pertama kalinya di titik perihelion di abad ke-21 (dalam satu tahun ada 365,24 hari.)

Andaikan jarak perihelion dengan Matahari kita beri simbol p . Kita ketahui definisi eksentrisitas adalah $e = c/a$ dan jarak perihelion sama dengan setengah sumbu panjang dikurangi jarak fokus dari pusat

$$p = a - c. \quad (9.4)$$

Dari definisi eksentrisitas, diperoleh

$$a - ae = p \quad (9.5)$$

$$a(1 - e) = p \quad (9.6)$$

$$a = p/(1 - e). \quad (9.7)$$

Dengan memasukkan nilai eksentrisitas orbit 0,54 dan jarak perihelion 1,58 SA diperoleh setengah sumbu panjang orbit komet $a = 3,43$ SA.

Jarak aphelion dari Matahari adalah $a + c$. Dengan $c = ea$, maka jarak aphelion adalah $a(1 + e) = 5,28 \text{ SA}$.

Kala revolusi komet Kopff yaitu $T = \sqrt{a^3} = 6,35$ tahun, sehingga pada abad ke 21, komet tersebut pertama kali sampai di perihelion pada November 2002.

Contoh 9.2

Hitunglah jarak rata-rata planet Mars dari Matahari apabila kala revolusinya 666,9 hari Mars dan satu hari Mars sama dengan 1,03 hari Bumi.

Kala revolusi planet Mars sama dengan $666,9 \times 1,03$ hari Bumi = 686,9 hari Bumi. Jadi, $T_M = 686,9 \times 24 \text{ jam} = 16485,6 \text{ jam}$. Dari persamaan (9.3) jelaslah bahwa

$$a_M = \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{C}} = 1,5 \text{ SA}.$$

Contoh 9.3

Sebuah asteroid mengorbit Matahari dengan orbit elips. Pada saat asteroid berjarak 2,5 SA dari Matahari, asteroid tersebut bertabrakan dengan sebuah komet yang sedang melintas sehingga asteroid tersebut berhenti, kemudian tentu saja jatuh ke Matahari. Perkirakan waktu yang dimiliki asteroid tersebut sebelum membentur fotosfer Matahari?

Setelah tertabrak oleh komet, asteroid tersebut akan jatuh ke Matahari melintasi garis lurus. Garis lurus tersebut dapat dipandang sebagai orbit dengan eksentrisitas 1. Oleh karena itu, jarak 2,5 SA tersebut merupakan sumbu panjang orbit elips, sehingga $a = 1,25 \text{ SA}$. Dengan demikian periode asteroid dengan orbit semacam itu seharusnya menurut hukum Kepler adalah

$$T = \sqrt{a^3 C}. \quad (9.8)$$

Karena satuan yang dipilih adalah SA untuk jarak, dan tahun untuk periode, maka $C = 1$. Dengan nilai tersebut, maka periode orbit asteroid tersebut adalah 1,398 tahun. Karena Matahari berada di fokus, dan fokus yang dimaksud berada di perihelion maka waktu yang dibutuhkan untuk sampai di pusat Matahari adalah setengah kali periode, yakni

$$(0,5)T = 0,699 \text{ tahun}.$$

Tetapi sebelum sampai di pusat Matahari asteroid sudah menabrak fotoster terlebih dahulu. Berhubung ukuran Matahari dapat diabaikan terhadap jarak awal asteroid tersebut, maka waktu yang dimaksud tidak jauh dari 0,699 tahun.

Uji Ketajaman 9.1

1. Sebuah planet memiliki orbit sedemikian rupa sehingga sumbu panjangnya jauh lebih besar daripada sumbu pendeknya. Sebutkan dan jelaskan hal-hal yang istimewa akibat dari situasi seperti itu!

2. Sebuah planet memiliki orbit sedemikian rupa sehingga sumbu panjangnya hampir sama dengan sumbu pendeknya. Sebutkan dan jelaskan hal-hal yang istimewa akibat dari situasi seperti itu!
3. Gambarlah beberapa elips. Salah satu cara membuat elips adalah dengan memanfaatkan dua batang paku, seutas benang, plat kayu tipis seukuran dengan kertas A4 dan tentu saja sebatang pensil atau bolpoin. Tancapkan kedua paku pada titik yang Anda pilih sebagai titik-titik fokus elips yang akan Anda lukis. Ikatkan ujung-ujung benang pada masing-masing paku. Panjang benang sesuai kebutuhan. Dengan menggunakan pensil atau bolpoin Anda dapat menggambar elips dengan panduan benang tersebut. Benang memandu Anda agar garis yang Anda gores dengan pensil pada kertas selalu melewati titik-titik yang jumlahan jaraknya dari kedua fokus selalu sama, yakni sama dengan panjang tali yang Anda pasang.
4. Mengapa planet yang orbitnya berupa lingkaran memiliki laju tangensial yang tetap?
5. Jarak perihelion Bumi dari Matahari adalah 1 SA. Orbit Bumi dan Orbit Komet Kopff (lihat Contoh 9.1) tidak beririsan. Mengapa?

9.2 Gravitasi Oleh Benda Titik

Seperti telah dikemukakan pada bagian pengantar, Kepler dalam merumuskan hukum-hukumnya mengacu pada data-data empiris yang telah dikumpulkan bersama Brahe selama duapuluh tahun. Hukum Kepler merupakan pola matematis yang sesuai dengan pola keteraturan alam paling tidak berupa data-data hasil pengamatan. Pertanyaannya, adakah suatu hukum yang lebih mendasar sedemikian rupa sehingga hukum-hukum Kepler dapat disimpulkan (dideduksi) darinya? Dengan kata lain, alasan hukum Kepler harus berlaku dapat dipahami dari hukum yang lebih mendasar itu. Di sinilah peranan Newton menjadi sangat menonjol.

Semua orang menyadari bahwa setiap benda jatuh ke tanah. Bisa jadi, disadari juga oleh kebanyakan orang bahwa penyebab semua itu adalah adanya gaya tarik Bumi. Tetapi bahwa antara dua benda saling tarik-menarik sangat sulit untuk dipercaya. Hal ini wajar karena seperti telah dijelaskan di muka bahwa interaksi gravitasi merupakan interaksi terlemah di antara interaksi-interaksi fundamental yang kita kenal. Masalah ini juga diperburuk oleh kenyataan bahwa interaksi gravitasi bekerja pada suatu jarak yang seolah tanpa adanya persentuhan antara benda yang berinteraksi. Tetapi Newtonlah orang pertama yang menyadari adanya gaya atau interaksi semacam itu. Bukan saja menyadari, tetapi dia juga menyajikan resep untuk menghitungnya secara kuantitatif. Dengan resep tersebut ia dapat menunjukkan kebenaran ketiga hukum Kepler.

Hukum gravitasi Newton dapat disarikan dari buku *Philosophiaæ Naturalis Principia Mathematica* tahun 1687. Dalam buku tersebut, Newton mengemukakan perilaku gravitasi sebagai berikut

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiae in singulis.

[*Prop. VII. Theor. VII, Philosophiaæ Naturalis Principia Mathematica, 411.*]

(Gravitasi berlaku antar sembarang benda, yang besarnya berbanding lurus dengan banyaknya zat yang dikandung oleh benda itu.) dan

Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè quadratum distantie locorum à particulis.

[Corol. 2, Prop. VII, Theor. VII, Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 411].

(Gaya gravitasi antar partikel-partikel sembarang benda berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antar partikel.)

Sekarang kita meninjau dua buah benda yang ukurannya boleh diabaikan apabila dibandingkan dengan jarak antara keduanya. Anggapan semacam ini dapat diterima misalnya dalam hal Matahari dan planet-planet, Bumi dan Bulan dan lain sebagainya. Jarak rata-rata planet Merkurius (planet terdekat) dari Matahari adalah $5,79 \times 10^{10}$ meter, sedangkan jari-jari Matahari $6,96 \times 10^8$ meter. Jadi, jari-jari Matahari kira-kira satu per seratus kali jarak Matahari ke Venus. Dua benda dalam keadaan semacam itu dapat disebut sebagai partikel titik atau benda titik. Andaikan "banyaknya zat" dua partikel titik itu masing-masing adalah m_1 dan m_2 serta terpisah oleh jarak sejauh r_{21} . Dalam hal ini, banyaknya zat yang terkait dengan gravitasi disebut massa gravitasi, dan dibedakan dari banyaknya zat yang menentukan kelembaman sebuah benda atau massa inersial. Teori gravitasi Newton seperti dikutip di atas, mengatakan bahwa kedua benda itu akan saling tarik dengan gaya yang masing-masing sebesar

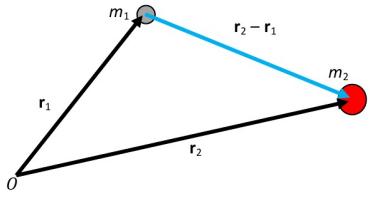
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}, \quad (9.9)$$

dengan G adalah suatu tetapan yang disebut tetapan *gravitasi umum*. Tetapan ini pertama kali diukur oleh Henry Cavendish. Nilai pengukuran terakhir tahun 2013 tetapan G adalah $6,67545(18) \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$ (lihat Bab 2). Perhatikan bahwa pada persamaan (9.9) terdapat suku kuadrat jarak antara kedua benda yang ditinjau. Andaikan tidak terdapat pengurangan atau penambahan massa (seperti kasus komet yang mendekati Matahari), besar kecilnya gaya tarik-menarik antara keduanya hanya dipengaruhi oleh kuadrat jaraknya. Perilaku seperti ini membuat hukum gravitasi Newton dikenal sebagai hukum kuadrat terbalik.

Persamaan (9.9) dapat dinyatakan dalam bentuk vektor. Sekarang, andaikan ditinjau dua buah benda pada titik tertentu. Benda pertama bermassa m_1 terletak pada vektor posisi \mathbf{r}_1 dan benda kedua bermassa m_2 terletak pada posisi \mathbf{r}_2 seperti diperlihatkan pada Gambar 9.7. Maka posisi relatif benda kedua dilihat dari benda pertama tidak lain merupakan vektor $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Menurut Newton, benda kedua akan menderita gaya gravitasi \mathbf{F}_{21} karena tarikan oleh benda pertama. Gaya \mathbf{F}_{21} secara vektor diberikan oleh

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{G m_1 m_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21}. \quad (9.10)$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa gaya ini berarah menuju benda pertama. Sebagai reaksinya, benda kedua akan menarik benda pertama dengan gaya \mathbf{F}_{12} yang besarnya



Gambar 9.7: Gaya gravitasi antara dua buah benda bermassa.

sama dengan F_{21} tetapi dengan arah berlawanan seperti ditunjukkan pada Gambar 9.8. Jadi, F_{12} diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12}. \quad (9.11)$$

Apabila dua buah bola masing-masing bermassa 0,1 kg dan pusat kedua bola itu terpisah oleh jarak 5 cm, maka besar gaya tarik-menarik antara kedua bola itu adalah $2,67 \times 10^{-10}$ N. Sebuah gaya yang sangat-sangat kecil, bukan? Wajar saja kalau dalam keseharian, interaksi gravitasi antara dua benda kecil semacam ini tidak teramati.

Besarnya gaya gravitasi menurut Newton bergantung dari massa benda-benda yang berinteraksi. Semakin besar massa benda-benda yang berinteraksi, semakin kuat gaya gravitasinya. Oleh karena itu, bagi Newton benda-benda yang tak bermassa tidak akan saling berinteraksi secara gravitasi. Foton atau gelombang elektromagnetik, misalnya, tidak akan terpengaruh oleh gaya gravitasi. Akan tetapi di kemudian hari ditemukan terjadinya pembelokan cahaya oleh tumpukan massa. Hasil pengamatan ini merupakan pukulan tersendiri bagi teori gravitasi Newton.

Sejauh ini telah dibahas interaksi antara dua buah benda titik bermassa seperti ditunjukkan pada persamaan (9.9) dan (9.10). Dalam kenyataannya benda titik tidak hanya dua tetapi banyak dan mungkin tidak terhitung jumlahnya. Oleh karena itu, interaksi yang terjadi pun tidak hanya antara dua buah benda titik saja, tetapi juga memungkinkan untuk lebih dari itu.

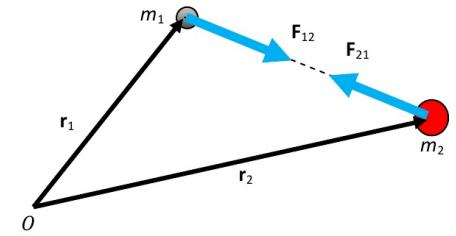
Andaikan pada suatu sistem partikel terdapat n buah benda titik dengan massa masing-masing benda $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Masing-masing benda memiliki vektor posisi terhadap titik O yakni berturut-turut $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$, dan \mathbf{r}_n seperti diperlihatkan pada Gambar 9.9. Oleh karena itu menurut Newton, salah satu benda katakanlah benda pertama akan menderita gaya sebanyak $n-1$ buah gaya yakni $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{13}, \mathbf{F}_{14}$, sampai dengan \mathbf{F}_{1n} . Andaikan gaya yang diberikan oleh benda pertama dituliskan sebagai \mathbf{F}_1 dan dengan menggunakan prinsip super posisi, maka gaya ini dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \dots + \mathbf{F}_{1n} \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^2}\mathbf{r}_{13} - \frac{Gm_1m_4}{r_{14}^2}\mathbf{r}_{14} - \dots - \frac{Gm_1m_n}{r_{1n}^2}\mathbf{r}_{1n} \\ &= -Gm_1\left(\frac{m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12} + \frac{m_3}{r_{13}^2}\mathbf{r}_{13} + \frac{m_4}{r_{14}^2}\mathbf{r}_{14} + \dots + \frac{m_n}{r_{1n}^2}\mathbf{r}_{1n}\right) \end{aligned}$$

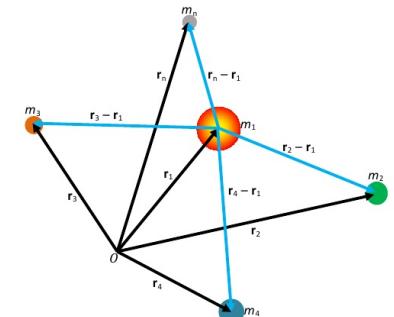
atau

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{1i}^2} \mathbf{r}_{1i}, \quad (9.12)$$

dengan $\mathbf{r}_{1i} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i$. Persamaan (9.12) dapat diterapkan untuk sembarang partikel di antara n buah partikel itu. Oleh karena itu, gaya total yang dialami oleh partikel nomor j adalah



Gambar 9.8: Gaya tarik menarik antara dua buah benda bermassa sama tetapi arah gaya berlawanan satu sama lain.



Gambar 9.9: Gaya tarik menarik antara massa pertama dengan massa $n-1$ dengan mengabaikan interaksi yang terjadi pada benda lainnya.

$$\mathbf{F}_j = -Gm_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{m_i}{r_{ji}^2} \mathbf{r}_{ji} \quad (9.13)$$

dengan $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Persamaan (9.13) menggambarkan gaya keseluruhan sesaat yang dialami oleh partikel nomor j . Oleh karena itu, dalam persamaan tersebut \mathbf{r}_{ji} merupakan fungsi waktu. Berdasarkan hukum Newton tentang gerak, maka gaya \mathbf{F}_j akan sama dengan perubahan momentum partikel nomor j . Jika massa partikel-partikel tersebut konstan maka didapatkan persamaan gerak sebagai berikut,

$$-G \left(\frac{m_j}{m_j^I} \right) \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{m_i}{r_{ji}^2} \mathbf{r}_{ji} = \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2}, \quad (9.14)$$

dengan m_j^I adalah massa inersial benda nomor j . Permasalahan dengan keadaan seperti ini sering disebut sebagai masalah n buah benda dan merupakan salah satu isu penting dalam astrofisika menyangkut kestabilan. Sistem tata surya kita sesungguhnya merupakan sistem yang tersusun atas n buah partikel. Jadi, masalah kestabilan sistem tata surya kita merupakan isu penting.

Massa Gravitasi dan Massa Lembam

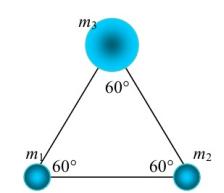
Dalam pembicaraan hukum Newton tentang gerak, diperkenalkan konsep massa yang terkait dengan kelembaman suatu benda, yakni keengganannya untuk mengubah gerak, sehingga semakin besar massa suatu benda semakin enggan benda itu untuk mengubah gerakan. Ini ditandai dengan kecilnya percepatan. Massa suatu benda dalam pembahasan hukum Newton tentang gerak, sebagaimana telah disinggung sebelumnya, disebut massa lebam atau massa inersial.

Pada bab ini kita juga menggunakan konsep tentang massa. Akan tetapi, konsep massa yang kita bicarakan kali ini dikaitkan dengan gravitasi. Massa dalam artian ini merupakan atribut (sifat) suatu benda yang mengakibatkan benda itu melakukan gaya gravitasi pada benda lain atau ditarik oleh benda lain. Sebagaimana sebelumnya, massa dalam kaitan ini disebut massa gravitasi.

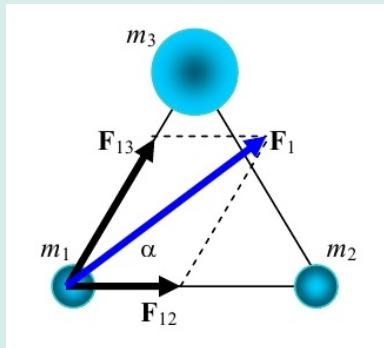
Samakah keduanya? Eksperimen-ekeperimen yang sangat lanjut menunjukkan bahwa kedua massa itu identik, massa gravitasi sama dengan massa lebam (Lihat lebih jauh pada Subbab 9.4). Akibatnya, apabila gesekan udara diabaikan, semua benda di permukaan Bumi akan jatuh dengan cara yang sama (percepatan yang sama), berapapun massanya. Hal ini, secara umum diperlihatkan oleh persamaan (9.14) dengan $m_j/m_j^I = 1$. Bahkan secara umum gerak benda dalam medan gravitasi tidak bergantung pada massa benda itu. Masalah ini bahkan akan membawa kita ke pemikiran baru tentang hakekat gravitasi.

Contoh 9.4

Perhatikan Gambar 9.10. Tiga buah bola masing-masing bermassa $m_1 = 1\text{ kg}$, $m_2 = 2\text{ kg}$, dan $m_3 = 3\text{ kg}$ berturut-turut dipasang pada titik-titik sudut segitiga sama sisi dengan sisi 20 cm. Berapakah gaya total yang dialami oleh bola pertama karena tarikan dua bola yang lain?



Gambar 9.10



Gambar 9.11

Untuk menjawab persoalan ini terlebih dahulu tinjaulah Gambar 9.11. Dalam hal ini $r_{21} = r_{23} = r_{13} = 20\text{cm}$. Gaya gravitasi yang dialami oleh bola pertama karena kehadiran bola kedua adalah

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = 3,3 \times 10^{-9}\text{N}.$$

Gaya gravitasi yang dialami oleh bola pertama karena kehadiran bola ketiga adalah

$$F_{13} = G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} = 5,0 \times 10^{-9}\text{N}.$$

Gaya gravitasi total yang diderita oleh bola pertama merupakan sultan dari kedua gaya tersebut. Karena kedua gaya ini membentuk sudut 60° , maka gaya total pada bola pertama besarnya diberikan oleh

$$F_1 = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2 + 2F_{12}F_{13} \cos 60^\circ} = 7,2 \times 10^{-9}\text{N}.$$

Arah gaya F_1 diberikan oleh α dan diperoleh

$$\sin \alpha = \frac{F_{13} \sin 60^\circ}{F_1} = 0,60$$

dan

$$\cos \alpha = \frac{F_{12} + F_{13} \sin 60^\circ}{F_1} = 0,81.$$

Sehingga sudut α sebesar $36,3^\circ$.

Uji Ketajaman 9.2

- Andaikan Anda meletakkan 10 buah benda di suatu tempat di angkasa luar yang jauh dari benda-benda angkasa. Apa yang akan terjadi dengan benda-benda itu?
 - jika benda-benda itu dilepas dari keadaan diam satu terhadap yang lain?
 - jika benda-benda itu dilepaskan dengan kecepatan awal tertentu?
- Dapatkah sebutir pasir dianggap sebuah partikel titik ketika kita menghitung gaya gravitasi yang ditimbulkan olehnya pada sebutir pasir yang lain yang menempel padanya? Jelaskan mengapa demikian.
- Apa akibatnya apabila tetapan gravitasi umum setengah dari nilai tetapan saat ini atau bernilai $5 \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$?
- Mengapa selalu ada dua peristiwa yaitu pasang naik dan pasang surut dalam satu hari?

9.3 Gravitasi Oleh Benda-benda Besar

Masalah muncul saat kita meninjau benda-benda di atas permukaan Bumi atau benda-benda yang berukuran cukup besar sehingga tidak dapat diabaikan terhadap jarak antar anggota sistem. Itulah yang dimaksud dengan istilah “benda-benda besar” dalam bagian ini. Pada awalnya kita akan menyajikan pembahasan untuk benda-benda yang memiliki “simetri bola”. Tetapi sebelum membahasnya lebih jauh, mari kita pahami yang dimaksud dengan kaidah kulit bola. Kaidah tersebut tersirat dalam buku *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Si Globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique, in regionibus que à centris aequaliter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiae inter centra.

[Prop. VIII. Theor. VIII, Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 412].

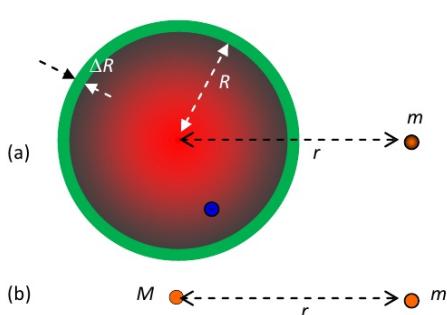
(Dalam hal dua bola yang saling tarik-menarik secara gravitasi, jika sebaran massa kedua bola itu merata di seluruh permukaannya, gaya yang dialami masing-masing bola berbanding terbalik dengan kuadrat jarak kedua pusatnya.) Terlihat dari kutipan tersebut bahwa interaksi antara dua buah kulit bola setara dengan interaksi antara dua titik massa dengan massa yang sama dengan massa masing-masing kulit bola dan terletak di pusat kulit bola.

Kaidah kulit bola secara formal diungkapkan sebagai berikut:

Suatu kulit bola dengan kerapatan merata akan menarik setiap partikel titik yang berada di luar kulit bola itu sedemikian rupa sehingga seakan-akan seluruh massa kulit bola itu berada (terkonsentrasi) di titik pusat kulit bola itu. Selanjutnya, setiap partikel titik yang berada di dalam kulit bola itu sedikit pun tidak mengalami gaya gravitasi akibat kulit bola itu.

Jadi, sebuah kulit bola yang homogen (kerapatannya merata), katanlah bermassa M berjejari R , dan sebuah partikel titik bermassa m yang berada di luar kulit bola sejauh r dari pusat kulit bola dapat dipandang sebagai dua partikel titik masing-masing bermassa M dan m dan terpisah oleh jarak sejauh r (lihat Gambar 9.12). Oleh karena itu, besar gaya gravitasi yang dialami oleh partikel titik karena kehadiran kulit bola adalah

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \quad (9.15)$$

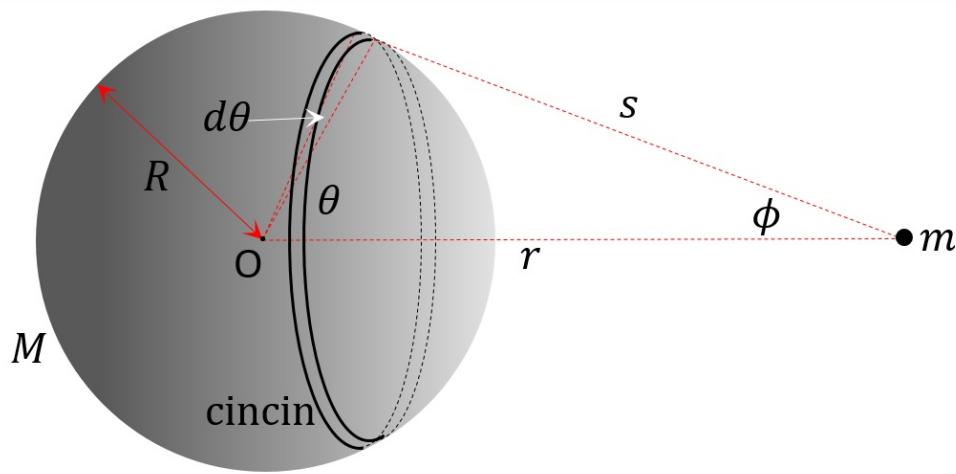


Gambar 9.12: (a) Kulit bola berjari-jari R yang memiliki ketebalan ΔR serta massa M dan partikel titik bermassa m

Sementara partikel titik yang berada di dalam kulit bola tidak mengalami gaya gravitasi apapun dari kulit bola (tidak merasakan kehadiran kulit bola).

Bukti kaidah kulit bola:

Ditinjau sebuah benda bermassa m berada sejauh r dari pusat sebuah kulit bola bermassa M dan berjari-jari R . Andaikan kulit bola itu dipotong atas cincin-cincin tipis dengan pusat pada garis perpanjangan penghubung antara titik pusat kulit bola



Gambar 9.13: Dampak gravitasi akibat keberadaan sebuah massa yang terdistribusi secara merata dan memiliki simetri bola.

dan titik tempat benda m berada. Selanjutnya andaikan s jarak dari titik massa kecil ke cincin. Lihat Gambar 9.13. Karena adanya kesetangkupan, hanya komponen vektor gaya gravitasi sepanjang garis yang menghubungkan pusat kedua benda saja yang perlu diperhitungkan, sedangkan komponen tegak lurus saling meniadakan. Jika dM_{cincin} adalah massa cincin yang ditinjau, gaya yang dikerjakan oleh cincin tersebut pada massa m diberikan oleh

$$dF_{cincin} = G \frac{mdM_{cincin}}{s^2} \cos \phi. \quad (9.16)$$

Komponen-komponen yang tegak lurus terhadap garis penghubung antara massa m dengan pusat kulit bola saling menghapus. Andaikan pula rapat massa kulit bola σ . Luas cincin dengan ketebalan $R \sin \theta d\theta$ adalah dA_{cincin} , sehingga massa bagian cincin diberikan oleh

$$\begin{aligned} dM_{cincin} &= \sigma dA_{cincin} \\ &= 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Pada persamaan (9.16), cosinus ϕ dapat dituliskan juga dalam bentuk

$$\cos \phi = \frac{r - R \cos \theta}{s},$$

dengan s dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Phytagoras, sedemikian rupa sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(r - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita dapat memasukkan hasil-hasil ini ke dalam persamaan (9.16), sehingga gaya total yang dialami massa m adalah

$$\begin{aligned}
 F &= Gm \int_0^\pi \frac{(r - R \cos \theta) \sigma 2\pi R^2 \sin \theta}{s^3} d\theta \\
 &= 2\pi Gm \int_0^\pi \frac{r R^2 \sigma \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \\
 &\quad - 2\pi Gm \int_0^\pi \frac{R^3 \sigma \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta.
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

Integrasi terhadap θ dapat diselesaikan dengan melakukan perubahan variabel, $u := \cos \theta$. Akibatnya, $\sin \theta d\theta = -du$ dan

$$F = 2\pi Gm \left[-rR^2\sigma \int_1^{-1} \frac{du}{(r^2 + R^2 - 2rRu)^{3/2}} + R^3\sigma \int_1^{-1} \frac{u du}{(r^2 + R^2 - 2rRu)^{3/2}} \right]. \tag{9.18}$$

Dari buku tabel integral didapatkan

$$\int \frac{du}{(a + bu)^{3/2}} = -\frac{2}{b(a + bu)^{1/2}} \text{ dan } \int \frac{u du}{(a + bu)^{3/2}} = \frac{2(2a + bu)}{b^2(a + bu)^{1/2}}. \tag{9.19}$$

Dengan memisalkan $a = r^2 + R^2$ dan $b = -2rR$, maka integral pada persamaan (9.18) dapat dihitung untuk dua kasus:

Untuk $r > R$, hasil pengintegralan (9.18) memberikan

$$F = \frac{4\pi Gm\sigma}{r^2} \frac{r^2 R^2 - R^4}{r^2 - R^2} = 4\pi\sigma R^2 \frac{Gm}{r^2} \frac{r^2 - R^2}{r^2 - R^2} = \frac{GMm}{r^2} \tag{9.20}$$

dengan M = adalah massa total kulit bola.

