

# **MODUL**

## **MEDAN ELEKTROMAGNETIK II**



**Di susun oleh:**  
**Dr. H. Jaja Kustidja, M.Sc.**

**JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK ELEKTRO  
FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN  
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA  
2020**



# BAB I

## PENJALARAN GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK

Bab I ini berisi sub pokok bahasan:

- 1.1 Persamaan Gelombang Secara Umum
- 1.2. Terjadinya Gelombang Elektromagnet
- 1.2 Kecepatan gelombang EM dalam Vakum
- 1.3 Solusi Persamaan Gelombang Datar Serba Sama Pada Medium Udara/Vakum
- 1.4 Impedansi Intrinsik Dalam Udara/Vakum
- 1.5 Ikhtisar

### 1.1 PERSAMAAN GELOMBANG SECARA UMUM

Pemahaman yang baik terhadap propagasi gelombang EM sangat didukung oleh pemahaman terhadap gelombang secara umum. Gelombang merupakan fungsi ruang dan waktu.

Gerak gelombang terjadi jika terjadi gangguan pada suatu titik A pada waktu  $t_0$ , berhubungan dengan apa yang terjadi pada titik B, pada waktu  $t > t_0$ . Persamaan gelombang adalah persamaan diferensial parsial orde kedua. Dalam satu dimensi, persamaan gelombang skalar berbentuk:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

Dimana  $u$  adalah kecepatan gelombang, dan solusi persamaan (1.1) adalah:

$$E^- = f(z - ut) \quad (1.2a)$$

$$E^+ = g(z + ut) \quad (1.2b)$$

Atau:

$$E = f(z - ut) + g(z + ut) \quad (1.2c)$$

Dimana  $f$  menyatakan fungsi dari  $z + ut$  dan  $g$  fungsi dari  $z - ut$ .

Contoh:  $\sin k(z \pm ut)$ ;  $\cos k(z \pm ut)$  dan  $e^{jk(z \pm ut)}$ , dimana  $k$  adalah konstanta.

Jika kita asumsikan gerak harmonik (sinusoidal) bergantung waktu  $e^{j\omega t}$ , persamaan (1.1) menjadi:

$$\frac{d^2 E_s}{dz^2} + \beta^2 E_s = 0 \quad (1.3)$$

Dimana  $\beta = \omega/u$  dan  $E_s$  adalah bentuk fasor dari E. Solusi persamaan (1.3) yang mungkin adalah:

$$E^+ = Ae^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.4a)$$

$$E^- = Be^{j(\omega t + \beta z)} \quad (1.4b)$$

Dan

$$E = Ae^{j(\omega t - \beta z)} + Be^{j(\omega t + \beta z)} \quad (1.4c)$$

Dimana A dan B adalah konstanta riil.

Sekarang, kita ambil solusi dalam persamaan (1.4a). Dengan mengambil bagian imajiner dari persamaan ini, maka kita peroleh:

$$E = A \sin(\omega t - \beta z) \quad (1.5)$$

yang merupakan gelombang sinus yang dipilih untuk penyederhanaan; gelombang cosinus akan dihasilkan kita kita mengambil bagian riil persamaan (1.4a).

Berikut ini adalah karakteristik gelombang dalam persamaan (1.5):

1. Harmonik terhadap waktu, karena diasumsikan kebergantungan waktu  $e^{j\omega t}$  pada persamaan (1.5)
2. A adalah amplitudo gelombang dan memiliki satuan yang sama dengan E.
3.  $(\omega t - \beta z)$  adalah fase gelombang (dalam radian), bergantung terhadap waktu  $t$  dan variabel ruang z.
4.  $\omega$  adalah frekuensi sudut (dalam radian/sekon);  $\beta$  adalah konstanta fase atau bilangan gelombang (dalam radian/m)

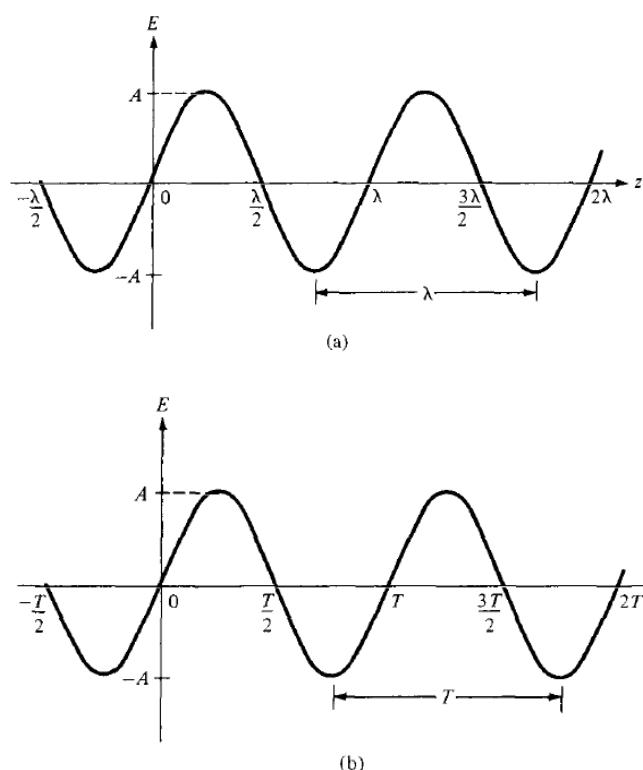
Karena E berubah-ubah terhadap waktu  $t$  dan variabel z, kita dapat memplot E sebagai fungsi  $t$  dengan mempertahankan  $z$  konstan dan demikian juga sebaliknya. Plot  $E(z, t=konstan)$  diperlihatkan pada gambar 1.1a dan  $E(t, z = konstan)$  pada gambar 1.1b. Dari gambar 1.1a kita dapat melihat bahwa gelombang berulang terhadap  $\lambda$  (panjang gelombang) dengan satuan meter. Sedangkan dari gambar 1.1b kita perhatikan gelombang berulang terhadap T (periode) dengan satuan sekon. Karena diperlukan waktu T untuk gelombang menjalar dalam jarak  $\lambda$  pada laju  $u$ , maka:

$$\lambda = uT \quad (1.6a)$$

Namun karena  $T=1/f$ , dimana f adalah frekuensi gelombang (jumlah putaran per sekon) dengan satuan hertz. Dengan demikian:

$$u = f\lambda$$

(10.6b)



Gambar 1.1 Plot  $E(z, t) = A \sin(\omega t - \beta z)$ ; (a) dengan  $t$  konstan,  
(b) dengan  $z$  konstan.

Dengan adanya hubungan antara panjang gelombang dan frekuensi tersebut, maka kita dapat megidentifikasi posisi stasiun band radio dalam frekuensi atau panjang gelombang (meskipun biasanya dalam frekuensi).

Karena diketahui :

$$\omega = 2\pi f \quad (10.7a)$$

$$\beta = \frac{\omega}{u} \quad (10.7b)$$

Dan

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.7c)$$

Maka dari persamaan (1.6) dan (1.7) diperoleh:

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (10.8)$$

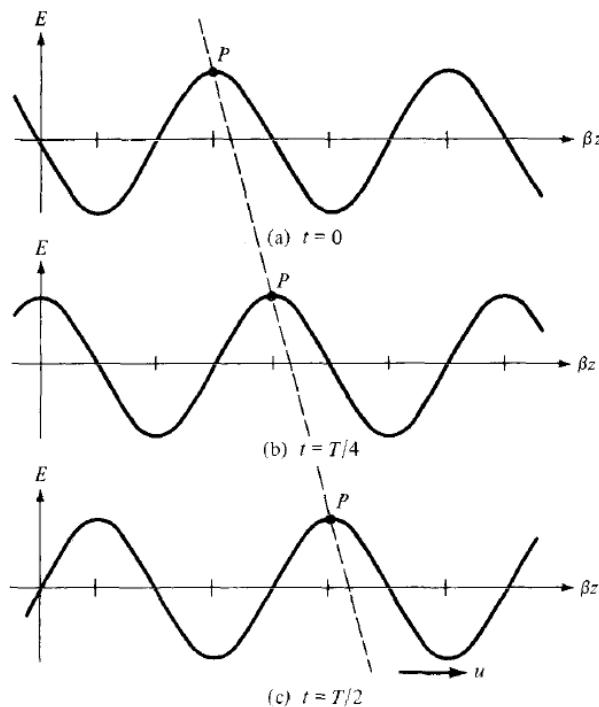
Persamaan (1.8) menunjukkan bahwa setiap menempuh satu panjang gelombang maka gelombang akan mengalami perubahan fase sebesar  $2\pi$  radian.

Persamaan (1.5) menyatakan gelombang yang menjalar dengan kecepatan  $u$  dalam arah  $+z$ . Untuk membuktikan hal tersebut, ambil titik P pada gelombang. Sketsa persamaan (1.5) pada waktu  $t = 0, T/4$  dan  $T/2$  diperlihatkan pada gambar 1.2. Dari gambar tersebut nampak bahwa ketika waktu gelombang bertambah, maka titik P akan bergerak ke arah  $+z$ . Titik P adalah dengan fase konstan, oleh sebab itu  $\omega t - \beta z = \text{konstan}$ .

Atau:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = u \quad (10.9)$$

Yaitu sama dengan persamaan (1.7b). Persamaan (1.9) menunjukkan bahwa gelombang berpropagasi dengan kecepatan  $u$  dalam arah  $+z$ . Sedangkan  $B\sin(\omega t + \beta t)$  dalam persamaan (10.4b) menjalar dengan kecepatan  $u$  dalam arah  $-z$ .



Gambar 1.2. Plot  $E(z, t) = Asin(\omega t - \beta t)$  pada waktu (a)  $t=0$ , (b)  $t = T/4$ , (c)  $t = T/2$ ; P bergerak sepanjang arah  $+z$  dengan kecepatan  $u$ .

Dari uraian di atas, dapat dibuat ringkasan sebagai berikut:

1. Gelombang adalah fungsi waktu dan ruang.
2. Meskipun kita pilih sembarang  $t = 0$  sebagai acuan, gelombang tidak bermula dan berakhir.
3. Tanda negatif dalam  $(\omega t \pm \beta z)$  menyatakan gelombang berpropagasi dalam arah  $+z$  (penjalaran ke depan atau gelombang dalam arah positif) sedangkan tanda positif mengindikasikan gelombang berpropagasi dalam arah  $-z$  (mundur atau gelombang dalam arah negatif)
4. Karena  $\sin(-\psi) = -\sin \psi$ , sedangkan  $\cos(-\psi) = \cos \psi$ , maka:

$$\sin(\psi \pm \pi/2) = \pm \cos \psi \quad (10.10a)$$

$$\sin(\psi \pm \pi) = -\sin \psi \quad (10.10b)$$

$$\cos(\psi \pm \pi/2) = \mp \sin \psi \quad (10.10c)$$

$$\cos(\psi \pm \pi) = -\cos \psi \quad (10.10d)$$

Dimana:  $\psi = \omega t \pm \beta z$ . Dengan menggunakan persamaan (1.10) maka setiap saat gelombang harrmonik dapat direpresentasikan dalam bentuk sinus atau cosines.

## 1.2 Terjadinya Gelombang Elektromagnet

Gelombang Elektromagnet adalah gelombang yang terjadi akibat perubahan medan magnet dan perubahan medan listrik terhadap waktu, yang menjalar ke segala arah. Hal ini terjadi akibat adanya perubahan salah satu medan baik listrik maupun magnet terhadap waktu.

Sejumlah besar frekuensi divisualisasikan dalam urutan angka yang disebut sebagai spectrum. Tabel 1.1 memperlihatkan spektrum EM yang terjadi pada harga frekuensi tertentu. Frekuensi yang dimanfaatkan untuk komunikasi radio terjadi di dekat ujung bawah spektrum EM. Semakin tinggi frekuensi, maka energi EM akan semakin berbahaya terhadap manusia. Misalnya oven gelombang mikro yang akan sangat berbahaya jika tidak terlindungi dengan baik. Semakin tinggi frekuensi, maka semakin sulit pemanfaatan energi EM untuk komunikasi sampai kemudian tidak dapat dimanfaatkan sama sekali. Dengan perkembangan teknologi komunikasi, batas maksimum frekuensi yang dapat dimanfaatkannya pun semakin tinggi. Saat ini,

komunikasi satelit memanfaatkan frekuensi sampai mendekati 14 GHz. Ini tentu saja masih jauh di bawah frekuensi gelombang cahaya. Namun jika dibungkus dengan serat optik maka cahaya itu sendiri dapat dimanfaatkan untuk komunikasi radio.

