Dimensi Sains
Ahmad Basyir Najwan
www.basyiralbanjari.wordpress.com | ahmadbasyirn@gmail.com
0852-1749-9402 (WA) | Youtube: Dimensi Sains | Tiktok: Dimensi Sains

One Day One Problem

Persiapan OSN Fisika Tingkat Nasional 2024

Solusi Day 1 - Defleksi Akibat Rotasi Bumi pada Gerak Jatuh bebas

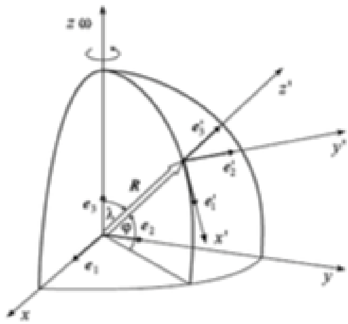
Soal dan solusi ini ditulis oleh Handhika Satrio Ramadhan, S.Si., M.Si., Ph.D. sebagai soal usulan UAS mata kuliah Mekanika Klasik di Jurusan Fisika FMIPA UI tahun 2024.

Soal:

Sebuah benda bermassa m jatuh bebas dari ketinggian h di atas permukaan tanah. Karena bumi berotasi terhadap sumbunya, maka muncul efek Coriolis. Percepatan jatuhnya menjadi:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}',$$

di mana $\mathbf{g}$ adalah percepatan gravitasi yang diukur di atas permukaan tanah (di kerangka non-inersial) dan $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{e}}_1' + y'\hat{\mathbf{e}}_2' + z'\hat{\mathbf{e}}_3'$. Asumsikan sumbu rotasi sejajar $\hat{\mathbf{e}}_3$. Pada $t = 0$, $x = y = 0$ dan $z = h$.



(a) Tunjukkan bahwa persamaan di atas terurai menjadi

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= 2\omega\dot{y}'\cos\lambda, \\ \ddot{y}' &= -2\omega\left(\dot{x}'\cos\lambda + \dot{z}'\sin\lambda\right), \\ \ddot{z}' &= -g + 2\omega\dot{y}'\sin\lambda. \end{aligned}$$

(b) Integralkan persamaan $\ddot{x}'$ dan $\ddot{z}'$ sehingga $\ddot{y}$ memenuhi

$$\ddot{y}' + 4\omega^2 y' = (2\omega g\ \sin\lambda)\, t.$$

Tentukan solusi **eksak** (tanpa aproksimasi) dari $x'(t), y'(t)$, dan $z'(t)$.

(c) Dengan asumsi laju rotasi bumi kecil, $\omega \sim 10^{-5} s^{-1}$, tunjukkan bahwa ketika benda menyentuh tanah ada pergeseran pada arah $\hat{\mathbf{e}}_2'$ sejauh

$$y' \approx \frac{2\omega h \sin\lambda}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

dari lokasi seharusnya ia jatuh jika berada di kerangka inersial.
Jika $h \sim 100\ m$ dan sudut lintang $\lambda \sim 45^0$

Solusi:

Syarat awal sistem adalah:

$$x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad z'(0) = h.$$

(a) Karena arah rotasi bumi di kerangka diam diambil arah $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$, maka terhadap permukaan tanah

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \sin\lambda\ \hat{\mathbf{e}}_1' + \omega\cos\lambda\ \hat{\mathbf{e}}_3'.$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1' & \hat{\mathbf{e}}_2' & \hat{\mathbf{e}}_3' \\ -\omega\sin\lambda & 0 & \omega\cos\lambda \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} \\
&= -\omega\dot{y}'\cos\lambda\ \hat{\mathbf{e}}_1' + \omega\left(\dot{x}'\cos\lambda + \dot{z}'\sin\lambda\right)\ \hat{\mathbf{e}}_2' - \omega\dot{y}'\sin\lambda\ \hat{\mathbf{e}}_3'.
\end{aligned}$$

Maka, persamaan $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ secara komponen dapat ditulis:

$$\boxed{\begin{aligned}
\ddot{x}' &= 2\omega\dot{y}'\cos\lambda, \\
\ddot{y}' &= -2\omega\left(\dot{x}'\cos\lambda + \dot{z}'\sin\lambda\right), \\
\ddot{z}' &= -g + 2\omega\dot{y}'\sin\lambda.
\end{aligned}}$$

