

# Dinamica e controllo dei processi

Andrea Recchia

Matricola 602376

## Contents

<b>1</b>	<b>Esercizio 1</b>	<b>2</b>
1.1	Risposte delle temperature . . . . .	3
1.1.1	Caso 1 . . . . .	3
1.1.2	Caso 2 . . . . .	3
1.1.3	Caso 3 . . . . .	4
1.1.4	Caso 4 . . . . .	4
1.1.5	Caso 5 . . . . .	5
1.1.6	Caso 6 . . . . .	5
1.1.7	Caso 7 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Esercizio 2</b>	<b>6</b>
2.1	Prima funzione di trasferimento . . . . .	6
2.2	Seconda funzione di trasferimento . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Esercizio 3</b>	<b>9</b>
3.1	Regolatori P . . . . .	9
3.1.1	Prima fdt . . . . .	10
3.1.2	Seconda fdt . . . . .	10
3.2	Regolatori PI . . . . .	11
3.2.1	Prima fdt . . . . .	11
3.2.2	Seconda fdt . . . . .	12
3.3	Regolatori PID . . . . .	12
3.3.1	Prima fdt . . . . .	13
3.3.2	Seconda fdt . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Esercizio 4</b>	<b>14</b>
4.1	Prima funzione di trasferimento . . . . .	14
4.1.1	Regolatore PI . . . . .	15
4.2	Seconda funzione di trasferimento . . . . .	16
4.2.1	Regolatore PI . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Esercizio 5</b>	<b>19</b>
5.1	Regolatori PI . . . . .	19
5.1.1	Prima fdt . . . . .	19
5.1.2	Seconda fdt . . . . .	20
5.2	Controllori PID . . . . .	22
5.2.1	Prima fdt . . . . .	22
5.2.2	Seconda fdt . . . . .	23
5.3	Regolatori PID-disturbo sull'ingresso . . . . .	24
5.3.1	Prima fdt . . . . .	25
5.3.2	Seconda fdt . . . . .	25

<b>6</b>	<b>Esercizio 6</b>	<b>26</b>
6.1	Regolatore FeedForward . . . . .	26
6.2	Risposta senza controllo in avanti . . . . .	27
6.3	Risposta con controllo in avanti . . . . .	28

## 1 Esercizio 1

Portata nominale ( $W_1$  e  $W_2$ ) di riscaldamento. Al fine di ricavare le due portate è stato necessario scrivere la relativa equazione di bilancio energetico per ogni serbatoio. Tali equazioni risultano essere.

$$\frac{dU_1}{dt} = \rho C_p V \frac{dT_1}{dt} = \rho C_p Q T_0 - \rho C_p Q T_1 + W_1 \lambda \quad (1)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \rho C_p V \frac{dT_2}{dt} = \rho C_p Q T_1 - \rho C_p Q T_2 + W_2 \lambda \quad (2)$$

In entrambi i casi si assumono condizioni stazionarie, tali per cui la variazione di energia interna del serbatoio è nulla. Si ha quindi un sistema di due equazioni lineari indipendenti in due incognite,  $W_1$  e  $W_2$ .

$$W_1 = \frac{\rho C_p Q (T_1 - T_0)}{\lambda} = 11.37 \text{ Kg/min} \quad (3)$$

$$W_2 = \frac{\rho C_p Q (T_2 - T_1)}{\lambda} = 9.04 \text{ Kg/min} \quad (4)$$

Si assume la portata di acqua  $Q$  come disturbo. le portate di riscaldamento  $W_1$  e  $w_2$  come ingressi manipolabili, utilizzate per la regolazione del sistema, in particolare per l'inseguimento della temperatura di setpoint. Le due temperature  $T$  saranno le uscite.

- $Q \rightarrow d$
- $W_1 \rightarrow u_1$
- $W_2 \rightarrow u_2$
- $T_1 \rightarrow y_1$
- $T_2 \rightarrow y_2$

Partendo dalle equazioni descritte in precedenza, considerando le temperature dei serbatoi come variabili nel tempo.

$$\left(\frac{V_1}{Q}\right) \frac{dT_1}{dt} = (T_0 - T_1) + \frac{W_1 \lambda}{\rho C_p Q} \quad (5)$$

$$\left(\frac{V_2}{Q}\right) \frac{dT_2}{dt} = (T_1 - T_2) + \frac{W_2 \lambda}{\rho C_p Q} \quad (6)$$

( $W_1$  e  $W_2$  sono i valori costanti di portata nominale di vapore trovati in precedenza. Sono noti inoltre i valori iniziali delle temperature dei serbatoi, tali valori sono le temperature nominali fornite in precedenza).

A questo punto riarrangiando le equazioni, chiamando:

$$\frac{V_1}{Q} = \tau_1 ; \frac{W_1 \lambda}{\rho C_p Q} = K_1 \quad \frac{V_2}{Q} = \tau_2 \quad \frac{W_2 \lambda}{\rho C_p Q} = K_2$$

$$\tau_1 \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_0 + K_1 \quad (7)$$

$$\tau_2 \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1 + K_2 \quad (8)$$

Dunque le equazioni rappresentano un set di equazioni differenziali del primo ordine che descrivono la dinamica della temperatura dei due serbatoi.  $\tau_1/\tau_2$  rappresentano le costanti di tempo dei serbatoi.

Guardando il set di equazioni differenziali lineari del primo ordine, ci si aspetterà quindi di avere andamenti tipici di un sistema del primo ordine per variazioni a gradino, cioè andamenti esponenziali senza sovraelongazioni. Si può notare come la variazione della portata nominale abbia un effetto inversamente proporzionale sulla temperatura, quindi un aumento di

$Q$  produrrà una diminuzione di  $T1$  e  $T2$  e al contrario una sua diminuzione farà aumentare  $T1$  e  $T2$ . Variazioni sinusoidali della portata produrranno oscillazioni della temperatura dei serbatoi. Per quanto riguarda la variazione delle portate di riscaldamento si può affermare che un aumento di  $W1$  fa aumentare la temperatura  $T1$  e conseguentemente si avranno aumenti sulla temperatura  $T2$ , mentre aumenti di  $W2$  produrranno aumenti di  $T2$  ma non di  $T1$ . Questo comportamento lo si spiega osservando che l'equazione differenziale associata al primo serbatoio è indipendente da quella che descrive il secondo serbatoio, mentre la seconda è dipendente dalla prima e per cui si hanno effetti di variazione sul primo sistema. Allo stesso modo, diminuendo  $W1$  diminuisce  $T1$  e anche  $T2$ , ma diminuendo  $W2$  diminuisce  $T2$  ma non  $T1$ . Inoltre si nota come  $V1 < V2$ , e quindi a parità di portata nominale la costante di tempo  $\tau$  sarà maggiore per il secondo serbatoio, cioè ha un'inerzia termica maggiore e quindi in ci si può aspettare che ci vorrà più tempo per raggiungere in una condizione di equilibrio.

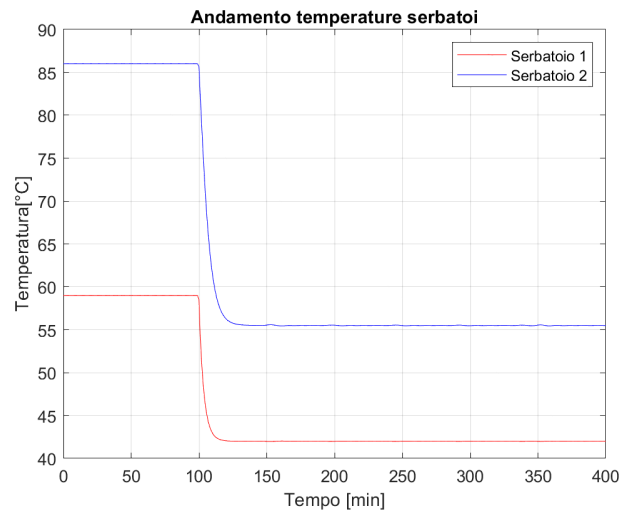
## 1.1 Risposte delle temperature

Si riporta di seguito le risposte per i differenti disturbi, evidenziando come in effetti la dinamica effettiva dei sistemi corrisponda a quella teorica appena discussa.

### 1.1.1 Caso 1

Variazione di  $Q$  positiva.

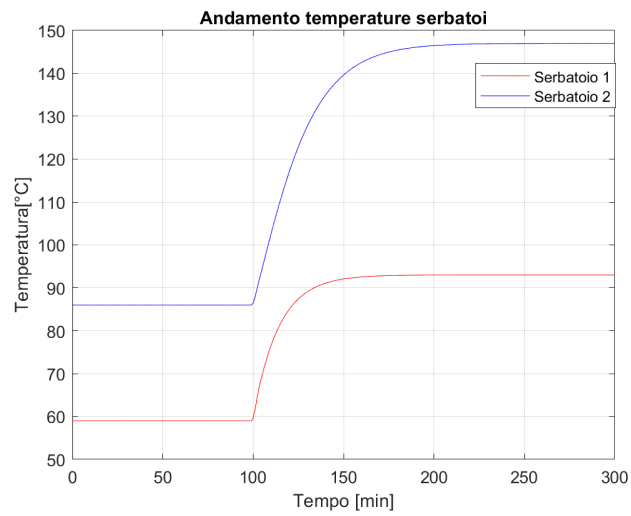
La portata nominale raddoppia a partire da un tempo pari a  $t=100$  minuti.



### 1.1.2 Caso 2

Variazione di  $Q$  negativa.

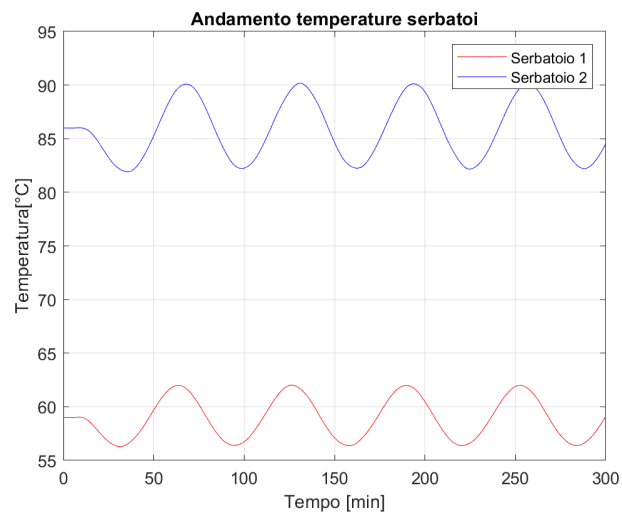
La portata nominale si dimezza a partire da un tempo  $t=100$  minuti.



### 1.1.3 Caso 3

Variazione sinusoidale di  $Q$ .

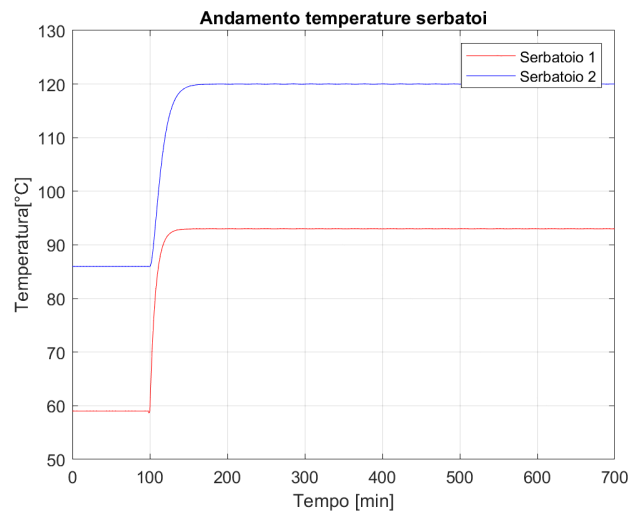
La portata oscilla intorno al valore di portata nominale secondo la legge  $Q(t) = Q_n + A \sin(\omega(t - t_{step}))$ . L'ampiezza delle oscillazioni è stata considerata pari al 10%  $Q_n$  e la pulsazione  $\omega = 0.1$ , valore scelto per non un numero eccessivo di oscillazioni.