Tabel 1.1 Spektrum Elektromagnetik

Fenomena Elektromagnetik	Contoh Kegunaan	Jangkauan Frekuensi
Sinar kosmik	Fisika, Astronomi	$\geq 10^{14}$ GHz
Sinar Gamma	Terapi kanker	$10^{10}$ - $10^{13}$ GHz
Sinar-X	Pemeriksaan sinar-X	$10^8$ - $10^9$ GHz
Radiasi Ultraviolet	Sterilisasi	$10^6$ - $10^8$ GHz
Cahaya Tampak	Penglihatan manusia	$10^5$ - $10^6$ GHz
Radiasi Inframerah	Fotografi	$10^3$ - $10^4$ GHz
Gelombang Mikro	Radar, relay gelombang mikro, komunikasi satelit	3-300 GHz
Gelombang Radio	TV (UHF) TV (VHF), radio FM Gelombang pendek radio Radio AM	470-806 MHz 54-216 MHz 3-26 MHz 535-1605 MHz

Untuk menjelaskan proses terjadinya gelombang EM kita tinjau **hukum-hukum Maxwell** untuk **D** dan **B** pada Tabel 1.2.

Tabel 1.2. Empat perangkat Persamaan Maxwell

Bentuk Differensial	Bentuk Integral	Catatan
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dv$	Bentuk umum dari hukum Coulomb yang dikenal dengan nama hukum Gauss yang menghubungkan medan listrik dengan sumbernya berupa muatan titik.
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Hukum Gauss untuk medan magnet. Tidak ada muatan magnetik yang terisolasi (tidak ada sumber monopol magnet), garis medan magnet selalu kontinu tidak berawal dan tidak berakhir.

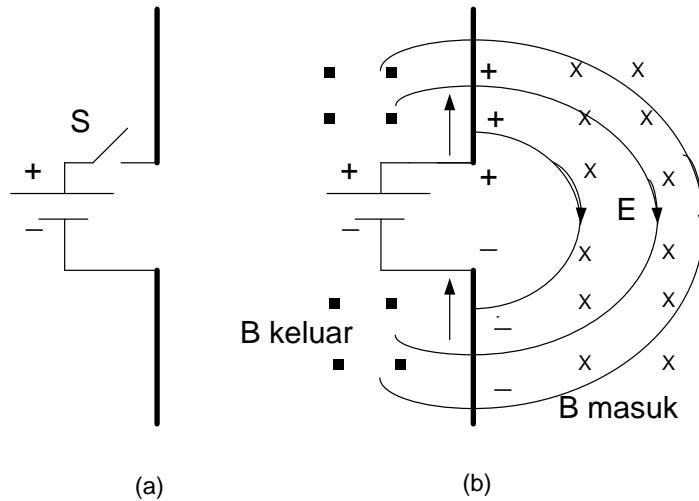
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	Hukum Faraday: Sebuah medan listrik dihasilkan melalui perubahan medan magnet
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$	Sebuah medan magnet dihasilkan oleh arus listrik atau melalui perubahan medan listrik. Bagian pertama ini ditemukan oleh Oersted dan persamaan matematisnya dinyatakan dengan hukum Ampere. Sedangkan bagian kedua adalah aspek baru yang diprediksi Maxwell.

Menurut Maxwell, jika medan listrik dapat dihasilkan melalui perubahan medan magnet, maka perubahan medan listrik dapat menghasilkan medan magnet. Ini adalah hipotesis Maxwell, yang didasari gagasan mengenai sifat simetri dalam alam. Ternyata pengaruhnya pada sebagian kasus sangat kecil sehingga tidak terdeteksi dalam eksperimen

Jika perubahan medan magnet dapat menghasilkan medan listrik, maka medan listrik yang dihasilkan itu juga akan berubah-ubah. Perubahan medan listrik ini kembali menghasilkan medan magnet yang juga berubah-ubah dan kembali menghasilkan medan listrik dan seterusnya. Ternyata hasil akhir dari perubahan medan yang saling berinteraksi ini menghasilkan gelombang medan listrik dan medan magnet yang yang dapat merambat melalui ruang.

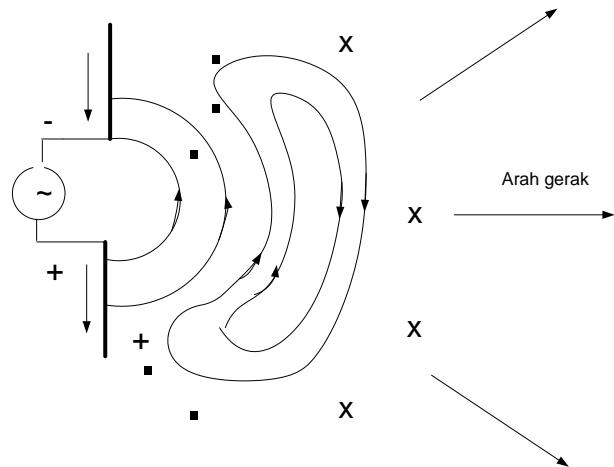
Misalkan kita memiliki 2 batang konduktor yang kita gunakan sebagai antena, seperti pada Gambar 1.3. Kedua batang ini dihubungkan oleh sebuah saklar ke kutub yang berlawanan pada sebuah baterai. Segera setelah saklar ditutup, batang atas bermuatan positif dan batang bawah bermuatan negatif dan medan listrik  $\vec{E}$  pun akan terbentuk. Jika muatan bergerak, artinya arus mengalir pada arah yang ditunjukkan tanda panah. Dengan demikian di sekitar antena akan muncul medan magnet yang mengelilingi kawat sehingga  $\vec{B}$  masuk bidang gambar pada sebelah kanan dan keluar bidang gambar di

sebelah kiri. Dalam kasus statik medan tersebut akan bergerak jauh ke luar ke tempat yang tak bisa ditentukan.



Gambar 1.3. Medan magnet dan medan listrik oleh adanya arus DC

Sekarang saklar dihubungkan dengan generator *ac*, seperti diperlihatkan pada Gambar 1.4. Mula-mula terjadi seperti halnya jika dihubungkan dengan baterei. Namun karena arus *ac* kemudian berubah arah, maka medan magnet juga memiliki arah yang berlawanan. Garis-garis yang lama akan melipat dan menyambung dengan garis-garis baru sehingga terbentuk *loop*. Dalam hal ini, perubahan medan magnet menghasilkan medan listrik, dan perubahan medan listrik menyebabkan medan magnet. Kombinasi perubahan medan listrik dan magnet ini saling membangun, sehingga tidak bergantung lagi pada muatan pada antena.

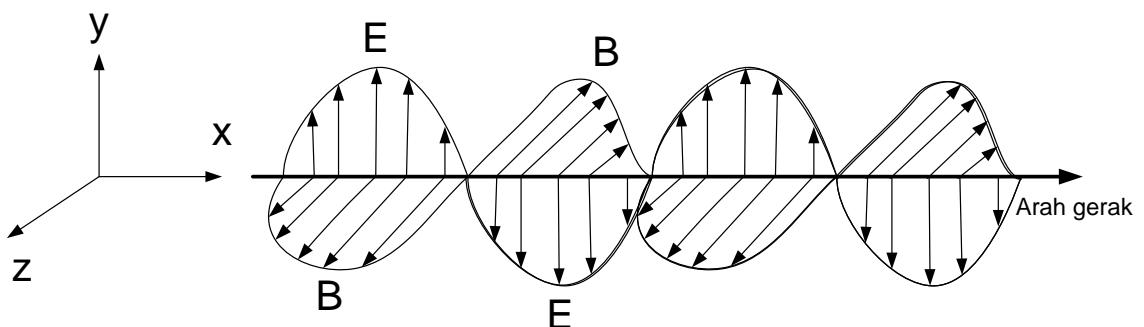


Gambar 1.4 Terjadinya gelombang EM oleh antena yang dialiri arus *ac*.

Medan di dekat antena disebut medan dekat sedangkan medan yang jauh dari antena disebut medan radiasi. Garis-garis medan yang berbentuk loop terus terus menerus bergerak, dimana nilai  $E$  dan  $B$  pada medan radiasi ini berbanding terbalik terhadap jarak (Catatan: untuk medan listrik statik dalam hukum Coulomb,  $E$  berbanding terbalik dengan jarak kuadrat).

Medan **E** dan **B** di setiap titik selalu saling tegak lurus dan tegak lurus arah perambatan. Sedangkan kuat medan berubah dari maksimum di satu titik menuju nol, lalu menuju maksimum di arah yang lain. Kedua medan sefase, artinya berfase nol pada titik yang sama dan mencapai maksimum juga pada titik yang sama.

Jika ggl berubah secara sinusoidal, maka kuat medan listrik dan magnet pada medan radiasi juga berubah secara sinusoidal, seperti gambar 1.5. Perhatikan  $E$  dan  $B$  selalu tegak lurus dan tegak lurus terhadap arah gerak, sehingga disebut gelombang elektromagnetik. Gelombang EM ini selalu merupakan gelombang medan, bukan materi seperti pada gelombang tali. Karena terdiri atas medan, maka gelombang EM dapat merambat dalam vakum.



Gamabar 1.5. Gelombang EM tiga dimensi

Dapat disimpulkan, kedua persamaan Maxwell ke 3 dan ke 4 mempunyai konsekuensi jika ada perubahan medan terhadap waktu baik **E** maupun **H** maka akan terjadi perambatan gelombang EM.

### 1.3 Kecepatan gelombang EM dalam Vakum

Dari ke 4 persamaan Maxwell:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

dan ditambahkan dengan persamaan rapat arus dalam medan listrik, yaitu:  $J = \sigma E$  serta identitas vektor untuk operasi curl di bawah ini:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.5)$$

Maka dapat diperoleh solusi persamaan gelombang EM, sehingga kemudian dapat juga dihitung kecepatan gelombang EM tersebut.

Dengan menerapkan operasi curl (1.5) pada persamaan Maxwell (1.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \\ 0 - \nabla^2 \vec{H} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Demikian juga untuk (1.3):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ 0 - \nabla^2 \vec{E} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

Jika kita bandingkan persamaan gelombang secara umum:

$$\left( \nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.8)$$

menyatakan bahwa gelombang  $\vec{F}$  menjalar dengan kecepatan  $v$  ke segala arah, dengan  $\nabla^2$  adalah **operator Laplacian**.

Untuk kasus khusus misalnya gelombang menjalar ke satu arah misal pada sumbu-z, maka persamaan (1.7) menjadi:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

yang analog dengan persamaan (1.8) yang menjalar ke arah sumbu-z, yaitu:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.10)$$

dengan  $v$  adalah kecepatan menjalar gelombang .

Jika gelombang merambat dalam vakum, dengan membandingkan persamaan (1.9) dengan (1.10) diperoleh:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_o \epsilon_o \quad (1.11)$$

$$\text{Sehingga: } v = \sqrt{\frac{1}{\mu_o \epsilon_o}} = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (1.12)$$

Nampak bahwa gelombang EM di vakum mempunyai kecepatan  $v = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  yang sama dengan kecepatan cahaya. Kita tahu cahaya adalah salah satu contoh gelombang EM.