Untuk $r < R$, hasil pengintegralan (9.18) memberikan

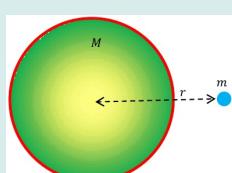
$$F = 2\pi GM \left(\frac{2rR\sigma}{R^2 - r^2} - \frac{2rR\sigma}{R^2 - r^2} \right) = 0. \tag{9.21}$$

(Bukti tuntas)

Contoh 9.5

Sebuah partikel titik bermassa m berada sejauh r dari pusat sebuah bola pejal homogen bermassa M berjari-jari R dengan $R > r$. Berapakah gaya gravitasi yang dialami oleh partikel titik bermassa m itu?

Bola pejal tersebut dibayangkan tersusun atas kulit-kulit bola sepusat (lihat Gambar 9.14). Oleh karenanya, partikel titik bermassa m itu berada di luar kulit-kulit bola. Berdasarkan kaidah kulit bola, kulit-kulit bola sepusat itu bisa diganti dengan partikel titik yang massanya sama dengan massa total kulit-kulit bola itu. Tetapi karena massa keseluruhan kulit-kulit bola itu sama dengan massa bola pe-



Gambar 9.14

jal, maka partikel titik pengganti haruslah bermassa M . Jadi, masalah di atas setara dengan masalah dua partikel titik yang terpisah oleh jarak sejauh r . Jadi, partikel titik itu menderita gaya sebesar

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

yakni tidak tergantung pada jejari bola pejal itu (asalkan partikel titik bermassa m berada di luar bola).

Contoh 9.6

Sebuah batu ditimbang dengan menggunakan timbangan pegas di atas permukaan Bumi. Pada timbangan pegas terbaca 10 kg. (a) Berapakah gaya gravitasi yang dialami oleh batu tersebut? (b) Apabila gaya tersebut merupakan satu-satunya gaya yang bekerja pada batu, maka berapakah percepatan yang dialami oleh batu pada saat batu jatuh bebas?

(a) Bumi diandaikan sebagai bola pejal homogen sempurna dengan jejari $R_B = 6370$ meter dan bermassa $5,98 \times 10^{24}$ kg. Oleh karena itu, batu bermassa 10 kg akan menderita gaya gravitasi Bumi sebesar

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_B m}{R_B^2} = (6.6726 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2) \frac{(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(10 \text{ kg})}{6.370^2 \times 10^{12} \text{ m}^2} \\ &= 98.3 \text{ N} \end{aligned} \quad (9.22)$$

(b) Dalam keadaan jatuh bebas gaya yang bekerja pada batu hanyalah gaya gravitasi itu (gesekan udara diabaikan). Jika massa inersial batu sama dengan massa gravitasi (lihat bahasan berikutnya, atau lihat Bab (??) batu, yakni $m = 10$ kg, maka percepatan yang dialami oleh batu adalah

$$a = \frac{F}{m} = \frac{98.3 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 9.83 \text{ m/dt}^2.$$

Dari persamaan (9.22) pun, jika massa inersia sama dengan massa gravitasi, kita mendapatkan percepatan benda senilai

$$g = G \frac{M_B}{R_B^2}. \quad (9.23)$$

Terlihat bahwa jika massa inersia sama dengan massa gravitasi, percepatan yang dialami oleh benda-benda tidak bergantung pada massa benda itu.

Uji Ketajaman 9.3

- Persamaan (9.23) memberi jalan bagi kita untuk menghitung tetapan gravitasi umum G apabila massa dan jari-jari Bumi telah diketahui. Bagaimakah caranya?
- Sebaliknya, orang dapat 'menimbang' Bumi apabila G sudah ditetapkan dan jejari Bumi diketahui. Bagaimakah caranya?

3. Sebuah bola pejal berjari-jari R tersusun atas dua lapis yang homogen. Lapis pertama memiliki rapat massa ρ_1 . Lapis kedua memiliki rapat massa ρ_2 . Apabila lapis kedua memiliki ketebalan a , hitunglah besarnya gaya gravitasi yang dialami oleh sebuah partikel titik bermassa m di berbagai tempat!
4. Massa gravitasi sama dengan massa lembam. Akibatnya, semua benda di permukaan Bumi akan jatuh dengan percepatan yang sama, berapapun massanya. Bagaimanakah orang dapat sampai pada kesimpulan demikian?
5. Sebuah kelereng bermassa m berada di dalam bola plastik bermassa M . Berapakah besar gaya gravitasi yang dialami oleh kelereng karena adanya bola plastik itu? Apabila bola plastik itu diganti dengan bola plastik dengan jari-jari duakali lebih besar, berapakah besar gaya gravitasi yang dialami oleh kelereng karena adanya bola plastik itu?
6. Berapakah gaya total yang dialami oleh sebuah kulit bola berjari-jari R , bermassa M akibat kehadiran benda titik bermassa m , jika
 - (a) benda titik berada di luar benda besar dengan jarak ke pusat kulit bola r
 - (b) benda titik berada di dalam kulit bola.

Di manakah titik tangkap gaya yang dialami oleh kulit bola?

Gaya Pasang (Tidal)



Gambar 9.15: Pasang naik dan surut di pantai Watu Lawang, Gunung Kidul, Yogyakarta.

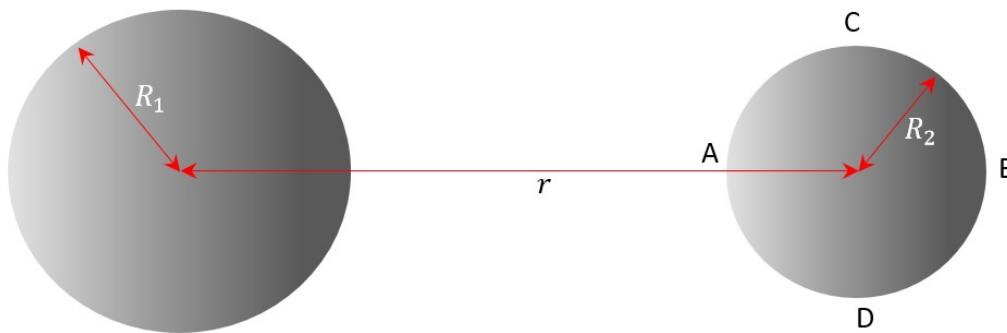
Masyarakat di daerah pantai tentu sangat mengenal peristiwa pasang dan surut dan pasang naik. Pasang naik adalah peristiwa kenaikan ketinggian permukaan air laut, sedangkan pasang surut merupakan berkurangnya ketinggian air laut sehingga wilayah genangan air laut mengering sampai jauh menuju laut lepas. Seperti yang telah diketahui peristiwa pasang surut dan pasang naik terjadi setiap hari. Mengapa demikian? Pertanyaan ini dapat dijawab dengan meninjau dampak gravitasi pada benda-benda besar, misalnya interaksi antara Bumi dan Bulan ataupun antara Bumi dan Matahari.

Pertama-tama, kita tinjau kasus umum, yakni interaksi gravitasi antara dua benda besar berbentuk bola pejal (Gambar 9.16). Masing-masing bola memiliki massa serta jari-jari berturut-turut M_1 dan M_2 serta R_1 dan R_2 . Bola pertama akan menghasilkan medan (percepatan) gravitasi di sekitarnya, termasuk di titik-titik di dalam

bola kedua. Di titik pusat bola kedua, percepatan gravitasi akibat bola pertama diberikan oleh

$$g_{1P} = \frac{GM_1}{r^2}. \quad (9.24)$$

Di titik A, jika ukuran bola kedua tidak dapat diabaikan, percepatan gravitasi akibat



Gambar 9.16: Dua bola pejal berinteraksi

bola pertama diberikan oleh

$$g_{1A} = \frac{GM_1}{(r - R_2)^2} = \frac{GM_1}{r^2 \left(1 - \frac{R_2}{r}\right)^2} = \frac{GM_1}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_2}{r}\right)^2}. \quad (9.25)$$

Berdasarkan penderetan Taylor (lihat kembali buku Kalkulus Anda),

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots, \quad (9.26)$$

untuk $-1 < t < 1$. Mengingat $R_2/r < 1$, maka percepatan g_{1A} dapat dituliskan sebagai

$$g_{1A} = \frac{GM_1}{r^2} \left(1 + 2\frac{R_2}{r} + 3\frac{R_2^2}{r^2} + \dots\right). \quad (9.27)$$

Untuk berbagai kasus yang ada, faktor R_2/r sangat kecil, sehingga cukuplah apabila deret Taylor tersebut hanya diambil dua suku pertamanya. Jadi, percepatan gravitasi di titik A akibat keberadaan bola pertama diberikan oleh

$$g_{1A} = \frac{GM_1}{r^2} + 2\frac{GM_1R_2}{r^3}. \quad (9.28)$$

Percepatan ini berarah "mendarat" menuju ke pusat bola pertama. Percepatan gravitasi di titik B akibat bola pertama dihitung dengan cara serupa, hasilnya

$$g_{1B} = \frac{GM_1}{r^2} - 2\frac{GM_1R_2}{r^3}. \quad (9.29)$$

Percepatan ini juga berarah "mendarat" menuju ke pusat bola pertama. Besar percepatan gravitasi di titik C dan D adalah

$$g_{1C} = g_{1D} = \frac{GM_1}{(r^2 + R_2^2)} = \frac{GM_1}{r^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right)} = \frac{GM_1}{r^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{R_2}{r}\right)^2}. \quad (9.30)$$

Berdasarkan penderetan Taylor,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \dots, \quad (9.31)$$

untuk $0 < t^2 < 1$, mengingat $0 < (R_2/r)^2 < 1$, maka besar percepatan g_{1C} dan g_{1D} dapat dituliskan sebagai

$$g_{1C} = g_{1D} = \frac{GM_1}{r^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{R_2}{r}\right)^2} = \frac{GM_1}{r^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} + \dots\right). \quad (9.32)$$

Dengan alasan yang sama, kita peroleh

$$g_{1C} = g_{1D} = \frac{GM_1}{r^2} - \frac{GM_1 R_2^2}{r^4}. \quad (9.33)$$

Kedua percepatan ini berarah menuju ke pusat bola pertama. Jadi, percepatan g_{1C} memiliki komponen "mendarat" ke kiri dan "vertikal" ke bawah. Sementara percepatan di titik D, g_{1D} , memiliki komponen "mendarat" ke kiri dan "vertikal" ke atas.

Selanjutnya, jika dilihat dari pusat bola kedua, percepatan gravitasi di titik A akibat bola pertama diberikan oleh

$$g_{1A} - g_{1P} = 2 \frac{GM_1 R_2}{r^3} \quad (9.34)$$

berarah ke kiri. Sementara percepatan di titik B relatif terhadap pusat bola kedua adalah

$$g_{1B} - g_{1P} = -2 \frac{GM_1 R_2}{r^3} \quad (9.35)$$

berarah ke kanan. Selanjutnya, percepatan gravitasi di titik C memiliki komponen mendarat

$$g_{1C}^h = g_{1C} \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_2^2}} = \left(\frac{GM_1}{r^2} - \frac{GM_1 R_2^2}{r^4} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_2^2}}. \quad (9.36)$$

Berdasarkan penderetan Taylor,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots, \quad (9.37)$$

diperoleh

$$g_{1C}^h = \frac{GM_1}{r^2} - \frac{3GM_1 R_2^2}{2r^4} + \frac{GM_1 R_2^4}{2r^6} \approx \frac{GM_1}{r^2}, \quad (9.38)$$

karena suku kedua dan ketiga dapat diabaikan. Sementara komponen vertikal percepatan di titik C adalah

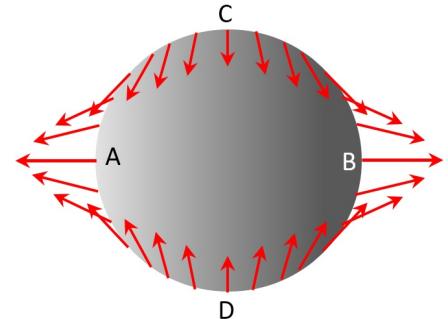
$$g_{1C}^v = g_{1C} \frac{R_2}{\sqrt{r^2 + R_2^2}} = \left(\frac{GM_1}{r^2} - \frac{GM_1 R_2^2}{r^4} \right) \frac{R_2}{\sqrt{r^2 + R_2^2}}. \quad (9.39)$$

Dengan penderetan (9.37) diperoleh

$$g_{1C}^v = \frac{GM_1 R_2}{r^3} - \frac{3GM_1 R_2^3}{2r^5} + \frac{GM_1 R_2^5}{2r^7} \approx \frac{GM_1 R_2}{r^3}. \quad (9.40)$$

karena suku kedua dan ketiga dapat diabaikan. Oleh karena itu, di titik C percepatan gravitasi akibat bola pertama jika dilihat dari pusat bola kedua adalah komponen vertikal g_{1C}^v berarah ke bawah. Demikian halnya untuk titik D, percepatan gravitasi akibat bola pertama di titik D jika dilihat dari pusat bola kedua hanyalah komponen vertikal berarah ke atas, yaitu

$$g_{1D}^v = \frac{GM_1 R_2}{r^3}. \quad (9.41)$$



Gambar 9.17: Percepatan gravitasi di berbagai tempat dipermukaan bola kedua akibat keberadaan bola pertama.

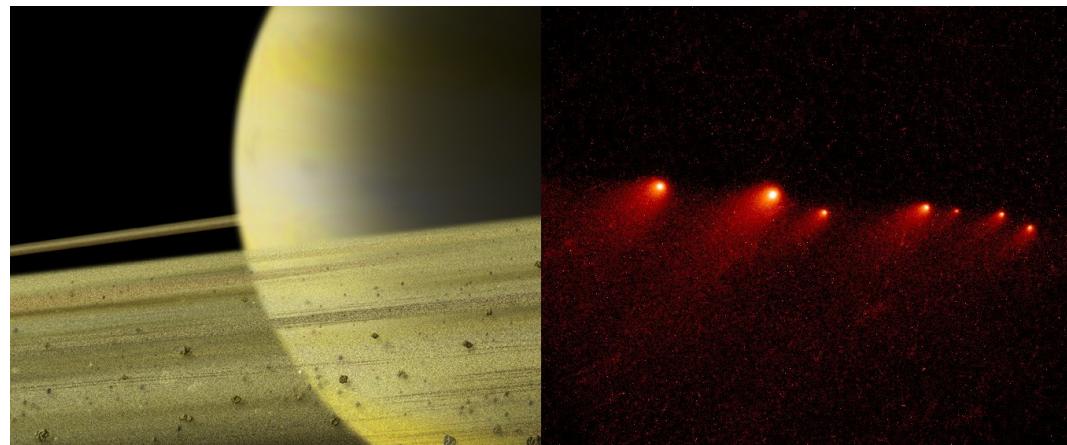
Secara keseluruhan percepatan gravitasi di berbagai titik pada permukaan bola kedua dirangkum dalam Gambar 9.17. Jadi material di permukaan bola kedua akan menderita gaya yang berbeda-beda sesuai dengan diagram percepatan pada Gambar 9.17. Demikian juga material bola kedua diberbagai tempat lainnya. Perbedaan gaya gravitasi di berbagai tempat di bola kedua tersebut dapat mengakibatkan deformasi atau perubahan bentuk bola kedua, kalau bola kedua itu "mau" menyesuaikan. Hal ini bergantung pada kelenturan bahan penyusun bola kedua. Jika tidak, yakni semisal bahan bola kedua itu getas (seperti es, kaca, dll.) maka bola kedua akan pecah. Bertambah dekatnya sebuah benda angkasa ke benda angkasa lain dapat berakibat membesarnya gaya pasang dan oleh karenanya memungkinkan benda-benda angkasa tersebut teremas oleh gaya pasang hingga pecah. Cincin di sekitar planet Saturnus yang terkenal itu, diperkirakan merupakan pecahan satelit Saturnus yang terbuat dari es yang hancur akibat gaya pasang oleh planet Saturnus. Gaya pasang oleh gravitasi Jupiter diperkirakan sebagai penyebab pecahnya komet Shoemaker-Levy 9 yang bergerak mendekat planet Jupiter yang akhirnya menabrak planet itu dari 16 sampai 22 Juli 1994.

Keberadaan gaya pasang di Bumi akibat keberadaan Bulan dan Matahari bukanlah hal yang asing. Sekarang kita tinjau gaya pasang akibat keberadaan gravitasi Bulan terhadap Bumi. Bulan sebagai bola pertama, sedang Bumi sebagai bola kedua. Berdasarkan perhitungan di atas, relatif terhadap pusat Bumi, besarnya percepatan gravitasi di permukaan Bumi yang paling dekat dengan Bulan akibat gravitasi Bulan adalah

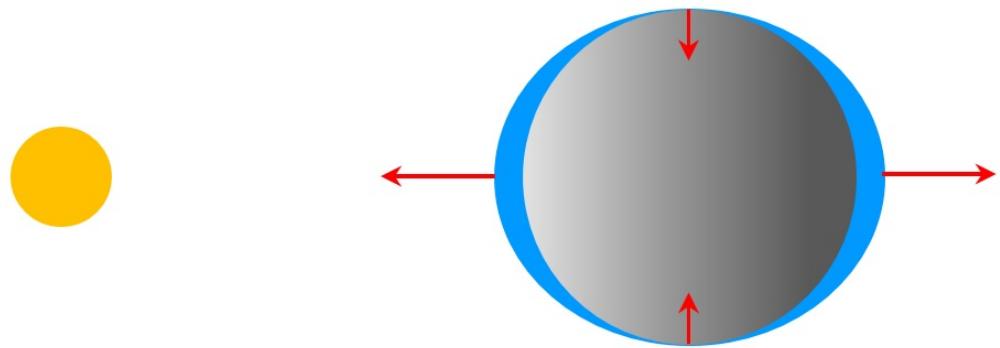
$$g_{BA} = \frac{2GM_B R_\oplus}{r^3}$$

dan berarah menuju Bulan. Sementara besarnya percepatan gravitasi di permukaan Bumi yang paling jauh dari Bulan karena gravitasi Bulan adalah

$$g_{BB} = \frac{2GM_B R_\oplus}{r^3}$$



Gambar 9.18: Cincin Saturnus diperkirakan sebagai pecahan sebuah satelit yang hancur akibat gaya pasang Saturnus (kiri). Pecahan-pecahan komet Shoemaker-Levy 9 yang "diremas" oleh gaya pasang Jupiter (kanan).



Gambar 9.19: Gaya pasang pada permukaan Bumi mengakibatkan pasang naik di beberapa tempat dan pasang surut di tempat yang lain

juga berarah menjauhi Bulan. Percepatan gravitasi pada permukaan Bumi di titik C dan D akibat keberadaan gravitasi Bulan diberikan oleh

$$g_{BC} = g_{BD} = \frac{GM_B R_\oplus}{r^3},$$

berarah ke pusat Bumi. Karena permukaan Bumi didominasi oleh wilayah perairan, maka gaya pasang ini berpengaruh pada perairan. Di titik-titik yang paling jauh dan paling dekat dari Bulan air laut akan terangkat sehingga pasang naik, sedangkan untuk daerah lain permukaan laut akan tertekan sehingga pasang surut (Gambar 9.19).

9.4 Massa Lembam versus Massa Gravitası

Galilei telah menggagas sejak tahun 1638, tentang kesamaan nilai numerik antara massa lembam dan massa gravitası. Sejak saat itu, eksperimen-eksperimen untuk menguji anggapan kesamaan kedua besaran tersebut banyak dilakukan, termasuk juga oleh Galilei sendiri. Galilei melakukan eksperimen ini pada 1638, kemudian Newton melakukan eksperimen pada 1687. Galilei dan Newton menggunakan

alat yang sama, yaitu bandul. Bessel melakukan eksperimen pada 1830. Berikutnya Eötvös pada tahun 1922, disusul Roll, Krotov, dan Dicke pada tahun 1962. Pada tahun 1972, Braginsky dan Panov menyusul melakukan eksperimen yang lebih akurat.

Dari Galilei, Newton, dan Bessel

Galilei melakukan eksperimen menggunakan bandul. Dua buah bandul yang masing-masing terbuat dari timbal dan gabus, selalu berayun secara sama. Pengukuran ini dilakukan secara kualitatif.

Newton menyatakan bahwa banyaknya materi sebanding dengan beratnya.

Quantitas Materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

[Def. I, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1].

Corpora omnia in Planetas singulos gavitare, & pondera eorum in eundem quævis Planetam, paribus distantias à centro Planete proportionalia esse quantitati materiae in singulis.

[Prop. VI, Theor. VI, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 408].

Alat eksperimen yang dirancang Newton berupa dua buah bandul berbentuk bola berongga yang terbuat dari kayu. Tali bandul ini diatur sepanjang 11 kaki. Ke dalam kedua bandul tersebut dimasukkan masing-masing dua material yang berbeda. Kemudian diayun dan periodenya diukur. Secara bergantian pasangan-pasangan material diujicobakan. Material pengisi yang telah disiapkan sebagai berikut: emas, perak, timbal, kaca, pasir, garam, kayu, air, dan gandum. Newton menyatakan bahwa dua buah bandul telah diatur agar memiliki bentuk dan berat yang sama, sehingga akan mengalami hambatan udara yang sama. Material yang berbeda dengan massa yang sama dimasukkan masing-masing ke bandul, dan bandul diayunkan bersamaan. Dari percobaan ini, Newton menyimpulkan perbedaan berat yang disebabkan oleh perbedaan materi pastilah kurang dari seperseribu.

Persamaan yang digunakan Newton dalam melakukan eksperimen bandulnya adalah

$$W/m = 4\pi^2 L/T^2, \quad (9.42)$$

dengan W adalah gaya berat, m adalah massa inersial benda, L panjang bandul, dan T periode bandul. Andaikan kesebandingan antara berat dan massa bergantung pada jenis materi, maka terdapat perbedaan untuk materi yang berbeda

$$\Omega = (W_1/m_1 - W_2/m_2) \neq 0, \quad (9.43)$$

sehingga mengakibatkan

$$\Omega = (T_1 - T_2) \neq 0. \quad (9.44)$$

Perbedaan periode inilah yang mendasari kesimpulan Newton. Akan tetapi, keabsahan dari eksperimen Newton dipertanyakan, karena nilai seperseribu yang dinyatakan oleh Newton tidak disertai dengan penjelasan eksperimental [1].

Bessel pada tahun 1830 merancang eksperimen yang dapat menaikkan nilai 'keabsahan' pernyataan Newton. Dengan menganalisis pekerjaan Newton, Bessel menemukan kelemahan eksperimen Newton tersebut, yaitu presisi yang rendah dalam pengukuran panjang bandul. Bessel menggunakan bandul-bandul berongga yang terbuat dari kuningan berbentuk silinder berongga. Kemudian disiapkan material uji: emas, perak, besi, kuningan, marmer, lempung, kuarsa, besi meteorit, dan batu meteorit. Bandul-bandul berongga tersebut sengaja dibuat dari kuningan agar tidak perlu mencetak bandul dari berbagai material yang berbeda mengingat tingkat kesulitannya. Oleh karena itu, cukup dengan memasukkan saja material uji ke dalam rongga bandul-bandul yang telah dibuat sama baik massanya maupun geometrinya, eksperimen siap dilakukan. Bessel memperoleh keabsahan nilai perbedaan berat karena perbedaan materi ini, yaitu $\Omega < 2 \cdot 10^{-5}$.

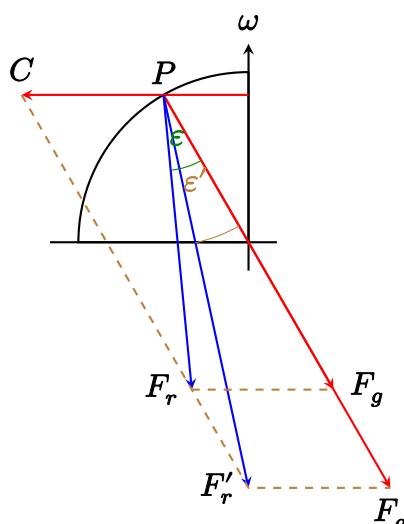
Eksperimen Eötvös

Roland von Eötvös menggunakan alat yang berbeda dari yang digunakan oleh Galilei, Newton, dan Bessel dalam eksperimennya. Ia mempublikasikan hasilnya pada tahun 1891. Bukan bandul yang digunakan, melainkan neraca puntir. Dengan neraca puntir yang digunkannya, Eötvös mengklaim bahwa dirinya telah berhasil meningkatkan keabsahan nilai perbedaan berat karena perbedaan materi yakni Ω hingga $2 \cdot 10^{-7}$.

Eötvös meninggal pada 8 April 1919. Tiga tahun kemudian, yaitu pada tahun 1922, muncul artikel atas nama Eötvös, Pekár, dan Fekete [EPF] di *Annalen der Physik*.

Gambar 9.20 merupakan diagram yang menjelaskan gaya-gaya yang dialami suatu titik di Bumi yang berotasi dengan kecepatan sudut ω . Menurut EPF gaya yang dialami titik p merupakan resultan antara gaya yang diakibatkan oleh medan gravitasi

$$F = Gdm/r^2, \quad (9.45)$$



Gambar 9.20: Skema percobaan

dan gaya yang diakibatkan oleh percepatan sentrifugal

$$C = l\omega^2, \quad (9.46)$$

dengan F dan C dinyatakan dalam massa, dm adalah unsur massa gravitasi "aktif", r adalah jarak dm dengan p , G adalah tetapan gravitasi, l adalah jarak antara dm dan sumbu putar bumi, ω adalah kecepatan sudut bumi [1].

Resultan F_r diberikan oleh persamaan

$$F_r = F_g \cos \varepsilon - C \cos \Phi, \quad (9.47)$$

dengan Φ adalah sudut lintang, ε adalah sudut penyimpangan terhadap arah gerak

jatuh bebas, yang diperoleh melalui persamaan

$$tF_r\varepsilon = (C \sin \Phi)/(F_r + \cos \Phi). \quad (9.48)$$

Torsi (puntiran) pada neraca puntir disumbangkan oleh dua torka (momen gaya). Torka pertama diakibatkan oleh tarikan gravitasi

$$D = M_a l_a (\Omega_b - \Omega_a) F_g \sin \varepsilon \sin \alpha, \quad (9.49)$$

dengan α adalah sudut yang dibentuk oleh batang ab dengan sumbu- x . Torka yang kedua diberikan oleh persamaan

$$T = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) I \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} I \cos 2\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} M_h l \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} M_h l \cos \alpha, \quad (9.50)$$

dengan U adalah potensial gaya sentrifugal C , I adalah momen inersia. Oleh karena itu, neraca puntir akan berputar terhadap sudut

$$\begin{aligned} \theta = \frac{I}{2\tau} & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{I \partial^2 U}{\tau \partial x \partial y} \cos 2\alpha \\ & - \frac{M_a h l \partial^2 U}{\tau \partial x \partial z} \sin \alpha + \frac{M_a h l \partial^2 U}{\tau \partial y \partial z} \cos \alpha \\ & + \frac{1}{\tau} [M_a l_a (\Omega_b - \Omega_a)] F_g \sin \varepsilon \sin \alpha. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Dari persamaan di atas dapat diperoleh nilai $\Omega_b - \Omega_a$ yang menunjukkan nilai perbedaan antara massa inersia dan massa gravitasi. Nilai perbedaan tersebut diperoleh oleh EPF dalam orde 10^{-9} [1].