### 1.1.4 Caso 4

Variazione positiva di  $W_1$

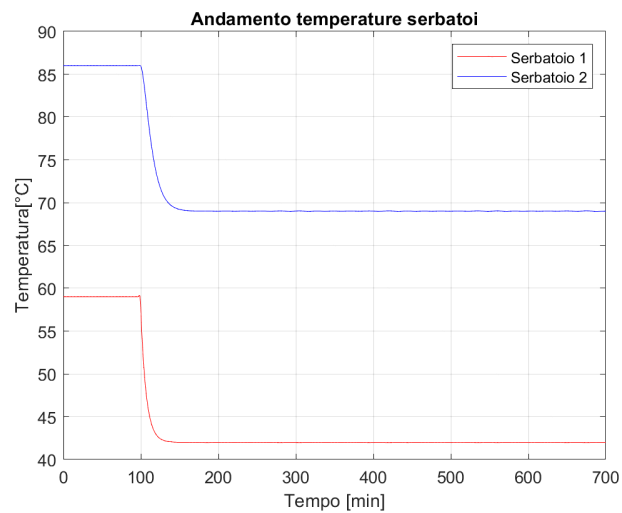
$W_1$  raddoppia dopo un tempo  $t=100$  minuti.



### 1.1.5 Caso 5

Variazione negativa di  $W_2$ .

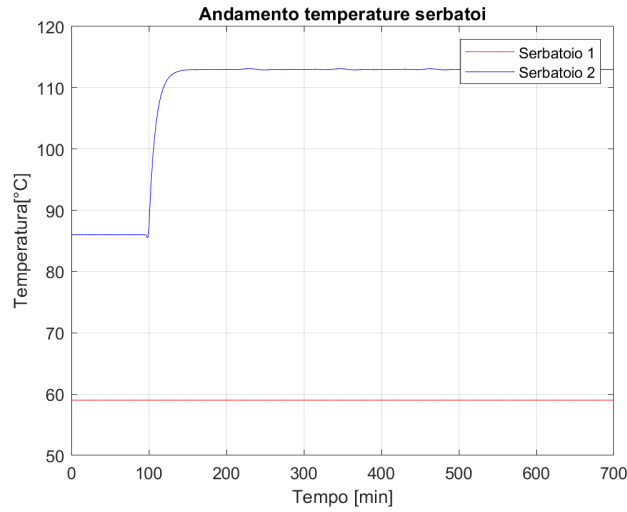
$W_2$  si dimezza dopo  $t=100$  minuti.



### 1.1.6 Caso 6

Variazione positiva di  $W_2$ .

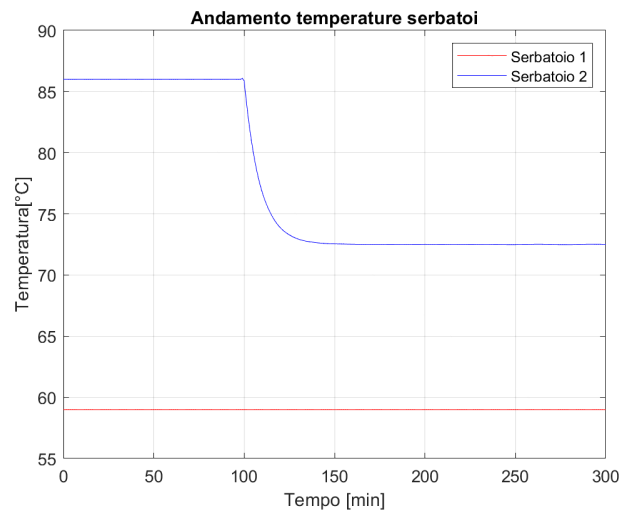
$W_2$  raddoppia dopo  $t=100$  minuti.



### 1.1.7 Caso 7

Variazione negativa di W2.

W2 si dimezza di W2 dopo t=100 minuti.



## 2 Esercizio 2

### 2.1 Prima funzione di trasferimento

Assumendo  $K = 8$  ;  $\alpha = 3.5$  ;  $\tau_1 = 15$  ;  $\tau_2 = 5$  ;  $\xi = 0.6$

Espressa nella forma generica, poi in forma polinomiale e poi in frazioni parziali.

$$P_1(S) = K \frac{\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2^2 S^2 + 2\tau_2 \xi S + 1)} = \frac{K * \alpha}{\tau_1 * \tau_2^2} \frac{(s + \frac{1}{\alpha})}{(s + \frac{1}{\tau_1})(s^2 + s \frac{2\xi}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_2^2})} = 0.075 \frac{(s + 0.28)}{(s + 0.067)(s^2 + 0.24s + 0.04)} \quad (9)$$

La funzione di trasferimento presenta al numeratore un polinomio del primo ordine, caratterizzato da uno zero reale negativo. Al denominatore è presente un polinomio del terzo ordine, ci saranno tre radici di cui una reale negativa e due complesse entrambe a parte reale negativa.

- Zeri  $Z_1 = -0.28$

- Poli - P1=-0.067 / P2= -0.12+ 0.16i / P3= -0.12 - 0.16i
- K' = 0.075
- Guadagno= 8

$$P_1(S) = 0.075 \frac{(s + 0.28)}{(s + 0.067)(s^2 + 0.24s + 0.04)} \quad (10)$$

$$U(s) = \frac{A}{s} = \frac{1}{s} \quad (11)$$

$$Y_1(S) = P_1(s)U_1(s) = \frac{K\alpha}{\tau_1\tau_2^2} \frac{(s + \frac{1}{\alpha})}{s(s + \frac{1}{\tau_1})(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \frac{1}{\tau_1})} + \frac{A_3}{(s - r_1)} + \frac{A_4}{(s - r_2)} \quad (12)$$

Con r1 e r2 sono state indicate le radici complesse, rispettivamente  $r_1 = -0.12 + 0.16i$  e  $r_2 = -0.12 - 0.16i$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} Y_2(s)(s) = 8 \quad (13)$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_1}} Y_1(s)(s + \frac{1}{\tau_1}) = -8.62 \quad (14)$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow r_1} Y_1(s)(s - r_1) = 0.31 + 1.57i \quad (15)$$

$$A_4 = \lim_{s \rightarrow r_2} Y_2(s)(s - r_2) = 0.31 - 1.57i \quad (16)$$

Da cui si scrive l'antitrasformata:

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + 2e^{at} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{sen}(bt + \theta) = 8 - 8.62e^{-\frac{t}{15}} + 3.2e^{-0.12t} \text{sen}(0.16t - 3.33) \quad (17)$$

Avendo chiamato a=-0.12 ; b=0.16 ;  $\alpha = 0.31$  ;  $\beta = 1.57$  ;  $\theta = \arctg(-\frac{\alpha}{\beta}) - \pi$

$$y(t=0) = A_1 + A_2 + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{sen}(\theta) = 8 - 8.62 + 3.2 \text{sen}(-3.33) \approx 0 \quad (18)$$

$$y(t \rightarrow \infty) = A_1 = 8 \quad (19)$$

$$y'(t=0) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} (-\frac{1}{\tau_1}) + 2e^{at} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} [a \text{sen}(bt + \theta) + b \cos(bt + \theta)] = 0.58 + 3.2[-0.12 * \text{sen}(-3.33) + 0.16 * \cos(-3.33)] \approx 0 \quad (20)$$

A questo punto si applicano i teoremi del valore iniziale e finale sulla risposta del sistema, e il teorema del valore iniziale sulla derivata. Analizzare la derivata serve a stimare quale è la pendenza iniziale della risposta.

**Risposta iniziale**

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s)S = 0.075 \frac{s(s + 0.28)}{s(s + 0.067)(s^2 + 0.24s + 0.04)} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s)S^2 = 0.075 \frac{s^2(s + 0.28)}{s(s + 0.067)(s^2 + 0.24s + 0.04)} = 0 \quad (22)$$

In entrambi i casi il grado del polinomio al denominatore è maggiore rispetto a quello del polinomio al numeratore, ed essendo la variabile s tendente ad infinito allora il limite tende a zero.

**Risposta finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s)S = 0.075 \frac{s(s + 0.28)}{s(s + 0.067)(s^2 + 0.24s + 0.04)} = 8 \quad (23)$$

Questi risultati sono concordi con gli andamenti di y(t) che si ricavano dall'antitrasformata.

## 2.2 Seconda funzione di trasferimento

Assumendo  $K = 8$  ;  $\alpha = 1.75$  ;  $\tau_1 = 15$  ;  $\tau_2 = 5$

$$P_2(S) = K \frac{-\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)^2 (\tau_2 S + 1)} = \frac{-K * \alpha}{\tau_1^2 * \tau_2} \frac{(s - \frac{1}{\alpha})}{(s + \frac{1}{\tau_1})(s + \frac{1}{\tau_2})} = -0.012 \frac{(s - 0.57)}{(s + 0.067)^2 (s + 0.2)} \quad (24)$$

La funzione di trasferimento presenta al numeratore uno zero positivo. Al denominatore un polinomio del terzo ordine con tutti e tre i poli reali e negativi.

- Zeri - Z1=0.57
- Poli - P1=-0.2 / P2=-0.0667 / P3=-0.0667
- K' = -0.012
- Guadagno= 8

$$P_2(S) = -0.012 \frac{(s - 0.57)}{(s + 0.067)^2 (s + 0.2)} \quad (25)$$

$$U(s) = \frac{A}{s} = \frac{1}{s} \quad (26)$$

$$Y_2(S) = P_2(s)U(s) = -\frac{K\alpha}{\tau_1^2 \tau_2} \frac{(s - \frac{1}{\alpha})}{s(s + \frac{1}{\tau_1})^2 (s + \frac{1}{\tau_2})} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \frac{1}{\tau_2})} + \frac{B_1}{(s + \frac{1}{\tau_1})} + \frac{B_2}{(s + \frac{1}{\tau_1})^2} \quad (27)$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} Y_2(s)(s) = 8 \quad (28)$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_2}} Y_1(s)(s + \frac{1}{\tau_2}) = -2.7 \quad (29)$$

Mentre, per il calcolo dei coefficienti associati alle due radici coincidenti:

$$\phi = Y_2(s)(s + \frac{1}{\tau_1})^2 \quad (30)$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_1}} \phi = -0.9 \quad (31)$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_1}} \frac{d\phi}{ds} = -5.3 \quad (32)$$

Da cui si scrive l'antitrasformata:

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + B_1 t e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 8 - 2.7 e^{-\frac{t}{5}} - 0.9 t e^{-\frac{t}{15}} - 5.3 e^{-\frac{t}{15}} \quad (33)$$

$$y(t=0) = 8 - 2.7 - 5.3 = 0 \quad (34)$$

$$y(t \rightarrow \infty) = A_1 = 8 \quad (35)$$

$$y'(t=0) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}(-\frac{1}{\tau_2}) + B_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - B_1 t e^{-\frac{t}{\tau_1}}(\frac{1}{\tau_1}) - B_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}(\frac{1}{\tau_1}) \approx 0 \quad (36)$$

**Risposta iniziale**

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s)S = K \frac{-\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)^2 (\tau_2 S + 1)s} * s = 0 \quad (37)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s)S^2 = K \frac{-\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)^2 (\tau_2 S + 1)s} * s^2 = 0 \quad (38)$$

Come prima, in entrambi i casi il grado del polinomio al denominatore è maggiore rispetto a quello del polinomio al



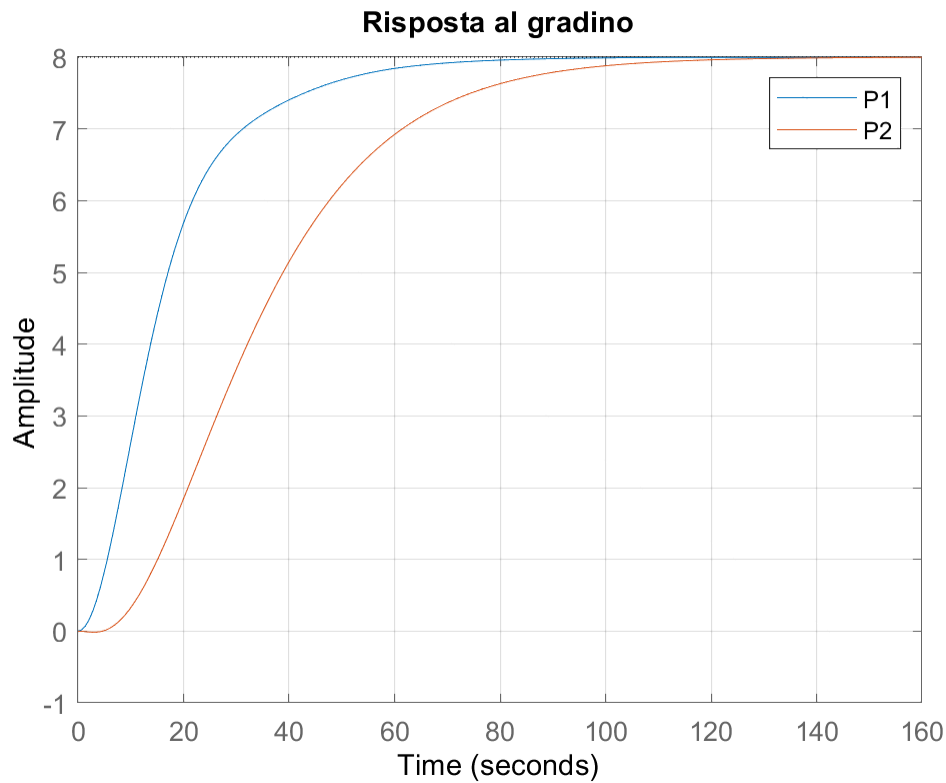
numeratore di conseguenza i limiti convergono a zero.