Catatan: Laplacian untuk masing-masing Koordinat:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Kartesian}) \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Silinder}) \quad (1.14)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{Bola}) \quad (1.15)$$

Perhitungan di atas adalah dengan cara di atas dari persamaan (1.5) sampai (1.12) adalah perhitungan dengan menggunakan vektor, yang cukup rumit. Ada cara lain yaitu perhitungan skalar yang lebih sederhana sebagai berikut:

Mula-mula kita pilih medan listrik hanya memiliki komponen arah x, sehingga:

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ \nabla \times E = \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{matrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} a_x \quad (1.16)$$

Dan kita pilih medan magnet hanya memiliki komponen arah y, sehingga persamaan (1.3) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (1.17)$$

Dengan cara yang sama:

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ \nabla \times H = \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{matrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} a_x \quad (1.18)$$

Maka persamaan (1.4) dapat disederhanakan menjadi:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (1.19)$$

Dengan memilih solusi persamaan diferensial tersebut adalah:

$$E_x = E_{xo} e^{-j(\omega t - kz)}$$

$$H_x = H_{yo} e^{-j(\omega t - kz)}$$

$$\text{Maka: } \frac{\partial E_x}{\partial z} = jk E_x ; \frac{\partial E_x}{\partial t} = -j\omega E_x$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = jk H_y ; \frac{\partial H_y}{\partial t} = -j\omega H_y$$

Dan secara umum:

$$\frac{\partial}{\partial z} = jk ; \frac{\partial}{\partial t} = -j\omega \quad (1.20)$$

Dengan demikian persamaan (1.17) menjadi:  $jkE_x = -j\omega\mu H_y$  (1.21)

Dan persamaan (1.19) menjadi:  $jkH_y = j\omega\mu\varepsilon E_x$  (1.22)

Persamaan (1.21) dan (1.22) kitajadikan matriks untuk dicari determinannya:

$$\text{Sehingga: } \begin{vmatrix} -jk & j\omega \\ -j\omega\mu\varepsilon & jk \end{vmatrix} = 0$$

Determinan dari matriks tersebut adalah:  $k^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = 0$  (1.23)

Dengan demikian:  $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$  (1.24)

Atau:  $\nu = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$  (1.25)

Sama dengan persamaan (1.12)

### 1.3 Solusi Persamaan Gelombang Datar Serba Sama Pada Medium Udara/Vakum

Tinjau kembali persamaan (1.12) yaitu gelombang EM yang menjalar pada arah simbu-z

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \right) = 0 \quad (1.16)$$

Medan **E** harganya berubah terhadap posisi (dalam hal ini  $z$ ) dan terhadap waktu  $t$ . Atau dikatakan bahwa **E** adalah fungsi 2 (dua) variabel:  $E(z,t)$ . Dengan menggunakan pemisahan variabel, maka dapat dituliskan :

$$E(z,t) = Z(z)T(t) \quad (1.17)$$

Artinya **E** merupakan perkalian antara 2 (dua) fungsi yaitu fungsi posisi dan fungsi waktu.

Dengan demikian persamaan (1.16) dapat dituliskan sebagai:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z,t) \right) = 0 \quad (1.18)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{Z(z)T(t)\} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{Z(z)T(t)\} \right) = 0 \quad (1.19)$$

$$T(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) - Z(z) \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = 0 \quad (1.20)$$

Kalikan persamaan (1.20) dengan  $\frac{1}{Z(z)T(t)}$ , sehingga:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{T(t)} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

Persamaan (1.21) mengandung 2 (dua) suku yang masing-masing mengandung satu variabel, misalnya suku pertama adalah:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (1.22)$$

Maka agar memenuhi (1.21) maka suku ke dua haruslah:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 \quad (1.23)$$

Dari persamaan (1.22) dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 Z(z) \quad (1.24)$$

Salah satu solusi persamaan differensial orde-2 pada (1.24) adalah:

$$Z(z) = A e^{\pm jkz} \quad (1.25)$$

Dan dengan memisalkan  $kv = \omega$

Maka persamaan (1.23) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 v^2 T(t) = -\omega^2 T(t) \quad (1.27)$$

Salah satu solusi persamaan differensial orde-2 pada (1.27) adalah:

$$T(t) = B e^{\pm j\omega t} \quad (1.28)$$

Dengan masukkan persamaan (1.25) dan (1.28) ke persamaan (1.17) maka :

$$E(z, t) = ABe^{j(\omega t \pm kz)} \quad (1.29)$$

Karena A dan B adalah suatu konstanta, maka persamaan (1.29) dapat ditulis sbb.:

$$E(z, t) = E_o e^{j(\omega t \pm kz)} \quad (1.30)$$

dimana

$E_o$  = amplitudo gelombang datar pada  $t = 0$  dan  $z = 0$

$k$  = bilangan gelombang

$= \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  = panjang gelombang (dalam m)

$\omega$  = frekuensi sudut (anguler) (dalam rad/s)

$= 2\pi f$

Persamaan (1.30) adalah solusi untuk gelombang EM datar serba sama (monokromatik) yang menjalar pada salah satu arah (dalam hal ini arah sumbu- $z$ ) dalam medium udara atau vakum. Persamaan (1.30) memiliki 2(dua) kemungkinan, yaitu:

$$E(z, t) = E_o e^{j(\omega t + kz)} \quad (1.31)$$

artinya gelombang monokromatik merambat ke arah sumbu- $z$  negatif

$$E(z, t) = E_o e^{j(\omega t - kz)} \quad (1.32)$$

artinya gelombang monokromatik merambat ke arah sumbu- $z$  positif.

Ciri-ciri gelombang datar monokromatik:

1. Muka gelombang berupa bidang datar.
2. Transversalitas :  $\vec{E} \perp \vec{H} \perp k$
3. **E** dan **H** sefasa

Persamaan (1.30) dapat diuraikan menjadi :

$$E(z, t) = E_o [\cos(\omega t \pm kz) + j(\sin(\omega t \pm kz))] \quad (1.33)$$

Artinya bentuk lain solusi (1.30) adalah :

$$E(z,t) = E_o \cos(\omega t \pm kz) \quad (1.34)$$

Dan:

$$E(z,t) = E_o \sin(\omega t \pm kz) \quad (1.35)$$

Medan magnet untuk gelombang yang menjalar pada sumbu-z, kita pilih memiliki arah getar misalnya ke arah sumbu-x. Maka penulisan solusi gelombang (1.30) menjadi:

$$E(z,t) = ABe^{j(\omega t \pm kz)} \hat{a}_x \quad (1.36)$$

Sedang solusi (1.34) menjadi :

$$E(z,t) = E_o \cos(\omega t \pm kz) \hat{a}_x \quad (1.37)$$

Solusi di atas diperoleh dengan menggunakan operasi vector. Ada cara lain yang lebih sederhana yaitu dengan cara scalar dengan mengambil koordinat kartesian 1-dimensi:  
Kita tuliskan kembali persamaan Maxwell ke-3 dan ke-4:

Contoh Soal:

1. Medan listrik dalam ruang bebas (vakum) diketahui sebagai berikut:

$$E(z,t) = A \cos(10^8 t + \beta z) \hat{a}_y \text{V/m}$$

- (a) Tentukan arah propagasi
- (b) Hitung  $\beta$  dan waktu yang diperlukan untuk merambat sejauh  $\lambda/2$ .
- (c) Buat sketsa gelombang untuk  $t = 0, T/4$  dan  $T/2$ .

Penyelesaian:

- (a) Gelombang merambat dalam arah  $- \hat{a}_y$

$$(b) \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \text{ sehingga } \beta = 0.3333 \text{ rad/m.}$$

Karena  $T$  adalah periode gelombang, maka diperlukan waktu sebesar  $T$  untuk merambat sejauh  $\lambda$  pada kecepatan  $c$ . Oleh sebab itu untuk menempuh jarak sejauh  $\lambda/2$ , diperlukan waktu:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\lambda/2}{\omega} = \frac{\pi}{10^8} = 31.42 \text{ ns}$$

Dengan cara lain, karena gelombang menjalar dengan kecepatan c, maka:

$$\frac{\lambda}{2} = ct_1 \quad \text{or} \quad t_1 = \frac{\lambda}{2c}$$

Namun

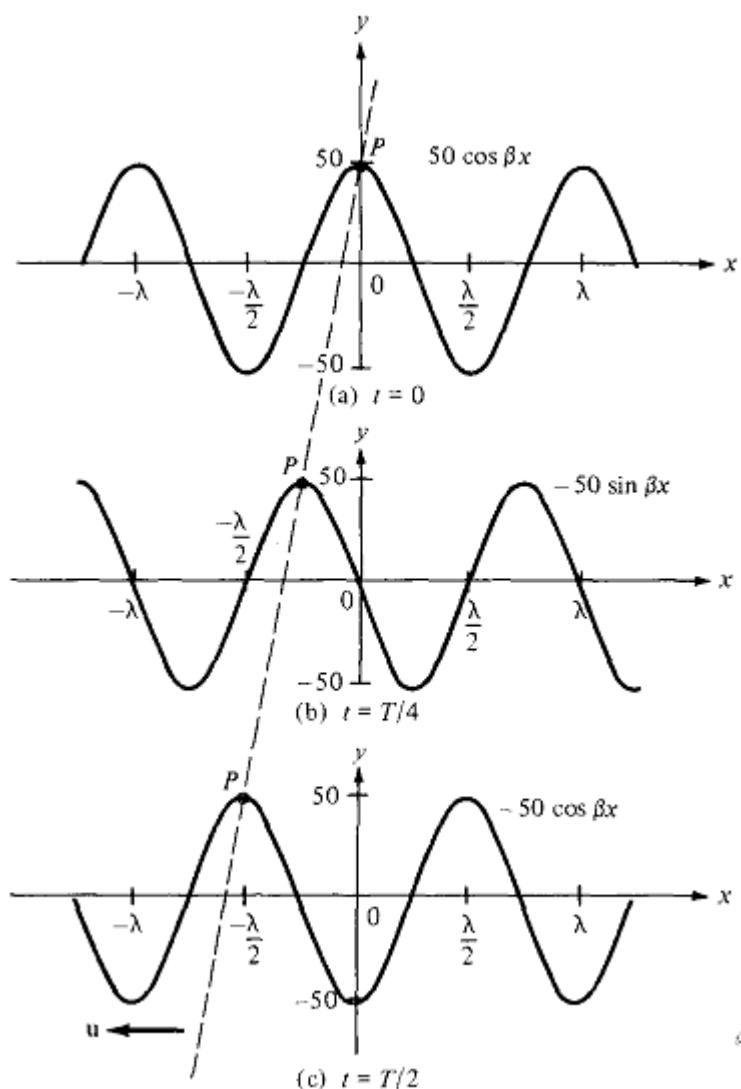
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6\pi$$

Sehingga:

$$t_1 = \frac{6\pi}{2(3 \times 10^8)} = 31.42 \text{ ns}$$

- (c) At  $t = 0, E_y = 50 \cos \beta x$   
At  $t = T/4, E_y = 50 \cos \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \beta x \right) = 50 \cos (\beta x + \pi/2)$   
 $= -50 \sin \beta x$   
At  $t = T/2, E_y = 50 \cos \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \beta x \right) = 50 \cos(\beta x + \pi)$   
 $= -50 \cos \beta x$

$E_y$  pada  $t=0, T/4, T/2$  diplot terhadap x seperti diperlihatkan gambar 10.3. Catatan bahwa titik P (yang kita pilih sembarang) pada gelombang bergerak sepanjang  $-a_x$  jika waktu bertambah.



Gambar 10.3. Gelombang yang menjalar sepanjang  $-a_x$ .

Latihan 10.1.

Dalam vakum, diketahui

$$\mathbf{H} = 0.1 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \text{ A/m.}$$

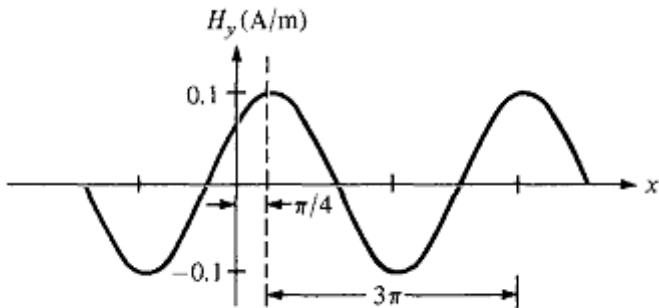
Hitung:

- (a) K,  $\lambda$  dan T
- (b) Waktu  $t_1$  yang diperlukan untuk menempuh jarak  $\lambda/8$
- (c) Sketsa gelombang pada waktu  $t_1$  tersebut.

Jawab:

- (a) 0.667 rad/m, 9.425m, 31.42 ns
- (b) 3.927 ns

(c) Sketsa lihat gambar 10.4.



Gambar 10.4 . Sketsa jawaban latihan 10.1c

Intensitas medan listrik suatu gelombang datar serba sama (monokromatik) di udara adalah 200 V/m dalam arah  $\hat{a}_y$ . Gelombang tersebut merambat dalam arah  $\hat{a}_z$  dengan frekuensi anguler  $2 \times 10^9$  rad/s.