(b) Persamaan pertama dan ketiga dapat langsung diintegralkan:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= 2\omega y' \cos\lambda, & (1)\\ \dot{z}' &= -gt + 2\omega y' \sin\lambda. & (2) \end{aligned}$$

dengan menerapkan syarat awal. Masukkan hasilnya ke persamaan kedua:

$$\begin{aligned} \ddot{y}' &= -2\omega\left(2\omega y' \cos^2\lambda - g\sin\lambda\ t + 2\omega y' \sin^2\lambda\right)\\ &= -4\omega^2 y' + 2\omega g \sin\lambda\ t \end{aligned}$$

Kita dapatkan:

$$\boxed{\ddot{y}' + 4\omega^2 y' = 2\omega g \sin\lambda\ t.}$$

Ini merupakan PDB orde-2 non-homogen. Solusinya $y'(t) = y_h'(t) + y_p'(t)$, dengan

$$y_h'(t) = A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t.$$

Kita dapat ambil ansatz $y_p'(t) = c\ t$. Dengan memasukkannya ke PDB non-homogen di atas, didapat $c = g\sin\lambda/2\omega$.
Dari syarat awal didapat $B = 0$ dan $A = -g\sin\lambda/16\omega^4$. Maka

$$y'(t) = \frac{g\sin\lambda}{2\omega}\left(\frac{t - \sin 2\omega t}{2\omega}\right). \tag{3}$$

Sekarang kita selesaikan $x'(t)$. Masukkan (3) ke (1) kita dapatkan

$$\dot{x}'(t) = g\sin\lambda\cos\lambda\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),$$

yang dapat langsung diintegralkan (dengan menerapkan syarat awal) menjadi

$$x'(t) = g\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right).$$

Kita lakukan hal yang sama untuk $z'(t)$. Dari (2) kita peroleh

$$\dot{z}'(t) = -gt + g\sin^2\lambda\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),$$

yang dapat diintegralkan menjadi

$$z'(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + g\sin^2\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right) + h.$$

Sehingga solusi uniknya (secara eksak) adalah:

$$\boxed{\begin{aligned}
x'(t) &= g\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right),\\
y'(t) &= \frac{g\sin\lambda}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),\\
z'(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 + g\sin^2\lambda\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right).
\end{aligned}}$$

Karena ω kecil, maka

$$\cos 2\omega t \approx 1 - \frac{(2\omega t)^2}{2!}, \quad \sin 2\omega t \approx 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!}.$$

Maka solusi di atas terreduksi menjadi

$$\begin{aligned} x'(t) &\approx 0, \\ y'(t) &\approx \frac{g\omega t^3}{3}\sin\lambda, \\ z'(t) &\approx h - gt^2. \end{aligned}$$

Karena jatuh bebas denan asumsi tanpa gesekan, maka benda menyentuh tanah pada waktu

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Sehingga, defleksi/pergeseran pada arah $\hat{\mathbf{e}}_2'$ adalah

$$\boxed{y' \approx \frac{2\omega h \sin\lambda}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}.}$$

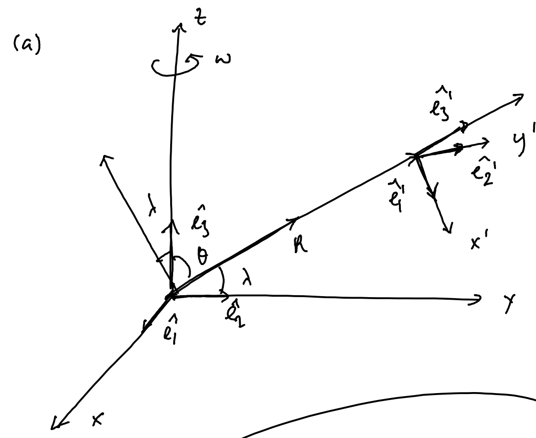
Untuk $h \sim 100\ m$ dan $\lambda = 45^0$, benda bergeser pada arah $\hat{\mathbf{e}}_2'$ sejauh

$$\boxed{y' \sim 16\ mm.}$$

Jawaban Kevan

23 June 2024 1:17

(a)



$$\vec{\omega} = \omega\, \hat{e}_3$$
$$\vec{\omega} = -\omega \cos\lambda\, \hat{e}_1' + \omega \sin\lambda\, \hat{e}_3'$$
$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}' = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{a}' = \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}'$$
$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1' & \hat{e}_2' & \hat{e}_3' \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{e}_1' & \hat{e}_2' \\ -\omega\cos\lambda & 0 \\ \dot{x}' & \dot{y}' \end{matrix} = (\dot{x}'\omega\sin\lambda\, \hat{e}_2' - \dot{y}'\omega\cos\lambda\, \hat{e}_3') - (\dot{y}'\omega\sin\lambda\, \hat{e}_1' - \dot{z}'\omega\cos\lambda\, \hat{e}_2')$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\dot{y}'\omega\sin\lambda \\ 2\omega(\dot{x}'\sin\lambda + \dot{z}'\cos\lambda) \\ -2\dot{y}'\omega\cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}' &= 2\omega\dot{y}'\sin\lambda \\ \ddot{y}' &= -2\omega(\dot{x}'\sin\lambda + \dot{z}'\cos\lambda) \\ \ddot{z}' &= -g + 2\omega\dot{y}'\cos\lambda \end{aligned}}$$