**Risposta finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s)S = K \frac{-\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)^2 (\tau_2 S + 1)s} * s = 8 \quad (39)$$

I risultati ottenuti applicando i teoremi del valore finale e valore iniziale sono concordi con gli andamenti nel dominio del tempo di  $y(t)$ .

Infine ricavando tramite matlab le risposte delle funzioni di trasferimento rispetto a un ingresso a gradino.



Si evidenzia come in effetti i risultati grafici siano concordi con quegli ottenuti analiticamente attraverso l'analisi dei valori iniziali e finali. Infatti le risposte si assestano a un valore di ampiezza 8. Per quanto concerne il valore iniziale della derivata anche questo risulta essere pari a 0 per tutti e due i casi, concordando con i risultati teorici.

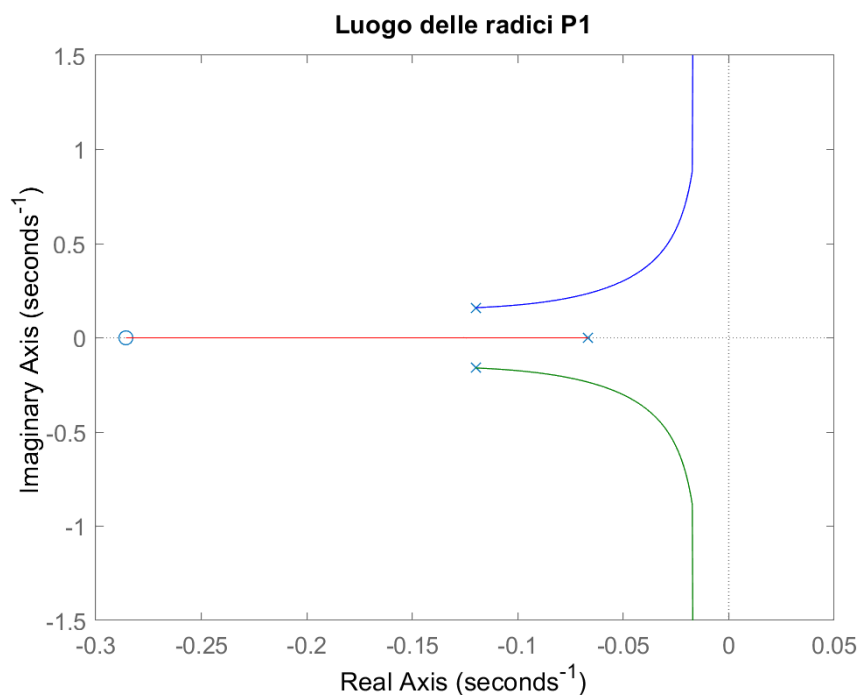
### 3 Esercizio 3

Per tale esercizio le funzioni di trasferimento P1 P2 sono analoghe a quelle utilizzate nell'esercizio n.2.

#### 3.1 Regolatori P

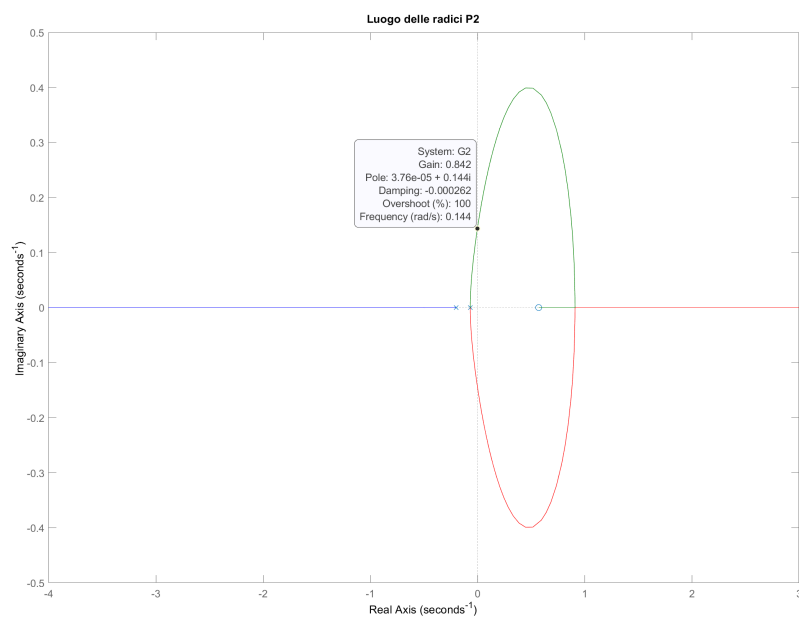
In generale, a funzione di trasferimento in anello aperto con controllore solamente proporzionale sarà del tipo  $G(s) = P(s)C_p(s) = K_c P(s)$  e nei casi presi in esame si riportano i seguenti luoghi delle radici.

### 3.1.1 Prima fdt



Non risulta esserci alcun attraversamento dell'asse immaginario verso verso il semipiano destro, la funzione di trasferimento in anello chiuso  $T(s) = G(s)/(1 + G(s))$  risulta stabile per qualsiasi valore di  $K_c$ . Questo risultato è giustificato dal fatto che nella funzione P1 sono presenti esclusivamente poli e zeri a parte reale negativa, quindi il luogo delle radici deve svilupparsi completamente nel semipiano sinistro.

### 3.1.2 Seconda fdt

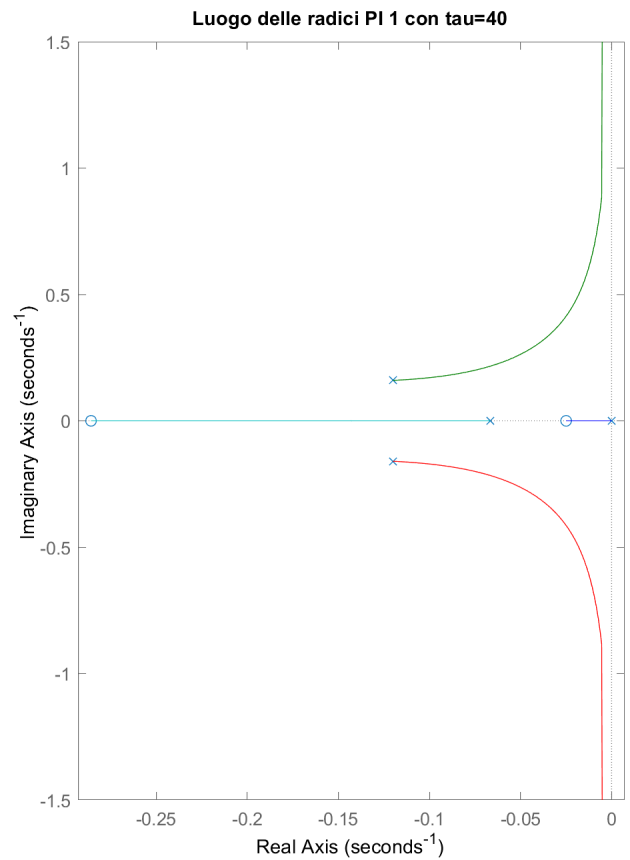
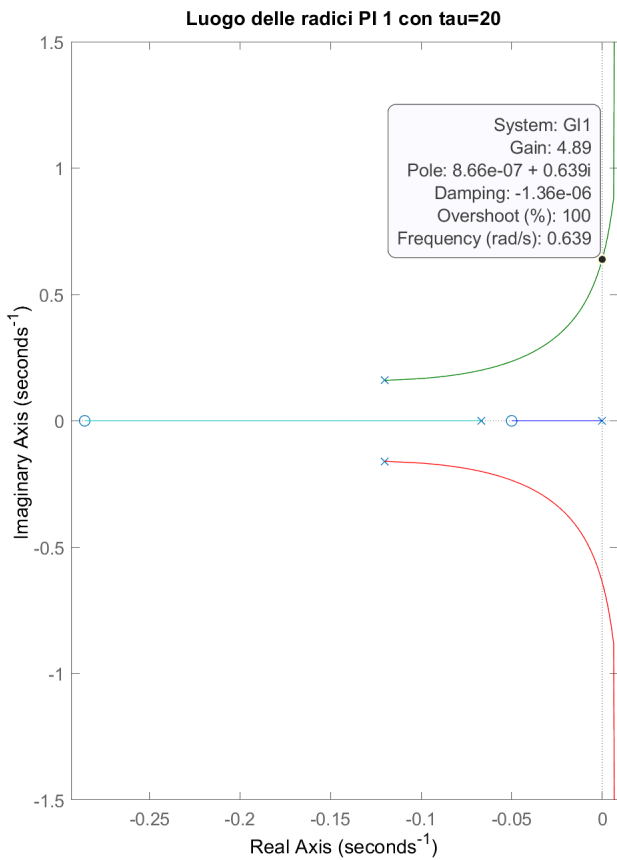


La funzione di trasferimento in anello chiuso  $T_2(S) = G_2(S)/(1 + G_2(S))$  risulta instabile per valori critici di guadagno massimo e pulsazione critica pari rispettivamente a  $K_c^* = 0.842$  e  $\omega_t = 0.144$ . I valori, come si vede in figura, sono stati ricavati graficamente andando sul punto di attraversamento dell'asse immaginario, che rappresenta il punto in cui il sistema risulta marginalmente stabile. In effetti, dato il processo P2 ci si aspettava questo risultato in quando al numeratore è presente uno zero a parte reale positiva, che si trova nel semipiano destro e ha l'effetto di attirare a se i rami che partono dai poli nel semipiano sinistro. Questo effetto sarà anche presente nelle prossime analisi di P2 con regolatori PI e PID.

## 3.2 Regolatori PI

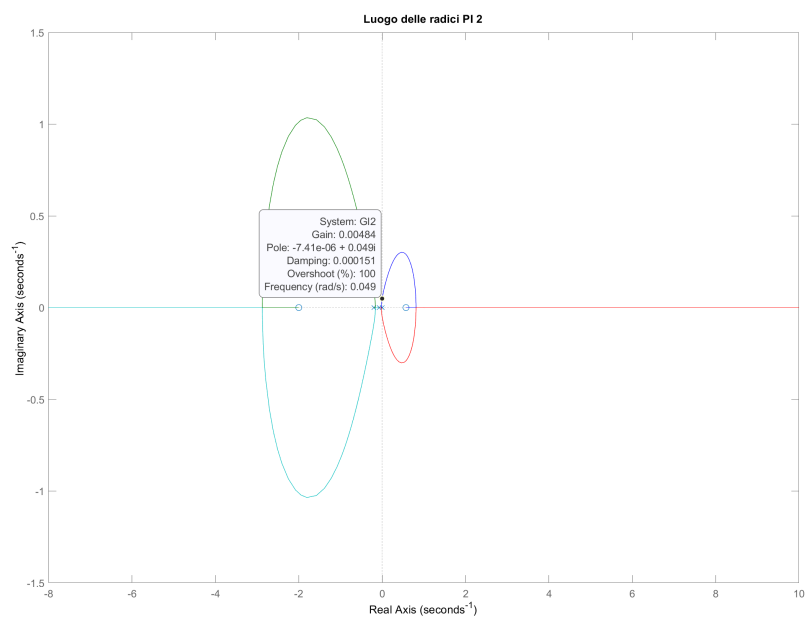
In generale, il controllore proporzionale integrale utilizzato avrà la seguente struttura  $C(s) = K_c \frac{1+\tau_I s}{\tau_I s}$ , con funzione di trasferimento della risposta in anello aperto del tipo  $G(s)=P(s)C(s)$ .