- Tulislah bentuk persamaan gelombang dalam bentuk sinus
- Tentukan panjang gelombang  $\lambda$
- Tentukan frekuensi f
- tentukan periode T

Penyelesaian:

a.  $E(z, t) = E_0 \sin(\omega t \pm kz) \hat{a}_y$  V/m

dengan  $E_0 = 200$  V/m

$$\omega = 2 \times 10^9 \text{ rad/s.}$$

b.  $\omega = kv \rightarrow 2 \times 10^9 = k \cdot 3 \times 10^8 \rightarrow k = \frac{2 \times 10^9}{3 \times 10^8} = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ rad/m}$

Dengan demikian jawaban (a) dapat dituliskan :

$$E(z, t) = 200 \sin(2 \times 10^9 t \pm 6,67 z) \hat{a}_y \text{ V/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{20}{3}} = \frac{6\pi}{20} = 0,942 \text{ m}$$

$$c. \quad \omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2 \times 10^9}{2\pi} = 318 MHz$$

$$d. \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{318 \times 10^6} = 3,14 \times 10^{-9} s$$

#### 1.4 Impedansi Intrinsik Dalam Udara/Vakum

Impedansi intrinsik gelombang EM didefinisikan sebagai perbandingan antara intensitas medan listrik  $E$  terhadap intensitas medan magnet  $\mathbf{H}$ . Impedansi intrinsik untuk medium udara ditulis sebagai :

$$\eta_o = \frac{E}{H} \quad (1.38)$$

Misal gelombang medan listrik yang merambat dalam arah-z dengan arah getar  $\hat{a}_y$  :

$$\vec{E}(z, t) = E_o \sin(\omega t - kz) \hat{a}_y \quad (1.39)$$

Sedang  $H(z, t)$  diperoleh melalui persamaan Maxwell (1.3) yaitu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.40)$$

Atau:

$$\begin{array}{ccc} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_o \sin(\omega t - kz) & 0 \end{array} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga: } -\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial z} E_o \sin(\omega t - kz) &= -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \hat{a}_x [k E_o \cos(\omega t - kz)] &= -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \hat{a}_x [-\frac{k}{\mu_o} E_o \cos(\omega t - kz)] \end{aligned}$$

$$\vec{H}(z,t) = -\hat{a}_x \int \frac{k}{\mu_o} E_o \cos(\omega t - kz) dt$$

$$\vec{H}(z,t) = \frac{k}{\mu_o \omega} E_o \sin(\omega t - kz) \hat{a}_x \quad (1.42)$$

Dengan demikian :

$$\eta_o = \frac{E}{H} = \frac{\frac{E_o \sin(\omega t - kz)}{k}}{\frac{\mu_o \omega}{k} E_o \sin(\omega t - kz)} = \frac{\mu_o \omega}{k} \quad (1.43)$$

$$\rightarrow \eta_o = \mu \nu = \mu_o \sqrt{\frac{1}{\mu_o \epsilon_o}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \quad (1.44)$$

Jika  $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$  (MKS)

$$\epsilon_o = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ (MKS)}$$

$$\text{Maka } \rightarrow \eta_o = \sqrt{144\pi^2 \times 10^2} = 120\pi = 377\Omega \text{ (untuk udara/vakum)} \quad (1.45)$$

### 1.5 Ikhtisar: Gelombang EM datar monokromatis satu dimensi di dalam medium udara/vakum

- Persamaan gelombang EM datar monokromatik yang menjalar sepanjang arah-z di dalam medium udara/vakum:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.46)$$

$$\text{atau} \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.47)$$

analog dengan:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.48)$$

Solusi persamaan:

$$E(z,t) = E_o \sin(\omega t \pm kz) \quad (1.49)$$

dimana:

$E_o$  = amplitudo gelombang datar pada t = 0 dan z = 0

$k$  = bilangan gelombang

$= \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  = panjang gelombang (dalam m)

$\omega$  = frekuensi sudut (anguler) (dalam rad/s)

$= 2\pi f$

$$\omega = kv \rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow v = \lambda f \quad (1.50)$$

$$\eta_o = \frac{E}{H} \quad (1.51)$$

$$H(z,t) = \frac{E_o}{\eta_o} \sin(\omega t \pm kz) \quad (1.52)$$

### Contoh:

Dalam ruang bebas:  $E(z,t) = 10^3 \sin(\omega t - kz)\hat{a}_y$  V/m

Tentukan  $H(z,t)$  dan  $E(z,t)$

Jawab:  $H(z,t) = \frac{E(z,t)}{\eta_o} = \frac{10^3}{377} \sin(\omega t - kz)$

Untuk gelombang EM yang menjalar pada satu dimensi dari Hukum Maxwell, diperoleh bahwa:

$$E(z,t) \perp H(z,t)$$

Maka:

$$\vec{H}(z,t) = \frac{10^3}{377} \sin(\omega t - kz)\hat{a}_x \text{ V/m}$$

Prinsip pemancaran energi gelombang EM dimanfaatkan antara lain pada antena.

## **BAB II**

### **GELOMBANG EM PADA MEDIUM**

Bab II ini berisi beberapa subpokok bahasan:

- 2.1 Penjalaran Gelombang EM Dalam Medium Umum
- 2.2 Gelombang EM Dalam Dielektrik Sempurna
- 2.3 Gelombang EM Pada Konduktor Sempurna
- 2.4 Atenuasi Gelombang Pada Konduktor
- 2.5 Daya dan Vektor Poynting
- 2.6 Kerapatan Daya rata-rata
- 2.7 Ikhtisar

#### **2.1 Penjalaran Gelombang EM Dalam Medium Umum**

Yang dimaksud dengan medium umum adalah bukan dielektrik sempurna, bukan konduktor sempurna, bukan pula udara/vakum, namun merupakan dielektrik sebagian (masih mengandung sifat konduktor) ataupun konduktor yang masih memiliki sifat dielektrik.

Secara umum, keempat persamaan Maxwell dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Dan dari Hukum Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.5)$$

dimana:

$\sigma$  = konduktivitas

$\vec{E}$  = vektor intensitas medan listrik

Dengan demikian persamaan (2.4) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.6)$$

Dengan menerapkan formula vektor (1.5) pada (2.6) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \vec{\nabla} \times (\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= \sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ 0 - \nabla^2 \vec{H} &= -\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) \\ -\nabla^2 \vec{H} &= -\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jika kita terapkan identitas vektor  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  (1.5) pada (2.3) maka:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ 0 - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Untuk gelombang yang menjalar pada satu dimensi, misalnya sumbu- $z$ , maka persamaan (2.8) menjadi:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Dan solusi persamaan (2.9) adalah:

$$\vec{E}(z, t) = E_o e^{\pm \gamma z} e^{j \omega t} \quad (2.10)$$

dimana :  $\gamma = \alpha + j\beta$   
 $=$  bilangan kompleks sebagai konstanta propagasi

Untuk memperoleh harga  $\gamma$ , substitusikan (2.10) ke (2.9) yaitu:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = 0 \\ & [\gamma^2 - \mu\sigma(j\omega) - \mu \varepsilon(j\omega)^2] E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = 0 \\ & \rightarrow \gamma^2 - \mu\sigma(j\omega) - \mu \varepsilon(j\omega)^2 = 0 \\ & \gamma^2 = \mu\sigma(j\omega) + \mu \varepsilon(j\omega)^2 \\ & \gamma = [j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

hasil dari pemecahan  $\gamma$  akan menghasilkan bilangan kompleks  $(\alpha + j\beta)$ ,  $\alpha$  adalah bilangan real dan  $j\beta$  adalah imajiner.

### **Impedansi Intrinsik**

$$\eta = \frac{|E(z,t)|}{|H(z,t)|} \quad (2.12)$$

Dan dari (2.3) diperoleh  $\mathbf{H}$ :

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \int \vec{\nabla} \times \vec{E} dt \quad (2.13)$$

Dari solusi (2.10) untuk gelombang menjalar sepanjang sumbu- $z$  dan sekarang arah getarnya kita pilih ke arah sumbu- $y$ , sehingga solusi (2.10) menjadi:

$$\bar{E}(z,t) = E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \hat{a}_y \quad (2.14)$$

$$\begin{array}{cccc} \hat{a}_x & & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = & & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & & E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{a}_x \gamma E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad (2.15)$$

Maka:

$$\begin{aligned} \vec{H}(z,t) &= -\frac{1}{\mu} \int \gamma E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} dt \hat{a}_x \\ \rightarrow \vec{H}(z,t) &= -\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \hat{a}_x \end{aligned} \quad (2.16)$$

masukkan ke (2.12):

$$\eta = \frac{E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t}}{\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (2.17)$$

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{[j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)]^{1/2}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad (2.18)$$

dengan:

$\omega$  = frekuensi anguler (rad/s)

$\mu = \mu_r \mu_0$  = permeabilitas medium

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  = permitivitas medium

$\sigma$  = konduktivitas medium

Dengan demikian jika diketahui:  $E(z,t) = E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$

Kita dapat menentukan  $\mathbf{H}(z,t)$  dengan :

$$\begin{aligned} H(z,t) &= \frac{E(z,t)}{\eta} \\ H(z,t) &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{j\omega\mu}} E_o e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.19)$$

terlihat dari hubungan di atas  $\mathbf{E}$  dan  $\mathbf{H}$  memungkinkan terjadi beda fasa.

## 2.2. Gelombang EM Dalam Dielektrik Sempurna

Dalam dielektrik sempurna, konduktivitasnya sangatlah kecil sehingga dapat dianggap nol ( $\sigma = 0$ ). Dengan demikian untuk menentukan impedansi intrinsik  $\eta$  dan konstanta

propagasi gelombang  $\gamma$  sama dengan untuk medium umum, hanya bedanya  $\sigma = 0$ .

$$\text{Maka persamaan (2.11) } \gamma = [j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)]^{1/2} \quad (2.20)$$

Menjadi:

$$\rightarrow \gamma = j\omega(\mu\epsilon)^{1/2} \quad (2.21)$$

$$\text{Dari hubungan : } \gamma = \alpha + j\beta \text{ maka diperoleh : } \alpha = 0 \text{ dan } \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.23)$$

$$\text{Dan telah pula diketahui, bahwa cepat rambat gelombang adalah: } v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (2.24)$$

$$\text{Dengan demikian } v = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.25)$$

$$\rightarrow f\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.26)$$

$$\text{Atau : } \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.27)$$

$$\text{Dengan demikian solusi pada (2.10) untuk medium umum: } E(z,t) = E_o e^{\pm\gamma z} e^{j\omega t}$$

dimana

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Maka untuk medium dielektrik sempurna, solusinya berubah menjadi:

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_o e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t} \\ E(z,t) &= E_o e^{j(\omega t \pm \beta z)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\text{dimana: } \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_r\epsilon_r}\sqrt{\mu_o\epsilon_o} \quad (2.29)$$

Sedang impedansi intrinsik, dari persamaan (2.18), namun kemudian dengan memasukkan harga  $\sigma = 0$ , menjadi:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.30)$$

$$\rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \quad (2.31)$$

$$\rightarrow \eta = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (2.31)$$

$$\text{Dengan demikian : } H(z,t) = \frac{1}{\eta} E_o e^{j(\omega t \pm \beta z)} \quad (2.32)$$

Karena  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \angle 0^\circ$  maka antara  $E$  dan  $H$  tidak terdapat beda fasa.

Nampak dari solusi (2.28) dan solusi (2.32)  $E$  dan  $H$  mempunyai amplitudo yang tetap, tidak dipengaruhi oleh medium (tidak ada pelemahan amplitudo gelombang) atau dengan kata lain **tidak terjadi atenuasi** dalam medium dielektrik sempurna.

### 2.3. Gelombang EM Pada Konduktor Sempurna

Penghantar/konduktor sempurna, pada jangkauan frekuensi yang biasa digunakan.:  $\sigma \gg \omega \epsilon$

Misalnya untuk tembaga :  $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$

$$\begin{aligned} \epsilon &\approx \epsilon_o = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \text{ pada frekuensi } 10^{10} \text{ Hz} \\ \rightarrow \omega \epsilon &= 10^{10} (8,854 \times 10^{-12}) = 8,854 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Bandingkan dengan harga  $\sigma$ , sehingga harga  $\omega \epsilon$  dapat diabaikan.

Harga dari parameter  $\eta, \gamma$  untuk medium penghantar sempurna akan didekati dengan mengabaikan harga  $\omega \epsilon$  dari kondisi medium umum.

Pada medium umum :  $\gamma = [j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)]^{1/2}$

$$\text{Sedang pada penghantar sempurna: } \gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \angle 45^\circ \quad (2.33)$$

Dimana  $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\text{Sehingga: } \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \text{ atau : } \gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (2.34)$$

### Impedansi Intrinsik

Kita tahu pada medium umum  $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$  maka untuk penghantar sempurna :

Untuk penghantar sempurna , karena  $\sigma >> \omega \epsilon$  , sehingga:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}},$$

Atau  $\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$  (2.35)

Pada setiap titik  $\vec{H}$  berbeda fase dengan  $\vec{E}$  sebesar  $\pi/4$ .