Eksperimen Roll-Krotov-Dicke

Roll-Krotov-Dicke menggunakan rancangan alat yang berbeda dalam eksperimenya. Roll-Krotov-Dicke mengkritisi bahwa eksperimen yang dilakukan oleh Eötvös, Pekár, dan Fekete terkait dengan Bumi sehingga faktor gaya sentrifugal tidak dapat dieliminasi. Roll-Krotov-Dicke berusaha mengaitkan eksperimennya dengan keberadaan Matahari. Pada pukul 6 pagi, batang neraca puntir tegak lurus dengan garis imajiner yang menghubungkan Bumi dan Matahari. Sementara pada pukul 6 sore, sudah mengalami putaran penuh 360° . Oleh karena itu, konfigurasi Bumi, Matahari, dan alat eksperimen mengakibatkan torka yang berbeda pada alat, sehingga analisis eksperimen harus melibatkan konfigurasi tersebut.

Roll-Krotov-Dicke juga mengkritik EPF yang menggantung benda di neraca puntir pada ketinggian yang berbeda. Hal itu dapat menyebabkan sensitivitas yang lebih tinggi pada gradien gravitasi, sehingga menimbulkan ralat yang lebih besar. Dicke menanyakan bagaimana mungkin EPF dapat memperoleh hasil dengan ketelitian setinggi itu, padahal, neraca puntir Eötvös, dapat mengukur massa Eötvös sendiri. Kata, Dicke, Eötvös berada jauh dari alat ketika pengukuran dilakukan, dan mem-

baca skala dengan sangat cepat, karena menggunakan teleskop, sebelum alat itu merasakan kehadirannya.

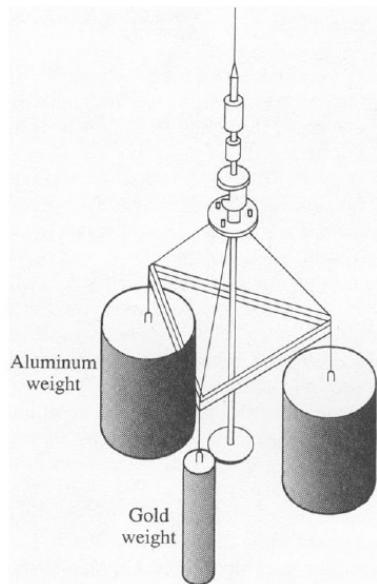
Solusi yang dibuat oleh Roll-Krotov-Dicke adalah neraca yang terdapat tiga benda (dua bahan aluminium dan satu emas) digantungkan pada sudut segitiga sama sisi yang terbuat dari kuarsa. Alat ini dimasukkan ke dalam ruang vakum dengan tekanan 10^{-8} mm, untuk memperkecil gangguan arus konveksi karena perbedaan suhu. Selain itu, Roll-Krotov-Dicke tidak menggunakan teleskop untuk membaca skala, melainkan instrumen elektro-optis, sehingga ralat manusiawi dapat dihilangkan.

Diberikan dua jenis material yang berbeda, andaikan prinsip kesetaraan dilanggar, maka

$$\Omega(\text{Al}, \text{Au}) = [(m/n)_{\text{Al}} - (m/n)_{\text{Au}}] / (1/2) [(m/n)_{\text{Al}} + (m/n)_{\text{Au}}] \neq 0, \quad (9.52)$$

dengan m adalah massa gravitasi pasif dan n massa inersial. Hasil yang diperoleh Roll-Krotov-Dicke adalah

$$\Omega(\text{Al}, \text{Au}) = (+1, 3 \pm 1, 0) \cdot 10^{-11}.$$



Gambar 9.22: Skema Neraca Roll-Krotov-Dicke

Hasil eksperimen ini menambah keyakinan akan 'kesamaan' antara massa inersial dan massa gravitasi dua orde lebih tinggi daripada sebelumnya.

Eksperimen Braginskij-Panov

Pada tahun 1972, muncul artikel oleh V.B. Braginskij dan V.I. Panov di *Soviet Physics JETP*. Artikel ini berjudul *The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass* [3]. Braginskij dan Panov tampak berkeyakinan bahwa massa inersial dan massa gravitasi sama.

Unsur esensial dalam eksperimen Braginskij-Panov adalah neraca puntir dengan periode osilasi 2×10^4 detik (5 jam 20 menit) dan waktu relaksasi lebih dari 6×10^7 detik. Neraca puntir ini mengukur perbedaan nisbah antara massa gravitasi dan massa inersial untuk aluminium dan platina. Alat ini dirancang sedemikian rupa sehingga memperkecil dampak dari fluktuasi Brown. Alat ini dapat mendekripsi perbedaan percepatan kurang dari 10^{-13} cm/detik² selama waktu pengamatan 6×10^5 detik dalam latar fluktuasi Brown. Dipertimbangkan juga perbedaan percepatan aluminium dan platina yang diukur dalam pengaruh medan gravitasi Matahari ($g = 0, 62$ cm/detik²), fluktuasi termal dapat mengganggu prinsip kesetaraan pada skala kurang dari $\sim 5 \times 10^{-13}$.

Neraca puntir digantung dengan menggunakan kabel wolfram sepanjang $2,8 \times 10^2$ cm dan diameter 5×10^{-4} cm. Alat ini dimasukkan ke dalam ruang vakum, dengan tekanan yang dijaga konstan selama eksperimen pada kurang dari 10^{-8} torre. Untuk mengurangi dampak dari gradien gravitasi lokal, geometri neraca puntir dibuat berbentuk oktaedron, dengan radius 10 cm, dan diberi massa yang sama di ujung yang berlawanan tetapi berbeda material, yaitu aluminium dan platina dengan total beban 3,9 g. Suhu dijaga stabil pada 5×10^{-4} °C dengan bantuan termostat. Alat ini juga diselubungi terhadap medan magnetik.

Osilasi neraca puntir direkam pada film fotografis dengan pergerakan titik optisnya. Laser He-Ne digunakan sebagai sumber cahaya. Panjang tuas optis adalah

5×10^3 cm. Untuk waktu 24 jam, sudut yang terukur dapat diperoleh melalui persamaan

$$\theta = g(\Omega'/3, 07R\omega^2), \quad (9.53)$$

dengan

$$\Omega' = [(n/m) - (n'/m')]/(1/2)[(n/m) + (n'/m')]. \quad (9.54)$$

Secara berurutan, m dan m' adalah massa gravitasi aluminium dan platina. Sementara n dan n' secara berurutan adalah massa inersial aluminium dan platina. Dua persamaan di atas adalah penjabaran secara teori. Secara eksperimen digunakan relasi

$$\Omega = (3, 07R\omega^2)/g. \quad (9.55)$$

Dari eksperimen Braginskij-Panov, diperoleh

$$\theta = (-0, 55 \pm 1, 65) \times 10^{-7}, \quad (9.56)$$

sehingga

$$\Omega = (-0, 3 \pm 0, 9) \times 10^{-12}. \quad (9.57)$$

9.5 Gravitasi Newton dan Hukum Kepler

Pada Subbab 9.1 telah dibahas ketiga hukum Kepler, sedangkan hukum gravitasi Newton telah dibicarakan pada Subbab 9.2. Selanjutnya akan dibahas kaitan antara ketiga hukum Kepler dan teori gravitasi Newton. Dalam bagian ini, akan kita lihat bahwa hukum-hukum Kepler dapat diperoleh dari hukum Newton tentang gerak dan teori gravitasinya.

Masalah gerak planet-planet di sekitar Matahari boleh dipandang sebagai masalah dua benda. Oleh karena itu, terlebih dahulu masalah dua benda secara umum akan ditinjau. Andaikan terdapat dua benda titik masing-masing bermassa m_1 dan m_2 . Selanjutnya, andaikan posisi kedua benda itu berturut-turut \mathbf{r}_1 dan \mathbf{r}_2 . Jika kedua benda itu berada di angkasa dan terisolir dari benda atau pengaruh apapun, maka interaksi yang ada adalah antar kedua benda itu sendiri. Andaikan hanya gravitasi antar keduanya yang berperan. Jadi, benda kedua akan menderita gaya gravitasi akibat keberadaan benda pertama senilai persamaan (9.10)

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21},$$

sedangkan benda pertama akan menderita gaya

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21},$$

dengan $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Dari kedua persamaan itu akan didapat persamaan gerak untuk masing-masing benda menurut

$$-\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21} = m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}, \quad (9.58)$$

dan

$$\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12} = m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}. \quad (9.59)$$

Kedua persamaan tersebut berturut-turut dapat dituliskan sebagai berikut

$$-\frac{1}{m_2} \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21} = \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}, \quad (9.60)$$

dan

$$\frac{1}{m_1} \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{12} = \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}. \quad (9.61)$$

Jika persamaan (9.60) dikurangi dengan persamaan (9.61), didapatkan

$$-\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21} = \frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2} \quad (9.62)$$

atau

$$-\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21} = \left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right) \frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2} = \mu \frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2}, \quad (9.63)$$

dengan

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \quad (9.64)$$

disebut massa tersusutkan. Jika persamaan (9.58) dan persamaan (9.59) dijumlahkan, didapatkan

$$\mathbf{0} = \frac{d^2(m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1)}{dt^2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1}{m_1 + m_2} \right). \quad (9.65)$$

Besaran

$$\mathbf{R} := \frac{m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1}{m_1 + m_2}$$

adalah koordinat pusat massa sistem dua benda itu. Jadi, sejauh ini, kita mempunyai dua persamaan: yang pertama adalah yang mengatur pergerakan pusat massa \mathbf{R} , yakni

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (9.66)$$

dan yang kedua adalah yang menggambarkan posisi relatif benda kedua dilihat dari benda pertama,

$$-\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{21} = \mu\frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2}. \quad (9.67)$$

Persamaan (9.66) memperlihatkan bahwa pusat massa kedua benda itu bergerak dengan kecepatan tetap: jika awalnya diam, maka pusat massa kedua benda itu akan tetap diam, sedangkan jika awalnya bergerak dengan kecepatan tertentu, maka pusat massa itu akan bergerak dengan kecepatan tertentu itu. Sementara persamaan (9.67) dapat dipandang sebagai persamaan gerak sebuah benda dengan massa μ dibawah pengaruh gaya gravitasi \mathbf{F}_{21} (persamaan (9.10)). Jawaban persamaan gerak itu adalah vektor posisi $\mathbf{r}_{21}(t)$ sebagai fungsi waktu. Vektor \mathbf{r}_{21} sebagaimana yang telah kita sepakati, adalah posisi benda kedua relatif terhadap benda pertama. Jika kedua vektor posisi, yakni $\mathbf{R}(t)$ dan $\mathbf{r}_{21}(t)$ diperoleh, maka posisi benda pertama \mathbf{r}_1 dan benda kedua \mathbf{r}_2 sebagai fungsi waktu relatif terhadap titik pangkal koordinat awal dapat dihitung menurut

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-m_2\mathbf{r}_{21} + (m_1 + m_2)\mathbf{R}}{m_1 + m_2} \quad (9.68)$$

dan

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1\mathbf{r}_{21} + (m_1 + m_2)\mathbf{R}}{m_1 + m_2}. \quad (9.69)$$

Momentum sudut benda imajiner bermassa μ (relatif terhadap posisi benda pertama) adalah

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{21} \times \mu\mathbf{v}_{21} = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{p}_{21}, \quad (9.70)$$

dengan $\mathbf{p}_{21} \equiv \mu\mathbf{v}_{21}$ adalah momentum linier benda imajiner bermassa μ diukur dari benda pertama. Selanjutnya kita akan buang saja indeks "21" untuk sementara. Kita akan menuliskan \mathbf{r} untuk \mathbf{r}_{21} , \mathbf{p} untuk \mathbf{p}_{21} , dll.

Untuk menurunkan hukum pertama Kepler, mari kita perhatikan efek gravitasi pada momentum sudut orbital benda imajiner bermassa μ itu. Gaya \mathbf{F}_{21} yang memengaruhi benda tersebut merupakan gaya terpusat, yakni dimanapun benda imajiner itu berada, gaya tersebut selalu mengarah ke benda pertama dan besarnya hanya bergantung pada jarak benda imajiner itu dari benda pertama. Momen gaya terpusat ini relatif terhadap posisi benda pertama selalu nol (hasilkali silang antara dua vektor yang sejajar). Berdasarkan hukum Newton tentang gerak untuk gerak rotasi, bahwa resultan momen gaya yang bekerja pada sebuah benda sama dengan laju perubahan momentum sudut benda itu, yakni perubahan momentum sudut tiap satu satuan waktu benda itu. Oleh karena itu, laju perubahan momentum sudutnya pun harus nol. Jadi,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0.$$

atau $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ vektor tetap. Ini berarti bahwa benda imajiner bermassa μ itu dan juga benda kedua bergerak pada sebuah bidang yang memuat benda pertama. Bidang itu tegak lurus terhadap momentum sudut.

Pada kenyataannya, turunan momentum sudut massa tereduksi terhadap waktu sama dengan nol. Jika vektor posisi dinyatakan dalam bentuk vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}$ sehingga $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, maka vektor momentum sudut dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mu r \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}(r \hat{\mathbf{r}}) \\
 &= \mu r \hat{\mathbf{r}} \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} \right) \\
 &= \mu r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}}.
 \end{aligned} \tag{9.71}$$

Hasil ini diperoleh dengan mengingat kenyataan bahwa hasil kali silang antara $\hat{\mathbf{r}}$ dengan dirinya sendiri sama dengan nol. Selanjutnya, dari persamaan (9.67) kita dapat menyatakan percepatan massa tereduksi sebagai akibat gaya gravitasi yang dikerjakan oleh massa sebesar $M := m_1 + m_2$, yaitu

$$\mathbf{a} := \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \tag{9.72}$$

Ambil hasil kali silang kedua ruas persamaan terakhir ini dengan ungkapan momen-tum sudut (9.71). Hasilnya,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{L} &= -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \left(\mu r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} \right) \\
 &= -GM\mu \hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} \right).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan "faktor tengah" dalam hitung vektor, yaitu $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, maka

$$\mathbf{a} \times \mathbf{L} = -GM\mu \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \right) \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} \right]. \tag{9.73}$$

Karena $\hat{\mathbf{r}}$ adalah vektor satuan, maka $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$ dan diperoleh

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 0,$$

sehingga persamaan (9.73) dapat ditulis lebih jauh sebagai

$$\mathbf{a} \times \mathbf{L} = GM\mu \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}}. \tag{9.74}$$

Selanjutnya, persamaan terakhir juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt}(GM\mu \hat{\mathbf{r}})$$

atau

$$\mathbf{v} \times \mathbf{L} = GM\mu \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}, \tag{9.75}$$

dengan \mathbf{D} adalah suatu vektor konstan. Selanjutnya, kita dapat mengambil hasil kali skalar ruas kiri dan kanan persamaan (9.75) dengan \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = GM\mu r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{D},$$

dengan menggunakan identitas vektor yakni $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, diperoleh

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L} = GM\mu r + rD \cos \theta,$$

dengan θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor \mathbf{r} dan \mathbf{D} . Dengan mengingat kembali persamaan (9.70), diperoleh

$$\frac{L^2}{\mu} = GM\mu r \left(1 + \frac{D \cos \theta}{GM\mu}\right) \quad (9.76)$$

Dengan mendefinisikan $e \equiv D/GM\mu$ dan menyelesaikan persamaan (9.76) untuk r maka diperoleh

$$r = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)} \quad (9.77)$$

dan inilah bentuk persamaan yang menyatakan hukum pertama Kepler karena persamaan tersebut adalah persamaan potongan kerucut yang bergantung pada nilai e . Terkait dengan nilai e ada beberapa hal khusus. Pertama, untuk $0 \leq e < 1$, maka lintasan benda berbentuk elips. Nilai r terkecil terjadi pada saat $\theta = 0$. Ketika benda imajiner berada di titik paling dekat dari benda pertama, yaitu

$$r_P = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1+e}$$

Karena θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor \mathbf{r} dengan vektor \mathbf{D} , maka arah vektor \mathbf{D} adalah arah titik paling dekat yang dilalui oleh benda imajiner. Besar vektor \mathbf{D} adalah

$$D = \frac{L^2}{\mu r_P} - GM\mu.$$

Ketika $\theta = \pi$ radian, benda imajiner berada di titik terjauh dari Matahari, yaitu

$$r_A = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1-e}$$

Jumlahan $r_P + r_A$ tidak lain adalah sumbu panjang elips tersebut. Jadi,

$$a = \frac{1}{2}(r_P + r_A) = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1-e^2}. \quad (9.78)$$

Kedua, jika $e = 1$ maka posisi benda imajiner diberikan oleh

$$r = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{(1 + \cos \theta)}.$$

Titik terdekat yang akan dilalui oleh benda imajiner adalah

$$r_P = \frac{L^2}{2GM\mu^2}.$$

Sementara itu, titik terjauh tercapai ketika faktor $1 + \cos \theta = 0$ yakni di takberhingga. Ini berarti bahwa benda datang dari takberhingga, kemudian melintas di dekat

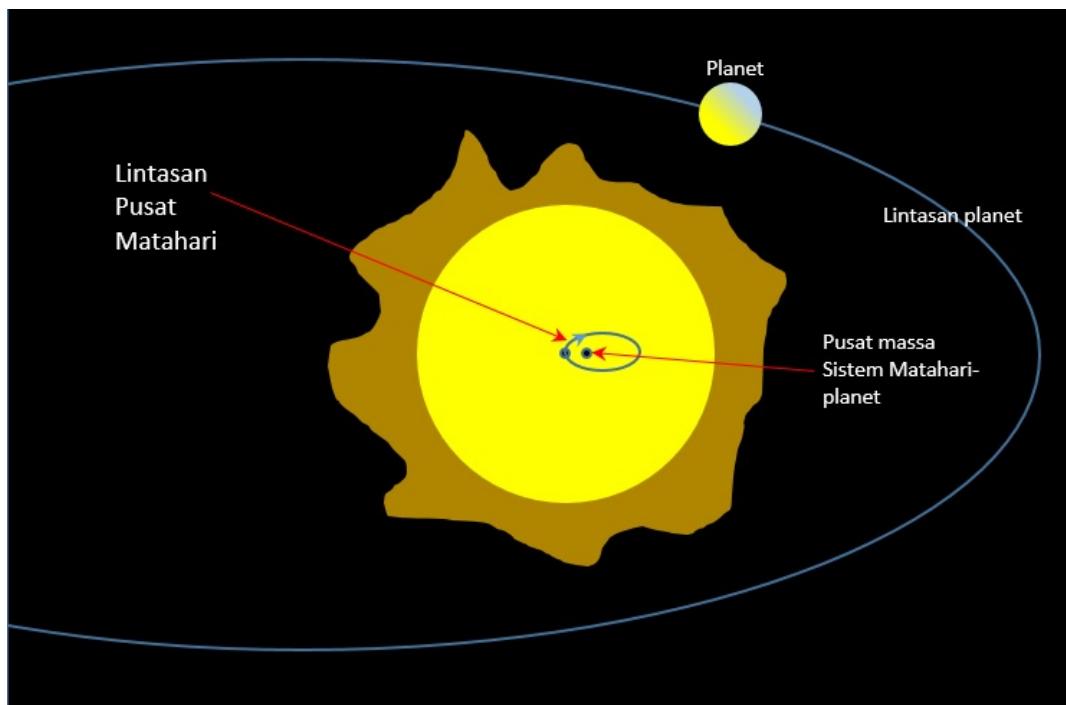
benda pertama lalu bergerak menuju ke takberhingga tanpa kembali lagi. Ketiga, untuk $e > 1$ jarak terdekat benda imajiner dari benda pertama adalah

$$r_P = \frac{L^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1+e}.$$

Jarak terjauh terjadi meskipun θ tidak sama dengan 180° . Mengapa?

Dapat dibuktikan bahwa gerak kedua benda itu jika dilihat dari koordinat atau kerangka acuan awal akan serupa dengan hasil-hasil di atas. Benda pertama akan terlihat bergerak sepanjang elips dengan titik fokus di pangkal koordinat awal demikian juga dengan benda kedua. Jika orbit kedua benda berupa orbit tertutup maka kedua orbit-orbit kedua benda itu akan memiliki periode yang sama. Kedua benda juga akan terlihat mengalami gerak dengan orbit elips jika dilihat dari pusat massa.

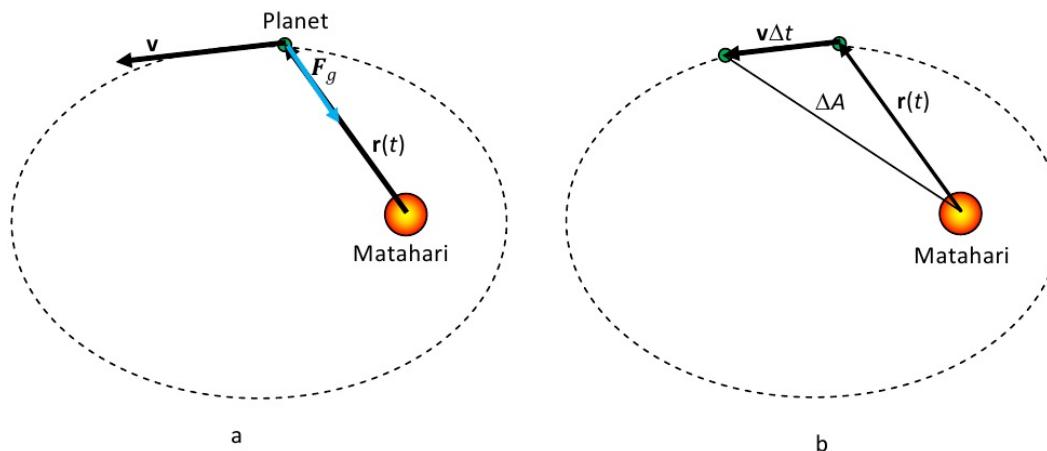
Pembahasan di atas dan hasil-hasil yang diperoleh dapat diterapkan untuk Matahari sebagai benda pertama dan sebuah planet sebagai benda kedua dengan pengabaian terhadap massa planet-planet yang lain. Jadi, Matahari pun juga mengalami gerak dengan orbit elips dengan fokus di pusat massa sistem Matahari-planet. Hanya saja, pusat massa sistem Matahari-planet itu sangat dekat dengan Matahari sehingga gerak Matahari sepanjang orbitnya tidak mudah untuk diamati dan planet-planet seolah bergerak seputar Matahari. Bintang-bintang yang menjadi pusat tata surya tentu saja mengalami situasi yang serupa yakni bahwa bintang-bintang itu mengorbit pada orbit kecil di sekitar pusatnya sehingga bintang-bintang itu bergoyang-goyang secara periodik. Gejala ini yang digunakan oleh para astronom untuk menentukan bahwa sebuah bintang sebagai pusat tata surya lain.²



Gambar 9.23: Jika dilihat dari pusat massa Matahari-planet, Matahari dan planet-planet memiliki orbit berupa elips dengan pusat massa sistem Matahari-planet berada di salah satu titik fokus orbit-orbit itu. Berhubung pusat massa sistem begitu dekat dengan pusat Matahari maka seolah-olah planet-planet bergerak mengitari Matahari.

Selanjutnya akan ditunjukkan berlakunya hukum kedua Kepler. Hukum kedua Kepler merupakan akibat kelestarian momentum sudut planet-planet. Sementara

²Cara menentukan bintang yang menjadi pusat suatu tata surya seperti itu pertama kali diungkapkan oleh M. Mayor dan D. Queloz pada tahun 1995. Lihat [?]



Gambar 9.24: a. Planet dan Matahari mengalami gaya gravitasi satu sama lain. b. Luasan yang disapu oleh planet selama waktu Δt adalah ΔA .

kelestarian momentum sudut masing-masing planet merupakan akibat lenyapnya momen gaya total yang bekerja pada masing-masing planet. Lenyapnya momen gaya total pada gilirannya merupakan akibat bahwa gaya gravitasi merupakan gaya terpusat, yakni tiadanya komponen yang tegak lurus dengan garis penghubung dua benda yang berinteraksi.

Sekarang perhatikan Gambar 9.24 a. Andaikan sebuah planet bermassa m_p mengorbit Matahari yang bermassa M_\odot . Sesuai dengan hukum pertama Kepler maka planet ini memiliki lintasan elips dan Matahari ada pada salah satu titik fokusnya jika dilihat dari kerangka diam Matahari (Matahari sebagai benda pertama). Sebagaimana telah dijelaskan di atas bahwa momentum sudut planet (sebagai benda kedua) bersifat konstan.

Selanjutnya perhatikan Gambar 9.24b. Dari gambar terlihat bahwa untuk selang waktu Δt , luas wilayah ΔA menurut hitung vektor tak lain adalah setengah kali besar vektor $r(t) \times (v\Delta t)$. Andaikan diambil selang waktu tersebut menjadi sangat kecil (menuju nol) maka Δt dapat dinyatakan sebagai dt sedemikian rupa sehingga luas wilayah dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{v}_p dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}_p| dt \\ &= \frac{1}{2m_p} |\mathbf{L}_p| dt, \end{aligned}$$

dengan \mathbf{L}_p momentum sudut planet. Jadi, terdapat kaitan

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m_p} |\mathbf{L}_p|. \quad (9.79)$$

Faktor dA/dt , merupakan laju perubahan luasan yang disapu oleh garis penghubung planet dengan Matahari. Karena momen gaya oleh gaya gravitasi Matahari lenyap, maka momentum sudut planet tetap. Jadi, $|\mathbf{L}_p|$ pun tetap. Karenanya, dari persamaan (9.79), laju perubahan luasan yang disapu garis penghubung planet ke Matahari juga tetap. Oleh karena itu, dalam waktu yang sama, garis itu akan menya-pu luasan yang sama.

Untuk mendapatkan hukum ketiga Kepler dari gravitasi Newton, kita tinjau sebuah planet yang orbitnya berupa lingkaran sempurna dengan jari-jari R_p . Orbit Bumi, misalnya, hampir seperti ini. Karena orbitnya berupa lingkaran, maka planet tersebut memiliki laju tangensial yang tetap. Sebut saja laju planet itu v_p . Planet tersebut mengalami percepatan sentripetal yang besarnya

$$a_s = \frac{v_p^2}{R_p}.$$

Karena satu-satunya gaya yang bekerja pada planet itu adalah gaya gravitasi Matahari, maka percepatan yang akan dialami oleh planet tersebut diberikan dalam persamaan (9.72) yaitu

$$a = \frac{G(M_\odot + m_p)}{R_p^2}.$$

Percepatan ini mengarah ke Matahari (benda pertama). Jadi, percepatan ini tidak lain adalah percepatan sentripetal,

$$\frac{v_p^2}{R_p} = \frac{G(M_\odot + m_p)}{R_p^2}.$$

Dari persamaan terakhir ini diperoleh

$$v_p^2 = \frac{G(M_\odot + m_p)}{R_p}. \quad (9.80)$$

Jika T_p kala revolusi planet tersebut, maka laju linier planet terkait dengan kala revolusinya melalui ungkapan $v_p = 2\pi R_p/T_p$. Jika nilai ini dimasukkan ke dalam persamaan (9.80), maka didapatkan

$$T_p^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G(M_\odot + m_p)} \right) R_p^3. \quad (9.81)$$

Persamaan ini tidak lain adalah hukum ketiga Kepler, dengan

$$C = \left(\frac{4\pi^2}{G(M_\odot + m_p)} \right). \quad (9.82)$$

Dari data yang diketahui tentang massa Matahari, maka nilai C dapat dihitung. Terlihat bahwa tetapan C hanya bergantung pada massa Matahari semata, yakni pusat tata surya. Jadi, di tata surya lain, di luar tata surya kita, tetapan C tentu berbeda, bergantung dari massa Mataharinya. Persamaan-persamaan yang telah kita dapatkan di atas bukan saja dapat diterapkan pada sistem tata surya namun dapat pula diterapkan untuk Bumi dan planet-planet lain yang mempunyai satelit.