### 3.2.1 Prima fdt



In questo caso, avendo notato che la stabilità del sistema fosse diversa a seconda della scelta della  $\tau_I$  si è proceduto in modo iterativo variandola per analizzare gli effetti della che questa aveva sul sistema. In particolare l'effetto dell'aumento della costante di tempo è spostare il luogo delle radici verso il semipiano SX, per cui dopo un certo valore il sistema risulta non intersecare mai l'asse immaginario, diventando intrinsecamente stabile con guadagno massimo infinito. Nel caso di un  $\tau_I = 20$  invece si ha un  $K_c^* = 4.89$  e  $\omega_t = 0.639$ . Si evidenzia la presenza di un polo nell'origine dovuto al denominatore del controllore PI.

### 3.2.2 Seconda fdt

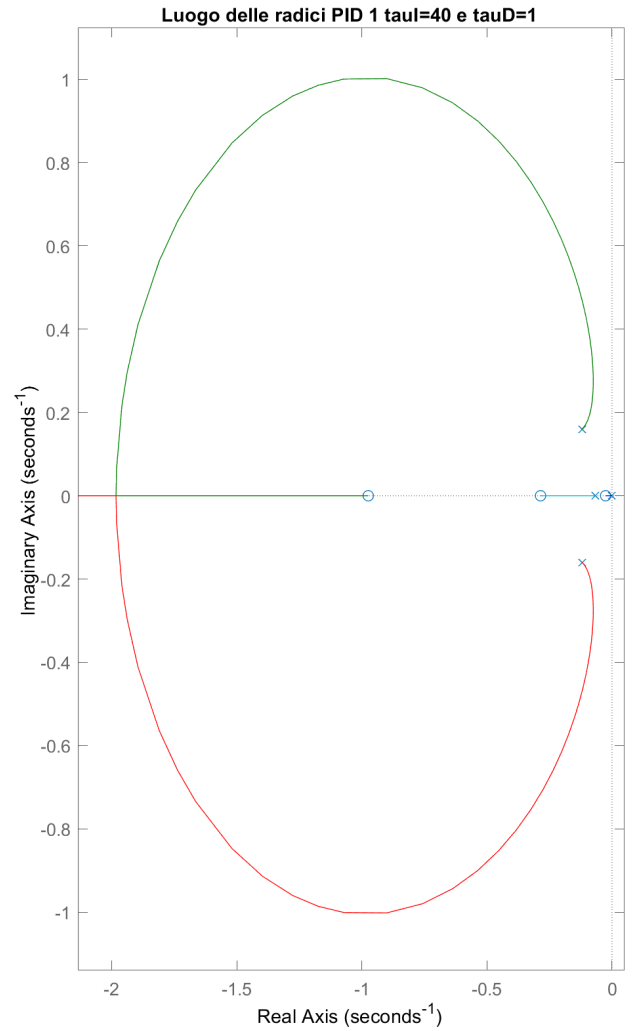
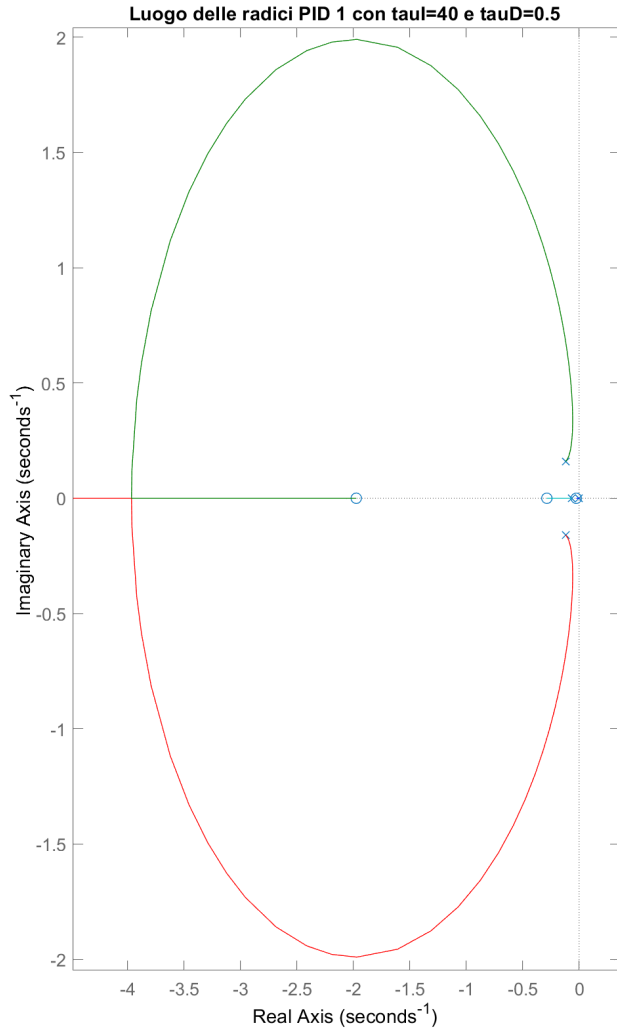


La funzione di trasferimento in anello chiuso risulta sempre instabile per vari valori della costante di tempo. Con valori di  $\tau_I = 0.5$  i valori critici di guadagno massimo e pulsazione critica sono  $K_c^* = 0.0048$  e  $\omega_t = 0.049$ .

### 3.3 Regolatori PID

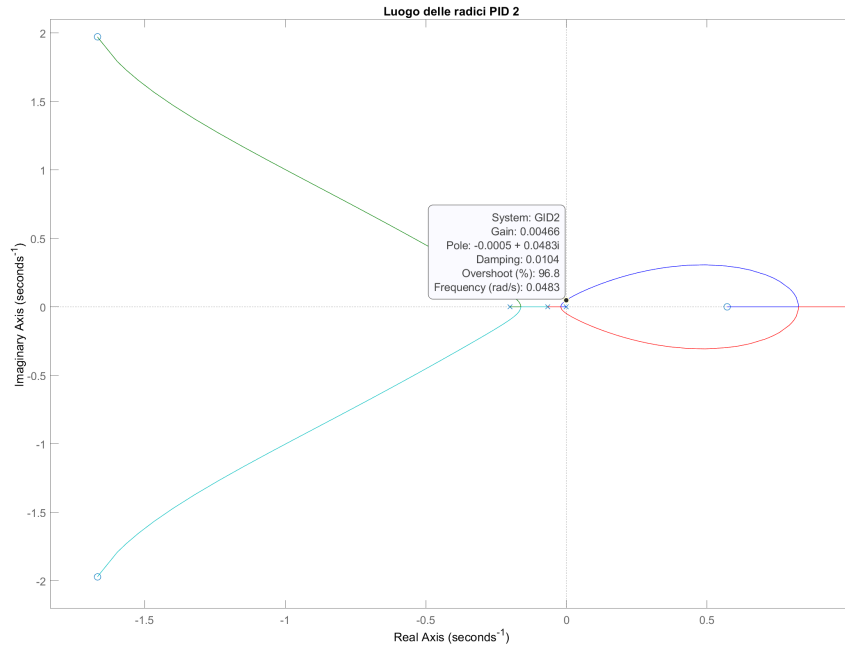
In generale, il controllore proporzionale integrale derivativo utilizzato avrà la seguente struttura  $C(s) = K_c \left( \frac{1 + \tau_I s + \tau_I \tau_D s^2}{\tau_I s} \right)$ , con funzione di trasferimento della risposta in anello aperto del tipo  $G(s) = P(s)C(s)$ .

### 3.3.1 Prima fdt



Partendo dai risultati ottenuti con il precedente regolatore PI per il processo PI, considerando un  $\tau_I = 40$  si è analizzato l'effetto di un valore di  $\tau_D$  variabile. I risultati ottenuti evidenziano come la variazione di tale parametro non comprometta la stabilità del sistema, perchè anche per valori bassi il luogo delle radici si schiaccia verso l'asse immaginario ma senza mai attraversarlo. Per valori crescenti il luogo delle radici trasla verso sinistra. Si riporta nei seguenti grafici l'andamento per valori pari a 0.5 e 1.

### 3.3.2 Seconda fdt



Aggiungendo la componente derivativa al controllore PI discusso in precedenza il luogo delle radici possiede sempre un punto di attraversamento dell'asse immaginario. Nel caso di  $\tau_{DI} = 0.5$  e  $\tau_D = 3$  il sistema risulta instabile per  $K_c^* = 0.0046$  e  $\omega_t = 0.048$ .

## 4 Esercizio 4

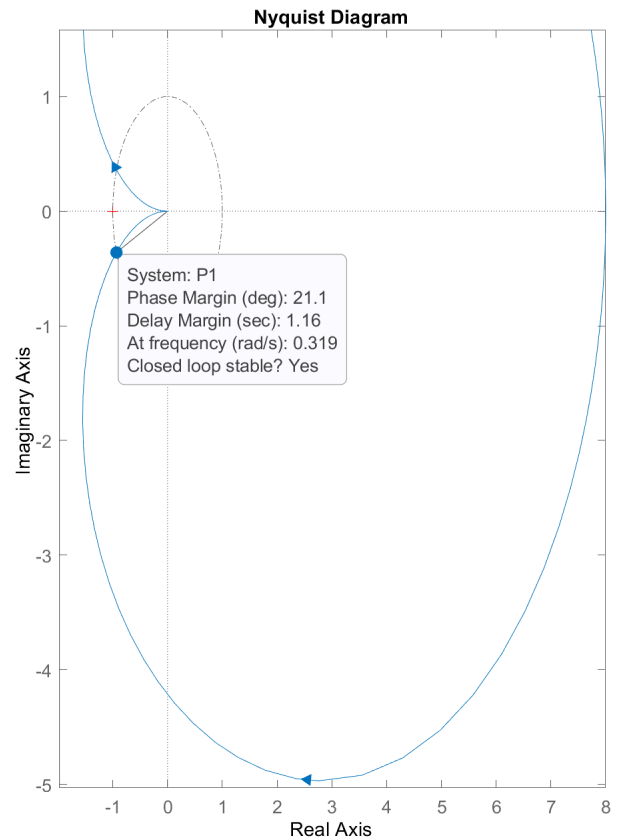
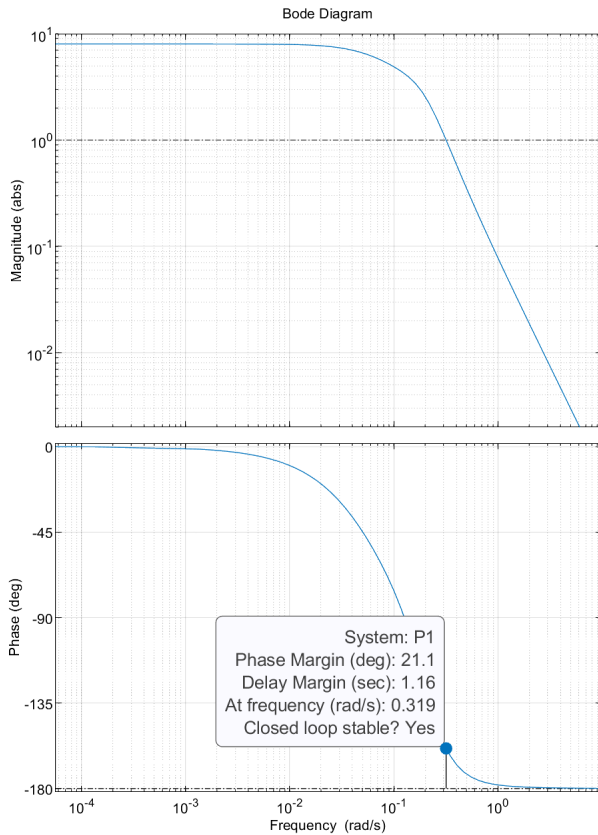
### 4.1 Prima funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento analizzata avrà una struttura del tipo:

$$P_1(S) = K \frac{\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2^2 S^2 + 2\tau_2 \xi S + 1)} \quad (40)$$

Assumendo  $K=8$ ,  $\alpha = 1.75$ ,  $\xi = 0.6$ ,  $\tau_1 = 15$ ,  $\tau_2 = 5$ .