## 2.4 Atenuasi Gelombang Pada Konduktor

Persamaan 3 medan di medium penghantar sempurna, misal gelombang E dengan arah getar pada sumbu x adalah :

$$E(z,t) = E_o e^{\pm\kappa z} e^{j\alpha z} \hat{a}_x \quad (2.36)$$

$$E(z,t) = E_o e^{-(\alpha+j\beta)z} e^{j\alpha z} \hat{a}_x \quad (2.37)$$

$$E(z,t) = E_o e^{-\alpha z} e^{j(\alpha z - \beta z)} \hat{a}_x \quad (2.38)$$

$$H(z,t) = \frac{1}{|\eta|} E_o e^{-\alpha z} e^{j(\alpha z - \beta z - \pi/4)} \hat{a}_{yx} \quad (2.39)$$

Faktor  $e^{-\alpha z}$  pada persamaan gelombang (2.38) dan (2.39) menunjukkan adanya pelemahan amplitudo gelombang yang disebut attenuasi (pelemahan), pada umumnya gelombang EM habis setelah menempuh beberapa mm..

*Skin depth* (kedalaman kulit) didefinisikan sebagai jarak sesudah  $|\vec{E}|$  mengecil menjadi

$$\frac{1}{e} \times |\vec{E}| \text{ atau } 0.368 |\vec{E}|.$$

Dengan demikian pada  $z = \delta$  :

$$e^{-\alpha\delta} = e^{-1} \text{ atau } \alpha\delta = 1$$

$$\text{Sehingga: } \delta = \frac{1}{\alpha}$$

disebut sebagai **skin depth** (kedalaman kulit).

Dari persamaan (2.34):

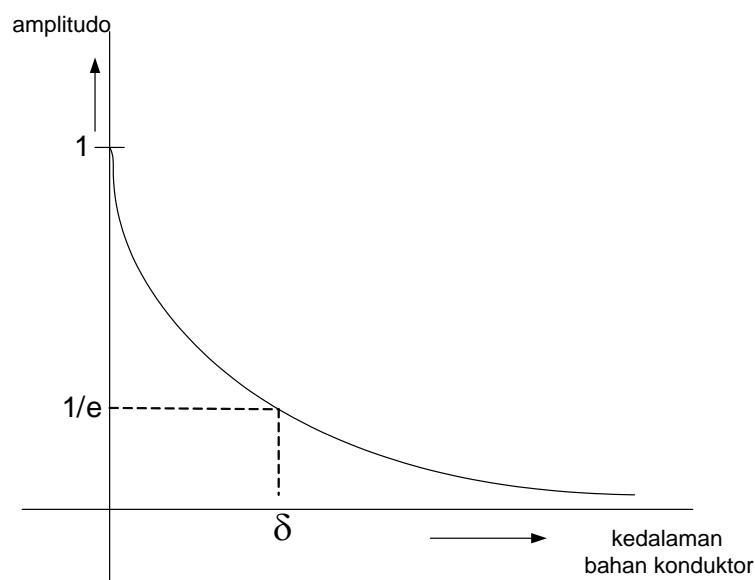
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\text{Dimana: } \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \text{ atau: } \gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Didefinidikan  $\delta = \frac{1}{\alpha}$

$$\text{Sehingga: } \delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (2.40)$$

Sehingga dapat digambarkan grafik amplitudo terhadap arah penjalaran gelombang sebagai berikut:



Gambar: Atenuasi/pelemahan amplitudo gelombang dalam bahan konduktor

Untuk memufahkan dianggap pada  $z = 5\delta$  dianggap  $|\vec{E}|$  menjadi nol. Meskipun tidak benar-benar nol, namun  $0.0067 |\vec{E}|$ .

Dengan demikian dalam konduktor, gelombang tidak merambat, sebagian besar gelombang yang jatuh pada permukaan konduktor akan dipantulkan. Bagian yang masuk ke medium konduktore akan teratenuasi (kehilangan daya ohmik).

$$\text{Cepat rambat gelombang: } v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\text{Dimana } \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\text{Sehingga: } v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (2.41)$$

$$\text{Sedangkan panjang gelombang } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

$$\text{Dengan demikian } \lambda = 2\pi\delta \quad (2.42)$$

## 2.5. Daya dan Vektor Poynting

Gerak gelombang merupakan proses perambatan gangguan tertentu, setiap gangguan memerlukan masukan energi (momentum). Oleh karena itu gerak gelombang merupakan proses perambatan energi. Ini berlaku juga untuk gelombang EM. Untuk menjelaskannya, kita mulai dengan persamaan-persamaan Maxwell berikut ini.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.43)$$

Jika kita lakukan perkalian skalar (*dot product*) terhadap  $\vec{E}$ , maka diperoleh:

$$\vec{E} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \vec{E} \bullet \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.44)$$

$$\vec{E} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.45)$$

Dari identitas vektor:

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2.46)$$

$$\text{Atau: } \vec{A} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \bullet (\vec{A} \bullet \vec{B}) \quad (2.47)$$

$$\text{Maka: } \vec{E} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (2.48)$$

Dari (2.45) dan (2.46) diperoleh:

$$\vec{H} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.49)$$

$$\text{Dari persamaan Maxwell: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.50)$$

$$\vec{H} \bullet (-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) - \vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.51)$$

$$-\frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.52)$$

$$-\vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$-\vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \sigma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) \quad (2.54)$$

Kemudian (2.54) diintegrasikan ke seluruh volume, sehingga diperoleh:

$$-\oint_V \vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV \quad (2.55)$$

Dengan menggunakan teorema integral divergensi, kita peroleh:

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dS = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV \quad (2.56)$$

Persamaan (2.56) mempunyai makna fisis sbb:

Jika diasumsikan tidak ada sumber dalam volume atau  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV = 0$ ,

$$\text{maka: } -\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dS = \int_V \sigma E^2 dV$$

yaitu daya total yang mengalir keluar (dikatakan **keluar** karena berharga negatif) adalah daya ohmik total yang didesipasikan dalam volume tersebut atau energi yang berubah menjadi panas per satuan waktu pada volume tersebut.

Jika dalam volume tersebut terdapat sumber, maka hasil integrasi seluruh volume sumber akan **positif** jika daya **masuk** ke sumber dan **negatif** jika mengalir **keluar** sumber.

$\int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV$  adalah energi total yang tersimpan dalam bentuk medan listrik dan

medan magnet, sedangkan  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV$  adalah laju penambahan energi yang

tersimpan dalam volume atau daya yang menambah energi yang tersimpan dalam volume.

Dengan demikian penjumlahan kedua suku  $\int_V \sigma E^2 dV$  dan  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV$

merupakan daya total yang mengalir masuk ke volume tersebut, dan daya yang mengalir keluar volume adalah  $-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dS$

Dimana integralnya meliputi permukaan tertutup yang melingkupi volume tersebut.

Perkalian vektor  $\vec{E} \times \vec{H}$  dikenal sebagai vektor Poynting  $\vec{P}$  atau

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.57)$$

yang dinyatakan sebagai kerapatan daya sesaat dalam satuan  $\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$ .

Arah vektor Poynting merupakan arah aliran daya sesaat pada titik tersebut.

Misalkan gelombang EM mengalir pada satu dimensi di dalam medium dielektrik sempurna:

$$E(z, t) = E_o \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_x$$

dan

$$E(z, t) = E_o \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_x \quad (2.58)$$

$$\text{Maka: } \vec{P} = \vec{E}(z, t) \times \vec{H}(z, t) \quad (2.59)$$

$$\vec{P} = P_z = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \hat{a}_z \quad (2.60)$$

Nampak jika arah getar medan listrik ke arah  $x$  dan medan magnet ke arah  $y$ , maka menghasilkan penjalaran gelombang ke arah sumbu  $z$  (notasi  $P_z$  untuk menandai arah vektor  $\vec{P}$ )

## 2.6. Kerapatan Daya Rata-rata

$$\text{Kerapatan daya rata-rata dinyatakan dengan : } P_{z,av} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (2.61)$$

Untuk contoh di atas,  $T = 2\pi$ , sehingga :

$$P_{z,av} = f \int_0^{1/f} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt$$

$$\begin{aligned}
&= f \frac{E_o^2}{\eta} \int_0^f \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\
&= f \frac{E_o^2}{\mu} \int_0^f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - \beta z) \right\} dt \\
&= \frac{f}{2} \frac{E_o^2}{\eta} \int_0^f \left\{ 1 + \cos(2\omega t - 2\beta z) \right\} dt \\
&P_{z,av} = \frac{f}{2} \frac{E_o^2}{\eta} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^f \\
&\text{Karena } \left[ \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^f = 0 \\
\text{Maka: } P_{z,av} &= \frac{f}{2} \frac{E_o^2}{\eta} \frac{1}{f} \\
\text{atau: } P_{z,av} &= \frac{1}{2} \frac{E_o^2}{\eta} \frac{\text{watt}}{m^2} \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Jadi daya rata-rata yang mengalir melalui setiap permukaan seluas  $S$  yang normal terhadap sumbu  $z$  adalah:  $P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_o^2}{\eta} S$  watt . (2.63)

Untuk gelombang EM yang menjalar dalam medium umum, kita tahu antara **E** dan **H** terdapat beda fase, yang diakibatkan oleh impedansi intrinsiknya yang mempunyai sudut.

$$\eta = \eta_m \angle \theta$$

$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_x \quad (2.64)$$

$$\vec{H}(z,t) = \frac{E_o}{\eta_m} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta) \hat{a}_y \quad (2.65)$$

$$P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_o^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z} \cos \theta \quad (2.66)$$

## 2.7 Ikhtisar

### Impedansi Intrinsik Untuk Berbagai Medium

$$1. \text{ Ruang bebas (udara)} \quad \eta = \sqrt{\frac{j\mu_o\omega}{j\omega\epsilon_o}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi$$

2. Pengantar dielektrik merugi (medium umum)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

$$2. \text{ Pengantar (konduktor) yang baik} \quad \eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} \angle 45^\circ$$

$$3. \text{ Isolator (dielektrik) yang baik} \quad \eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}$$

$$\eta = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Contoh:

Jika diketahui medan listrik  $E(z,t) = 100e^{-\alpha z} \cos(600\pi\alpha 10^6 t - \beta z)\hat{a}_x V/m$  dalam medium yang memiliki:  $\sigma = 20S/m$ ,  $\epsilon_r = 50$ ,  $\mu = 1$ . Jika  $z = 1$  mm, hitunglah :

- (a)  $\gamma, \alpha, \beta, \eta$
- (b)  $E(z,t)$  untuk  $z = 1$  mm dan  $H(z,t)$  untuk  $z = 1$  mm
- (c)  $P_z$
- (d)  $P_{z,av}$

Penyelesaian :

Harga-harga di atas menujukkan gelombang menjalar dalam medium umum (dielektrik merugi)

$$\begin{aligned} \text{Sehingga : } \gamma &= \sqrt{j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)} \\ &= \sqrt{j600\pi\alpha 10^6 \cdot 4\pi\alpha 10^{-7} (j600\pi\alpha 10^6 \cdot 50 \cdot \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} + 20)} \\ &= \sqrt{240\pi^2 j(j \cdot \frac{5}{6} + 20)} \\ &= \sqrt{+ -200\pi + j4800\pi^2} \end{aligned}$$

$$= \pi \sqrt{-200 + j4800} = \pi \sqrt{4804,16 \angle -87,6}$$

$$= \pi(69,3 \angle -43,8)$$

Jadi  $\gamma = 217,6 \angle -43,8$  atau  $\gamma = 217,6 \cos(-43,8) + j \sin(-43,8)$

$$= 157 - j150,6$$

maka  $\alpha = 157 \text{ rad/m}$  dan  $\beta = 150,6 \text{ rad/m}$

$$\begin{aligned} \text{sedangkan: } \eta &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j600\pi \times 10^6 \cdot 4\pi \times 10^{-7}}{20 + j600\pi \times 10^6 (50 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9})}} \\ &= \sqrt{\frac{240\pi^2 j}{20 + j\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{240\pi^2 \angle 90^\circ}{20,017 \angle 2,38}} = \pi \sqrt{11,99\pi^2 \angle 87,62} = 3,46\pi \angle 43,81 \end{aligned}$$