Tabel 9.2: Data Planet

Planet	Massa (kg)
Merkurius	$3.3 \cdot 10^{23}$
Venus	$4.9 \cdot 10^{24}$
Bumi	$6.0 \cdot 10^{24}$
Mars	$6.4 \cdot 10^{23}$
Jupiter	$1.9 \cdot 10^{27}$
Saturnus	$5.7 \cdot 10^{26}$
Uranus	$8.7 \cdot 10^{25}$
Neptunus	$1.0 \cdot 10^{26}$

Uji Ketajaman 9.4

1. Besarnya produk vektor antara dua buah vektor sama dengan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh dua vektor itu. Sehingga luas suatu segitiga sama dengan setengah kali besarnya produk vektor antara dua vektor yang membentuk segitiga itu. Buktikan!
2. Karena memancarkan radiasi terus menerus maka massa Matahari berkurang secara terus menerus. Adakah pengaruhnya pada kala revolusi planet-planet?
3. Jupiter memiliki enam belas buah bulan. Empat bulan Jupiter yang paling terang dan paling lama dikenal adalah kelompok Galileo, sesuai dengan nama orang yang pertama melihatnya pada tahun 1610 M. Empat satelit Jupiter itu diberi nomor I, II, III, dan IV urut sesuai dengan jaraknya dari Jupiter. Lebih jauh lagi keempat bulan Jupiter kelompok Galileo ini diberi nama berturut-turut sebagai Io, Europa, Ganymede, dan Callisto. Delapan lagi bulan Jupiter ditemukan pada tahun 1892. Kala revolusi satelit-satelit Jupiter berkisar antara $7/4$ hari sampai $50/3$ hari. Apabila massa planet Jupiter 317,8 kali massa Bumi, hitunglah kisaran radius orbit satelit-satelit Jupiter!
4. Sekarang ini para ahli astrofisika dan astronomi sedang berburu sistem tata surya selain tata surya yang kita tempati ini. Salah satu yang telah ditemukan adalah Pegasus 51. Apabila periode dan radius sebuah planet dalam suatu tata surya berhasil diukur, maka dapatkah massa bintang sebagai ‘Matahari’ sistem tata surya itu dihitung? Jelaskan!
5. Benarkah C yang disebutkan dalam persamaan (9.82) merupakan tetapan untuk tata surya kita? Hitunglah tetapan C tersebut untuk semua planet yang ada.

9.6 Medan Gravitasi

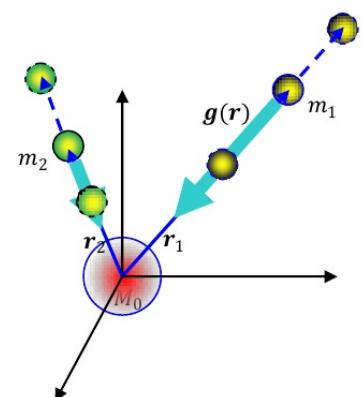
Sebuah benda titik bermassa M_0 diletakkan pada titik pusat suatu sistem koordinat (lihat Gambar 9.25). Kemudian, benda titik lain yang bermassa m_1 diletakkan pada posisi \mathbf{r}_1 . Maka benda bermassa M_0 akan melakukan gaya gravitasi pada benda pertama. Gaya gravitasi yang dialami oleh benda pertama karena keberadaan benda bermassa M_0 di pangkal koordinat dinyatakan oleh persamaan

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{GM_0m_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1. \quad (9.83)$$

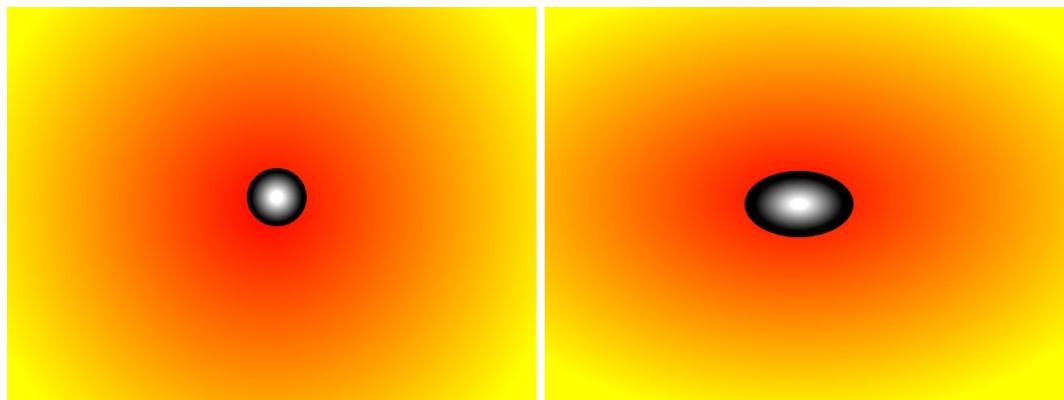
Kemudian, apabila pada posisi \mathbf{r}_2 diletakkan sebuah benda titik yang lain lagi dengan massa m_2 , maka benda bermassa M_0 pun akan menarik benda kedua dengan gaya gravitasi

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{GM_0m_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2. \quad (9.84)$$

Apabila benda pertama digeser mendekati titik pangkal koordinat, maka gaya tarik yang dialaminya semakin kuat. Dan sebaliknya, apabila benda pertama diajukan dari titik pangkal maka gaya gravitasi yang dialaminya karena keberadaan benda bermassa M_0 di titik pangkal semakin melemah. Hal ini terjadi juga pada benda kedua.



Gambar 9.25: Dua buah benda bermassa m_1 dan m_2 mengalami gaya tarik \mathbf{F}_1 dan \mathbf{F}_2 akibat adanya benda bermassa M_0 yang berada di pusat koordinat.



Gambar 9.26: Sebuah benda bermassa akan memengaruhi ruang di sekitarnya dengan menebarkan medan gravitasi di sekitarnya. Medan gravitasi yang ditebarkan bergantung pada berbagai hal semisal massa, bentuk, dll. Apabila benda itu memiliki simetri bola misalnya, maka medan yang ditebarkannya akan memiliki simetri bola. Demikian juga apabila benda itu memiliki simetri elipsoid.

Sekarang kita perhatikan beberapa pertanyaan. Mungkin orang menganggapnya pertanyaan-pertanyaan bodoh dan memang pertanyaan kanak-kanak, tetapi sebenarnya merupakan pertanyaan-pertanyaan yang wajar untuk dilontarkan bagi yang berpikir kritis.

- Bagaimanakah benda bermassa M_0 dapat mengetahui kedatangan benda pertama? Dan sekaligus juga benda kedua?
- Bagaimana pula benda bermassa M_0 dapat mengetahui bahwa benda pertama bertambah dekat atau beringsut menjauh sehingga benda bermassa M_0 “harus” menambah atau pun mengurangi tarikannya?
- Apakah hal ini (bertambah atau berkurangnya besar gaya gravitasi oleh benda bermassa M_0) terjadi tepat sesaat setelah benda pertama dan kedua bergeser tempat?

Pertanyaan-pertanyaan di atas dijawab oleh konsep medan gravitasi. Keberadaan sebuah benda bermassa di suatu tempat diasumsikan memengaruhi sekelilingnya dengan sesuatu yang disebut medan gravitasi. Medan gravitasi di suatu tempat yang ditimbulkan oleh suatu benda adalah gaya gravitasi yang dilakukan benda itu pada suatu partikel titik yang bermassa satu satuan dan terletak di tempat tersebut. Partikel titik yang bermassa satu satuan ini disebut partikel uji. Sebenarnya partikel uji tidak harus bermassa satu satuan, yang penting bahwa partikel uji di suatu titik tidak memengaruhi konfigurasi sumber gravitasi. Jadi, cara mengukur medan gravitasi di suatu tempat adalah dengan mengukur besar gaya gravitasi yang dialami oleh partikel uji di tempat itu lalu membaginya dengan massa partikel uji di tempat itu. Medan gravitasi diberi simbol \mathbf{g} . Dari persamaan (9.84), medan gravitasi di titik dengan posisi \mathbf{r} yang ditimbulkan oleh benda titik bermassa M_0 yang berada di pangkal koordinat diberikan oleh

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM_0}{r^3}\mathbf{r}. \quad (9.85)$$

Dengan demikian, gaya gravitasi yang dialami oleh benda titik pertama dapat diungkapkan dengan cara yang lebih sederhana,

$$\mathbf{F}_1 = M_1 \mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (9.86)$$

Sekarang andaikan bahwa benda yang berada di pangkal koordinat itu bola pejal homogen berjejari R dengan massa M , sedangkan benda pertama berada pada titik di luar bola dengan vektor posisi \mathbf{r} . Maka medan gravitasi yang ditimbulkan oleh bola di titik-titik yang berada di luarnya dapat diperoleh dari uraian bagian sebelumnya, yakni

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (9.87)$$

Dan benda pertama yang terletak disekitar bola pejal itu pada posisi \mathbf{r} akan mendekati gaya gravitasi $\mathbf{F} = mg(\mathbf{r})$.

Apabila bola pejal homogen yang berada di pangkal koordinat itu Bumi, maka gaya yang diungkapkan dalam persamaan terakhir itu tidak lain adalah gaya berat. Dan $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ adalah percepatan gravitasi Bumi di suatu titik di luar Bumi dengan jarak r dari pusat Bumi. Oleh karena itu, benda yang berada pada ketinggian h dari permukaan Bumi akan mengalami percepatan gravitasi sebesar

$$g(h) = -\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2}. \quad (9.88)$$

dengan M_{\oplus} dan R_{\oplus} masing-masing mewakili massa dan jari-jari Bumi.

Uji Ketajaman 9.5

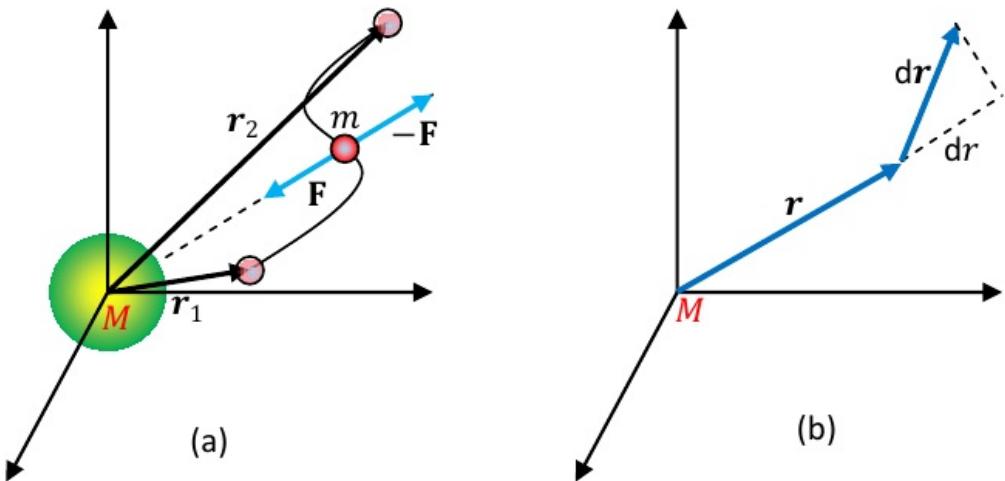
Diskusikan dengan teman kuliah Anda alasan percepatan gravitasi di daerah kutub Bumi lebih besar daripada percepatan gravitasi di khatulistiwa! Secara matematis, silakan buktikan hasilnya!

9.7 Tenaga Potensial Gravitasi

Usaha Oleh Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi yang diungkapkan oleh persamaan (9.83) merupakan **gaya lestari** atau **konservatif**. Suatu gaya disebut **gaya lestari** apabila usaha yang dilakukan oleh gaya itu sepanjang suatu benda yang bergerak tidak bergantung pada lintasan yang dilalui oleh benda itu, melainkan hanya bergantung pada titik pangkal dan titik ujung lintasan itu. Oleh karenanya, jika lintasan benda itu berupa lintasan tertutup, maka titik ujung sama dengan titik pangkal dan usahanya sama dengan nol. Jadi, gaya lestari dapat pula dipahami sebagai gaya yang usahanya pada suatu benda yang beredar pada suatu lintasan tertutup selalu nol.

Perhatikan Gambar 9.27. Pada gambar terlihat bahwa sebuah benda bermassa M ditempatkan di pangkal koordinat dan sebuah benda uji bermassa m_u diletakkan sejauh \mathbf{r} . Andaikan usaha W harus dilakukan dalam upaya memindahkan benda uji sepanjang lintasan dalam medan gravitasi. Selama gaya \mathbf{F} pada benda uji dituliskan



Gambar 9.27: Diagram untuk mendapatkan usaha W dalam rangka memindahkan benda uji di dalam medan gravitasi yang berasal dari benda bermassa M .

sebagai

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{GMm_u}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}},$$

maka untuk mengatasi gaya ini diperlukan gaya luar sebesar $-\mathbf{F}$ pada benda uji tersebut. Usaha dW yang dilakukan dalam upaya memindahkan benda uji melalui lintasan sejauh dr diberikan oleh

$$\begin{aligned} dW &= -\mathbf{F} \cdot dr \\ &= \frac{GMm_u}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr, \end{aligned} \quad (9.89)$$

dengan $\hat{\mathbf{r}}$ adalah vektor satuan arah radial r . Selanjutnya dr dapat dituliskan dalam dua komponen yakni $\hat{\mathbf{r}}dr$ yang paralel dengan $\hat{\mathbf{r}}$, sehingga diperoleh

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot dr = dr$$

dan sedemikian rupa sehingga usaha W dapat diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} W &= GMm_u \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= -GMm_u \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \end{aligned} \quad (9.90)$$

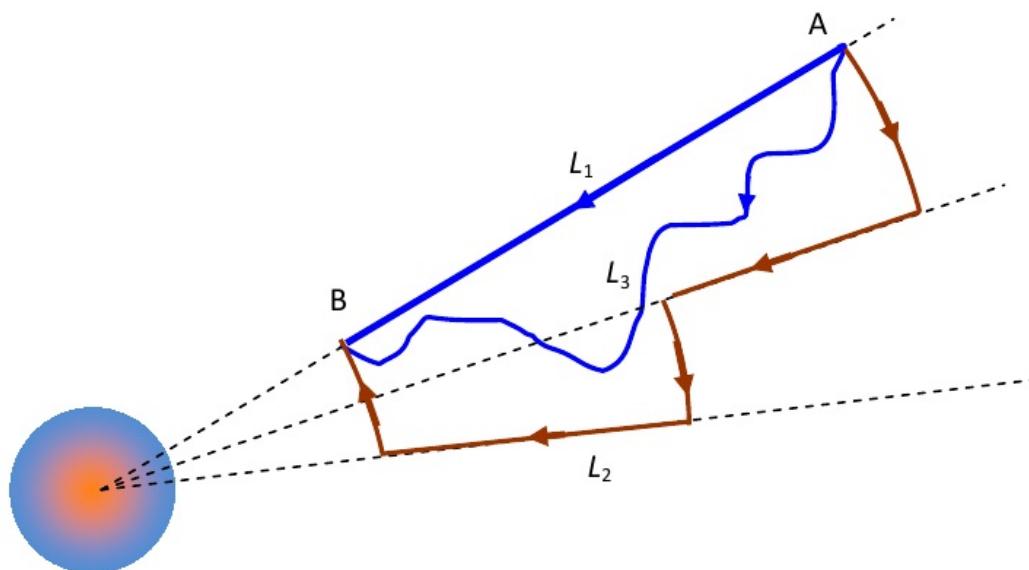
dengan r_1 dan r_2 adalah jarak radial dari dimulainya partikel uji digerakkan sampai dengan berhenti. Oleh karena itu, usaha luar yang dilakukan bebas dari lintasan yang dilaluinya dan hanya bergantung dari titik awal dan titik akhir saja. Dengan kata lain, usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi tidak bergantung pada lintasan melainkan pada titik awal dan titik akhir lintasan. Andaikan partikel uji digerakkan dari titik r_1 sampai dengan titik r_1 , maka nilai usaha yang dilakukan tersebut adalah

$$W = -GMm_u \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0. \quad (9.91)$$

Kenyataan ini memberikan bukti pada kita bahwa medan gravitasi merupakan gaya lestari (konservatif).

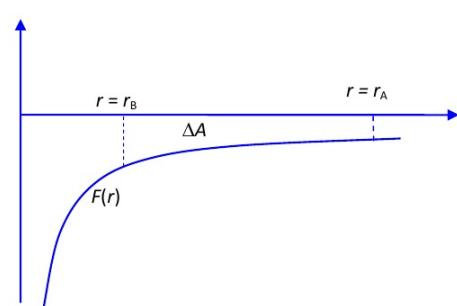
Selain uraian tersebut di atas, masih ada cara *intuitif* yang dapat membantu kita dalam memahami alasan bahwa gaya gravitasi merupakan gaya lestari. Pertama harus dicamkan bahwa gaya gravitasi yang ditimbulkan oleh benda titik atau benda yang memiliki kesetangkupan bola besarnya hanya bergantung pada jarak kedua benda itu (diukur dari pusat masing-masing benda itu). Kedua, harus selalu dicatat pula bahwa gaya gravitasi merupakan gaya terpusat, artinya arah gaya gravitasi sepanjang garis penghubung pusat-pusat kedua benda itu. Jadi, dari kedua sifat gaya gravitasi itu, didapat

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}.$$



Gambar 9.28: Lintasan yang dilewati benda bermassa m tidak memberikan pengaruh terhadap besar kecilnya usaha yang dilakukan untuk menggerakkan benda tersebut di dalam medan gravitasi. Dengan kata lain, usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi tidak bergantung pada lintasan.

Sekarang perhatikan Gambar 9.28. Pada gambar tersebut diperlukan tiga lintasan yang berawal dari titik A dan berakhir di titik B di sekitar sebuah bola bermassa M (dengan r_A dan r_B lebih dari jejari bola). Kita akan menghitung usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi pada sebuah benda bermassa m yang melewati ketiga lintasan itu dari A menuju B . Pada lintasan L_1 , gaya gravitasi selalu searah dengan lintasan benda. Oleh karena itu, seperti pada bab sebelumnya, usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi bola itu adalah ΔA , dengan ΔA adalah luas wilayah pada grafik yang dibatasi oleh kurva gaya, sumbu r , garis $r = r_A$ dan garis $r = r_B$ (Gambar 9.29). Tanda minus harus ditambahkan karena arah lintasan berlawanan dengan arah bertambahnya r . Luas wilayah yang dimaksud dapat dihitung sebagai berikut. Bagi luas wilayah tersebut menjadi sejumlah potongan-potongan kecil arah vertikal sehingga garis yang dibatasi oleh r_A sampai dengan



Gambar 9.29: Wilayah di atas kurva $F(r)$ yang dibatasi oleh r_A dan r_B adalah besarnya usaha yang digunakan untuk memindahkan sebuah benda bermassa m dari titik r_A sampai dengan titik r_B .

r_B terbagi menjadi n buah bagian yang tiap bagianya memiliki wilayah dengan batas Δr . Selanjutnya wilayah ΔA dapat dituliskan sebagai

$$\Delta A = F(r)r = \sum_{r_A}^{r_B} F(r)\Delta r.$$

Andaikan pembagian atas Δr itu dibuat sehalus mungkin (menuju nol), maka luas ΔA dapat dihitung menurut

$$\Delta A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{r_A}^{r_B} F(r)\Delta r = \int_{r_A}^{r_B} F(r)dr = -GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (9.92)$$

Pada lintasan L_2 , arah gravitasi berubah-ubah, di beberapa tempat tegak lurus dengan arah gerak (pergeseran) benda di beberapa tempat yang lain searah dengan arah gerak (pergeseran) benda. Pada saat gaya gravitasi tegak lurus dengan arah pergeseran benda, usaha gaya itu nol. Sementara pada saat gaya gravitasi searah dengan pergeseran benda usahanya tidak nol. Usaha total gaya gravitasi pada benda selama benda itu bergerak melintasi lintasan L_2 adalah jumlahan usaha gaya tersebut pada masing-masing segmen (potongan) lintasan. Jika dijumlahkan maka terlihat bahwa panjang lintasan yang memberi sumbangannya sama dengan panjang lintasan L_1 . Karena titik-titik ujung kedua lintasan itu sama, maka usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi pada benda selama benda melewati lintasan L_2 sama dengan yang diberikan oleh persamaan (9.92).

Bagaimana dengan lintasan L_3 ? Hasilnya sama saja. Sebab lintasan terakhir ini pun pada dasarnya dapat dipotong-potong atas lintasan-lintasan amat sangat kecil yang di beberapa tempat searah dengan gaya gravitasi dan di beberapa tempat yang lain tegak lurus dengan gaya gravitasi. Pada potongan-potongan lintasan yang tegak lurus dengan gaya gravitasi, usaha oleh gaya gravitasi itu nol. Usaha total gaya gravitasi melalui lintasan L_2 tidak lain adalah jumlahan usaha oleh gaya gravitasi pada potongan-potongan lintasan yang searah dengan gaya itu. Jumlahan ini sama dengan usaha melalui lintasan L_1 . Jadi usaha oleh gaya gravitasi tidak bergantung pada lintasan yang dipilih.

Uji Ketajaman 9.6

Buktikan usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi melalui lintasan tertutup selalu sama dengan nol.

Tenaga Potensial Gravitasi

Masih terkait dengan usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi sebuah bola bermassa M dengan jejeri R pada sebuah benda bermassa m . Besaran skalar U yang ditentukan oleh persamaan

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (r \geq) R \quad (9.93)$$

disebut tenaga potensial gravitasi sistem bola-benda yang terpisah sejauh r .

Andaikan salah satu atau kedua dari anggota sistem digerakkan sedemikian rupa sehingga terdapat perubahan jarak. Tentu saja pergeseran ini menimbulkan adanya perubahan tenaga potensial gravitasi sistem yang didefinisikan sebagai nilai minus usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi selama berlangsung pergeseran yang dimaksud (Gambar 9.30). Secara matematis definisi ini dapat dituliskan sebagai

$$\Delta U = U_{akhir} - U_{awal} = - \int_{r_2}^{r_1} F(r) dr. \quad (9.94)$$

Andaikan besarnya $F(r)$ disepakati sebagai besarnya gaya gravitasi yang diderita oleh benda bermassa m yang mengalami perpindahan yakni

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$$

dengan tanda negatif berarti benda bergerak menjauh dari bola. Dengan nilai ini, kita dapat mengungkapkan persamaan (9.94) sebagai

$$\begin{aligned} U_{akhir} - U_{awal} &= - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \\ &= - \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr \\ &= GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\ &= GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} \end{aligned}$$

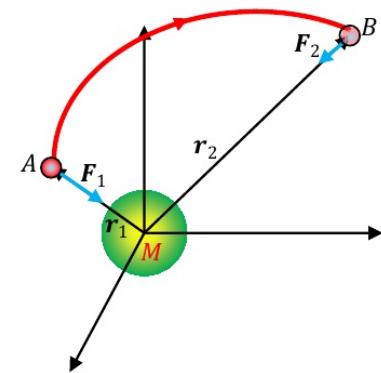
atau

$$\Delta U = -GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (9.95)$$

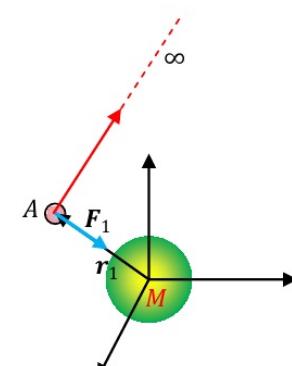
Dari uraian tersebut juga dapat kita pahami bahwa tenaga potensial sistem bola-benda tersebut nol jika pergeseran yang dilakukan jaraknya sangat jauh atau dengan kata lain benda terpisah sangat jauh oleh jarak yang besarnya tak berhingga. Jika pada persamaan (9.95), r_2 dipilih jarak menuju tak berhingga dan $r_1 = r$ maka usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi selama benda m dibawa menuju ke titik tak berhingga tersebut adalah

$$\begin{aligned} W_{r \rightarrow \infty} &= GMm \left(0 - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= -\frac{GMm}{r_1}. \end{aligned} \quad (9.96)$$

Jadi, $W_{r \rightarrow \infty} = -U(r)$ atau $U(r) = -W_{r \rightarrow \infty} = W_{\infty \rightarrow r}$. $W_{\infty \rightarrow r}$ adalah usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi pada benda selama benda itu dibawa dari tempat di luar bola yang jaraknya tak hingga menuju ke suatu tempat di luar bola yang berjarak r . Oleh karena itu, tenaga potensial gravitasi yang



Gambar 9.30: Sebuah benda bermassa m dipindahkan dari titik A ke titik B dalam wilayah medan gravitasi yang dimiliki oleh bola bermassa M .



Gambar 9.31: Sebuah benda bermassa m dipindahkan dari titik A menuju ke suatu tempat yang jaraknya tak hingga (∞) dalam wilayah medan gravitasi yang dimiliki oleh bola bermassa M .

dimiliki oleh sebuah sistem yang tersusun atas dua benda titik yang terpisah oleh jarak sejauh r adalah usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi antara kedua benda selama proses pemisahan kedua benda itu sehingga keduanya terpisah oleh jarak yang tak hingga jauhnya.

Dengan demikian persamaan (9.95) dapat dituliskan sebagai

$$W = U(r_2) - U(r_1) = -\Delta U. \quad (9.97)$$

Hal ini tentu sejalan dengan yang telah diuraikan dalam bab sebelumnya bahwa usaha oleh sebuah gaya (lestari) pada suatu benda sama dengan minus perubahan tenaga potensial benda itu.

Tentu saja proses dalam mendapatkan tenaga potensial ini dapat kita balik sedemikian rupa sehingga gaya gravitasi dapat ditentukan dengan menurunkan tenaga potensial gravitasi. Untuk gaya yang hanya bergantung pada r saja, dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}. \quad (9.98)$$

Dalam bentuk yang lebih umum, yakni U bergantung pada tiga koordinat, persamaan tersebut menjadi

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (9.99)$$

dengan ∇U adalah *gradien* U . Dalam koordinat kartesian \mathbf{F} dapat disajikan sebagai

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}. \quad (9.100)$$

Andaikan ketika memindahkan benda m , benda tersebut mengalami kelajuan sebesar v sedemikian rupa sehingga kelajuan tersebut dapat berubah setiap waktu. Dalam permasalahan ini, usaha yang dilakukan benda tersebut dapat ditinjau dengan menuliskan kembali integral usaha, yakni

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U = \int_{r_1}^{r^2} \mathbf{F} dr \\ &= \int_{r_1}^{r^2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot (\mathbf{v} dt) = \int_{r_1}^{r^2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{v} dt) \\ &= \int_{r_1}^{r^2} m \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dt = \int_{r_1}^{r^2} m \frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{dt} dt \\ &= \int_{r_1}^{r^2} m d\left(\frac{1}{2}v^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

atau dapat kita tuliskan sebagai

$$W = -\Delta U = \Delta T, \quad (9.101)$$

dengan

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9.102)$$

yakni tenaga kinetik benda bermassa m tersebut. Oleh karena itu usaha yang dilakukan oleh benda menghasilkan perubahan tenaga kinetik benda. Pernyataan ini merupakan ungkapan lain untuk konsep kelestarian tenaga. Dari persamaan (9.101), diperoleh

$$\Delta U + \Delta T = \Delta(U + T) = 0. \quad (9.103)$$

Jadi, jika tidak ada gaya lain selain gravitasi, maka tenaga mekanik sistem, yakni $E_M = U + T$, bersifat konstan. Inilah hukum kelestarian tenaga mekanik.