## Funzione di trasferimento P1



Analizzando il diagramma di Bode si osserva che non esiste una frequenza di crossover  $\omega_{co}$  corrispondente all'attraversamento di  $-\pi$  nel diagramma di fase, il guadagno massimo associato a  $P(s)$  è infinito. La stabilità del processo in anello chiuso è sempre garantita per qualsiasi valore di  $k_c$  con un controllore puramente proporzionale. Per quanto riguarda il margine di fase questo risulta definito, come si può osservare nei diagrammi. Questi risultati sono concordi con l'analisi del luogo delle radici dello stesso processo fatta nell'esercizio 3, per cui si era arrivati a poter affermare che il processo risulta stabile sempre avendo solo singolarità nel semipiano sinistro. Il diagramma di Nyquist anche mostra la stabilità per qualsiasi valore di  $K_c$  in quanto non c'è alcuna intersezione l'asse reale. In conclusione i risultati dell'analisi sono:

Guadagno massimo = Infinito

Frequenza di crossover = Infinita

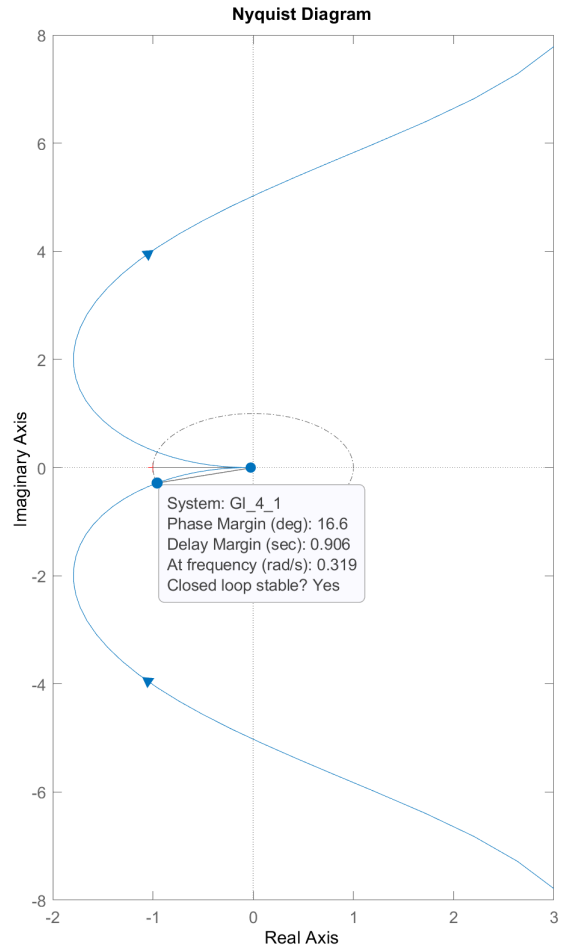
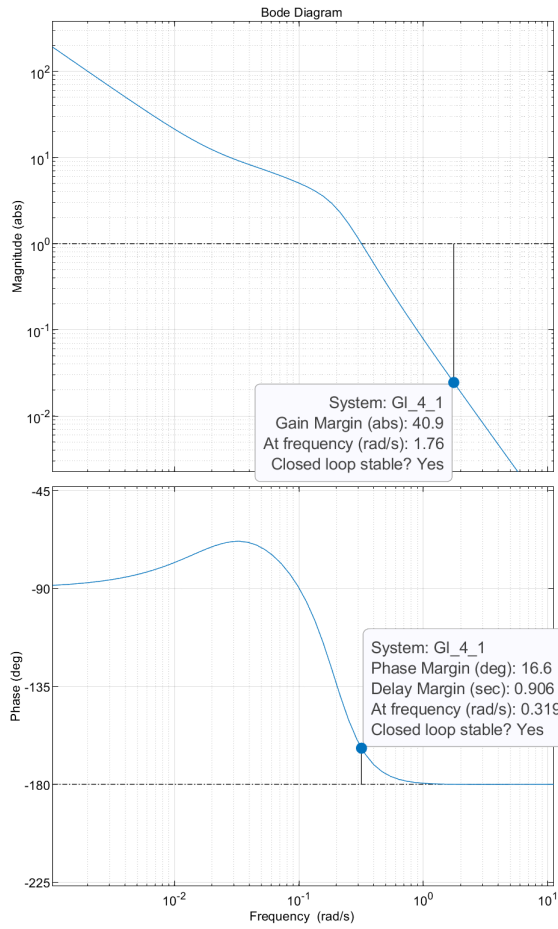
Margine di fase =  $21.11^\circ$

Frequenza = 0.319 rad/s

### 4.1.1 Regolatore PI

In aggiunta al processo  $P(s)$  è stato considerato un controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K_c \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}$  considerando un  $\tau_I = 40$ , valore di riferimento del precedente esercizio. Si riporta in seguito i diagrammi della funzione di trasferimento in anello aperto  $G(s)$ .

## Funzione di trasferimento PI1



Si osserva come non ci sia un netto attraversamento nella fase corrispondente a  $-\pi$  ma c'è un assestamento del valore della fase a tale valore per valori di frequenza maggiori di 1.76 rad/s. I risultati dell'analisi sono:

Guadagno massimo = 40.86

Frequenza di crossover = 1.76 rad/s

Margine di fase = 16.57°

Frequenza = 0.32 rad/s

## 4.2 Seconda funzione di trasferimento

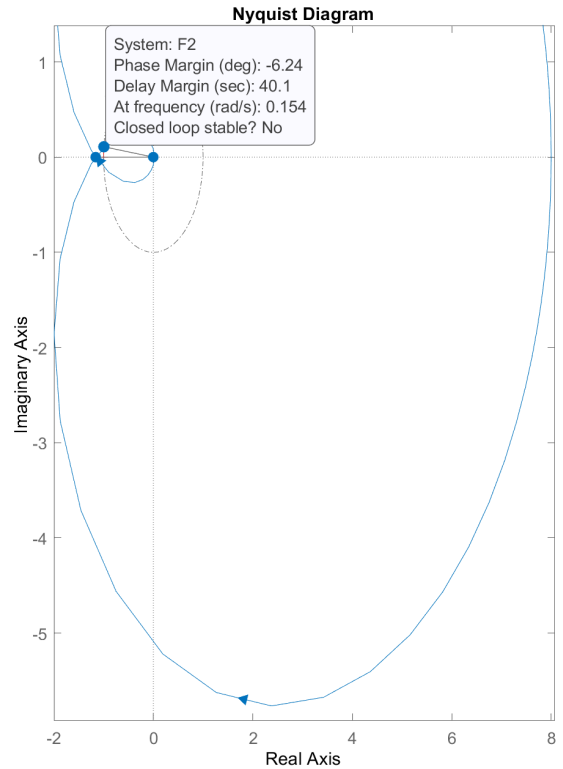
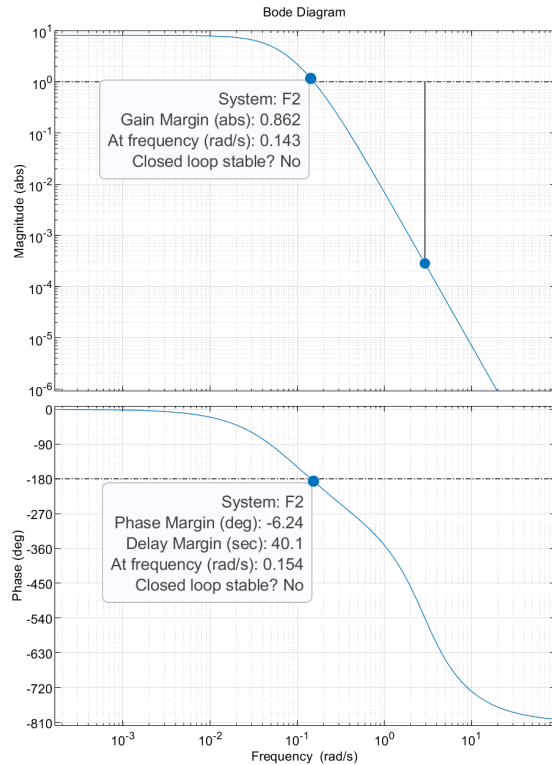
La funzione di trasferimento di riferimento è:

$$P_2(S) = K \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_1 S + 1)^2 (\tau_2 + 1)} \quad (41)$$

Assumendo  $K=8$ ,  $\theta = 1.75$ ,  $\tau_1 = 15$ ,  $\tau_2 = 5$ .



## Funzione di trasferimento P2



In questo caso si può notare come in presenza di un regolatore puramente proporzionale il processo non risulti sempre stabile, l'effetto sulla stabilità dell'anello chiuso è attribuibile alla presenza di uno zero a parte reale positiva. Si ha un attraversamento della fase  $-\pi$  in corrispondenza della frequenza di crossover 0.14 rad/s. Il diagramma di Nyquist conferma quanto detto perchè c'è un attraversamento dell'asse reale. Il controllore risulta stabile per valori di  $0 < K_c < K_c^*$

Guadagno massimo = 0.86

Frequenza di crossover = 0.14 rad/s

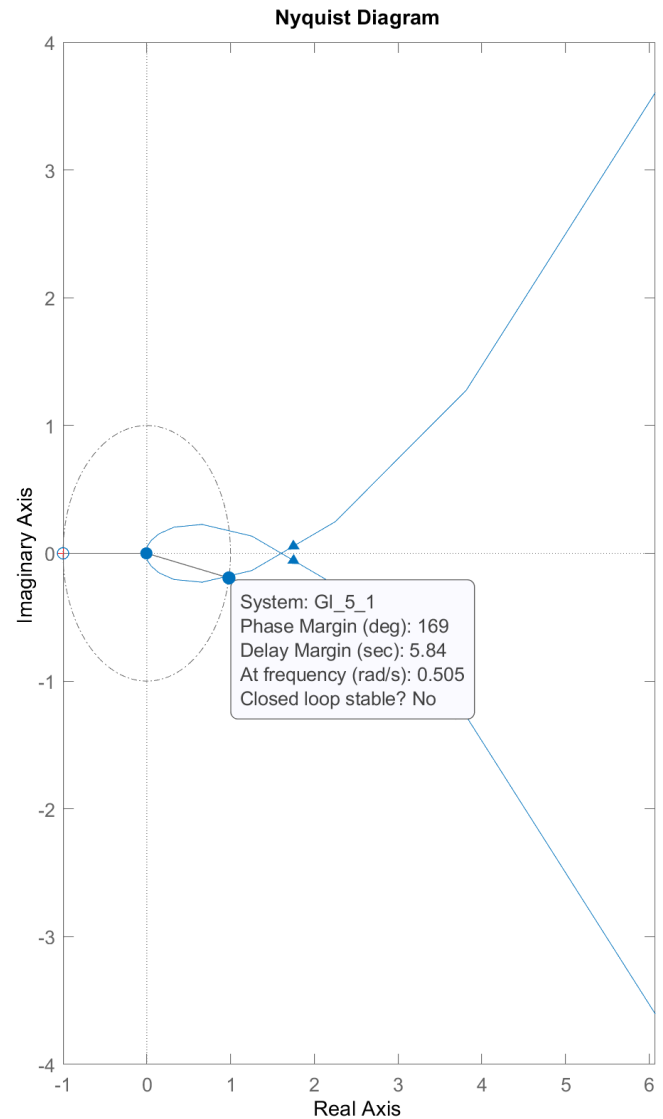
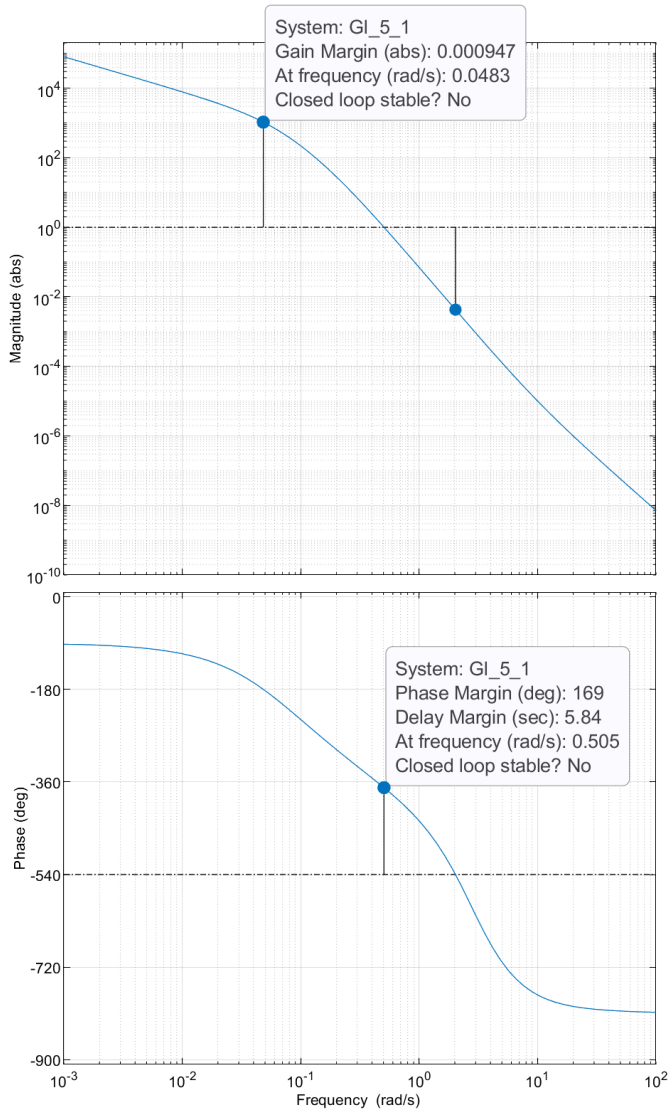
Margine di fase =  $-6.23^\circ$