Jadi  $\eta = 10,86 \angle 43,81$

$$(b) E(z,t) = 100e^{-\alpha z} \cos(600\pi \times 10^6 t - \beta z) \hat{a}_x V/m$$

$$= 100e^{-\alpha z} \cos(6\pi \times 10^8 t - 150,6z) \hat{a}_x V/m$$

$$\alpha z = 157 \times 10^{-3} = 0,157 \text{ rad}$$

$$\beta z = 150,6 \times 10^{-3} = 0,150 \text{ rad} = 0,150 \times 57,3^\circ = 8,59^\circ$$

$$E(z,t) = 100e^{-0,157} \cos(6\pi \times 10^8 t - 8,59^\circ) \hat{a}_x V/m$$

$$H(z,t) = \frac{100}{10,86} e^{-0,157} \cos(6\pi \times 10^8 t - 52,4^\circ) \hat{a}_y V/m$$

$$(c) P_z = \vec{E}(z,t) \times \vec{H}(z,t) = \frac{1}{2} \frac{100}{10,86} e^{-0,314} [\cos(4\pi \times 10^6 t - 60,99) + \cos 43,81]$$

$$(d) P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{100}{10,86} e^{-0,314} \cos 43,81$$

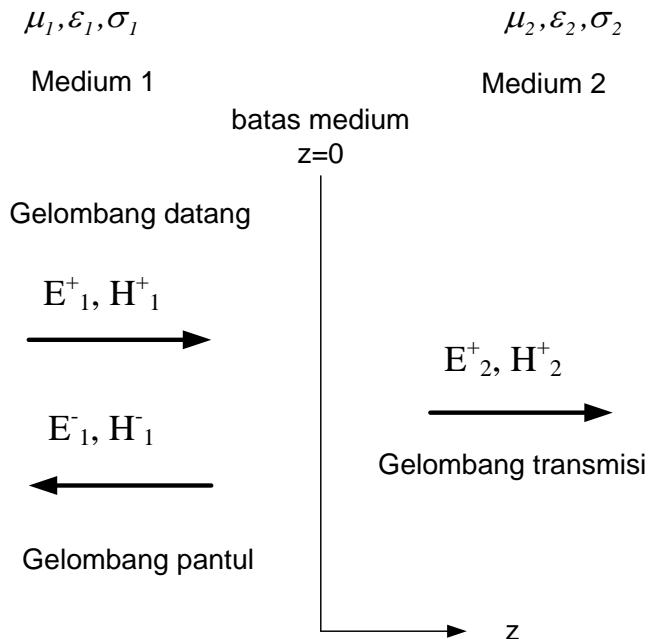
## BAB III

### PEMANTULAN GELOMBANG

- 3.1 Koefisien Refleksi dan Koefisien Transmisi
- 3.2 Gelombang Berdiri (Standing Wave)
- 3.3 Rasio gelombang Berdiri (*Standing Wave Ratio*)
- 3.4 Impedansi Input  $\eta_{in}$

#### **3.1 Koefisien Refleksi dan Koefisien Transmisi**

Apabila suatu gelombang berjalan mencapai perbatasan dua medium yang berlainan, maka gelombang tersebut sebagian akan diteruskan dan sebagian lainnya akan dipantulkan. Besarnya bagian yang dipantulkan maupun yang diteruskan ditentukan oleh konstanta-konstanta kedua medium.



Pada gambar di atas suatu gelombang berjalan  $E_1^+$  mendekati perbatasan  $z = 0$  dari daerah (1) atau  $z < 0$  menuju  $z > 0$ .

$$E^i = E_1^+ = \text{gelombang datang}$$

$$E^r = E_1^- = \text{gelombang pantul (yang direfleksikan)}$$

Kedua gelombang di atas berada pada daerah medium (1)

Sedangkan gelombang yang diteruskan, yaitu  $E' = E_2^+$  gelombang transmisi berada pada daerah medium (2)

Dengan demikian:

$$E_1^+ = E_{1o}^+ e^{-\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x \quad (3.1)$$

$$E_1^- = E_{1o}^- e^{+\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x \quad (3.2)$$

$$E_2^+ = E_{02}^+ e^{-\gamma_2 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x \quad (3.3)$$

$$H_1^+ = H_{10}^+ e^{-\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_y \quad (3.4)$$

$$H_1^- = H_{10}^- e^{+\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_y \quad (3.5)$$

$$H_2^+ = H_{20}^+ e^{-\gamma_2 z} e^{j\omega t} \hat{a}_y \quad (3.6)$$

Karena gelombang datang normal (saling tegak lurus) terhadap medium, maka  $E$  dan  $H$  seluruhnya tangensial pada permukaan batas medium. Gelombang harus memenuhi syarat kontinuitas pada perbatasan ( $z = 0$ ), sehingga :

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \quad (3.7)$$

$$E_{1o}^+ e^{-\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x + E_{1o}^- e^{+\gamma_1 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x + E_{02}^+ e^{-\gamma_2 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x = E_o^t e^{-\gamma_2 z} e^{j\omega t} \hat{a}_x \quad (3.8)$$

Pada  $z = 0$ , maka persamaan (3.8) menjadi:

$$E_{10}^+ + E_{10}^- = E_{20}^+ \quad (3.9)$$

$$(3.9)$$

Dan untuk medan  $H$ :

$$H_{10}^+ + H_{10}^- = H_{20}^+ \quad (3.10)$$

Hubungan antara  $E$  dan  $H$  adalah :

$$\frac{E_{x1o}^+}{H_{y10}^+} = \eta_1 \quad (3.11)$$

$$\frac{E_{x1o}^-}{H_{y10}^-} = -\eta_1 \quad (3.12)$$

$$\frac{E_{x20}^+}{H_{y20}^+} = \eta_2 \quad (3.13)$$

### Koefisien Refleksi Untuk Medan E:

Dari persamaan-persamaan (3.9) sampai (3.13) dapat diturunkan koefisien pemantulan yaitu rasio amplitudo pantul terhadap amplitudo datang.

$$\Gamma_E^r = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) diperoleh dari:

$$\begin{aligned} H_{10}^+ + H_{10}^- &= H_{20}^+ \\ \frac{E_o^t}{\eta_2} = \frac{E_o^i}{\eta_1} - \frac{E_o^r}{\eta_1} &\Rightarrow E_o^t = \frac{\eta_2}{\eta_1} (E_o^i - E_o^r) \\ E_o^i + E_o^r &= \frac{\eta_2}{\eta_1} (E_o^i - E_o^r) = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_o^i - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_o^r \\ E_o^i \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) &= -E_o^r \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Rightarrow E_o^i \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} - 1 \right) = E_o^r \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \\ E_o^i \left( \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} \right) &= E_o^r \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1} \right) \Rightarrow E_o^i (\eta_2 - \eta_1) = E_o^r (\eta_2 + \eta_1) \\ \frac{E_o^r}{E_o^i} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

### Koefisien Transmisi Untuk Medan E

Koefisien Transmisi adalah perbandingan antara gelombang yang diteruskan terhadap gelombang datang. Secara matematis:

$$\Gamma_E^t = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.15)$$

Ini diperoleh dari:

$$\begin{aligned} \frac{E_o^t}{\eta_2} &= \frac{E_o^i}{\eta_1} - \frac{E_o^r}{\eta_1} \Rightarrow E_o^t = \frac{\eta_2}{\eta_1} (E_o^i - E_o^r) \\ \Rightarrow E_o^t &= \frac{\eta_2}{\eta_1} E_o^i - \frac{\eta_2}{\eta_1} (E_o^i - E_o^r) \Rightarrow E_o^t \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) = 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} E_o^i \\ \Rightarrow E_o^t \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1} \right) &= 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} E_o^i \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga : } \Gamma_E^t = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \text{ (terbukti)}$$

### Koefisien Refleksi Untuk Medan H

Perbandingan antara medan  $H$  yang direfleksikan terhadap medan  $H$  yang datang disebut

$$\text{koefisien refleksi. Secara matematis : } \Gamma_H^r = \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.16)$$

Hubungan (3.16) diperoleh dari:

$$E_o^i + E_o^r = E_o^t \Rightarrow E_o^r = E_o^t - E_o^i$$

Dengan menggunakan persamaan (3.11),(3.12) dan (3.13) diperoleh:

$$\begin{aligned} -\eta_1 H_o^r &= \eta_2 H_o^t - \eta_1 H_o^i && \text{Dengan menggunakan (3.10)} \\ &= \eta_2 (H_o^i + H_o^r) - \eta_1 H_o^i \\ &= (\eta_2 - \eta_1) H_o^i + \eta_2 H_o^r \end{aligned}$$

$$-(\eta_1 + \eta_2) H_o^r = (\eta_2 - \eta_1) H_o^i \quad \text{Sehingga } \Rightarrow \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

### Koefisien Transmisi Untuk Medan H

$$\text{Secara matematis: } \Gamma_E^t = \frac{H_o^t}{H_o^i} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) diperoleh dari:

$$\begin{aligned} E_o^t &= E_o^i + E_o^r \\ \eta_2 H_o^t &= \eta_1 H_o^i - \eta_1 H_o^r \Rightarrow \eta_2 H_o^t = \eta_1 H_o^i - \eta_1 (H_o^i - H_o^r) \\ (\eta_1 + \eta_2) H_o^r &= 2\eta_1 H_o^i \\ \text{Sehingga } \Rightarrow \frac{H_o^t}{H_o^i} &= 2 \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned}$$

### Contoh:

Gelombang berjalan E dan H dalam ruang bebas (medium 1) jatuh secara tegak lurus pada permukaan dielektrik (medium 2) dengan  $\epsilon_r = 3$ . Bandingkan besar dari gelombang E dan H yang datang, dipantul dan diteruskan pada permukaan batas tersebut.

Jawab:  $\eta_1 = \eta_o = 120\pi$

$$\eta_2 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot 120\pi = 217,7 \Omega$$

$$\Gamma_E^r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{217,7 - 377}{377 + 217,7} = -0,268$$

$$\Gamma_E^t = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 0,732$$

$$\Gamma_H^r = \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$\Gamma_H^t = \frac{H_o^t}{H_o^i} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = 1,268$$

### 3.2. Gelombang Berdiri (*Standing Wave*)

Misalkan gelombang yang menjalar dari dielektrik sempurna ke konduktor sempurna.

Karena medium 2 adalah konduktor sempurna, dimana  $\sigma_2$  adalah  $\infty$  maka impedansi

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\mu_2\omega}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} \text{ menjadi nol.} \quad (3.18)$$

Dengan demikian koefisien refleksi untuk  $E$  pada persamaan (3.14) menjadi:

$$\Gamma_E^r = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = -1 \quad (3.19)$$

Sehingga:  $E_o^r = -E_o^i$  (3.20)

Artinya gelombang yang direfleksikan memiliki amplitudo yang sama besar tapi memiliki tanda yang berlawanan dengan gelombang datang.

Maka  $E$  total adalah:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= \{E_o^i e^{j(\omega t - \beta z)} + E_o^r e^{j(\omega t + \beta z)}\} \hat{a}_x \\ &= e^{j\omega t} \{E_o^i e^{-j\beta z} + E_o^r e^{j\beta z}\} \hat{a}_x \end{aligned}$$

Karena  $E_o^i = -E_o^r$  atau  $E_{x0}^+ = -E_{x0}^-$

Maka:

$$\begin{aligned}
E_{x1} &= e^{j\omega t} \{ E_o^i e^{-j\beta z} - E_o^i e^{j\beta z} \} \hat{a}_x \\
&= e^{j\omega t} \{ E_o^i \cos \beta z - j E_o^i \sin \beta z - E_o^i \cos \beta z - j E_o^i \sin \beta z \} \hat{a}_x = e^{j\omega t} \{ \\
&\quad -2j E_o^i \sin \beta z \} \hat{a}_x \\
&= -2j E_o^i z e^{j\omega t} \sin \beta z \hat{a}_x \\
&= -2j [ (E_o^i \cos \omega t + j E_o^i \sin \omega t) \sin \beta z ] \hat{a}_x \\
E_{x1} &= \{ -2j E_o^i \cos \omega t \sin \beta z \hat{a}_x + \{ 2E_o^i \sin \omega t \sin \beta z \} \hat{a}_x \} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Dengan mengambil bagian realnya, kita peroleh:

$$\operatorname{Re}[E_{x1}] = \{ 2E_o^i \sin \omega t \sin \beta z \} \hat{a}_x \quad (3.22)$$

Medan total dalam daerah medium 1 ini bukan merupakan gelombang berjalan, walaupun diperoleh dengan mengkombinasikan dua gelombang berjalan yang amplitudonya sama yang menjalar dalam arah yang berlawanan. Dengan kata lain, terjadi paduan gelombang datang dan pantul membentuk gelombang tegak (*standing wave*).