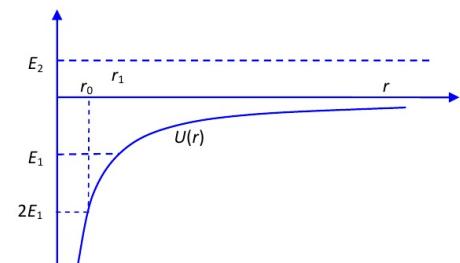
Tenaga Mekanik dan Bentuk Lintasan

Adaikan suatu benda titik C (bermassa m) yang bergerak di sekitar benda titik D yang cukup masif (bermassa M). Selain memiliki tenaga potensial gravitasi dengan nilai bergantung pada r (jarak kedua benda titik itu) menurut persamaan (9.93), benda C juga memiliki tenaga kinetik. Jumlahan kedua jenis tenaga itu tentu saja disebut tenaga mekanik keseluruhan atau cukup disebut tenaga mekanik saja (agar lebih singkat). Jadi, tenaga keseluruhan benda C yang bermassa m diberikan oleh

$$E = E_k + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (9.104)$$

dengan v laju benda C .

Besarnya tenaga mekanik ini akan berpengaruh pada bentuk lintasan yang diambil oleh benda C dalam mengelilingi benda D . Sebagai contoh apabila benda C memiliki tenaga mekanik total E_2 , maka benda C dapat pergi ke mana saja karena dia bisa mengatasi potensial gravitasi yang ditimbulkan oleh benda D . Dalam hal ini, benda C akan memiliki orbit berbentuk hiperbola. Setelah mendekati benda D ia pergi menjauh tanpa pernah kembali lagi. Apabila benda C memiliki tenaga mekanik keseluruhan nol, maka lintasannya berbentuk parabola. Benda C datang dari suatu tempat di tak berhingga, mendekati benda D , kemudian pergi kembali ke tak berhingga. Apabila benda memiliki tenaga total $E_1 < 0$ (lihat Gambar 9.32), maka benda itu tidak dapat mengatasi potensial $U(r)$. Jadi, benda C tidak dapat pergi ke mana-mana kecuali pada jarak yang kurang dari atau sama dengan r_1 (diukur dari pusat benda D). Dalam hal ini benda C dikatakan terikat dan mempunyai orbit berbentuk elips. Apabila saja benda C dengan tenaga mekanik keseluruhan E_1 ini memiliki lintasan berbentuk lingkaran dengan jejari r_0 . Maka berdasarkan hukum kedua Newton



Gambar 9.32: Lintasan yang dilalui oleh sebuah benda berdasarkan tenaga kinetik yang dimilikinya.

$$\frac{GMm}{r_0^2} = a_s = m \frac{v^2}{r_0}$$

Apabila kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan $r_0/2$, maka didapatkan

$$\frac{GMm}{2r_0} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Karena ruas kanan persamaan terakhir ini adalah tenaga kinetik benda C , maka

$$T = \frac{GMm}{2r_0} = -\frac{U(r_0)}{2}. \quad (9.105)$$

Apabila persamaan ini dimasukkan kembali ke dalam persamaan (9.104), maka

$$E_1 = \frac{U(r_0)}{2}. \quad (9.106)$$

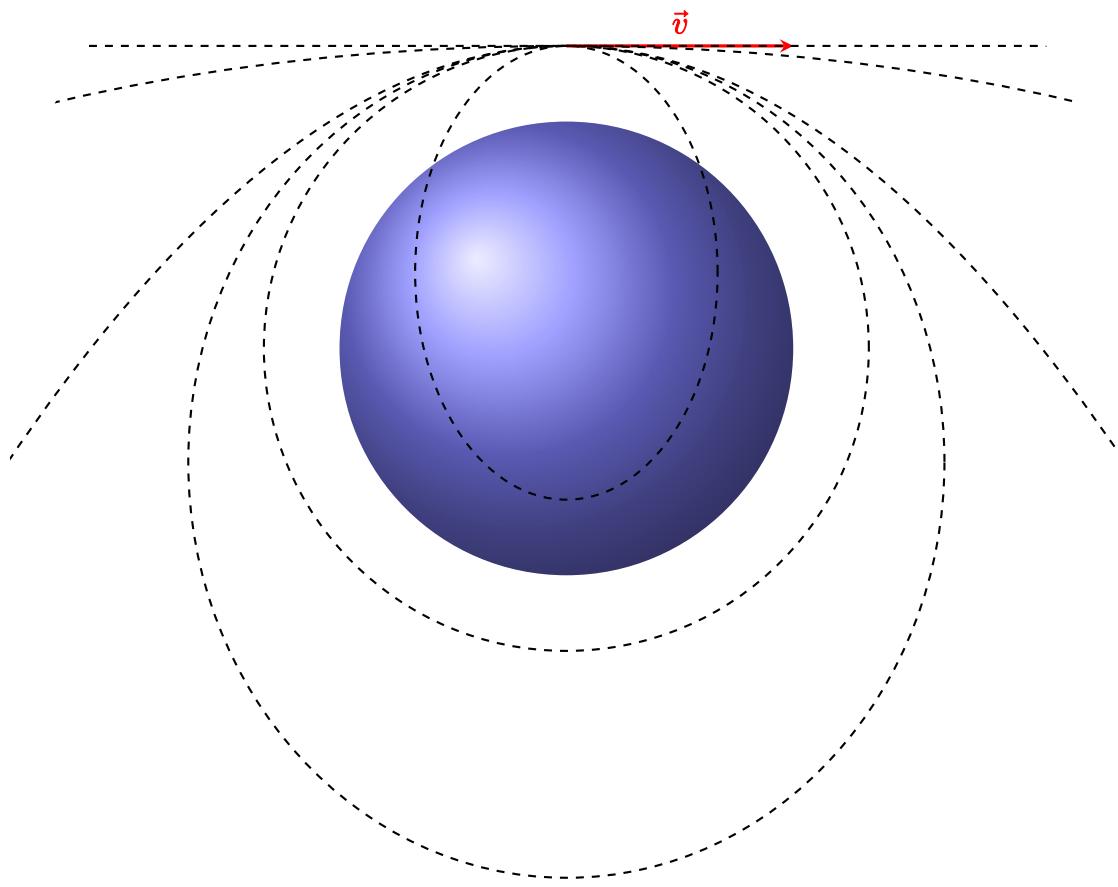
Jika benda C dengan tenaga mekanik keseluruhan E_1 memiliki orbit berbentuk elips, maka r_1 adalah sumbu panjang maksimum dari orbit-orbit elips yang mungkin bagi benda C . Artinya, orbit-orbit elips yang mungkin bagi benda C memiliki sumbu-sumbu panjang yang tidak lebih dari r_1 . Sebab apabila benda C itu memiliki tenaga total E_1 , maka berdasarkan grafik pada Gambar 9.32, garis $E = E_1$ memotong kurva $U(r)$ di titik r_1 . Pada saat itu $E_1 = U(r_1)$. Berdasarkan hukum kelestarian tenaga mekanik, pada jarak r_1 itu tenaga kinetik benda C nol. Artinya, benda C sesaat tidak memiliki kecepatan di sana. Ini berarti bahwa orbit elips dengan sumbu panjang r_1 merupakan elips yang memiliki eksentrisitas satu, artinya sumbu panjangnya sama dengan setengah jarak antar titik fokus. Jadi, berupa garis lurus. Oleh karena itu, benda C bergerak bolak-balik sepanjang garis lurus yang panjangnya $2r_1$. Jadi, jika benda C memiliki tenaga mekanik total E_1 , maka ada sekian banyak kemungkinan orbit elips baginya dengan sumbu panjang yang bervariasi dari r_0 sampai r_1 .

9.8 Orbit Satelit

Gambar ?? melukiskan cara orang menempatkan satelit buatan di orbit. Satelit yang akan diorbitkan dibawa ke suatu ketinggian tertentu, katakanlah h . Pada ketinggian itu satelit diberi kecepatan horizontal, katakanlah v_0 . Bentuk orbit tergantung dari besar laju awal ini. Misalkan massa satelit itu m . Maka dengan laju awal v_0 , satelit memiliki tenaga mekanik keseluruhan

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h}. \quad (9.107)$$

Seperti yang telah diuraikan pada bagian sebelum ini, jika laju awal sedemikian rupa sehingga tenaga total E negatif, maka lintasan satelit akan berupa elips. Namun, laju awal yang terlalu rendah akan mengakibatkan satelit jatuh ke Bumi, sebab lintasan elipsnya memotong Bumi. Ini diperlihatkan oleh lintasan L_1 . Dengan memperbesar laju awal v_0 , didapatkan lintasan L_2 yang berbentuk elips yang tak memotong Bumi. Untuk lintasan elips L_2 ini, Bumi terletak pada titik fokus yang lebih jauh dari titik awal A .



Gambar 9.33: Lintasan

Lintasan lingkaran didapatkan pada saat laju awal mencapai nilai yang memenuhi persamaan (9.106) dengan $r_0 = R_{\oplus} + h$. Jadi,

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{2(R_{\oplus} + h)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h}$$

atau

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}. \quad (9.108)$$

Apabila laju awal v_0 diperbesar lagi, maka tenaga mekanik total masih kurang dari nol. Oleh karena itu lintasannya masih berupa elips, hanya saja sumbu panjangnya semakin besar dan Bumi terletak pada titik fokus yang lebih dekat ke titik awal. Apabila laju awal v_0 diperbesar lagi, maka tenaga mekanik akan ikut bertambah besar hingga, pada suatu nilai v_0 tertentu, tenaga mekanik lenyap. Pada saat itu berlaku

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h}$$

atau

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}. \quad (9.109)$$

Jika laju awal v_0 memiliki nilai yang diberikan oleh persamaan (9.109), maka satelit akan bergerak pada lintasan yang berbentuk parabola. Satelit dengan laju awal semacam ini tidak akan pernah kembali ke titik awal A . Bahkan tidak akan pernah terlihat lagi di sekitar Bumi. Apabila laju v_0 melebihi nilai yang ditentukan oleh persamaan (9.109), maka lintasan satelit berbentuk hiperbola. Sama halnya dengan kasus lintasan parabola, satelit tidak akan pernah kembali lagi ke sekitar Bumi.

Untuk $h = 0$, persamaan (9.109) menjadi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}. \quad (9.110)$$

Satelit yang diberi kecepatan awal v_0 yang nilainya diberikan oleh persamaan (9.110) entah pada arah mendatar maupun arah vertikal tidak akan pernah kembali ke Bumi lagi. Laju awal v_0 yang memenuhi persamaan (9.110) disebut laju lepas. Yakni laju minimum yang dibutuhkan untuk melempar sebuah benda (satelit, misalnya) ke luar angkasa sehingga terbebas dari pengaruh gravitasi Bumi. Terlihat bahwa laju lepas tidak tergantung pada massa benda yang dilempar.

Uji Ketajaman 9.7

1. Suatu misi penting menuju planet Neptunus akan diberangkatkan. Misi tersebut diharapkan mampu mengambil sampel gas yang ada di planet tersebut. Ketua proyek memutuskan untuk memakai pesawat yang mampu mencapai kelajuan maksimum 17,5 kilometer per detik. Tepatkah pengambilan keputusan semacam ini?
2. Sebuah benda bermassa m mula-mula terletak pada suatu tempat berketinggian h dari permukaan tanah di titik $8^{\circ}LS, 110^{\circ}BT$. Kemudian benda itu dibawa terbang menyusuri garis $8^{\circ}LS$ pada ketinggian yang sama ke arah timur. Pada saat benda berada di atas titik $8^{\circ}LS, 10^{\circ}BB$ benda dibawa sedikit menurun beberapa saat sehingga di atas titik $8^{\circ}LS, 10^{\circ}BT$ ketinggian benda tinggal k . Penerbangan dilanjutkan ke timur pada ketinggian itu hingga kembali ke titik di atas $8^{\circ}LS, 110^{\circ}BT$ dan berhenti di sana. Hitunglah usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi Bumi pada benda itu selama perjalanan yang cukup panjang itu!
3. Dalam peluncuran satelit, apakah massa total satelit mempunyai pengaruh terhadap sulit atau mudahnya satelit tersebut lepas dari pengaruh gravitasi Bumi ?

9.9 Pandangan Einstein tentang Gravitasi

Sekali lagi tiada teori atau pandangan dalam sains yang dapat dibuktikan kebenarannya. Seribu eksperimen yang mendukung sebuah pandangan tidak akan mencukupi untuk mengatakan bahwa pandangan itu benar. Jangankan seribu, satu juta, bahkan semilyar atau berapapun jumlah eksperimen yang mendukung pandangan atau teori itu pun tidak akan mencukupi untuk menyatakan kebenaran pandangan

atau teori itu. Akan tetapi, apa pentingnya membuktikan kebenaran sebuah teori? Mungkin pembuktian kebenaran bukan sesuatu yang paling penting bagi sebuah teori atau pandangan sains. Yang jelas, satu hal yang sangat penting bagi sebuah teori adalah kemampuannya dalam memberikan penjelasan yang memadai tentang gejala-gejala alamiah dan ketepatannya dalam membuat prakiraan atau prediksi tentang hasil-hasil eksperimen yang akan dilakukan. Sekali saja prediksi tentang hasil sebuah eksperimen atau pengamatan tidak sesuai dengan hasil-hasil nyata eksperimen atau pengamatan yang dilakukan, maka cukup bagi kita untuk memvonis salah teori atau pandangan itu. Begitulah kenyataan tentang nasib pandangan Newton.

Sampai dengan sebab sebelumnya, kita masih melihat dan memahami perilaku gerak dan gaya tarik antar benda-benda (langit) dengan menggunakan cara pandang Newton melalui hukum-hukumnya. Hasil-hasil pengamatan dalam bidang astronomi dan astrofisika memperlihatkan kegagalan pandangan Newton dalam memberikan penjelasan dan prediksi. Pandangan Newton misalnya tidak mampu menjelaskan terjadinya presesi orbit Merkurius. Bagi Newton, cahaya tidak akan terpengaruh oleh gravitasi. Demikian halnya, gelombang-gelombang elektromagnetik yang lain. Oleh karena itu, sangat masuk akal jika gravitasi Newton tidak memperkirakan terjadinya pembelokan cahaya oleh gravitasi. Kenyataannya, Merkurius terlihat oleh Eddington meskipun berada di balik Matahari pada saat terjadi gerhana Matahari tahun 1930. Teori gravitasi Newton juga tidak meramalkan keberadaan gelombang gravitasi. Akhir-akhir ini para fisikawan mulai mampu "merasakan" keberadaan gelombang gravitasi yang berasal dari masa lalu alam semesta. Jika keberadaan gelombang gravitasi itu benar-benar secara empiristik dibuktikan, maka keberadaan tahap inflasi dalam perkembangan alam semesta benar-benar dapat dipastikan. Selain ketiga hasil pengamatan itu, masih banyak lagi gejala alamiah yang tidak dapat dijelaskan dan diperkirakan dengan bersandarkan pada pandangan Newton.

Salah satu cara keluar dari permasalahan ini adalah penggeseran paradigma. Einstein merupakan orang pertama yang mengusulkan paradigma baru, meninggalkan paradigma Newton. Pada dasarnya teori Einstein muncul sebagai upaya perumusan teori gravitasi yang kompatibel dengan relativitas khusus atau lebih sopannya penggabungan teori gravitasi Newton dan teori relativitas khusus Einstein. Upaya ini dilakukan tatkala dia menyadari kenyataan penting bahwa seorang yang sedang jatuh bebas tidak akan merasakan berat tubuhnya. Dengan kata lain, ketika seseorang mengalami jatuh bebas, tidak ada cara untuk mengetahui berat tubuhnya. Demikian pula dengan benda-benda bermassa yang lain, setiap benda bermassa yang mengalami jatuh bebas pada saat itu tidak ada satu pun cara yang dapat digunakan untuk mengetahui beratnya. Dorongan berikutnya adalah upaya lebih memahami kaitan antara massa inersial dan massa gravitacional, khususnya adalah akibat kesamaan antara kedua konsep massa itu. Dorongan ketiga adalah pandangan Einstein dan gurunya, Ernest Mach, bahwa "*Space-time is not a thing*", artinya bahwa ruang-waktu tidak memiliki eksistensi secara mandiri. Ruang-waktu bukan sesuatu, yang keberadaannya bebas dari yang lain. Keberadaan dan sifat ruang-waktu ditentukan dari yang lain, yakni dari hal-hal fisis semisal materi dan tenaga. Ruang-waktu bukan panggung yang mewadahi "pergelaran" gejala-gejala fisis, sehingga ketiadaan gejala-gejala fisis menurut padangan Newton tidak berpengaruh bagi keberadaan ruang-waktu itu. Sementara bagi Einstein gejala-gejala fisislah yang membentuk ruang-waktu.

Einstein memandang bahwa kerangka acuan merupakan rekayasa manusia (*human construct*), jadi tidak alami, oleh karena itu hukum-hukum fisika seharusnya tidak bergantung pada kerangka acuan tempat hukum-hukum itu diamati. Kerangka acuan hanyalah alat untuk mengungkapkan kaitan-kaitan di antara proses-proses fisis

dan karenanya tidak memiliki keberadaan yang mandiri. Jika seseorang mengetahui hukum-hukum fisika pada kerangka acuan inersial dengan medan gravitasi, dan melakukan transformasi ke sebuah kerangka acuan yang dipercepat relatif terhadap kerangka acuan yang pertama, maka dampak percepatan harus sama dengan yang diberikan oleh gravitasi. Teori relativitas umum Einstein diungkapkan melalui beberapa prinsip kesetaraan.

Prinsip Kesetaraan Lemah

Eksperimen Galilei di menara condong Pisa membentuk gejala alamiah yang menjadi kunci bagi kemunculan pandangan Einstein. Eksperimen Galilei memperlihatkan keyakinannya bahwa gerak benda-benda di dalam medan gravitasi tidak bergantung pada massa benda-benda itu. Hal ini dengan mudah dapat dijelaskan dengan gravitasi Newton, dengan menambahkan keyakinan bahwa massa inersial sama dengan massa gravitasi.

Prinsip Kesetaraan Lemah:

Massa lembam/inersial (m_I) sebuah benda sama dengan massa gravitasionalnya (m_G), yakni $m_I = m_G$.

Prinsip kesetaraan lunak sesungguhnya merupakan penegasan atas keyakinan akan kesamaan antara massa inersia dan massa gravitasi. Mari kita tinjau dua buah benda yang terpisah oleh jarak sejauh r satu dari yang lain. Benda pertama kita andaikan bermassa inersial m_I , bermassa lembam m_G , dan bermuatan q , sedangkan benda kedua bermassa gravitasi M dan bermuatan Q seperti ditunjukkan pada Gambar 9.34. Benda bermassa inersial m_I dapat memiliki percepatan sebesar a_G , yakni percepatan yang berasal dari gaya gravitasi, yang memenuhi persamaan

$$m_I a_G = G \frac{m_G M}{r^2}, \quad (9.111)$$

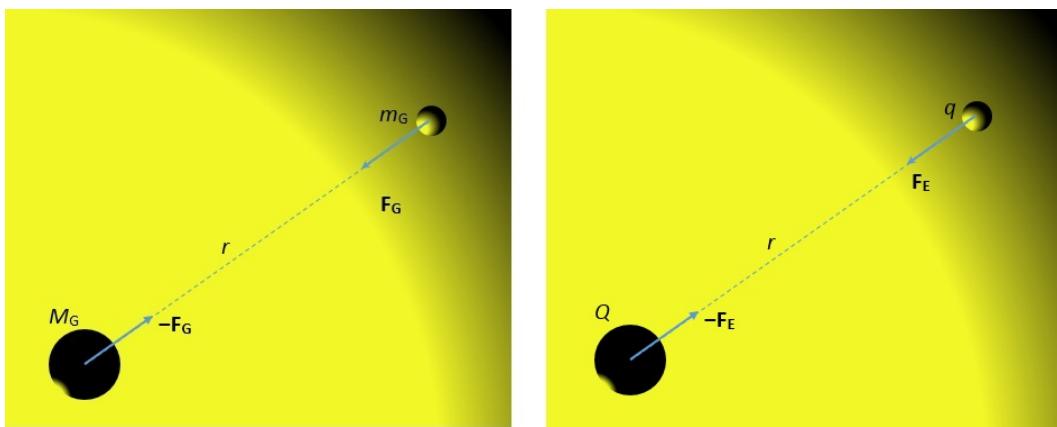
sedangkan benda bermassa m_I juga dapat memiliki percepatan sebesar a_E yakni percepatan yang berasal dari gaya Coulomb, yang memenuhi persamaan

$$m_I a_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}. \quad (9.112)$$

Pada kedua persamaan terakhir, unsur massa yang berada di sebelah kiri persamaan merupakan massa lembam m_I dengan nilai percepatannya bergantung pada besar kecilnya sembarang gaya yang diberikan kepadanya, sedangkan unsur massa yang berada di sebelah kanan persamaan (9.111) adalah massa gravitasi m_G dengan nilai percepatannya ditentukan oleh besar kecilnya gaya interaksi antara massa tersebut dengan massa yang lain, dalam hal ini M . Berdasarkan hal tersebut, persamaan (9.111) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$a_G = G \frac{M}{r^2} \frac{m_G}{m_I}. \quad (9.113)$$

Persamaan (9.113) memperlihatkan bahwa percepatan benda dalam medan gravitasi bergantung pada nisbah (rasio) antara massa gravitasi dengan massa inersial. Dengan membedakan massa gravitasi dari massa inersial, percepatan gravita-



Gambar 9.34: Dua benda dengan berjarak r dengan gaya gravitasi dan gaya Coulomb.

si bergantung pada massa inersial. Tanpa membedakan keduanya, nisbah itu sama dengan satu dan percepatan gravitasi tidak bergantung pada massa benda itu. Pengukuran mutakhir, nisbah antara massa lembam dan massa gravitasi bernilai satu dengan ketelitian hingga 10^{-12} . Nilai nisbah (ratio) inilah yang sering menjadi lansdasan bagi keyakinan akan prinsip kesetaraan lemah di atas.

Selanjutnya kita dapat membandingkannya dengan kasus ketika benda bermassa m_I tersebut berada dalam pengaruh gaya-gaya selain gravitasi misalnya gaya Coulomb seperti pada persamaan (9.112). Dalam kasus ini, percepatan yang yang dialami oleh benda m_I tidak hanya bergantung pada gaya yang bekerja padanya akan tetapi juga bergantung pada massa tersebut, yakni

$$a_E = G \frac{Qq}{r^2} \frac{1}{m_I}. \quad (9.114)$$

Pengukuran-pengukuran nisbah massa m_G/m_I yang dilakukan pertama kali oleh Galilei (1638), lalu Newton (1687), Bessel (1830), Eötvös (1891), Dicke (1962), dan Braginskij (1972) seperti yang telah dijelaskan di muka sejatinya tidak memberikan kepastian akan kesamaan antara massa inersia dan massa gravitasional, melainkan hanya menambah keyakinan akan kesamaan antara keduanya. Jadi, keyakinan akan kesamaan antara massa gravitasi dan massa inersia memicu keyakinan akan ketidakayutan gerak benda pada massanya dalam medan gravitasi. Jadi, percepatan benda dalam medan gravitasi tidak bergantung pada massa benda yang ditinjau. Padahal, massa dipahami sebagai ukuran kelembaman atau resistensi benda terhadap gaya yang dialami oleh benda itu, seperti percepatan benda itu yang diakibatkan oleh gaya listrik sebagaimana dalam persamaan (9.114). Jalan keluar dari pertentangan ini adalah pencabutan atribut gaya dari gravitasi. **Gravitasi bukan gaya!**

Contoh 9.7

Dalam keadaan darurat, seseorang menjatuhkan diri dari atap sebuah gedung bertingkat yang cukup tinggi. Setelah ia terjatuh selama 2 sekon, ia terkejut karena melihat benda aneh yang muncul di kaki langit sehingga telepon genggam yang ada di genggamannya lepas dari tangannya. Andaikan percepatan gravitasi Bumi 10 m/s^2 . Berapakah laju telepon genggam 3 detik setelah lepas dari genggaman orang itu jika

- (a) diukur oleh orang yang menjatuhkan diri?

(b) diukur oleh orang yang berada di atas tanah?

- (a) Pada saat tiga detik setelah telepon genggam lepas, orang itu telah jatuh selama 5 detik. Kecepatan orang itu terhadap pengamat di permukaan tanah adalah $(10 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = 50 \text{ m/s}$. Berapa kecepatan telepon genggam saat itu? Ketika telepon genggam lepas dari tangan, telepon genggam memiliki kecepatan sama dengan kecepatan orang itu. Karena saat itu orang telah jatuh selama 2 detik, maka kecepatan orang saat itu adalah $(10 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$. Jadi kecepatan awal telepon genggam terhadap tanah adalah 20 m/s ke bawah. Setelah 3 detik lepas dari tangan orang, telepon genggam memiliki kecepatan $20 \text{ m/s} + (10 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s}) = 50 \text{ m/s}$ juga relatif terhadap tanah. Jadi, kecepatan telepon genggam terhadap orang yang jatuh itu adalah $50 \text{ m/s} - 50 \text{ m/s} = 0 \text{ m/s}$. Jadi, bagi orang yang jatuh bebas itu, telepon genggam tampak diam.
- (b) Bagi orang yang diam di atas tanah kecepatan telepon genggam setelah tiga detik lepas dari tangan orang yang jatuh itu adalah 50 m/s .

Bagi orang yang berada diam di atas tanah, kecepatan telepon genggam yang jatuh itu semakin lama semakin cepat. Sementara bagi orang yang menjatuhkan diri, telepon genggam diam selama jatuh. Percepatan gravitasi “menghilang” dalam kerangka orang yang jatuh bebas itu.

Contoh di atas memberi gambaran tentang prinsip berikutnya, yang dikenal sebagai prinsip kesetaraan kuat.

Prinsip Kesetaraan

Pada tahun 1907 ada ungkapan masyhur yang disampaikan oleh Albert Einstein, yakni “Since all bodies accelerate the same way, an observer in a freely falling laboratory will not be able to detect any gravitational effect (on a point particle) in this frame.”

Efek gravitasi menjadikan setiap benda yang jatuh menuju Bumi memiliki percepatan yang sama. Hal ini telah diketahui dengan baik sejak zaman Galilei. semenjak Einstein memulai usahanya dalam memahami gravitasi, dia menyadari bahwa jika kita berada sebuah *lift* yang jatuh bebas maka kita tidak akan merasakan adanya pengaruh gravitasi Bumi.

Prinsip Kesetaraan:

Fenomena fisis yang teramati pada kerangka acuan yang jatuh bebas dalam medan gravitasi sama dengan fenomena fisis yang teramati pada kerangka acuan inersial tanpa gravitasi.

Contoh 9.8

Perhatikan seorang astronaut ketika pesawatnya jatuh bebas ke permukaan sebuah planet. Apa yang terjadi dengan benda-benda yang dilepas dengan kecepatan awal di dalam pesawat itu?

Situasi ini serupa dengan masalah telepon genggam pada contoh sebelumnya. Karena seluruh benda yang ada dalam pesawat itu (termasuk pesawat itu) jatuh dengan percepatan sama, maka benda-benda yang dilepas tanpa kecepatan awal dalam pesawat itu akan tampak diam di awang-awang jika dilihat oleh astronaut itu. Jadi, bagi astronaut dalam pesawat itu, gravitasi menghilang. Akibatnya, semua

benda tidak memiliki bobot atau berat. Menurut Prinsip Kesetaraan di atas, pesawat yang jatuh bebas boleh dipandang sebagai kerangka acuan inersial tanpa gravitasi. Jadi, fenomena fisis yang teramati dalam pesawat yang jatuh bebas akan sama dengan fenomena fisis dalam kerangka acuan inersial tanpa gravitasi.