Frequenza = 0.15 rad/s

### 4.2.1 Regolatore PI

In aggiunta al processo  $P(s)$  è stato considerato un controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K_c \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}$  considerando un  $\tau_I = 0.1$ . Si riporta in seguito i diagrammi della funzione di trasferimento in anello aperto  $G(s)$ .

## Funzione di trasferimento PI2



Essendoci un attraversamento di  $-\pi$  la stabilità per ogni valore di  $K_c$  non è garantita. Si nota dal diagramma di Nyquist come ci sia instabilità visto che il criterio di Nyquist non viene rispettato, il criterio afferma che la condizione affinché  $G(s)$  sia stabile in anello chiuso è che il diagramma polare dovrebbe circondare senza mai toccare il punto  $-1+i0$  in senso antiorario tante volte quanti sono i poli con parte reale positiva (nel nostro caso ne abbiamo uno).

Guadagno massimo = 0.000947

Frequenza di crossover = 0.483 rad/s

Margine di fase =  $169^\circ$

Frequenza = 0.505 rad/s

## 5 Esercizio 5

### 5.1 Regolatori PI

In generale, le tecniche di tuning hanno il fine di ricavare dei parametri caratteristici, che nel caso di un controllore PI sono  $\tau_I$  e  $c$  con la quale si andrà a realizzare il seguente controllore:  $C(s) = K_c \left( \frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s} \right)$

#### 5.1.1 Prima fdt

La funzione di trasferimento presa in considerazione è stata la seguente:

$$P_1(S) = K \frac{\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2^2 S^2 + 2\tau_2 \xi S + 1)} \quad (42)$$

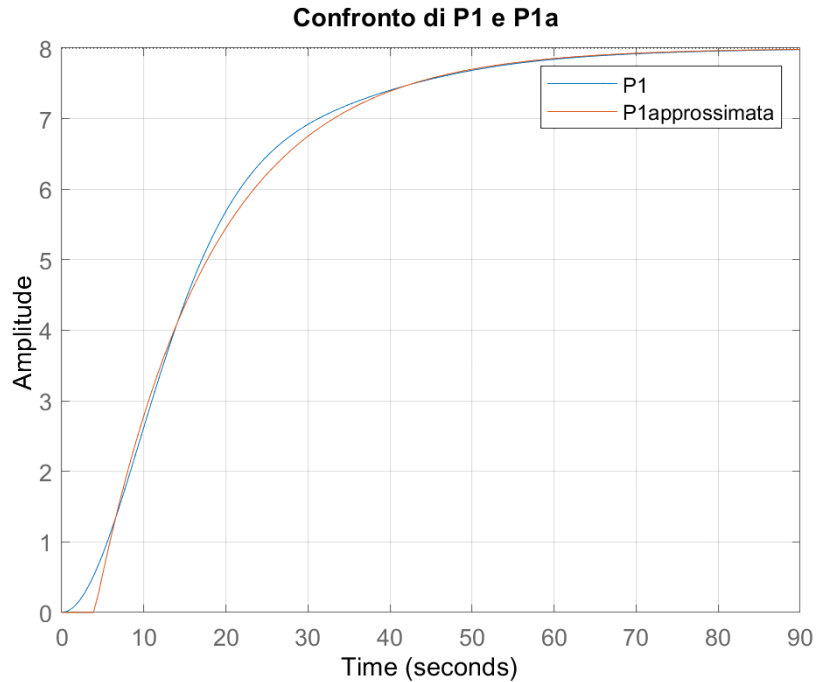
Assumendo  $K=8$ ,  $\alpha = 1.75$ ,  $\xi = 0.6$ ,  $\tau_1 = 15$ ,  $\tau_2 = 5$ .

Per questa funzione di trasferimento è stata adottata la tecnica di tuning di Cohen-Coon e di Skogestad.

Per queste tecniche è stato necessario per prima cosa approssimare la funzione di trasferimento nella forma FOPTD (first order plus time delay) che sarebbe la seguente:

$$Pa(S) = K \frac{e^{-\theta s}}{\tau S + 1} \quad (43)$$

La tecnica di approssimazione eseguita consiste nel variare in modo iterativo il  $\theta$  e  $\tau$ , fino a che si ottiene un andamento della risposta del processo  $Pa$  simile a quello di  $P$ . Una volta individuati tali valori si può procedere con la realizzazione del controllore PI secondo la tecniche di Tuning citate. Nella seguente figura si riporta il risultato dell'approssimazione del processo  $P1$ .



In questo modo sono stati ricavati i valori di  $\theta = 4$  e  $\tau = 14$  considerando un  $K = 8$ , cioè del processo originale.

#### Tuning di Cohen Coon

Quindi, le regole di tuning utilizzate sono:

$$K_c = \frac{\tau}{K\theta} \left( 0.9 + \frac{\theta}{12\tau} \right) \quad (44)$$

$$\tau_I = \theta \left( \frac{30 + 3\frac{\theta}{\tau}}{9 + 20\frac{\theta}{\tau}} \right) \quad (45)$$

I valori sono risultati pari a :  $\tau_I = 8.388$  e  $K_c = 0.404$

#### Tuning di Skogestad

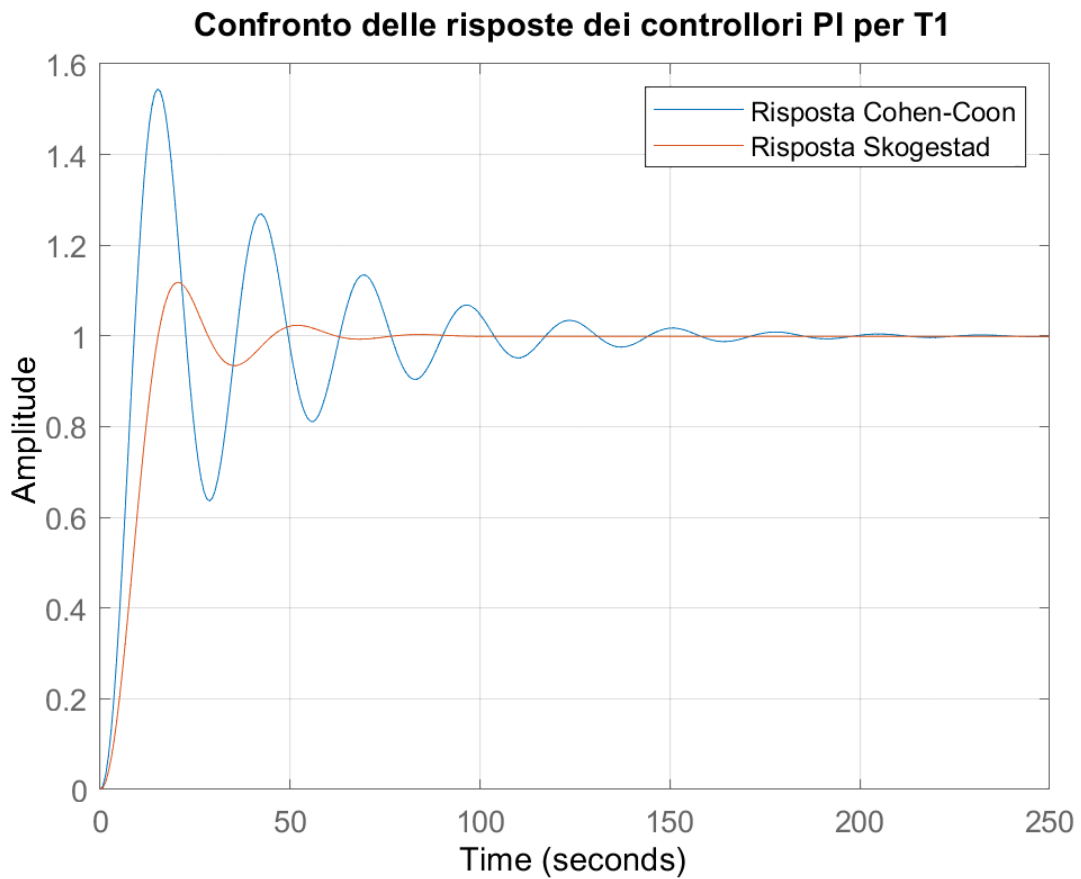
Sulla base dei risultati dell'approssimazione del processo descritto in precedenza sono state usate le seguenti regole di tuning per il Controllore PI:

$$K_c = \frac{\tau}{2K\theta} \quad (46)$$

$$\tau_I = \min(\tau; 8\theta) \quad (47)$$

I valori sono risultati pari a :  $\tau_I = 14$  e  $K_c = 0.2188$

Quindi, con i due controllori sono state ricavate le funzioni di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita, come fatto in precedenza, e si studia la risposta del sistema per variazioni a gradino del setpoint.



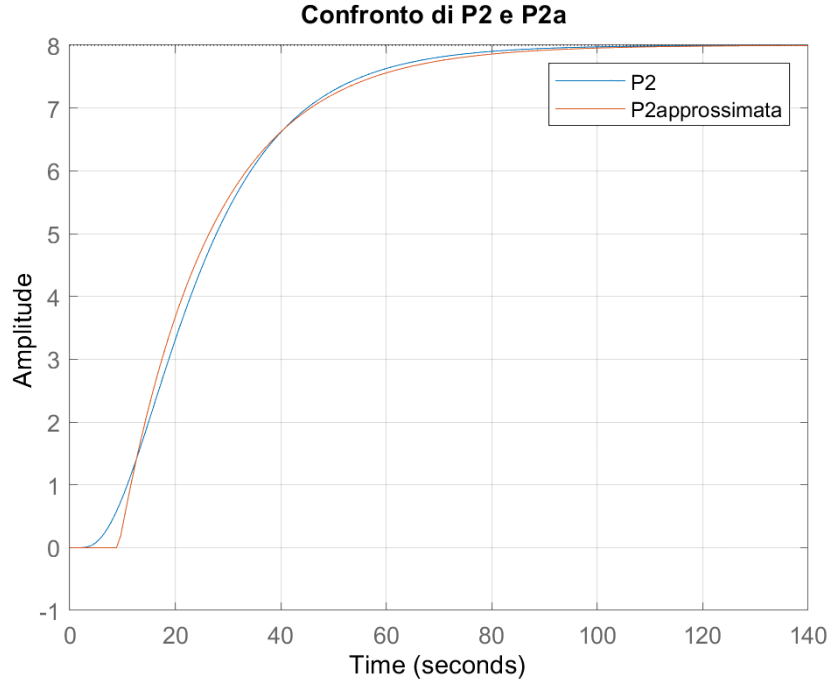
Si nota come il Tuning di Skogestad risulti migliore per l'inseguimento del setpoint, in quanto si stabilizza in un tempo minore e con oscillazioni sia di ampiezza minore che di frequenza minore.