Marilah kita bandingkan dengan bentuk gelombang datang:

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad (3.23).$$

Di sini kita lihat suku  $(\omega t - \beta_1 z)$  atau  $\omega \left( t - \frac{\beta_1}{\omega} z \right) = \omega(t - z/v_1)$  yang mencirikan gelombang berjalan dalam arah z dengan kecepatan  $v_1 = \frac{\omega}{\beta_1}$ .

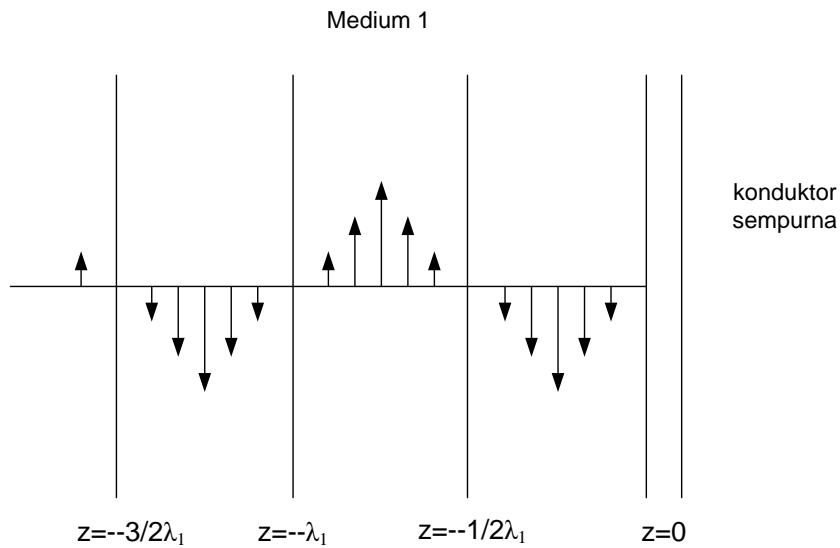
Adapun pada gelombang berjalan (3.22) faktor yang mencakup waktu dan jarak merupakan suku trigonometri yang terpisah. Pada setiap bidang yang memenuhi persamaan  $\beta_1 z = n\pi$  (dimana  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{bilangan gelombang}$ ) maka  $E_{x1} = 0$  untuk setiap waktu. Selanjutnya  $\omega t = n\pi$ , maka  $E(z, t) = 0$  di setiap titik. Dengan demikian dihasilkan gelombang berdiri.

Bidang dimana:  $E(z, t) = 0$  terletak pada:

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.24)$$

$$\text{Jadi: } \frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi \text{ dan } z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

Dengan demikian  $E(z,t) = 0$  pada perbatasan  $z = 0$  dan setiap setengah panjang gelombang dari batas di daerah/medium 1,  $z < 0$  seperti diilustrasikan pada Gambar di bawah ini.



Gambar: Harga sesaat medan total

Pada  $z = -\lambda_1 / 4$  diperoleh:  $\rightarrow E(-\lambda_1 / 4, t) = 2E_o^i \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{-\lambda_1}{4} \right) \sin \omega t = -2E_o^i \sin \omega t$

Pada  $z = -\lambda_1 / 2$  diperoleh:  $\rightarrow E(-\lambda_1 / 2, t) = 2E_o^i \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} \left( \frac{-\lambda_1}{2} \right) \sin \omega t = 0$ .

Pada  $z = -3\lambda_1 / 4$  diperoleh:  $\rightarrow E(-3\lambda_1 / 4, t) = 2E_o^i \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} \left( \frac{-3\lambda_1}{4} \right) \sin \omega t$   
 $= 2E_o^i \sin \omega t$

Pada  $z = \lambda_1$  diperoleh:  $\rightarrow E(-\lambda_1, t) = 2E_o^i \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} (-\lambda_1) \sin \omega t = 0$ .

### 3.3 Rasio Gelombang Berdiri (*Standing Wave Ratio*)

Bila seuatu gelombang datar serbasama menjalar dalam daerah tanpa rugi (lossless) dipantulkan oleh oleh konduktor sempurna, maka gelombang total adalah gelombang berdiri. Dengan mengkombinasikan intensitas medan listrik datang dan pantul:  $E = E^i + E^r$ . Dimana  $E$  merupakan fungsi sinusoidal terhadap waktu  $t$  (biasanya dengan sudut fase yang tidak nol) dan besarnya berubah terhadap  $z$  menurut cara yang

belum diketahui. Kita akan memeriksa semua harga  $z$  untuk mencari amplitudo maksimum dan minimum dan menentukan rasionalnya. Kita sebut rasio ini sebagai rasio gelombang berdiri atau dinyatakan dengan  $S$ .

Marilah kita tinjau kasus medium 1 merupakan dielektrik sempurna dan medium 2 dapat berupa apa saja.

$$\text{Dari: } \Gamma = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

jika  $\eta_1$  dan  $\eta_2$  adalah sembarang medium (real atau kompleks).

Jika  $\eta_1$  adalah bilangan real positif dan  $\eta_2$  adalah bilangan kompleks, sehingga  $\Gamma$  dapat merupakan bilangan kompleks, dan kita biarkan kemungkinan tersebut dengan menuliskan:

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\Phi} \quad (3.25)$$

dimana  $\Phi$  adalah sudut phase, yang dapat dihitung dengan cara phasor.

Gelombang total di daerah (1) (dengan menghilangkan faktor waktu) adalah:

$$E_{x1} = [E_o^i e^{-j\beta_1 z} - E_o^r e^{j\beta_1 z}] \hat{a}_x \quad (3.26)$$

$$\text{Kemudian karena: } \Gamma = |\Gamma| e^{j\Phi} = \frac{E_o^r}{E_o^i},$$

$$\text{Maka : } E_{x01}^- = E_{x01}^+ |\Gamma| e^{j\Phi} \quad (3.27)$$

$$\text{Dan : } E_{x1} = [E_o^i e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j\Phi} E_o^i e^{j\beta_1 z}] \hat{a}_x$$

$$\text{Atau: } E_{z1} = [E_o^i e^{-j\beta_1 z} + E_o^i e^{j(\beta_1 z + \Phi)}] \hat{a}_x \quad (3.28)$$

$E_{z1}$  akan maksimum jika masing-masing suku yang berada dalam kurung memiliki sudut fase yang sama besar,

$$\text{yaitu: } E_{x1,\max} = [1 + |\Gamma|] E_o^i \quad (3.29)$$

$$\text{Hal tersebut diperoleh pada saat: } -\beta_1 z = \beta_1 z + \Phi + 2\pi.n \quad (3.40)$$

dimana :  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{Atau : } -\beta_1 z = \frac{\Phi}{2} + \pi.n \quad (3.41)$$

Perhatikan  $E_{x1,\max}$  terletak pada  $z = 0$  (daerah perbatasan) jika  $\Phi = 0$ .

Selanjutnya  $\Phi = 0$  jika  $\Gamma$  real positif, dimana  $\eta_1$  dan  $\eta_2$  yang merupakan bilangan real memenuhi  $\eta_1 < \eta_2$ .

Artinya  $E_{x1,\max}$  terjadi di perbatasan jika impedansi intrinsik daerah (2) lebih besar dari impedansi intrinsik daerah (1).

Untuk konduktor sempurna dimana  $\Phi = \pi$ , maksimumnya terdapat pada terjadi jika:

$$\begin{aligned} -\beta_1 z = \beta_1 z + \pi + 2\pi.n \rightarrow -2\beta_1 z = (2n+1)\pi \text{ atau } -\beta_1 z = (n + \frac{1}{2})\pi \\ \text{atau } -\beta_1 z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \dots \text{dst} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sedangkan  $E_{x1}$  minimum terjadi jika phase kedua suku yang berada dalam kurung berbeda sebesar  $180^\circ(\pi rad)$  yaitu:

$$E_{x1,\min} = [1 - |\Gamma|] E_o^i \quad (3.43)$$

diperoleh pada saat:  $-\beta_1 z = \beta_1 z + \Phi + \pi + 2\pi.n$  (3.44)

dimana:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{Persamaan (3.44) dapat pula ditulis sebagai: } -\beta_1 z = \frac{\Phi}{2} + (n + \frac{1}{2})\pi \quad (3.45)$$

Artinya, seperti halnya maksimum, minimumnya terpisah oleh kelipatan  $\lambda/2$ . Dan untuk konduktor sempurna, minimum pertama terjadi ketika:  $-\beta_1 z = 0$  atau pada permukaan konduktor. Pada umumnya tegangan minimum didapatkan ketika  $z = 0$  bila  $\Phi = \pi$ , hal ini terjadi jika  $\eta_1 > \eta_2$  dan keduanya bilangan real.

### ***Standing Wave Ratio, S***

adalah perbandingan (ratio) antara amplitudo maksimum terhadap amplitudo minimum, atau dituliskan sebagai:

$$S = \frac{E_{x1,\max}}{E_{x1,\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (3.46)$$

Karena  $|\Gamma| \leq 1$ , maka  $S$  selalu positif dan  $S \geq 1$

Jika  $|\Gamma| = 1$ , amplitudo pantul dan amplitudo datang menjadi sama, artinya semua energi

$$\text{gelombang datang dipantulkan dan } S \text{ menjadi } \infty, \text{ karena } S = \frac{1+1}{0} = \infty \quad (3.47)$$

Bidang-bidang yang terpisah dengan kelipatan  $\lambda/2$  dapat kita temukan dimana  $E_{x1}$  adalah nol untuk setiap waktu. Di tengah-tengah antara bidang-bidang tersebut  $E_{x1}$  mencapai amplitudo maksimum dua kali lipat amplitudo gelombang datang.

Jika  $\eta_1 = \eta_2$  maka  $\Gamma = 0$  dalam hal ini tidak terdapat energi yang dipantulkan, dan  $S = 1$  artinya harga amplitudo maksimum dan minimum adalah sama.

Jika setengah dari daya yang datang dipantulkan, maka  $|\Gamma^2| = 0.5$ , maka  $|\Gamma| = 0.707$  dan  $S = 5.83$ .

### 3.4 Impedansi Input $\eta_{in}$

Jika daerah 1 sebagai dielektrik umum yang merugi ( $\alpha_1 \neq 0$ ). Gelombang datang dari kiri akan mengalami atenuasi secara eksponensial ketika menjalar dalam arah z. Akhirnya amplitudonya dapat diabaikan terhadap gelombang datang. Dengan demikian maksimum dan minimum dapat diamati di dekat permukaan pantul, sedangkan di daerah jauh mengalami perataan.

Sekarang, dengan membatasi pada kasus dimana pada daerah (1) adalah tanpa rugi, akan kita cari rasio intensitas listrik dan magnetik total. Untuk gelombang berjalan kuantitas ini adalah  $\pm \eta$  (tandanya bergantung arah penjalanan). Walaupun demikian, pemantulan dari konduktor sempurna telah menunjukkan bahwa  $E_{x1}$  atau  $H_{y1}$  dapat berharga nol pada kedudukan tertentu, dan rasionalya dapat berubah-ubah dari 0 sampai  $\infty$ .

Medan total pada  $z = -l$  adalah

$$E_{x1} = [e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}] E_o^i \quad (3.48)$$

Sedang  $\frac{E_o^i}{H_o^i} = \eta_1$  dan untuk  $\Gamma$  berlaku :  $\Gamma_H = -\Gamma_E$

Maka:  $H_{y1} = \frac{1}{\eta_1} [e^{j\beta_l l} - \Gamma e^{-j\beta_l l}] E_o^i$

$$\eta_{in} = \left. \frac{E_{x1}}{H_{y1}} \right|_{z=-l} = \eta_1 \left[ \frac{e^{j\beta_l l} + \Gamma e^{-j\beta_l l}}{e^{j\beta_l l} - \Gamma e^{-j\beta_l l}} \right] \quad (3.49)$$

Dengan mengambil  $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$  dan menggunakan notasi Euler, maka:

$$\eta_{in} = \eta_1 \left[ \frac{(\cos \beta_l l + j \sin \beta_l l) + (\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1})(\cos \beta_l l - j \sin \beta_l l)}{(\cos \beta_l l + j \sin \beta_l l) - (\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1})(\cos \beta_l l - j \sin \beta_l l)} \right] \quad (3.50)$$

$$= \eta_1 \left[ \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_l l + j \sin \beta_l l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_l l - j \sin \beta_l l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_l l + j \sin \beta_l l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_l l - j \sin \beta_l l)} \right] \quad (3.51)$$

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j \eta_1 \tan \beta_l l}{\eta_1 + j \eta_2 \tan \beta_l l} \quad (3.52)$$

Jika  $\eta_1 = \eta_2$ , maka  $\eta_{in} = \eta_1$ , artinya tidak ada pemantulan.