Prinsip Kesetaraan di atas dapat ditulis dalam bentuk lain sebagai berikut:

Fenomena fisis yang teramati pada kerangka acuan inersial dalam pengaruh medan gravitasi g sama dengan fenomena fisis yang teramati pada kerangka acuan yang dipercepat dengan percepatan $a = -g$.

Contoh 9.9

Andaikan seorang astronaut berada dalam pesawat yang dipercepat ketika berada jauh dari benda angkasa apapun. Apa yang terjadi dengan benda-benda yang dilepas tanpa kecepatan awal di dalam pesawat itu apabila percepatan pesawat itu sebesar g ?

Benda-benda yang dilepaskan dalam pesawat itu akan “jatuh” dengan percepatan g jika dilepas dalam pesawat itu. Jadi, bagi astronaut dalam pesawat itu, gravitasi muncul meskipun pesawat itu jauh dari benda angkasa apapun. Akibatnya, semua benda memiliki bobot atau berat.

Hal ini dapat dijelaskan dengan perumusan Prinsip Kesetaraan di atas, yakni bahwa pesawat dalam keadaan semacam itu merupakan kerangka acuan dipercepat dalam wilayah tanpa gravitasi. Oleh karena itu, fenomena fisis yang teramati di dalam pesawat itu sama dengan fenomena fisis yang teramati di dalam kerangka acuan inersial dalam medan gravitasi, sehingga benda-benda yang dilepas dari keadaan diam akan jatuh bebas sebagaimana di atas permukaan Bumi.

Contoh 9.10

Seorang berada di dalam ruang kerjanya yang tertutup rapat. Orang tersebut dibius sehingga tidak sadarkan diri. Setelah beberapa saat kemudian orang itu siuman dan menyadari dirinya berada di dalam ruangan tertutup yang lain. Tidak ada perubahan yang dia rasakan kecuali keadaan ruangan yang sedikit berbeda. Dia merasakan berat badannya tetap. Orang tersebut akan merasakan adanya efek gravitasi seperti ketika misalnya terdapat sebuah peralatan kerja jatuh dari meja menuju lantai dengan percepatan g . Kemudian dia ditanya tentang keberadaannya. Jawaban apa yang dapat dia berikan?

Serupa dengan fenomena sebelumnya, jelas bagi kita bahwa meskipun orang yang berada di dalam ruang yang tertutup rapat itu merasakan keadaan gravitasi sebagaimana di atas permukaan Bumi, namun keadaan itu belum tentu diakibatkan oleh keberadaan Bumi. Tetapi jika orang itu diminta untuk menentukan tempat keberadaannya sekarang, di atas permukaan Bumi atau di tempat lain semisal di dalam pesawat yang dipercepat maka tidak ada cara bagi orang itu untuk membedakan antara keduanya.

Prinsip Kesetaraan di atas memberikan gambaran kepada kita bahwa medan gravitasi memiliki kesetaraan dengan sebuah kerangka acuan yang dipercepat sebesar percepatan yang diberikan oleh medan gravitasi tersebut dengan syarat tidak ada medan gravitasi apa pun yang memengaruhinya. Tampak di sini bahwa ruang dan waktu menentukan keberadaan gravitasi.

Prinsip kesetaraan lemah dan prinsip kesetaraan adalah dua hal yang serupa dengan dua postulat Einstein tentang teori relativitas umum yang berbunyi sebagai berikut:

1. Semua hukum alam memiliki bentuk yang sama untuk semua pengamat dalam sembarang kerangka acuan, baik itu kerangka acuan dipercepat (kerangka acuan tak lembam) maupun kerangka acuan yang tidak dipercepat (kerangka acuan lembam).
2. Medan gravitasi setara dengan sebuah kerangka acuan dipercepat dalam wilayah tanpa gravitasi.

Uji Ketajaman 9.8

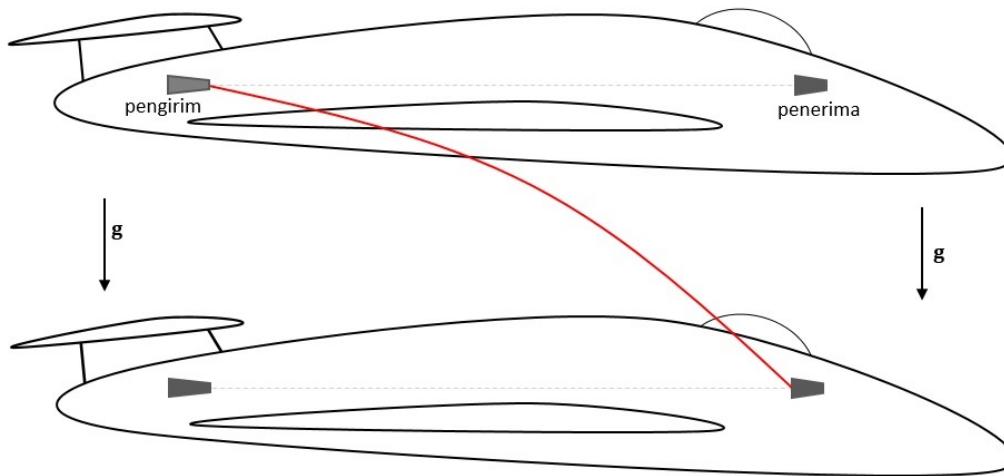
1. Seseorang naik pesawat ruang angkasa. Ketika berada jauh dari benda-benda angkasa, pesawat itu memiliki percepatan senilai g tetap. Sebuah bola besi ditembakkan dari dinding kabin dengan kecepatan awal v yang tegak lurus terhadap arah percepatan pesawat. Jelaskan gerak bola besi yang dilihat oleh orang yang ada di pesawat tersebut!
2. Seseorang naik pesawat ruang angkasa. Beberapa saat setelah tinggal landas, mesin roket pesawat itu mati hingga pesawat itu jatuh bebas ke permukaan Bumi. Pada saat pesawat mengalami jatuh bebas, sebuah bola besi ditembakkan dari dinding kabin dengan kecepatan awal v yang tegak lurus terhadap arah jatuhnya. Jelaskan gerak bola besi yang dilihat oleh orang yang ada di pesawat tersebut!
3. Sebuah botol berisi penuh air mineral. Dalam keadaan terbuka (tanpa tutup), botol itu dilepas dari suatu ketinggian di permukaan Bumi. Tentukan tekanan hidrostatik di dasar botol ketika sedang jatuh bebas, jika ketinggian air dalam botol itu 20 cm.

Terapan Prinsip-prinsip Kesetaraan

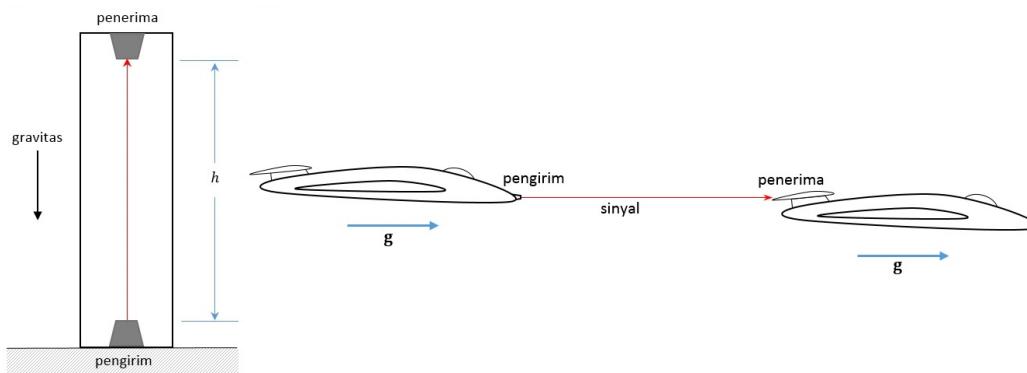
Pembelokan Cahaya Oleh Gravitasi

Sebuah pesawat ruang angkasa jatuh bebas menuju ke permukaan Bumi (lihat Gambar 9.35). Seorang astronaut yang berada di dalamnya memberikan tanda berupa sinyal elektromagnetik dari alat pengirim di bagian belakang yang berada pada ketinggian h dari lantai pesawat. Sinyal diarahkan mendatar menuju ke bagian depan dan diharapkan diterima oleh penerima yang juga berada di dalam pesawat itu pada ketinggian yang sama (h) di bagian depan. Bagi para astronaut, pesawat yang sedang jatuh bebas itu merupakan kerangka acuan inersial tanpa medan gravitasi. Jadi, sinyal yang dikirimkan dari pengirim akan bergerak lurus hingga diterima oleh penerima di bagian depan. Bagi pengamat yang berada di Bumi, sinyal itu terlihat mengalami pembelokan, tetapi sinyal tetap akan sampai di penerima pada ketinggian h (diukur dari lantai pesawat). Mengapa?

Jadi, relativitas umum mengijinkan adanya pembelokan gelombang elektromagnetik oleh gravitasi. Gejala-gejala alam ini telah teramat di berbagai tempat dan waktu di alam semesta.



Gambar 9.35: Pembelokan cahaya oleh gravitasi



Gambar 9.36: Pergeseran merah dan biru gravitasi

Pergeseran Merah dan Biru Gravitasi

Perhatikan Gambar 9.36 kiri yang memperlihatkan ruangan dalam sebuah menara. Pada lantai diletakkan sebuah peranti pengirim sinyal, sedangkan pada langit-langit ditempelkan sebuah peranti penerima sinyal. Sinyal dikirim dari pengirim dan diterima oleh penerima. Berdasarkan Prinsip Kesetaraan, keadaan dalam ruang menara itu setara dengan keadaan dua pesawat yang terbang beriringan dengan percepatan sama di tempat yang jauh dari benda angkasa apapun (lihat Gambar 9.36). Pesawat yang di belakang memancarkan sinyal, sedangkan pesawat di depannya berjarak sejauh h dari pesawat yang di belakang menerima sinyal yang dipancarkan.

Pada saat t_0 sinyal dengan panjang gelombang λ_0 dipancarkan oleh pesawat yang berada di belakang. Sinyal tersebut akan sampai di peranti penerima pada pesawat yang di depan pada saat $t_0 + \Delta t$ dengan $\Delta t = h/c$, mengingat cepat rambat cahaya sama di sembarang kerangka acuan. Pada waktu tersebut, pesawat penerima (demikian juga pesawat pengirim sinyal) akan memiliki tambahan kecepatan sebesar Δv . Sesuai dengan efek Doppler, pesawat yang di depan akan menerima sinyal $\lambda_0 + \Delta\lambda$ dengan

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{gh}{c^2}. \quad (9.115)$$

Jadi, alat penerima sinyal yang ada di langit-langit ruang menara akan menerima sinyal dengan panjang gelombang

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{gh}{c^2} \lambda_0 = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \lambda_0. \quad (9.116)$$

Karena $\Delta\lambda$ positif maka ada pertambahan panjang gelombang sinyal yang terima oleh peranti penerima di langit-langit. Itulah sebabnya disebut sebagai pergeseran merah.

Jika peranti pengirim dan penerima sinyal ditukar, pengirim diletakkan di langit-langit dan penerima diletakkan di bawah, maka panjang gelombang sinyal yang diterima oleh peranti penerima berkurang. Itulah yang disebut sebagai pergeseran biru.

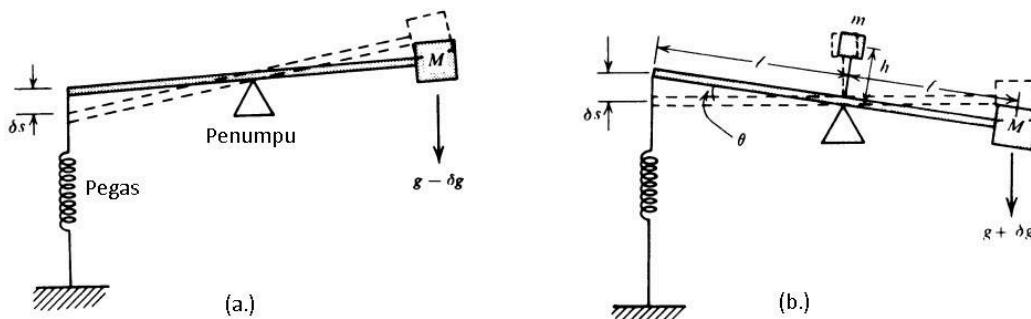
9.10 Topik Khusus

Penelitian yang berkaitan dengan gravitasi sangat banyak, baik penelitian interaksi antar benda maupun penelitian yang menempatkan gravitasi sebagai alat penelitian (metode). Penelitian yang menempatkan gravitasi sebagai alat, biasanya merupakan penelitian di bidang terapan. Gravitasi yang dipandang sebagai alat sering disebut metode gravitasi atau survei gravitasi. Metode gravitasi atau survei gravitasi banyak digunakan dalam bidang penelitian geofisika, teknik, dan arkeologi.

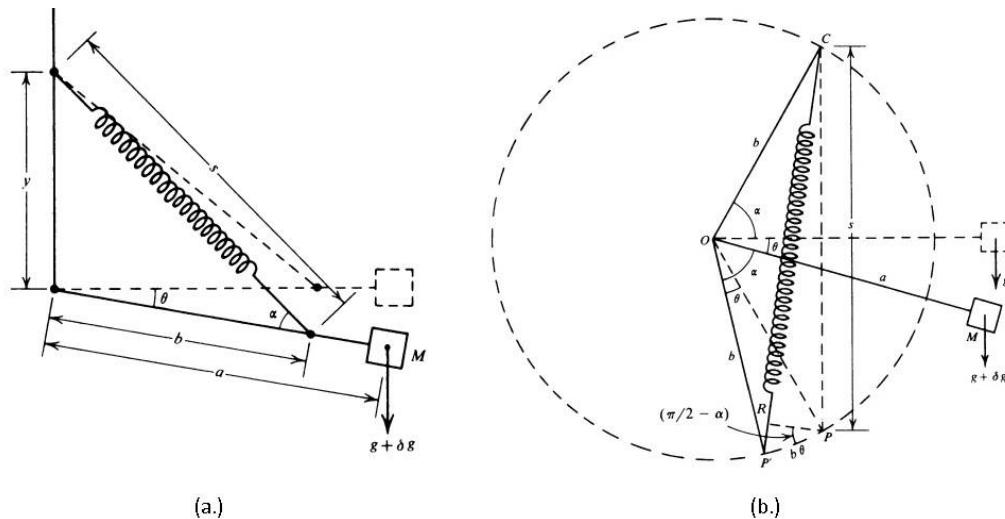
Di bidang penelitian geofisika, metode gravitasi lebih sering digunakan dibandingkan metode-metode yang lain seperti metode magnetik, metode radioaktivitas, dan metode lainnya. Seperti yang diketahui bahwa semua material yang ada di Bumi dipengaruhi oleh gravitasi. Akan tetapi, perilaku hukum kuadrat terbalik, material (bebatuan) yang ada di sekitar titik pengamatan akan memiliki dampak yang lebih besar jika dibandingkan dengan tempat yang lebih jauh dari titik pengamatan. Situasi semacam ini, memberikan kemudahan pada para peneliti untuk melakukan penelitian. Selain itu, metode gravitasi merupakan metode yang paling mudah untuk digunakan, metode gravitasi memiliki keunggulan yakni memiliki anomali yang relatif kecil jika dibandingkan dengan metode misalnya magnetik. Dalam memperoleh anomali gravitasi di bawah titik pengukuran gravitasi sendiri, diperlukan beberapa koreksi seperti koreksi pasang surut, gravitasi teoritis, koreksi udara bebas, dan koreksi topologi. Metode gravitasi juga hanya bergantung pada massa saja sedangkan metode magnetik selain bergantung pada material yang ditinjau juga bergantung pada hal lainnya.

Dalam melakukan penelitian dengan metode gravitasi, seorang geofisikawan akan menggunakan alat pengukur gravitasi. Setidaknya terdapat tiga jenis instrumen yang dapat digunakan, neraca puntir (*torsion balance*), pendulum, dan gravity meter. Pada BAB II telah disinggung tentang neraca puntir dan pendulum. Sementara itu, gravity meter memiliki beberapa jenis yakni gravity meter stabil. Pada Gambar 9.37 memperlihatkan prinsip kerja gravity meter jenis stabil dan tak stabil. Selain kedua jenis gravity meter tersebut, masih terdapat jenis yang lain yakni LaCoste-Romberg dan Worden. Kedua jenis gravity meter ini memiliki prinsip dasar yang sangat berbeda. Perbedaan yang cukup mencolok adalah pada penempatan pegas, seperti diperlihatkan pada Gambar 9.38.

Data-data gravitasi yang diambil dengan menggunakan Gravity meter tentu saja tidak dapat langsung digunakan. Data-data yang telah diperoleh ini masih harus diolah terlebih dahulu karena data-data tersebut tentu tidak seragam. Untuk memperoleh data yang seragam, data-data gravitasi yang telah diperoleh pada topografi akan dibawa ke suatu bidang dengan ketinggian yang sama. Proses semacam ini sering disebut sebagai reduksi ke bidang datar dan metode yang sering dipakai adalah



Gambar 9.37: (a.) Prinsip kerja gravity meter jenis stabil. (b.) Prinsip kerja gravity meter jenis tak stabil.



Gambar 9.38: (a.) Prinsip kerja gravity meter jenis LaCoste-Romberg. (b.) Prinsip kerja gravity meter jenis Worden.

metode titik massa Dampney. Berikut adalah beberapa penelitian yang telah dilakukan misalnya penggambaran struktur bawah permukaan ujung Lemahabang, identifikasi struktur cekungan lapangan ‘‘Red Queen’’, identifikasi cekungan lapangan ‘‘HTL’’, dan penelitian serupa lainnya.

9.11 Lebih Jauh tentang Gravity Probe-B

Sebagaimana telah dijelaskan pada Bab 2, verifikasi teori Einstein dilakukan melalui eksperimen Gravity Probe-B. Eksperimen yang berlangsung selama 47 tahun ini telah membuktikan, bahwa ruang waktu di sekitar Bumi melengkung karena keberadaan Bumi. Rotasi Bumi mengakibatkan terjadinya puntiran dan pergeseran ruang waktu di sekitar Bumi.

Pengukuran puntiran dan pergeseran ruang waktu harus diukur secara presisi, mengingat perhitungan analitik yang dilakukan baik oleh Einstein maupun Schiff menghasilkan angka yang sangat kecil, yaitu 6606 milibusurdetik/tahun. Lamanya eksperimen bukan pada pengambilan datanya, melainkan perancangan dan pembuatan alatnya. Alat yang menjadi jantung eksperimen ini adalah empat buah giroskop kuarsa yang dilengkapi dengan detektor SQUID. Ingat kembali, sebagaimana telah dijelaskan pada bab Rotasi Benda Tegar, bahwa *prinsip kerja giroskop adalah mempertahankan orientasi*. Giroskop yang diputar akan mempertahankan sumbu

putarnya terhadap ruang waktu di sekitarnya. Namun perlu ditekankan, giroskop adalah buatan manusia yang jauh dari kesempurnaan sehingga, dalam waktu yang lama pasti mengalami juga pergeseran sumbu putar.

Tim Gravity Probe-B berusaha membuat giroskop yang paling presisi, dengan cara membuat geometri giroskop sebulat mungkin dan distribusi massa giroskop harus homogen. Walaupun akhirnya giroskop tersebut merupakan benda terbulat yang pernah dibuat manusia, tetapi saja tidak bulat sempurna. Hal tersebut menyebabkan sumbu putar giroskop berpresesi terhadap sumbu simetri pesawat. Data yang dihasilkan kacau. Para peneliti mempelajari data selama 40 hari dan menemukan faktor koreksi yang harus dimasukkan untuk memperbaiki data.

Prinsip eksperimen Gravity Probe-B sangat sederhana. Giroskop diputar dengan sumbu putar dihadapkan ke bintang IM Pegasi yang sudah dipastikan letaknya oleh teleskop. Giroskop yang berputar akan mempertahankan orientasinya terhadap ruang waktu. Apabila ruang waktu terpuntir atau bergeser, maka sumbu putar giroskop akan mengalami presesi, mengikuti puntiran atau geseran ruang waktu yang menjadi domain eksperimen ini.

10

Dinamika Zat Alir

Keberadaan air berarti keberadaan kehidupan. Dalam astrobiologi, air merupakan simbol jari kehidupan. Air digunakan sebagai petunjuk bagi kita untuk menentukan keberadaan kehidupan di suatu tempat di alam semesta. Air dapat juga berarti keindahan. Air juga berarti tenaga. Air memiliki banyak sisi dan makna. Dalam bab ini, kita akan mempelajari sisi lain air, yakni air sebagai zat alir. Kita akan berupaya memahami zat alir atau fluida. (Gambar memperlihatkan sungai yang berada di daerah Nglimut, Kendal, Jawa Tengah)



- 10.1 Pengertian Zat Alir
- 10.2 Jenis-jenis Zat Alir
- 10.3 Gerak Zat Alir
- 10.4 Tekanan
- 10.5 Persamaan Kontinyuitas
- 10.6 Dinamika Zat Alir
- 10.7 Tekanan Hidrostatis
- 10.8 Gaya Archimedes
- 10.9 Hukum Bernoulli
- 10.10 Zat Alir Tak Ideal

Banyak bahan atau zat yang dapat mengalir, tetapi tidak semuanya disebut zat alir. Perhatikan truk yang membawa pasir. Ketika truk itu sampai di tempat tujuan, bak truk itu dimiringkan sehingga kita melihat pasir mengalir ke tanah dari bak truk itu. Pasir yang mengalir dari bak truk itu bukan fluida. Atau perhatikan lahar hujan yang mengalir melalui sungai-sungai di gunung ketika hujan turun beberapa saat setelah gunung itu meletus. Lahar hujan yang mengalir itu pun bukan zat alir.

Perhatikan sebuah galaksi. Galaksi adalah kumpulan bintang-bintang yang terikat oleh gravitasi antar bintang. Terdapat sekitar seratus miliar bintang dalam sebuah galaksi. Galaksi Bimasakti termasuk galaksi spiral. Bintang-bintang dalam galaksi kita ini bergerak dalam pusaran di sekitar pusat galaksi. Sebagai kumpulan milyaran bintang, sebuah galaksi secara keseluruhan dapat dipandang sebagai zat alir dengan bintang-bintang sebagai "molekul-molekul"-nya. Di alam semesta ini, terdapat ratusan miliar galaksi. Galaksi-galaksi itu merupakan "molekul-molekul" zat alir yang membentuk alam semesta. Alam semesta keseluruhannya merupakan zat alir? Ya, alam semesta yang tersusun dari milyaran galaksi itu dapat dipandang sebagai zat alir.

Lalu, apa sebenarnya zat alir itu? Mengapa pasir yang mengalir dari bak truk atau lahar hujan yang mengalir di sungai-sungai bukan zat alir, sedangkan sebuah galaksi atau alam semesta keseluruhannya dapat diperlakukan sebagai zat alir?

10.1 Pengertian Zat Alir

Dalam bagian ini kita hendak membicarakan pengertian zat alir. Hal ini penting agar kita dapat menentukan gejala-gejala alam yang dapat dipandang sebagai zat alir dan karenanya dapat menerapkan hukum-hukum tentang gerakan zat alir. Zat alir atau fluida adalah sekumpulan "molekul-molekul" sedemikian rupa sehingga :

1. "molekul-molekul" tersebut tersebar secara acak
2. jarak rata-rata antar dua "molekul" yang bertetanggaan itu jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan ukuran kumpulan "molekul-molekul" itu
3. ukuran masing-masing molekul itu jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan jarak rata-rata antara dua "molekul" yang bertetanggaan.
4. "molekul-molekul" itu terikat oleh gaya kohesif lemah dan saling tolak jika berada pada jarak yang cukup dekat.
5. "molekul-molekul" itu bergerak secara acak.

"Molekul-molekul" dalam hal ini tidak harus dipahami sebagai molekul-molekul dalam pengertian kimiawi. "Molekul-molekul" di sini berarti penyusun zat yang disebut zat alir itu. Syarat pertama dalam pengertian zat alir di atas menyatakan bahwa "molekul-molekul" tersebut boleh menempati titik-titik manapun dalam ruang. Syarat yang kedua menyatakan bahwa jumlah molekul dalam kumpulan cukup banyak. Syarat yang ketiga menyatakan bahwa dalam kumpulan molekul-molekul itu terdapat banyak ruang kosong. Syarat yang keempat menyatakan bahwa kumpulan-kumpulan molekul itu tidak mudah buyar atau tercerai-berai dan juga tidak menggumpal. Syarat kelima menyatakan bahwa dalam kumpulan "molekul-molekul", itu terdapat tekanan dan temperatur.

Kita kembali menengok contoh di awal bab ini, yakni pasir yang mengalir dalam bak truk. Dalam hal ini, "molekul-molekul"-nya adalah butiran-butiran pasir. Syarat pertama dan kedua dalam pengertian zat alir di atas dipenuhi oleh kumpulan butiran-butiran pasir itu. Syarat ketiga tidak dipenuhi berhubung butiran-butiran pasir bahkan bersentuhan satu dengan yang lain sehingga jarak rerata antar butiran itu dapat lebih kecil daripada ukuran butiran-butiran pasir itu. Syarat keempat tidak terpenuhi berhubung gravitasi antar butiran terlalu lemah untuk dibicarakan dan ketiadaan gaya tolak antar butiran itu pada jarak sangat dekat. Syarat kelima tidak dipenuhi karena butiran-butiran itu mengalami gerak sistematis yang ditentukan oleh gravitasi Bumi. Kesimpulan serupa dapat pula diperoleh pada kasus lahar hujan.

Bagaimana dengan galaksi? Bintang-bintang di sebuah galaksi sebagai "molekul-molekul" dapat berada di mana saja dalam ruang alam semesta ini. Jarak rerata antar dua bintang yang bertetanggaan dalam sebuah galaksi jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan ukuran galaksi itu. Galaksi raksasa dapat memiliki radius sampai 30 kiloparsek (1 parsek = 3,26 tahun cahaya), sedangkan jarak rerata antara dua bintang yang bertetanggaan adalah sekitar 1,3 parsek atau sekitar $4,3 \times 10^{13}$ km. Jadi, syarat kedua dipenuhi. Matahari kita adalah bintang kecil. Bintang raksasa dapat memiliki ukuran jari-jari hingga 1000 kali jari-jari Matahari. Itu berarti sekitar $1,5 \times 10^9$ kilometer. Dengan demikian syarat ketiga pun dipenuhi oleh galaksi. Bintang-bintang itu membentuk sebuah galaksi karena terikat oleh gravitasi yang

bersifat tarik-menarik (kohesif). Sejauh ini para fisikawan belum pernah mengamati adanya gaya tolak-menolak antar bintang. Akan tetapi itu bukan berarti ketiadaan gaya semacam itu. Syarat kelima belum tentu terpenuhi. Akan tetapi untuk tujuan tertentu anggapan bahwa galaksi adalah zat alir dapat diterima dan dapat menjelaskan berbagai gejala alamiah terutama yang berkaitan dengan dinamika galaksi. Dengan alasan serupa, kita dapat memperlakukan alam semesta sebagai zat alir dan dapat memahaminya dengan baik.

10.2 Jenis-jenis Zat Alir

Masing-masing zat alir mempunyai watak yang berbeda satu dari yang lain. Udara dapat ditekan sehingga menempati ruang yang lebih sempit, tetapi air tidak dapat dipperlakukan dengan cara serupa. Cobalah memutar ember yang memuat oli dengan sumbu ember (vertikal) sebagai sumbu putar. Perhatikan bagian oli yang berada dekat dengan dinding ember. Anda akan melihat bahwa oli pada bagian itu mengikuti gerak dinding ember. Sehingga kecepatannya sama dengan kecepatan dinding ember, meskipun semakin ke tengah semakin rendah kecepatan oli itu. Lakukan hal serupa untuk air. Anda akan melihat bahwa air tetap diam meskipun ember yang memuatnya diputar secepat mungkin.