#### 5.1.2 Seconda fdt

In questo caso i controllori PI sono stati realizzati seguendo un tuning di Skogestad e di Ziegler Nichols

#### Tuning di Skogestad

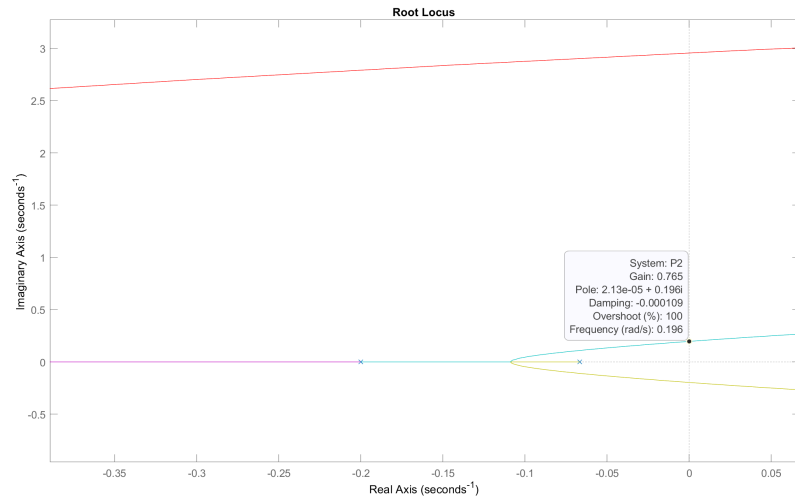
Si è ripetuto un procedimento analogo al precedente, ricavando una approssimazione del processo di partenza.



In questo modo sono stati ricavati i valori di  $\theta = 9.25$  e  $\tau = 17.5$  considerando un  $K = 8$ .  
I valori sono risultati pari a :  $\tau_I = 17.5$  e  $K_C = 0.1882$

### Tuning di Ziegler Nichols

In questo caso il metodo prevede una analisi del luogo delle radici di P2, con la quale si ricavano graficamente i valori di  $K_C^* = 0.765$  e  $\omega_c = 0.196$ .



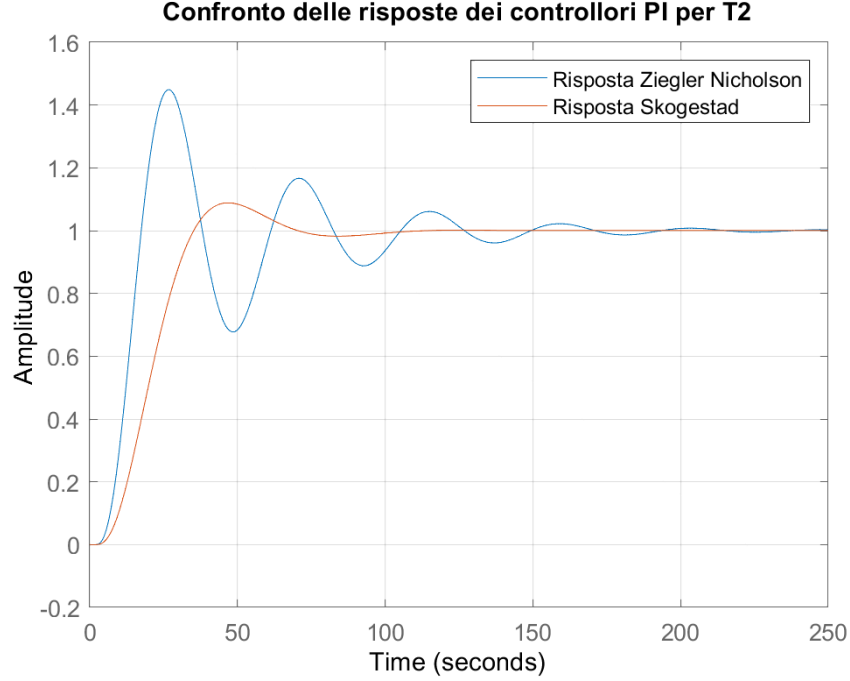
E con tali valori si usano le seguenti regole di tuning:

$$K_c = \frac{K_C^*}{2.2} = 0.347 \quad (48)$$

$$\tau_I = \frac{P_u}{1.2} = 26.71 \quad (49)$$

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_c} = 32.06 \quad (50)$$

Dati i controllori la risposta dei due sistemi risulta essere:



Si nota come, per gli stessi motivi esposti in precedenza risulti avere un comportamento migliore il controllore di Skogestad.

## 5.2 Controllori PID

In generale  $C(s) = K_c \left( \frac{1 + \tau_I s + \tau_I \tau_D s^2}{\tau_I s} \right)$ .

Inoltre, l'analisi dell'abbattimento del disturbo entrante sull'uscita la si fa analizzando la funzione di sensibilità S.

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}.$$

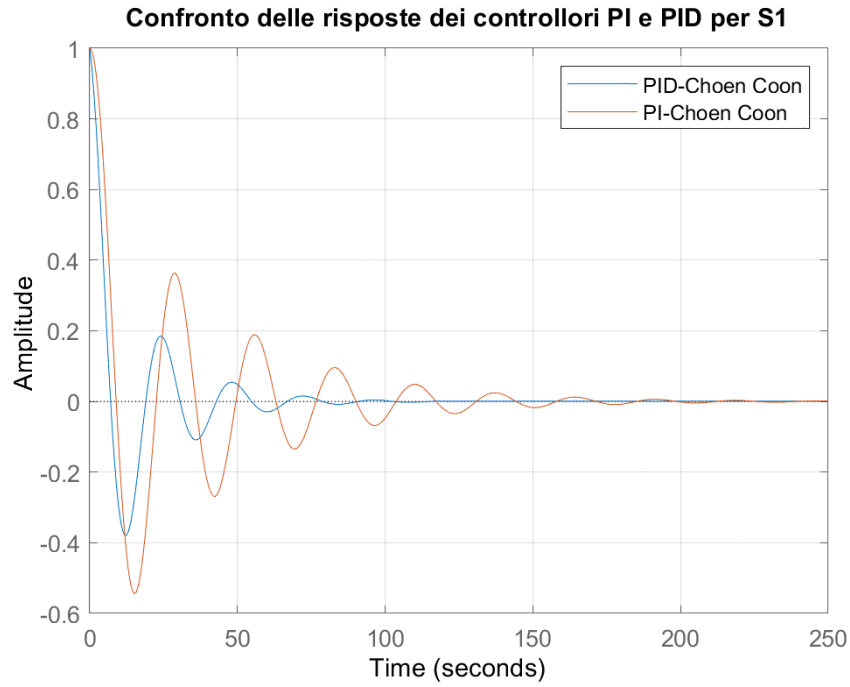
### 5.2.1 Prima fdt

Il controllore PID è stato realizzato con il tuning di Cohen-Coon, utilizzando la stessa tecnica già descritta con stessi  $\tau$  e  $\theta$  derivanti dall'approssimazione di P1. Le relazioni per il tuning sono state:

$$K_c = \frac{\tau}{K\theta} \left( \frac{4}{3} + \frac{\theta}{4\tau} \right) = 0.615 \quad (51)$$

$$\tau_I = \theta \left( \frac{32 + 6\frac{\theta}{\tau}}{13 + 8\frac{\theta}{\tau}} \right) = 8.82 \quad (52)$$

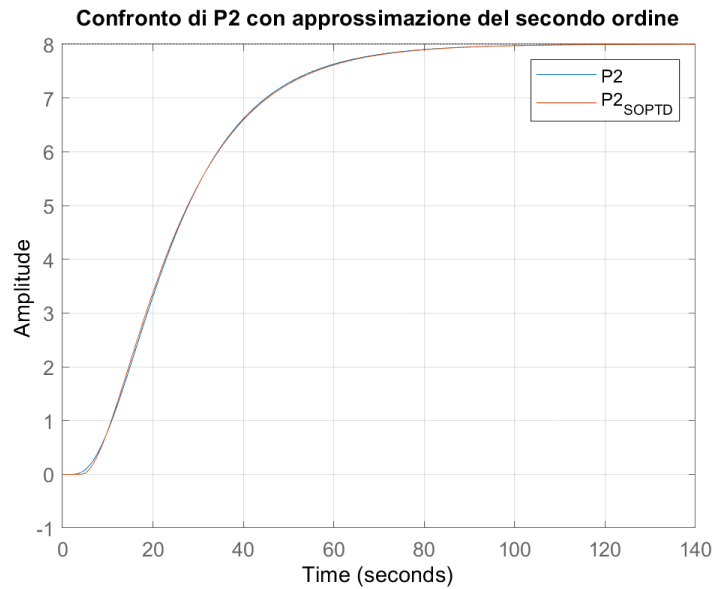
$$\tau_D = \theta \left( \frac{4}{11 + 2\frac{\theta}{\tau}} \right) = 1.3827 \quad (53)$$



Analizzando il confronto tra i due regolatori si vede come in effetti l'aggiunta di una componente derivativa vada a vantaggio dell'abbattimento del disturbo, aiutando a raggiungere la stabilità in un tempo minore e avendo oscillazioni di ampiezza e frequenza minori.

### 5.2.2 Seconda fdt

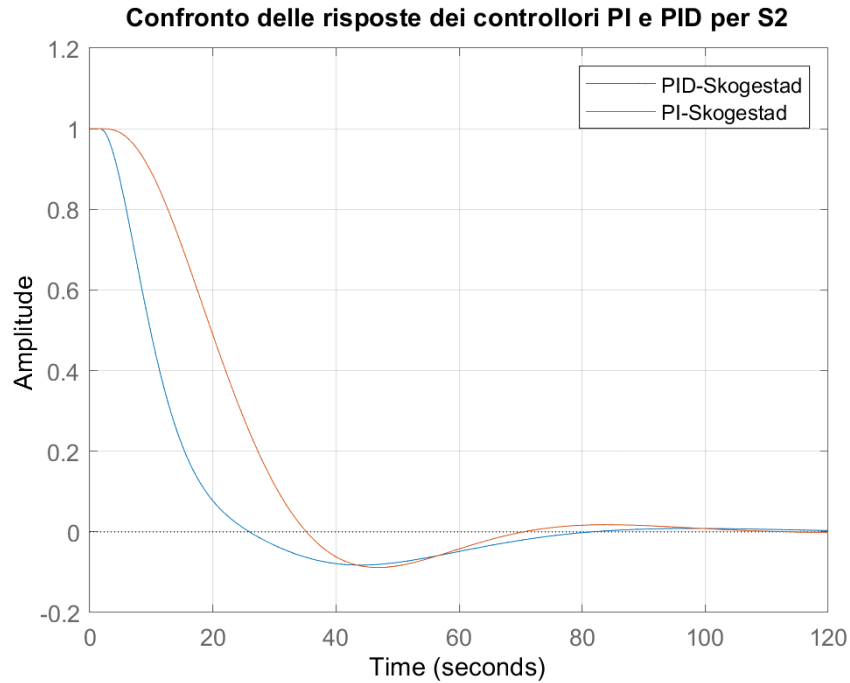
Il controllore è stato realizzato con il tuning di Skogestad, approssimando al secondo ordine il processo con i valori di  $\tau_{1,ap} = \tau_1 = 15$ ,  $\tau_{2,ap} = \tau_2 + \tau_3/2 = 7.5$  e  $\theta_{ap} = \theta + \tau_3/2 = 4.25$  derivanti dall'approssimazione di P2.



Le relazioni per il tuning sono state le stesse già descritte, con l'aggiunta di una per la costante di tempo della com-

ponente derivativa:

$$K_c = 0.2206 ; \tau_I = 15 ; \tau_D = \tau_{2,ap} = 1.3827$$



Si nota come l'aggiunta della componente derivativa non abbia effetti sulla rapidità con la quale la reiezione del disturbo viene effettuata, in quanto il tempo con la quale si arriva a un valore di ampiezza nullo è simile. La sovranelongazione massima con la quale la reiezione viene effettuata è anche simile, il PID la raggiunge in tempi minori ma ci rimane per un tempo tale da annullare la reiezione meno rapida del controllore PI.