(b) $\ddot{x}' = 2\omega\dot{y}'\sin\lambda$ $(\times\, dt)$ kedua ruas

$$\int \ddot{x}'\, dt = \int 2\omega\dot{y}'\sin\lambda\, dt$$
$$\dot{x}' = 2\omega y'\sin\lambda \quad \dots (1)$$

$\ddot{z}' = -g + 2\omega\dot{y}'\cos\lambda$ $(\times\, dt)$ kedua ruas

$$\int \ddot{z}'\, dt = \int -g + 2\omega\dot{y}'\cos\lambda\, dt$$
$$\dot{z} = -gt + 2\omega y'\cos\lambda \quad \dots (2)$$

$$\ddot{y}' = -2\omega\left(2\omega y'\sin^2\lambda + \cos\lambda\left(-gt + 2\omega y'\cos\lambda\right)\right)$$
$$\boxed{\ddot{y}' + 4\omega^2 y' = 2\omega g\cos\lambda\, t}$$

(c) $Y'(t) = Y_h'(t) + Y_p'(t)$

$Y_h'(t) = A e^{kt} + B e^{-kt}$

$k^2 + 4\omega^2 = 0$

$k = 2\omega i$

$Y_h'(t) = A e^{2\omega t i} + B e^{-2\omega t i} = (A+B)\cos(2\omega t) + (A-B)\sin(2\omega t)$

$Y_h'(t) = C\cos(2\omega t) + D\sin(2\omega t)$

$Y_p'(t) = at + b$

$4\omega^2(at+b) = 2\omega g\cos\lambda t$

$(at+b) = \frac{g}{2\omega}\cos\lambda\, t$

$Y'(t) = C\cos(2\omega t) + D\sin(2\omega t) + \frac{g}{2\omega}\cos\lambda \cdot t$

Kondisi $t = 0$, $Y'(0) = 0$, $\dot{Y}'(0) = 0$

$\dot{Y}'(t) = -2\omega C\sin(2\omega t) + 2\omega D\cos(2\omega t) + \frac{g}{2\omega}\cos\lambda$

$Y'(0) = 0$, $0 = 0 + 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$

$\dot{Y}'(t) = 0$, $0 = \frac{g}{2\omega}\cos\lambda + D \cdot 2\omega \Rightarrow \boxed{D = -\frac{g}{4\omega^2}\cos\lambda}$

$$\boxed{Y'(t) = \frac{gt}{2\omega}\cos\lambda - \frac{g}{4\omega^2}\cos\lambda \cdot \sin(2\omega t)}$$

$\dot{x}' = 2\omega y'\sin\lambda$

$$\int_0^{x'} dx' = \int_0^t 2\omega\sin\lambda\left(\frac{gt}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\sin(2\omega t)\right)\cos\lambda\, dt \Rightarrow \boxed{x' = \frac{g\sin(2\lambda)}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{4\omega^2}\right)}$$

$$\dot{z}' = -gt + 2\omega y'\cos\lambda, \quad \int_h^{z'} dz' = \int_0^t -gt + 2\omega y'\cos\lambda\left(\frac{gt}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\sin(2\omega t)\right) dt \rightarrow \boxed{z' = h - \frac{gt^2}{2} + g\cos^2\lambda\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4\omega^2}\left(\cos(2\omega t) - 1\right)\right)}$$

(d) $\omega^2 \approx 0$

$\frac{d^2y'}{dt^2} \approx 2\omega g\cos\lambda t$, $\boxed{y' = \frac{1}{3} g\omega\cos\lambda \cdot t^3}$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &\approx 0 \\ z' &\approx h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}}$$

(e) $t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad y' = \frac{1}{3} g\omega\cos\lambda\left(\frac{2h}{g}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} = \boxed{\frac{2}{3}\omega h\cos\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}}$

(f) $\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \omega \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3600 \cdot 12}$

$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{43200}\right) \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{200}{9{,}8}} \approx 0{,}0155\ \text{m}$

$\boxed{\approx 0{,}016\text{m}}$