Sifat pertama adalah **ketermampatan**, yaitu kemampuan fluida untuk mengalami perubahan volume ketika ditekan (dimampatkan). Hampir semua zat cair tidak dapat dimampatkan. Gas pun dalam keadaan tertentu dapat dianggap tidak termampatkan, semisal saja dengan mengatur alirannya sedemikian rupa sehingga perubahan tekanan pada setiap titiknya tidak terlalu besar. Aliran udara di antara sayap – sayap pesawat terbang berkecepatan rendah merupakan salah satu contohnya. Keadaan sebaliknya disebut termampatkan.

Sifat kedua terkait dengan **kekentalan** atau **viskositas**. Kekentalan terkait dengan gesekan antar bagian fluida. Kekentalan terlihat dampaknya kalau terdapat perbedaan kecepatan antar bagiannya. Air tergolong fluida yang tak kental, sedangkan oli termasuk fluida dengan kekentalan. Zat alir kental di dekat pembatas atau wadahnya bergerak mengikuti gerak pembatasnya. Sementara untuk fluida tak kental, hanya gerakannya yang berarah tegak lurus pembatas yang mengikuti gerak pembatas. Fluida yang kental akan lebih sulit mengalir bukan? Itulah sebabnya, kekentalan setara dengan gaya gesekan antar bagian zat alir. Kalau kita bagi-bagi fluida dalam beberapa lapisan hayal, kekentalan menyatakan gaya gesekan antar lapisan-lapisan hayal tersebut.

Kekentalan terkait dengan gesekan antar bagian zat alir

Zat alir dikatakan **ideal** jika zat alir itu tidak kental dan dalam dinamikanya bersifat adiabatik, yakni tidak ada pertukaran bahan atau kalor antar bagiannya maupun dengan lingkungannya. Dalam beberapa kasus, aliran air dapat dipandang sebagai aliran ideal. Dalam buku ini, kita hanya akan membahas zat alir yang ideal.

10.3 Partikel Zat Alir

Dalam pembicaraan tentang gerak zat alir, istilah **partikel zat alir** mengacu pada sebuah bagian atau unsur volume (dapat dibayangkan misalnya sebagai kubus) yang sangat kecil jika dibandingkan dengan ukuran zat alir yang ditinjau namun masih memuat banyak sekali "molekul-molekul" zat alir. "Molekul-molekul" zat alir yang

ada dalam partikel zat alir tetap sehingga massa partikel zat alir juga tetap. Volume dan bentuk partikel zat alir dapat berubah sepanjang lintasannya. Jika volume partikel-partikel zat alir berubah, maka aliran itu dikatakan termampatkan. Jadi, jika istilah partikel zat alir disebut, yang dimaksud adalah bagian semacam itu. "Molekul-molekul" zat alir bergerak acak ke sana ke mari. Akan tetapi, secara keseluruhan dalam sebuah partikel zat alir itu, gerak acak "molekul-molekul" itu memiliki rerata kecepatan yang terukur sebagai kecepatan partikel zat alir itu (lihat Gambar 10.1).

Kecepatan partikel zat alir ini bergantung pada posisi dan waktu. Dalam pembicaraan zat alir yang dimaksud dengan kecepatan zat alir sesungguhnya adalah kecepatan partikel-partikel zat alir. Terdapat lima besaran penting yang perlu dilihatkan. Tiga yang pertama adalah komponen-komponen kecepatan zat alir $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, dan $v_z(x, y, z, t)$ sebagai fungsi waktu dan sepasang besaran termodynamis, semisal rapat massa $\rho(x, y, z)$ dan temperatur $T(x, y, z, t)$. Besaran-besaran termodynamika yang lain dapat ditentukan dari keduanya melalui persamaan keadaan. Kecepatan zat alir adalah medan vektor, sedangkan dua besaran termodynamis yang menyertainya adalah medan skalar.

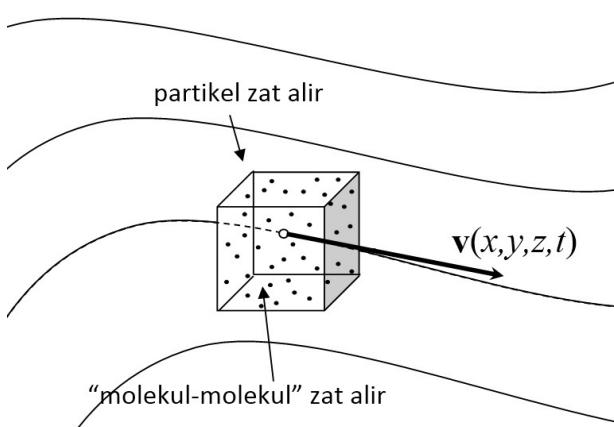
Aliran fluida dikatakan tunak atau laminer jika kecepatan fluida itu tidak bergantung pada waktu secara eksplisit. Jika kecepatan zat alir bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka aliran fluida itu disebut aliran turbulen.

Gambar 10.1: Sebuah partikel zat alir adalah sebuah bagian zat alir (semisal kubus) yang memuat banyak sekali "molekul-molekul" zat alir tetapi ukuran kubus itu masih sangat kecil jika dibandingkan dengan ukuran zat alir.

Dua macam aliran terkait dengan kebergantungannya pada waktu: aliran tunak dan aliran turbulen.

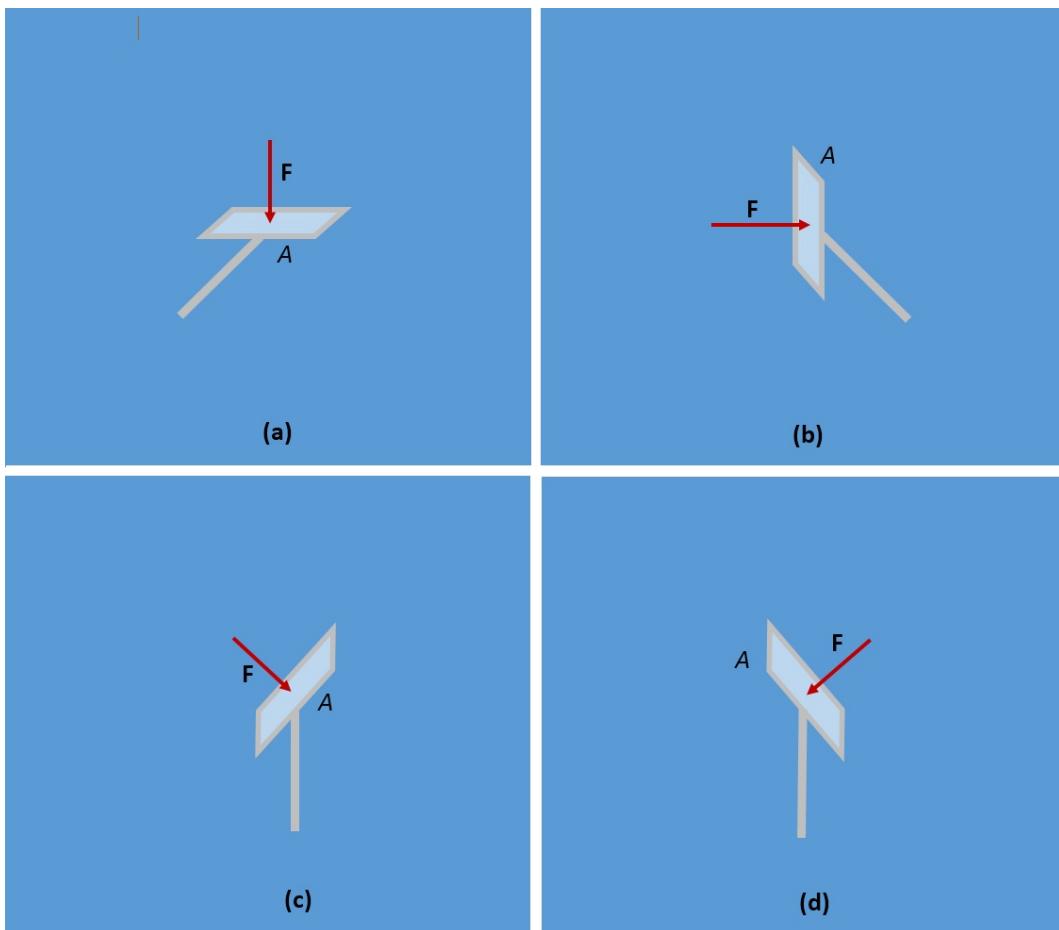
Sebagai sebuah medan vektor, kecepatan zat alir memiliki kurva-kurva integral yang mengisi seluruh ruang yang ditempati oleh zat alir itu (lihat Bab 3 buku ini). Kurva-kurva integral untuk medan vektor kecepatan ini disebut garis-garis alir. Jika aliran bersifat tunak atau stasioner, maka garis-garis alirnya bersifat statis, tidak berubah dari waktu ke waktu. Jika aliran bersifat turbulen, maka garis-garis alir tersebut akan berubah dari waktu ke waktu. Dalam hal ini, garis-garis alir ini akan berperan sebagai rel-rel bagi partikel-partikel zat alir untuk bergerak. Dalam buku ini pembicaraan gerak zat alir dibatasi hanya pada aliran tunak saja.

Dalam pembicaraan gerak zat alir terdapat dua cara peninjauan atau pengamatan. Yang pertama dikenal sebagai **pengamatan pengail**. Dalam hal ini, pengamat berada di sebuah titik dan mengamati setiap partikel zat alir yang melalui titik itu dari waktu ke waktu. Yang kedua adalah pengamatan yang dikenal sebagai **pengamatan pengayuh perahu**. Dalam hal ini, pengamat bergerak "membuntuti" sebuah partikel zat alir dan mengamatinya sepanjang lintasannya. Kedua cara pengamatan itu setara satu dengan yang lain.



10.4 Tekanan

Apa itu tekanan? Apakah tekanan itu besaran vektor atau besaran skalar? Tekanan adalah sebuah medan skalar, yakni besaran skalar yang bergantung pada posisi dan waktu. Tekanan dipahami sebagai besarnya gaya tekan oleh zat alir tiap satu satuan luas yang tegak lurus dengan gaya tekan itu. Perhatikan Gambar 10.2. Dalam gambar tersebut, sebuah sensor gaya yang berupa lempeng bujur sangkar dengan luas ΔA dicelupkan ke dalam zat alir ideal. Permukaan lempeng itu sangat peka terhadap



Gambar 10.2: Dalam zat alir yang ideal, besarnya gaya tekan tidak bergantung pada arah bidang tekan dan arah gaya selalu tegak lurus terhadap bidang tekan. Tekanan adalah besarnya gaya tekan dibagi dengan luas bidang tekan.

dapat gaya tekan sehingga melalui sebuah peranti antar muka gaya tekan zat alir dapat diketahui besarnya. Gambar 10.2 (a), (b), (c), dan (d) memperlihatkan empat orientasi lempeng yang berbeda di tempat yang sama dalam zat alir. Pengukuran gaya tekan menunjukkan bahwa berbagai orientasi lempeng sensor tidak memengaruhi besar gaya tekan yang terukur. Hal ini menunjukkan bahwa besar gaya tekan tidak bergantung pada arah. Tekanan di tempat lempeng sensor itu berada kira-kira sama dengan besarnya gaya tekan yang terukur di tempat itu dibagi dengan luas lempeng sensor. Jika tekanan di tempat itu p maka

$$p \cong \frac{|\Delta \mathbf{F}|}{\Delta A}.$$

Tekanan di tempat lempeng sensor itu berada sama dengan besarnya gaya tekan dibagi dengan luas permukaan sensor untuk luas permukaan sensor yang dibuat sekecil mungkin. Jika luas sensor dibuat sekecil mungkin, maka besarnya gaya tekan juga semakin kecil. Jadi, tekanan di tempat itu diberikan oleh

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{F}|}{\Delta A} \quad (10.1)$$

atau dengan kata lain

Tekanan adalah besaran skalar.

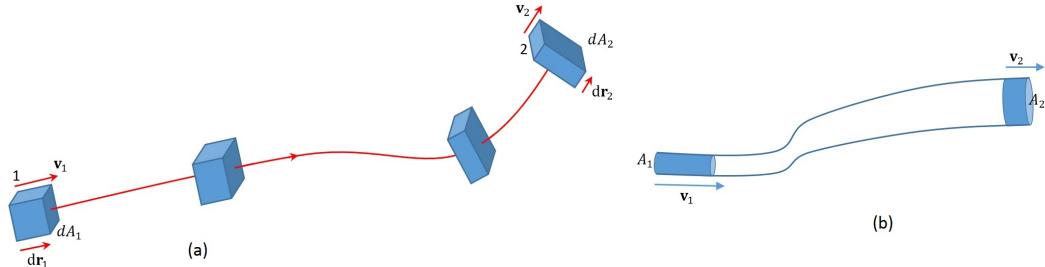
$$p = \frac{|d\mathbf{F}|}{dA}. \quad (10.2)$$

Karena tekanan itu tidak bergantung pada arah atau orientasi permukaan sensor, maka tekanan semacam itu disebut **tekanan isotropik**. Satuan SI untuk tekanan adalah newton per meter persegi. Satuan ini disebut pascal dan disingkat Pa. Satuan yang lain adalah atm atau atmosfer. Satu atmosfer adalah $1,013 \times 10^5$ Pa.

10.5 Persamaan Kontinuitas

Perhatikan sebuah aliran tunak yang tak termampatkan. Dalam aliran tak termampatkan, volume partikel zat alir tidak berubah sepanjang lintasan alirnya. Oleh karena itu, yang mungkin terjadi adalah perubahan bentuk partikel zat alir itu. Pada Gambar 10.3 sebuah partikel zat alir bergerak sepanjang garis alir mulai dari titik 1 sampai dengan titik 2. Di titik 1, volume partikel adalah $dV_1 = dA_1 |dr_1|$. Demikian juga di titik 2, volume partikel di titik itu adalah $dV_2 = dA_2 |dr_2|$. Karena alasan tak termampatkan di atas, maka $dV_1 = dV_2$. Dalam pergerakan partikel itu melalui titik 1 akan menempuh jarak sebesar $|dr_1|$. Andaikan jarak sebesar itu ditempuh dalam waktu dt . Masuknya volume air sebesar dV di titik 1 ini harus diimbangi dengan keluarnya air dengan volume yang sama di titik 2 dalam selang waktu yang sama pula. Jadi, ketika partikel zat alir itu sampai di titik 2, ia akan melewati titik 2 dalam selang waktu yang sama dengan yakni dt . Dalam selang waktu itu, partikel zat alir itu ketika melewati titik 2 akan menempuh jarak sejauh $|dr_2|$. Oleh karena itu, kita mendapatkan

$$dA_1 |dr_1| = dA_2 |dr_2|.$$



Gambar 10.3: (a) Dalam zat alir tak termampatkan, volume partikel zat alir tidak berubah sepanjang garis alirnya. Yang mungkin berubah adalah bentuk partikel itu. (b) Aliran tunak tak termampatkan dalam pipa.

Jika kedua ruas persamaan ini dibagi dengan dt , maka berlaku

$$dA_1 \frac{|dr_1|}{dt} = dA_2 \frac{|dr_2|}{dt}$$

atau

$$dA_1 v_1 = dA_2 v_2, \quad (10.3)$$

dengan $v_1 = |dr_1|/dt$ adalah besarnya kecepatan zat alir di titik 1 dan $v_2 = |dr_2|/dt$ adalah besarnya kecepatan zat alir di titik 2. Persamaan (10.3) itu disebut persamaan kontinuitas. Karena volume partikel zat alir tidak berubah, maka rapat massa zat alir

juga tidak berubah. Jika kedua ruang persamaan (10.3) itu dikalikan dengan rapat massa ρ , maka didapatkan

$$\rho dA_1 v_1 = \rho dA_2 v_2, \quad (10.4)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa dalam aliran tunak yang tak termampatkan, debit aliran bersifat tetap sepanjang garis alir. Debit aliran yang melalui sebuah luasan adalah banyaknya massa zat alir yang melalui luasan itu setiap satu satuan waktu.

Untuk aliran tunak yang tak termampatkan dalam pipa sebagaimana diperlihatkan dalam Gambar 10.3 (b), persamaan (10.3) dan (10.4) berubah menjadi

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (10.5)$$

$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2, \quad (10.6)$$

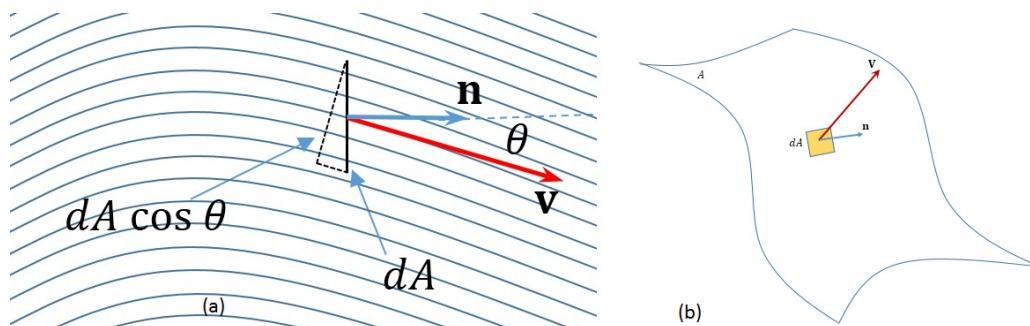
jika kecepatan v_1 di muka 1 sama untuk semua titik di muka 1 dan kecepatan v_2 sama untuk semua titik di muka 2.

Besaran ρv disebut rapat aliran massa, yaitu massa zat alir yang melalui sebuah luasan satu satuan yang tegak lurus arah aliran tiap satu satuan waktu. Jadi, rapat aliran massa di suatu titik dalam aliran adalah massa zat alir yang melalui titik itu tiap satu satuan waktu tiap satu satuan luasan yang tegak lurus arah aliran (kecepatan partikel-partikel zat alir) di titik itu. Jika debit aliran yang melalui unsur luasan dA ditulis sebagai $d\Phi$, maka berdasarkan Gambar 10.4 (a) didapat

$$d\Phi = \rho v dA \cos \theta = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (10.7)$$

dengan \mathbf{n} adalah vektor satuan tegak lurus terhadap permukaan A di wilayah dA dan $d\mathbf{A} = dA \mathbf{n}$. Jika kita meninjau sebuah luasan A seperti pada Gambar 10.4 (b), maka debit keseluruhan yang melalui luasan A itu adalah jumlahan debit yang melalui masing-masing unsur luasan dA , yaitu

$$\Phi = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (10.8)$$



Gambar 10.4: (a) Luasan dA dalam aliran yang membentuk sudut terhadap kecepatan zat alir. (b) Aliran melalui luasan A merupakan jumlahan aliran yang melalui unsur luasan dA .

10.6 Dinamika Zat Alir

Perhatikan Gambar 10.5 yang menggambarkan sebuah partikel zat alir yang bergerak sepanjang garis alirnya. Partikel zat alir itu mengalami dua macam gaya: gaya sentuh dan gaya selain gaya sentuh. Gaya sentuh berasal dari partikel-partikel zat alir yang berada di sekitarnya. Gaya sentuh ini semisal gaya tekan akibat tekanan isotropis untuk zat alir ideal. Untuk zat alir yang tak ideal akan ada gaya sentuh lain yang berasal dari viskositas atau kekentalan. Untuk subbab ini, cukup kita tinjau zat alir ideal sehingga gaya sentuh hanya berasal dari tekanan isotropis.

Keempat sisi kubus itu akan mengalami tekanan dari zat alir di sekitarnya. Angkaikan tekanan di sisi kiri kubus p . Gaya tekan pada sisi kiri oleh karena itu adalah $p(x, y, z)dx dz \mathbf{j}$. Karena adanya perbedaan koordinat sebesar dy , maka akan ada perbedaan tekanan yang dirasakan oleh sisi kanan sebesar dy . Jika perbedaan tekanan ini $d_y p$, maka $d_y p = (\partial p / \partial y)dy$ dan sisi kanan akan merasakan tekanan sebesar $p + (\partial p / \partial y)dy$. Jadi, sisi kanan mendapatkan gaya tekan senilai

$$-[p(x, y, z) + d_y p]dx dz \mathbf{j} = -[p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial y}dy]dx dz \mathbf{j}. \quad (10.9)$$

Gaya tekan pada sisi bawah adalah $p(x, y, z)dx dy \mathbf{k}$, sedangkan sisi atas mendapatkan gaya tekan senilai

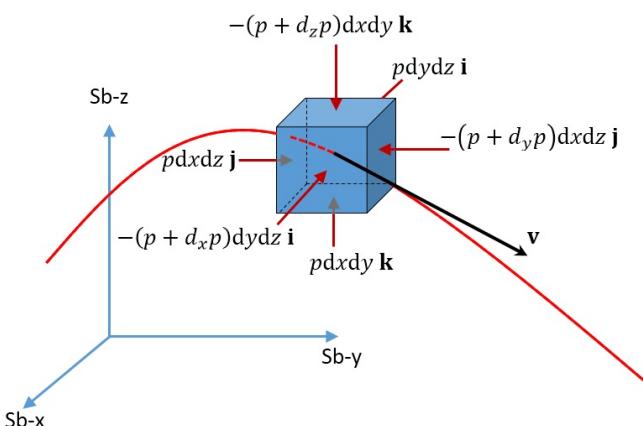
$$-[p(x, y, z) + d_z p]dx dy \mathbf{k} = -[p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz]dx dy \mathbf{k}. \quad (10.10)$$

Gaya tekan pada sisi belakang adalah $p(x, y, z)dy dz \mathbf{i}$, sedangkan sisi kanan mendapatkan gaya tekan senilai

$$-[p(x, y, z) + d_x p]dy dz \mathbf{i} = -[p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x}dx]dy dz \mathbf{i}. \quad (10.11)$$

Oleh karena itu, gaya sentuh keseluruhan pada partikel zat alir itu adalah

$$-(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k})dx dy dz = -[\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}]dV. \quad (10.12)$$



Gaya selain gaya sentuh yang bekerja pada partikel zat alir itu adalah gaya akibat adanya gravitasi dari benda-benda lain yang ada di sekitarnya, semisal gravitasi oleh partikel zat alir yang ada di sekitarnya, gravitasi Bumi (kalau zat alir itu di Bumi), gravitasi Matahari, dll. Gravitasi yang berasal dari benda-benda itu secara keseluruhan maujud sebagai percepatan gravitasi senilai $\mathbf{g}(x, y, z)$ di titik dengan koordinat (x, y, z) . Jadi, gaya akibat adanya gravitasi yang dialami oleh partikel zat alir itu adalah $(\rho dV)\mathbf{g}(x, y, z) = \rho \mathbf{g}(x, y, z)dV$. Karena momentum partikel zat alir itu $\mathbf{p} = dm \mathbf{v} = \rho dV \mathbf{v}$, berdasarkan hukum kedua Newton tentang gerak,

Gambar 10.5: Sebuah partikel zat alir menderita gaya sentuh akibat tekanan zat alir di sekitarnya.

kita memperoleh

$$\Sigma \mathbf{F} = -[\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}]dV + \rho\mathbf{g}(x, y, z)dV = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\rho dV\mathbf{v})}{dt}. \quad (10.13)$$

Karena massa partikel zat alir ρdV tetap sepanjang pergerakan partikel zat alir, maka

$$\frac{d(\rho dV\mathbf{v})}{dt} = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Akhirnya, kita mendapatkan persamaan gerak untuk partikel zat alir itu sebagai

$$-\left[\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}\right]dV + \rho\mathbf{g}(x, y, z)dV = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10.14)$$

Jika kedua ruas persamaan (10.14) dibagi dengan dV , maka didapatkan persamaan gerak zat alir ideal sebagai

$$-\nabla p + \rho\mathbf{g}(x, y, z) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (10.15)$$

dengan

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k} \quad (10.16)$$

adalah gradien tekanan. Inilah yang dikenal sebagai persamaan Euler. Dalam beberapa subbab berikut akan ditinjau terapan persamaan Euler untuk beberapa masalah sederhana.

10.7 Tekanan Hidrostatik

Sekarang hendak ditinjau zat alir statis, yakni zat alir yang tidak bergerak. Dalam hal ini, kecepatan zat alir itu nol. Persamaan (10.15) dapat dituliskan sebagai

$$-\nabla p + \rho\mathbf{g}(x, y, z) = 0. \quad (10.17)$$

Kasus khusus adalah air yang berada di bak mandi. Dalam hal ini, percepatan gravitasi Bumi sangat dominan, sedang gravitasi antar partikel fluida dapat diabaikan. Percepatan gravitasi bersifat tetap dan mengarah ke bawah, yakni $\mathbf{g}(x, y, z) = -g\mathbf{k}$, dengan g tetapan. Kerapatan air dapat dikatakan tetap dan merata. Tekanan air dalam bak mandi itu hanya bergantung pada ketinggian dari dasar bak. Jika bidang-xy sistem koordinat kita pasang di dasar bak mandi, maka $p = p(z)$. Dalam situasi semacam ini, persamaan (10.17) menjadi

$$-\frac{dp}{dz}\mathbf{k} - \rho g\mathbf{k} = 0 \quad (10.18)$$

atau

$$-\frac{dp}{dz} - \rho g = 0 \quad (10.19)$$

atau

$$dp = -\rho g dz. \quad (10.20)$$

Jika kedua ruas persamaan terakhir ini diintegralkan, didapat

$$p = -\rho g z + C, \quad (10.21)$$

dengan C sebuah tetapan. Jika ketinggian permukaan air di bak mandi itu H dan tekanan udara luar p_0 , maka $p_0 = -\rho g H + C$ atau $C = p_0 + \rho g H$. Jadi,

$$p = -\rho g z + p_0 + \rho g H = \rho g (H - z) + p_0.$$

Jika $H - z := h$ kedalaman, maka akhirnya kita mendapatkan persamaan untuk tekanan hidrostatis

$$p = \rho g h + p_0. \quad (10.22)$$

Hal penting yang perlu dicatat di sini adalah bahwa tekanan hidrostatis bergantung pada kerapatan, percepatan gravitasi setempat, dan kedalaman dari permukaan air.

Contoh 10.1

Tekanan Atmosfer

Tentukan tekanan atmosfer p sebagai fungsi ketinggian (z) dari permukaan tanah jika atmosfer dianggap gas ideal dengan massa molar M , temperatur atmosfer sama untuk setiap ketinggian, gravitasi Bumi tetap sebesar g , dan tekanan udara di permukaan tanah senilai p_0 .