Jika  $\eta_2 = 0$  (konduktor sempurna) maka  $\eta_{in} = j \eta_1 \tan \beta_l l$ , jika  $\beta_l l = n\pi$  atau pada titik dengan  $E_{x1} = 0$ , maka  $\eta_{in} = 0$

Pada  $H_{y1} = 0$ , maka  $\eta_{in} = \infty$

## BAB IV

### APLIKASI PERSAMAAN MAXWELL

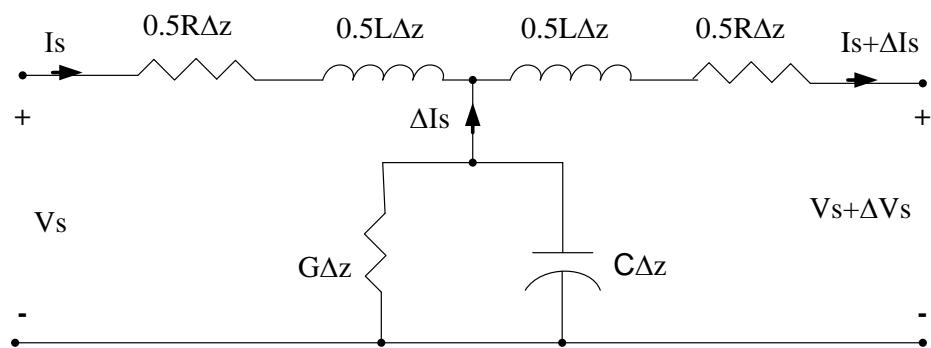
Bab ini terdiri dari beberapa sub bab berikut ini:

- 4.1 Persamaan Saluran Transmisi
- 4.2 Hukum Teori Rangkaian

#### **IV.1 Persamaan Saluran Transmisi**

Saluran transmisi digunakan untuk mentransmisikan energi listrik dan signal dari satu titik ke titik lainnya. Akan kita gunakan model rangkaian untuk transmisi sesumbu dimana konduktor dalam dan luarnya memiliki konduktivitas tinggi  $\sigma_c$  dan berisi bahan dielektrik yang memiliki konduktivitas  $\sigma$ , permeabilitas  $\mu$ , permitivitas  $\epsilon$ . Dengan mengetahui frekuensi yang digunakan serta ukurannya, maka kita dapat menentukan harga R, G, L dan C.

Dengan menganggap penjalaran dalam arah z, maka kita dapat memotong bagian  $\Delta z$  yang berisi resistansi  $R\Delta z$ , induktansi  $L\Delta z$ , konduktansi  $G\Delta z$  dan kapasitansi  $C\Delta z$  seperti pada gambar di bawah. Karena bagian saluran transmisi ini terlihat sama dari kedua ujungnya, kita bagi unsur serinya menjadi dua bagian untuk memperoleh jaringan yang simetris. Dan kita menempatkan separuh dari konduktansi dan separuh kapasitansi pada masing-masing ujungnya.



Tegangan  $V$  antara konduktor pada umumnya merupakan fungsi dari  $z$  dan  $t$ ,

misalnya:

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi) \quad (4.1)$$

Dengan menggunakan identitas Euler untuk menyatakan dalam notasi kompleks:

$$V = \operatorname{Re} V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} = \operatorname{Re} V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

Dengan menghilangkan  $\operatorname{Re}$  dan  $e^{j\omega t}$ , maka bentuk tegangan tersebut menjadi sebuah fasor dengan menambahkan subskrip s, menjadi:

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z} \quad (4.3)$$

Sekarang kita tuliskan persamaan tegangan sepanjang tepi rangkaian seperti pada gambar di atas.

$$V_s = (0.5R\Delta z + j0.5\omega L\Delta z)I_s + (0.5R\Delta z + j0.5\omega L\Delta z)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s \quad (4.4)$$

$$\text{Atau: } \frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -(R + j\omega L)I_s - (0.5R + j0.5\omega L)\Delta I_s \quad (4.5)$$

Kita ambil  $\Delta z$  dan  $\Delta I_s$  menuju nol maka:

$$\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s \quad (4.6)$$

Adapun tegangan yang melintas cabang tengah:

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -(G + j\omega C)V_s \text{ atau } \frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s \quad (4.7)$$

Bandingkan kedua hasil pada persamaan (4.6) dan (4.7) tersebut dengan persamaan kurl Maxwell (III) untuk gelombang datar serbasama berikut:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_s = -j\omega \mu \vec{H}_s$$

Dengan menulis:  $\vec{E}_s = E_{xs} \hat{a}_x$  dan  $\vec{H}_s = H_{ys} \hat{a}_y$ , maka:

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega \mu \vec{H}_s \quad \frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s$$

Dapat disimpulkan ada analogi antara pasangan:

$$j\omega \mu \text{ dan } (R + j\omega L)$$

Dan membandingkan persamaan kurl Maxwell (IV):  $\vec{\nabla} \times \vec{H}_s = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}_s$ , maka:

$$\frac{dH_{ys}}{dz} = (\sigma + j\omega \epsilon)E_{xs} \quad \frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s$$

Dapat disimpulkan ada analogi antara pasangan:

$$I_s \text{ dan } H_{ys}$$

$$G \text{ dan } \sigma$$

$$C \text{ dan } \epsilon$$

$V_s$  dan  $E_{xs}$

Syarat batas untuk  $V_s$  dan  $E_{xs}$  sama dengan syarat batas untuk  $I_s$  dan  $H_{ys}$ . Dengan demikian solusi kedua persamaan rangkaian dapat dicari melalui kedua persamaan medan.

Dari bab terdahulu, telah diperoleh:  $E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$

$$\text{Sehingga: } V_s = V_0 e^{-\gamma z} \quad (4.8)$$

yang menjalar dalam arah  $+z$  dengan amplitudo  $V_0$  pada  $z = 0$ . Atau  $V_0 = 0$  pada  $z = 0, t=0$ , untuk  $\psi = 0$ .

Dari bab terdahulu, telah diperoleh konstanta gelombang:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}.$$

Maka dengan analogi yang diperoleh di atas,

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (4.9)$$

Adapun panjang gelombang masih didefinisikan sebagai pergeseran fase  $2\pi$  rad, atau:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.10)$$

$$\text{Dan kecepatan fase sebagai: } v = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.11)$$

Jika pada saluran transmisi tidak terjadi rugi-rugi ( $R=0$ , dan  $G=0$ ), maka diperoleh:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} = j\beta \quad (4.12)$$

Sengan demikian kecepatan fase menjadi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.13)$$

Dari rumusan untuk medan magnetik:

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z} \quad (4.14)$$

Untuk gelombang arus yang berjalan positif, maka:

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \quad (4.15)$$

Berkaitan dengan gelombang tegangan yang berjalan positif melalui impedansi karakteristik  $Z_0$  yang analog dengan  $\eta$ .

$$\text{Dari bab terdahulu: } \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad (4.16)$$

$$\text{Maka kita peroleh: } Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (4.17)$$

Bila gelombang serbasama dari medium (1) tiba pada perbatasan medium (2), maka koefisien pantul:

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^r}{E_{x0}^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.18)$$

Maka koefisien pantul saluran yang memiliki impedansi karakteristik  $Z_0$  adalah:

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (4.19)$$

Sedangkan rasio gelombang berdiri:

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (4.20)$$

Jika impedansi input (masukan) bila  $\eta = \eta_2$  untuk  $z > 0$ , rasio  $E_{xs}$  terhadap  $H_{ys}$  pada  $z = -l$  adalah:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l} \quad (4.21)$$

Maka impedansi input rangkaian menjadi:

$$Z_{in} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \quad (4.22)$$

Merupakan rasio  $V_s$  terhadap  $I_s$  pada  $z = -l$  bila  $Z_0 = Z_{02}$  untuk  $z > 0$ .

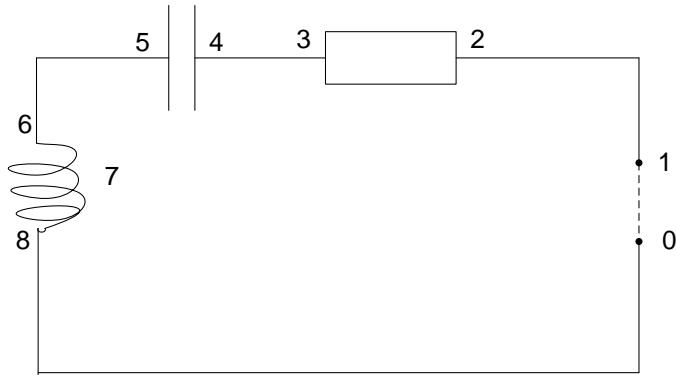
### Contoh soal:

Pada frekuensi 100 MHz, harga-harga yang sesuai dengan saluran transmisi adalah:

$L = 0.25 \mu H/m$ ,  $C = 80 pF/m$ ,  $R = 0.15 \Omega/m$  dan  $G = 8 \mu S.m$ , hitunglah harga-harga:  $\alpha, \beta, \lambda, v$  dan  $Z_0$

## 4.2 Hukum Teori Rangkaian

Untuk menunjukkan bagaimana persamaan Maxwell, definisi potensial, dan konsep resistansi, kapasitansi serta induktansi dikombinasikan untuk menghasilkan rumusan yang biasa terdapat dalam rumusan rangkaian, perhatikan rangkaian RLC di bawah ini.



Antara titik 0 dan 1 dipasang medan magnet luar berbentuk sinusoidal, apapun sumbernya, sumber tersenut terus menerus menimbulkan medan listrik antara ke dua ujungnya. Antara titik 2 dan 3 terdapat daerah nerisi bahan merugi dengan luas penampang  $S_R$  dan panjang  $d_R$  dan konduktivitas  $\sigma$ . Pada titik 4 dan 5 terdapat dua buah pelat kapasitor dengan luas penampang  $S_C$  dan panjang  $d_C$  dan permitivitas  $\epsilon$ . Antara titik 6 dan 8 terdapat filamen yang digulung menjadi kumparan yang terdiri dari  $N$  lilitan. Persamaan rangkaian yang telah kita ketahui dari persamaan Maxwell.

$$V_{10} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (4.23)$$

Akan kita tinjau bagaimana suku-suku tersebut muncul. Dari hukum Faraday:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \quad (4.24)$$

Ruas kanan hukum Faraday tersebut berkaitan dengan induktansi. Sekarang kita tinjau integral permukaan ruas kanan tersebut. Karena konfigurasi rangkaian tidak berubah terhadap waktu, maka turunan parsial dapat diganti dengan turunan biasa.

Sehingga:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \int_S d\Phi = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.25)$$

Dimana  $I$  menyatakan arus filamen pada masing-masing lilitan pada kumparan.

Sekarang kita tinjau suku sebelah kiri persamaan Faraday:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = \int_0^1 + \int_2^3 + \int_4^5 \quad (4.26)$$

$$\text{Dimana: } \int_0^1 \vec{E} \bullet d\vec{L} = -V_{10} \quad (4.27)$$

Yang merupakan sumber eksternal.

$$\text{Dan } \int_2^3 \vec{E} \bullet d\vec{L} = \int_2^3 \frac{\vec{J}}{\sigma} \bullet d\vec{L} = \int_2^3 \frac{JdL}{\sigma} = \frac{Jd_R}{\sigma} = \frac{Id_R}{\sigma S_R} = IR \quad (4.28)$$

Sedangkan:

$$\int_4^5 \vec{E} \bullet d\vec{L} = \int_4^5 \frac{\vec{D}}{\epsilon} \bullet d\vec{L} = \int_2^3 \frac{Dd_C}{\epsilon} = \frac{Qd_C}{\epsilon S_C} = \frac{Q}{C} \quad (4.29)$$

$$\text{Atau: } \int_4^5 \vec{E} \bullet d\vec{L} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (4.30)$$

Dengan menganggap muatan kapasitor nol pada  $t = -\infty$

$$\text{Dan } \int_6^8 \vec{E} \bullet d\vec{L} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (4.31)$$

Sekarang kita kumpulkan suku-suku sebelah kiri dan kanan hukum Faraday, yaitu:

$$-L \frac{dI}{dt} = -V_{10} + IR + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (4.32)$$

$$\text{Sehingga: } V_{10} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) merupakan persamaan yang terkenal dalam rangkaian seri RLC .