Situasinya sebagaimana air dalam bak, yakni bahwa tekanan atmosfer hanya bergantung pada ketinggian (z). Hanya saja kerapatan udara tidak dapat dianggap tetap atau seragam. Kerapatan udara haruslah merupakan fungsi ketinggian. Jadi, persamaan (10.20) berlaku dengan ρ bukan tetapan sebagaimana pada kasus air di bak. Dari persamaan keadaan gas ideal $pV = nRT$, didapatkan

$$\frac{n}{V} = \frac{p}{RT}.$$

Jika kedua ruas persamaan terakhir ini dikalikan dengan massa molar M , maka didapatkan

$$\frac{nM}{V} = \frac{Mp}{RT}.$$

atau

$$\rho = \frac{M}{RT} p. \quad (10.23)$$

Jika ungkapan untuk kerapatan udara ini dimasukkan ke dalam persamaan (10.20), didapatkan

$$dp = -\frac{M}{RT} pg dz$$

atau

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} gdz.$$

Dengan anggapan yang ada bahwa T dan g tetap, kita memperoleh

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}z + C.$$

Untuk $z = 0$, $p(0) = p_0$. Jadi, $\ln p_0 = C$. Akibatnya,

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}z + \ln p_0.$$

Jadi,

$$p(z) = p_0 e^{-\beta z}, \quad (10.24)$$

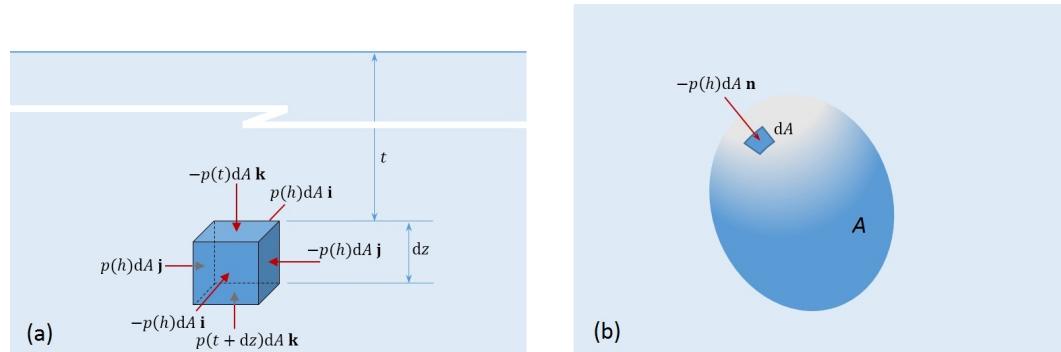
dengan $\beta = Mg/RT$.

10.8 Gaya Apung

Gambar 10.6 (a) memperlihatkan sebuah benda kecil berbentuk kubus bervolume $dV = dx dy dz$ yang berada sejauh t dari permukaan suatu cairan yang diam dengan kerapatan ρ . Tekanan hidrostatik cairan itu hanya bergantung pada kedalaman semata. Oleh karena itu, sisi kanan, kiri, depan, dan belakang akan menderita gaya yang besarnya sama, yaitu $p(h)dA$, dengan $h = t + dz/2$. Oleh karena itu terjadilah kesetimbangan pada arah mendatar. Sisi atas kubus itu akan menderita gaya senilai $-p(t)dA \mathbf{k} = -(p_0 + \rho g t)dA \mathbf{k}$. Sementara sisi bawah kubus menderita gaya senilai $p(t + dz)dA \mathbf{k} = (p_0 + \rho g t + \rho g d z)dA \mathbf{k}$. Jadi, resultan gaya sentuh dalam arah vertikal adalah $p(t + dz)dA \mathbf{k} - p(t)dA \mathbf{k} = \rho g d z d A \mathbf{k}$. Jadi, gaya sentuh total pada kubus tersebut adalah

$$\mathbf{F}_A = \rho g dV \mathbf{k}. \quad (10.25)$$

Gaya yang disebut gaya apung. Orang Eropa menyebutnya gaya Archimedes. Gaya



Gambar 10.6: Sebuah kubus menderita gaya sentuh akibat tekanan zat alir di sekitarnya. Resultan gaya sentuh itu adalah gaya yang berarah vertikal ke atas yang disebut gaya apung atau gaya Archimedes.

ini berarah vertikal ke atas. Oleh karena itu, gaya ini juga disebut gaya ke atas. Perhatikan bahwa $\rho g dV$ adalah berat zat alir yang memiliki volume sama dengan kubus

itu. Keberadaan benda berbentuk kubus di tempat itu tentu saja memindahkan atau menggantikan bagian zat alir yang seharusnya menempati wilayah berbentuk kubus itu. Jadi, kubus itu menderita gaya yang berarah ke atas sebesar berat bagian zat alir yang digantikannya.

Yang baru dibicarakan menyangkut sebuah benda yang sangat kecil dan bentuknya kubus. Lalu, bagaimana untuk benda dengan bentuk sembarang yang berada di sembarang zat alir yang diam? Perhatikan Gambar 10.6 (b). Pada gambar itu sebuah benda besar dibenamkan dalam suatu zat alir yang diam. Setiap unsur luasan dA pada permukaan benda itu akan mengalami tekanan sebesar $p(x, y, z)$ yang bergantung pada letak unsur luasan itu. Gaya akibat tekanan zat alir itu tentu saja senilai $-p(x, y, z)dA \mathbf{n} = -p(x, y, z)\mathbf{n}dA$, dengan \mathbf{n} adalah vektor satuan normal pada permukaan benda. Tanda negatif harus dituliskan karena arah gaya tekan berlawanan dengan vektor satuan normal. Gaya tekan keseluruhan yang bekerja pada benda adalah jumlahan atau integral gaya yang bekerja pada masing-masing unsur luasan yang berada di sekujur permukaan benda itu, yaitu

$$\mathbf{F}_A = \sum_{dA} (-p(x, y, z)\mathbf{n}dA) = - \oint_A p(x, y, z)\mathbf{n}dA, \quad (10.26)$$

dengan integral luasan meliputi permukaan benda yang terbenam itu. Sekarang bayangkan sebelum benda diletakkan di tempat itu. Di tempat itu tentu terdapat zat alir dengan bentuk yang sama dengan benda tersebut. Kedatangan benda itu memindahkan bagian zat alir dari tempat itu. Jadi, seandainya benda tersebut tidak diletakkan di tempat itu, tempat itu akan terisi oleh zat alir yang berbentuk sama dengan benda tersebut. Permukaan bagian zat alir yang sebentuk dengan benda itu pun akan mengalami gaya tekan yang sama dengan yang dialami oleh permukaan benda itu. Berdasarkan teorema Gauss, integral luasan dalam persamaan terakhir ini memenuhi

$$\oint_A p(x, y, z)\mathbf{n} dA = \iiint_V \nabla p(x, y, z) dV, \quad (10.27)$$

dengan V adalah volume wilayah bagian zat alir yang sebentuk dengan benda itu, yakni wilayah yang diselimuti oleh permukaan A . Persamaan (10.17) memberitahu kita bahwa

$$\nabla p(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{g}(x, y, z).$$

Oleh karena itu, persamaan (10.27) menjadi

$$\oint_A p(x, y, z)\mathbf{n} dA = \iiint_V \rho(x, y, z)\mathbf{g}(x, y, z) dV, \quad (10.28)$$

Integral

$$\iiint_V \rho(x, y, z)\mathbf{g}(x, y, z) dV,$$

menyatakan berat bagian fluida yang sebentuk dengan benda itu. Gaya apung dalam persamaan (10.26) menjadi

$$\mathbf{F}_A = - \iiint_V \rho(x, y, z)\mathbf{g}(x, y, z) dV. \quad (10.29)$$

Jadi, kesimpulannya sebuah benda yang berada dalam zat alir akan mengalami ga-

ya apung sebesar berat bagian zat alir yang digantikannya. Untuk zat alir yang diam dengan kerapatan tetap (seragam) yang berada pada wilayah dengan percepatan gravitasi juga tetap (seragam) gaya apung diperoleh dari persamaan (10.29), yaitu

$$\mathbf{F}_A = -\rho \mathbf{g} \iiint_V dV = -\rho \mathbf{g} V. \quad (10.30)$$

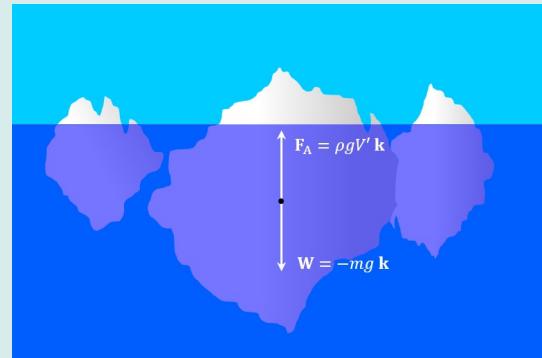
Tanda negatif menyatakan bahwa arah gaya apung ini berlawanan dengan gravitasi.

Contoh 10.2 Gunung Es

Gambar 10.7 memperlihatkan gunung-gunung es atau pulau-pulau es yang terapung pada permukaan laut. Berapa persen bagian volume pulau es yang muncul di permukaan air laut jika rapat massa es $\rho_{es} = 917 \text{ kg/m}^3$ dan rapat massa air laut $\rho_{air} = 1030 \text{ kg/m}^3$?

Andaikan V' volume es yang tercelup dalam air laut, maka berat air laut yang tergantikan oleh bagian es itu adalah $\rho_{air} g V'$. Berat bagian air laut ini adalah besar gaya apung. Berat gunung es keseluruhannya adalah volume total gunung es dikalikan dengan percepatan gravitasi dan rapat massa es, yaitu $W = \rho_{es} g V$. Karena gunung es dalam kesetimbangan, maka gaya apung sama dengan berat gunung es keseluruhan: $W = \rho_{es} g V = \rho_{air} g V'$. Jadi, $V'/V = \rho_{es}/\rho_{air}$. Presentasi volume air es yang muncul di permukaan air laut adalah

$$100\% - \frac{917}{1030}\% = 10,97\%.$$



Gambar 10.7: Gunung es yang terapung pada permukaan laut.

10.9 Hukum Bernoulli

Sekarang kita kembali memperhatikan aliran tunak yang tak termampatkan. Gambar 10.8 memperlihatkan gerak sebuah partikel zat alir dari titik 1 sepanjang garis alir menuju ke titik 2. Untuk aliran semacam ini berlaku persamaan (10.15). Jika diambil hasil kali skalar persamaan tersebut dengan pergeseran $d\mathbf{r}$ sepanjang garis alir, didapat

$$-\nabla p \cdot d\mathbf{r} + \rho \mathbf{g}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.31)$$

Suku $\nabla p \cdot d\mathbf{r}$ dapat ditulis lebih lanjut sebagai

$$\nabla p \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Ungkapan

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad (10.32)$$

menyatakan perubahan tekanan dp kalau kita menggeser titik peninjauan sejauh $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Jadi, persamaan (10.31) dapat ditulis menjadi

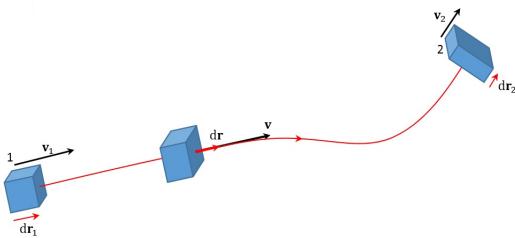
$$-dp + \rho \mathbf{g}(x, y, z) \cdot dr = \rho \mathbf{v} \cdot \frac{dr}{dt} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \quad (10.33)$$

Jika persamaan terakhir ini diintegralkan secara lintasan sepanjang garis alir partikel zat alir itu dari \mathbf{r}_1 menuju \mathbf{r}_2 , maka didapatkan

$$- \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dp + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \rho \mathbf{g}(x, y, z) \cdot dr = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \quad (10.34)$$

atau

$$-p_2 + p_1 + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \rho \mathbf{g}(x, y, z) \cdot dr = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1. \quad (10.35)$$



Suku kedua ruas kiri jika dikalikan dengan volume partikel fluida menyatakan usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi ketika partikel zat alir itu bergerak sepanjang lintasan. Usaha oleh gaya gravitasi pada partikel zat alir ini sama dengan minus perubahan tenaga potensial gravitasi. Jika tenaga potensial gravitasi tiap satuan volume dituliskan sebagai U , maka persamaan terakhir menjadi

$$-p_2 + p_1 - (U_2 - U_1) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (10.36)$$

Dengan mengatur suku-sukunya didapat ungkapan

$$p_1 + U_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + U_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (10.37)$$

atau secara lebih singkat.

$$p + U + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{tetapan}. \quad (10.38)$$

Ungkapan terakhir ini disebut hukum Bernoulli. Untuk aliran di atas permukaan Bumi dengan percepatan gravitasi g yang tetap, persamaan Bernoulli di atas dapat dituliskan menjadi

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad (10.39)$$

dengan h_1 dan h_2 berturut-turut ketinggian tempat pertama dan kedua dari permukaan tanah. Persamaan Bernoulli ini memiliki terapan di berbagai bidang, dari hal-hal yang sederhana sampai hal-hal yang canggih. Yang sederhana semisal alat

penyemprot obat nyamuk. Yang canggih semisal dalam rancang bangun sayap pesawat terbang.

Contoh 10.3 Gaya Angkat pada Sayap Pesawat

Perhatikan Gambar 10.9 yang memperlihatkan tampang lintang sayap sebuah pesawat dan garis alir udara yang bergerak relatif terhadap sayap itu. Tempat di atas pesawat kita sebut tempat pertama, tempat di bawah sayap kita sebut tempat kedua. Tentukan perkiraan gaya angkat sayap itu jika besar kecepatan udara di tempat pertama v_1 dan tekanannya p_1 , sedangkan besar kecepatan di tempat kedua adalah v_2 dan tekanannya p_2 . Ketebalan maksimum sayap itu adalah Δh .

Berdasarkan persamaan (10.39) didapat

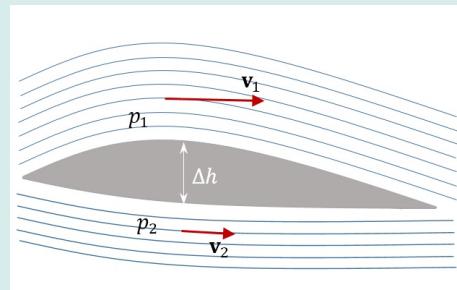
$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Jika kecepatan aliran di atas lebih besar daripada yang di bawah sayap, maka $p_1 - p_2 > 0$. Karena $h_2 - h_1 = \Delta h$, maka

$$p_1 - p_2 = \rho g\Delta h + \frac{1}{2} \rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Jika luas sayap itu A , maka gaya angkat pada sayap itu adalah $F = (p_1 - p_2)A$ atau

$$F = \rho g A \Delta h + \frac{1}{2} \rho(v_2^2 - v_1^2) A.$$



Gambar 10.9: Aliran melalui sayap pesawat terbang. Perbedaan kecepatan antara bagian di atas dan di bawah sayap mengakibatkan adanya gaya angkat.

10.10 Zat Alir Tak Ideal

Jika terjadinya gesekan antara satu bagian dengan bagian yang lain dalam suatu zat alir tidak dapat diabaikan, maka zat alir yang ditinjau itu termasuk zat alir tak ideal semisal zat alir yang sering disebut zat alir kental. Dalam fluida kental dikenal sebuah konsep yang disebut **kekentalan** atau **viskositas**. Kekentalan merupakan cerminan besarnya gesekan antar bagian fluida. Gesekan antar bagian zat alir itu muncul tatkala ada kesenjangan gerak antar bagian itu. Oleh karena itu, kemunculan kekentalan dalam persamaan gerak terkait dengan gradien kecepatan fluida itu. Persamaan gerak fluida kental yang dikenal sebagai persamaan Navier-Stokes merupakan perumuman persamaan Euler. Bentuk umum persamaan Navier-Stokes adalah

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g}(x, y, z) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (10.40)$$

dengan η dinamakan kekentalan dinamik dan ζ kekentalan jenis kedua. Sebagaimana yang telah kita pahami di depan, suatu zat alir dikatakan termampatkan jika kerapatan setiap partikelnya tidak mengalami perubahan. Secara matematis, melalui persamaan kontinuitas, ketermampatan zat alir ini setara dengan berlakunya persamaan $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Oleh karena itu, untuk zat alir termampatkan yang kental, berlaku persamaan

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}(x, y, z) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10.41)$$

Besaran $\nu = \eta/\rho$ disebut kekentalan kinematik. Tabel berikut menampilkan beberapa bahan dan nilai kekentalannya.

Tabel 10.1: Kekentalan Bahan

No	Bahan	Kekentalan Kinematik (cm ² /s)	Kekentalan Dinamik (g/cm s)
1	air	0,010	0,010
2	udara	0,150	0,00018
3	alkohol	0,22	0,018
4	gliserin	6,8	8,5
5	air raksa	0,0012	0,0156

Persamaan (10.41) dapat diuraikan atas tiga pesamaan

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \quad (10.42)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \frac{dv_y}{dt}, \quad (10.43)$$

dan

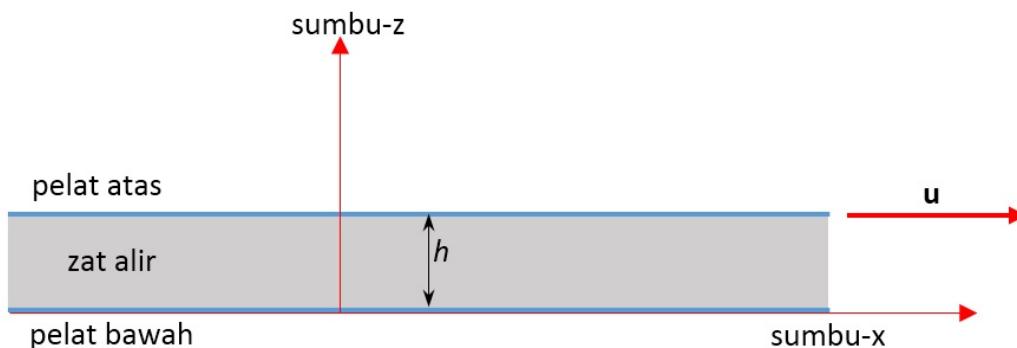
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{dv_z}{dt}. \quad (10.44)$$

Hal yang perlu diperhatikan dalam mencari jawaban atas permasalahan zat alir kental adalah bahwa gerak zat alir kental di perbatasan selalu mengikuti gerak batas atau wadahnya. Sebagai contoh, jika ember yang memuat suatu zat alir kental diputar dengan sumbu putar sumbu ember itu, maka bagian zat alir yang menempel pada dinding dalam ember akan ikut berputar bersama ember. Hal itu tak akan terjadi jika zat alir kental itu diganti dengan zat alir ideal.

Zat alir kental tak termampatkan di antara dua pelat

Sebagai contoh, kita tinjau suatu zat alir yang berada di antara dua buah pelat sejajar yang cukup luas dan terpisah oleh jarak yang sempit, sehingga kedua pelat boleh dianggap tak berhingga. Pelat bagian bawah diletakkan pada bidang-xy. Pelat bagian atas diletakkan sejauh h dari pelat yang di bawah dan digerakkan sejajar dengan sumbu-x dengan kecepatan u yang tetap. Dalam situasi semacam ini, besaran-besaran yang terkait dengan masalah aliran fluida hanya bergantung pada koordinat z saja. Komponen kecepatan sepanjang sumbu-y dan sumbu-z sama dengan nol. Tekanan tidak bergantung pada koordinat x dan y , jadi $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$. Mengapa? Percepatan gravitasi $g_x = g_z = 0$, dan $g_y = -g$. Oleh karena itu, persamaan Navier-Stokes dalam masalah ini menjadi

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$



Gambar 10.10: Zat alir tak termampatkan di antara dua pelat yang luas tak berhingga. Pelat bagian bawah diletakkan pada bidang- xy . Pelat bagian atas diletakkan sejauh h dari pelat pertama. Pelat bagian atas digerakkan sejajar dengan sumbu- x dengan kecepatan u .

dan

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

Dari kedua persamaan tersebut didapatkan jawaban umum

$$p(z) = -\rho g z + C_1$$

dan

$$v(z) = C_2 z + C_3.$$

Jika pada ketinggian h , tekanan zat alir nol, maka $p(h) = 0 = -\rho g h + C_1$. Jadi, $C_1 = \rho g h$. Oleh karena itu, tekanan dalam fluida itu adalah

$$p(z) = \rho g(h - z), \quad (10.45)$$

dengan $0 \leq z \leq h$. Gerakan zat alir kental mengikuti batasnya. Jadi, di daerah lempeng bawah ($z = 0$), $v(0) = 0$ berhubung pelat bawah diam. Sementara di bagian atas yang berbatasan dengan pelat atas zat alir bergerak dengan kecepatan sama dengan kecepatan pelat atas, $v(h)\mathbf{i} = \mathbf{u} = u\mathbf{i}$. Dari data itu, di dapat

$$v(0) = 0 = C_2 \cdot 0 + C_3 = 0$$

atau $C_3 = 0$ dan

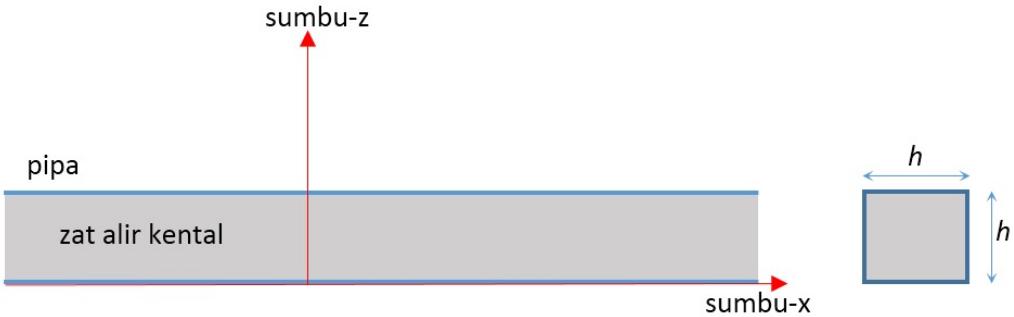
$$v(h) = u = C_2 h$$

atau $C_2 = u/h$. Jadi, kita dapatkan

$$v(z) = \frac{u}{h} z. \quad (10.46)$$

Aliran zat alir kental dalam pipa berpenampang bujursangkar

Sekarang, ditinjau zat alir kental yang mengalir pada pipa dengan penampang bujur sangkar dengan sisi h (Lihat Gambar 10.11). Dalam pipa itu, terdapat gradien tekanan sepanjang pipa ($\partial p / \partial x \neq 0$). Dalam situasi semacam ini, kecepatan zat alir hanya memiliki komponen sejajar dengan sumbu- x saja, $v_y = v_z = 0$. Tekanan



Gambar 10.11: Zat alir kental tak termampatkan dalam pipa berpenampang bujursangkar dengan sisi h .

tidak bergantung pada y , jadi $\partial p / \partial y = 0$. Percepatan gravitasi $g_x = g_z = 0$, dan $g_y = -g$. Oleh karena itu, persamaan Navier-Stokes dalam masalah ini menjadi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (10.47)$$

dan

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (10.48)$$

Dari persamaan terakhir, didapatkan $p(x, z) = -\rho g z + C(x)$. Jadi, $\partial p / \partial x$ hanya bergantung pada koordinat x saja. Oleh karena itu, ruas kiri persamaan (10.47) hanya bergantung pada koordinat x saja, sedang ruas kanan hanya bergantung pada y dan z . Jadi, kedua ruas persamaan itu haruslah sebuah tetapan. Andaikan tetapan itu k , maka

$$\frac{k}{\eta} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}.$$

Kedua suku ruas kanan haruslah tetapan juga. Selanjutnya, kita mendapatkan persamaan

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}. \quad (10.49)$$

Jika kita hanya meninjau titik-titik dalam pipa dengan koordinat z yang sama, katanlah $z = a$, yakni titik-titik pada sembarang bidang datar dalam pipa, maka ruas kanan persamaan (10.49) merupakan tetapan. Jadi, dengan mengintegralkan persamaan di atas, kita memperoleh

$$v = v_x = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) y^2 + K_1 y + K_2, \quad (10.50)$$

dengan K_1 dan K_2 adalah tetapan-tetapan, dan turunan $\partial^2 v_x / \partial z^2$ dievaluasi pada $z = a$. Di batas pipa, zat alir diam karena pipa diam. Oleh karena itu, di titik-titik dengan $y = 0$ dan $y = h$, berlaku $v = 0$:

$$v(0) = 0 = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \cdot 0^2 + K_1 \cdot 0 + K_2,$$

dan

$$v(h) = 0 = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) h^2 + K_1 h + K_2,$$

Jadi, $K_2 = 0$ dan

$$K_1 = - \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) h.$$

Akhirnya,

$$v(y) = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) y^2 - \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) h y. \quad (10.51)$$

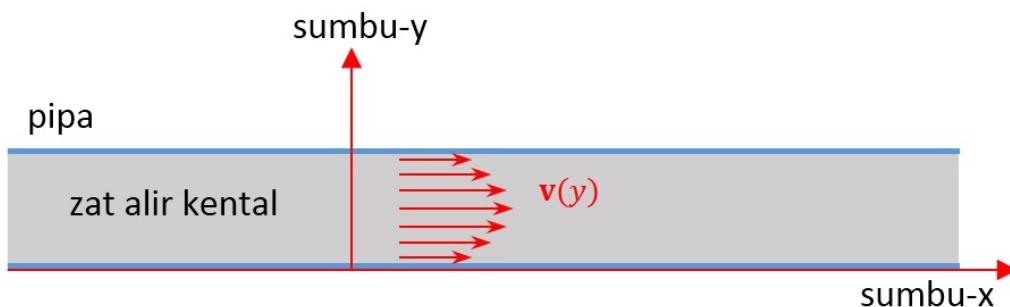
Jika

$$\left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) < 0,$$

zat alir mengalir searah dengan membesarnya koordinat x (ke kanan). Laju zat alir paling besar terjadi di $y = h/2$. Sebaliknya, jika

$$\left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) > 0,$$

zat alir akan bergerak ke kiri dengan laju terbesar berada di $y = h/2$. Profil kecepatan zat alir untuk $\partial p / \partial x < 0$ pada ketinggian tertentu diperlihatkan oleh Gambar 10.12.



Gambar 10.12: Profil kecepatan zat alir kental tak termampatkan dalam pipa pada ketinggian tertentu.

Dengan cara yang sama kecepatan zat alir pada titik-titik dengan koordinat y yang sama, semisal $y = b$, yakni titik-titik pada sebuah bidang tegak yang sejajar dengan bidang- xz , memiliki kecepatan

$$v(z) = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) z^2 - \left(\frac{k}{\eta} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) h z, \quad (10.52)$$

dengan turunan $\partial^2 v_x / \partial z^2$ dievaluasi pada $y = b$.

10.11 Soal-soal

1. Tunjukkan bahwa kontinuitas aliran dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (10.53)$$

dengan V sembarang wilayah dalam zat alir dan A adalah luasan yang membatasi wilayah V .

2. Persamaan gerak zat alir kental tak termampatkan dalam pipa (silinder) dengan penampang lingkaran diberikan oleh

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0, \quad (10.54)$$

dengan $v = v_z$ berarah sejajar sumbu-z dan r adalah jarak titik yang ditinjau dari sumbu pipa (sumbu-z). Jika jari-jari pipa R tentukan kecepatan zat alir itu sebagai fungsi r .

Daftar Pustaka

- [1] Boniolo, G. (1992). Theory and experiment. the case of eötvös' experiment. *British Society for The Philosophy of Science*, 43(4).
- [2] Boys, C. V. (1889). On the cavendish experiments. In *Proceedings of the Royal Society of London*. JSTOR.
- [3] Braginskij, V. and Panov, V. (1972). The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *General Relativity and Gravitation*, 3(4).
- [4] Everitt, C. W. F. (2011). Gravity probe b: Final results of a space experiment to test general relativity. *Physical Review Letters*, 106(221101).
- [5] Mathis, M. (2014). The cavendish experiment.
- [6] Quinn, T. J. (2001). A new determination of g using two methods. *Physical Review Letters*, 87(11).
- [7] Quinn, T. J. (2013). Improved of g using two methods. *Physical Review Letters*, 111(101102).
- [8] Rosyid, M. F. (2005). *Mekanika Kuantum*. 1st edition.
- [9] Schiff, L. I. (1960). Possible experimental test of general relativity theory. *Physical Review Letters*, 4(5).
- [10] Taylor, J. R. (1997). *Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 2nd edition.
- [11] von Eötvös, R. (1890). Über die anziehung der erde auf verschiedene substanzen. *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 8.
- [12] Will, C. M. (2011). Finally, results from gravity probe b. *Physics Viewpoint*, 4(43).