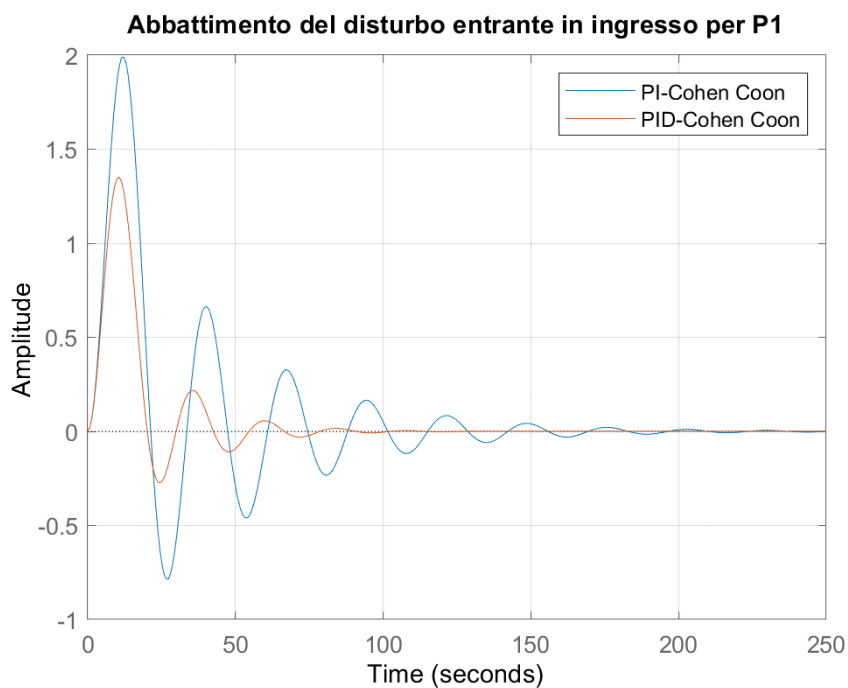
### 5.3 Regolatori PID-disturbo sull'ingresso

Si analizza il caso in cui il disturbo sia entrante sull'ingresso al processo, sempre nel caso di abbattimento del disturbo a gradino. I controllori presi in considerazione sono gli stessi già progettati in precedenza. In questo caso le funzioni di sensibilità prese in considerazione saranno:

$$S(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}.$$

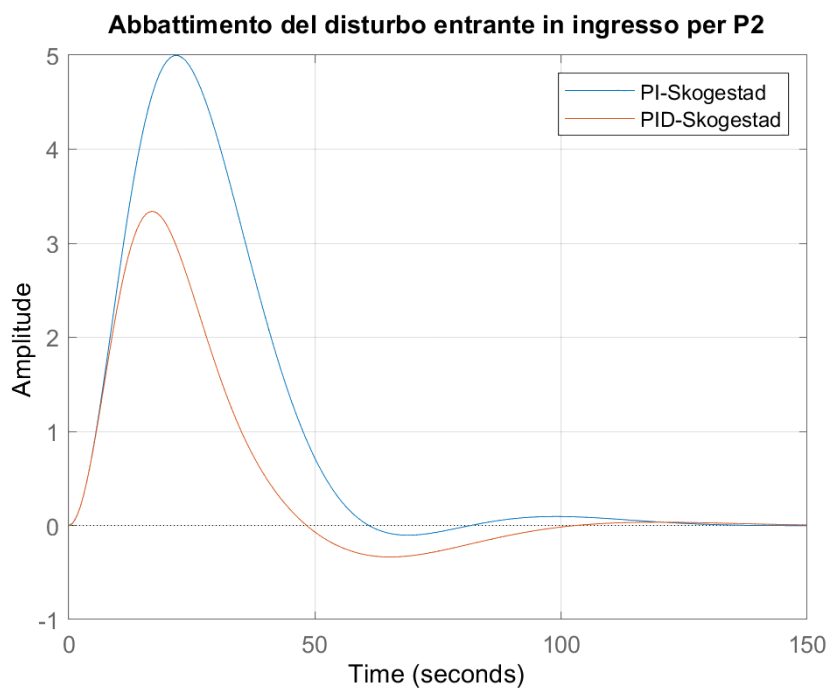


### 5.3.1 Prima fdt



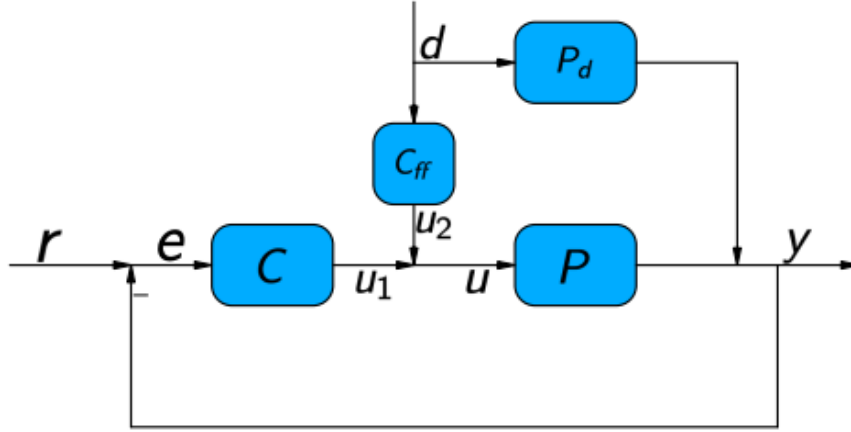
Si evince come si abbia un comportamento simile al caso di disturbo entrante sull'uscita, il controllore PID riesce nella reiezione del disturbo in un tempo minore e con un miglior comportamento oscillatorio.

### 5.3.2 Seconda fdt



La reiezione del controllore PI risulta avere un'oscillazione più marcata, tuttavia riesce a stabilizzarsi in un tempo minore intorno alla reiezione completa del disturbo, ma arrivando alla completa reiezione di questo in un tempo minore del controllore PID.

## 6 Esercizio 6



Considerando le seguenti funzioni di trasferimento:

$$P(S) = K \frac{\alpha S + 1}{(\tau_1 S + 1)(\tau^2 S^2 + 2\tau\xi S + 1)} \quad (54)$$

$$P_d(S) = K \frac{e^{-\theta s}}{(\tau_1 S + 1)^2(\tau_2 + 1)} \quad (55)$$

In questo schema sono presenti due regolatori, il C detto regolatore in feedback e il Cf detto regolatore feedforward, le cui azioni regolatrici si sommano generando il segnale di regolazione  $u(t)$  in ingresso a P. Questa tecnica di controllo è utilizzata quando si ha la possibilità di misurare il disturbo  $d$  e quindi tramite il controllo in feedforward anticipare una azione correttiva, che entrerà nel processo e la cui uscita  $y(t)$  subirà in seguito gli effetti del disturbo. Un solo regolatore in feedforward ha lo svantaggio di non potersi accertare che effettivamente il disturbo sia stato compensato in modo corretto, per questo si utilizza insieme ad un regolatore in feedback che produce una ulteriore azione correttiva sulla base dei dati dell'uscita che gli arrivano in ingresso grazie all'anello in retroazione.

P rappresenta il processo, mentre  $P_d$  il disturbo.

Si procede per prima con il progetto del controllore C. C(s) di tipo PID è stato progettato seguendo un tuning di Cohen Coon, in un modo analogo a quanto discusso in precedenza. I parametri del controllore sono risultati essere:

K <sub>c</sub>	$\tau_I$	$\tau_D$
0.6146	8.82	1.4

Table 1: Coefficienti C(S)

### 6.1 Regolatore FeedForward

Per questo regolatore si scompongono le funzioni di trasferimento di partenza secondo una struttura:

$$P(s) = P_M(s)P_{NMP}e^{-\theta s} = P_M(s) \quad (56)$$

La P non possiede ritardo, per cui la componente a fase minima è la P complessiva.

$$P_d(s) = P_{df}(s)e^{-\theta_d s} \quad (57)$$

Essendo  $\theta_d > \theta$  è possibile realizzare il controllore feedforward di tipo ideale, con la seguente struttura:

$$C_{ff}(S) = -\frac{Pd_f(s)e^{-(\theta_d-\theta)s}}{P_M(s)(\lambda s + 1)^k} \quad (58)$$

Il numeratore, essendo  $\theta = 0$  coincide con  $Pd(s)$ . il denominatore presenta  $P_M(s) = P(s)$  e il termine  $(\lambda s + 1)^k$  che si aggiunge qualora ci sia la necessità di aggiungere poli per garantire la causalità del regolatore, in questo caso non serve perchè il sistema è già causale. In conclusione, il regolatore Cff assume la seguente forma:

$$C_{ff}(S) = -\frac{Pd(s)}{P(s)} = \frac{e^{-\theta_d s}}{(\tau_1 s + 1)^2(\tau_2 + 1)} * \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)}{(\alpha s + 1)} \quad (59)$$

Il controllore presenta tre zeri e quattro poli, rispetta la causalità.

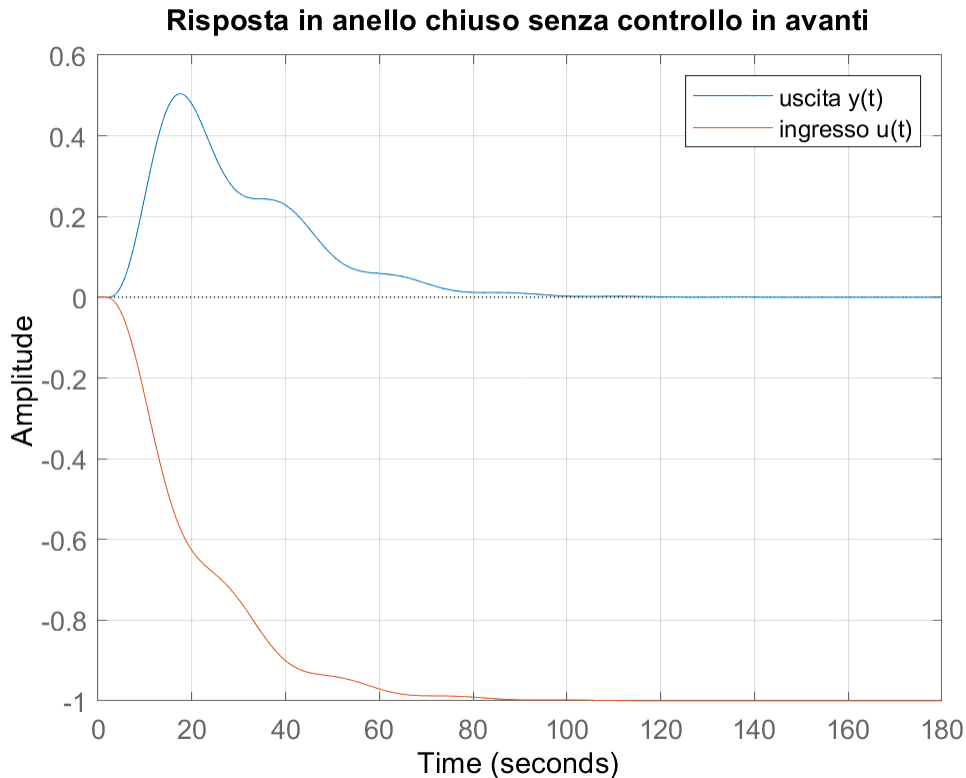
## 6.2 Risposta senza controllo in avanti

In questo caso il controllore feedforward risulta assente, l'azione regolatrice è unicamente affidata al controllore feedback  $C(s)$ .

$Y(s) = \frac{Pd(s)}{1+P(s)C(s)}D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $y(t)$ .

$U(s) = -\frac{C(s)Pd(s)}{1+P(s)C(s)}D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $u(t)$ .

Di cui si riporta la risposta in anello chiuso.



Si nota come entrambe le risposte inizino dopo un certo tempo  $t$ , perchè è presente un ritardo dovuto alla presenza di  $Pd$  in entrambe le funzioni di trasferimento. L'andamento di  $y(t)$  rappresenta la reazione del disturbo in ingresso sull'uscita. Mentre l'andamento di  $u(t)$  rappresenta l'ingresso al processo, che varia assestandosi a un nuovo valore a causa dell'azione compensatrice del regolatore feedback, che varia la sua azione regolatrice per permettere a  $y(t)$  di reiettare il disturbo.

### 6.3 Risposta con controllo in avanti

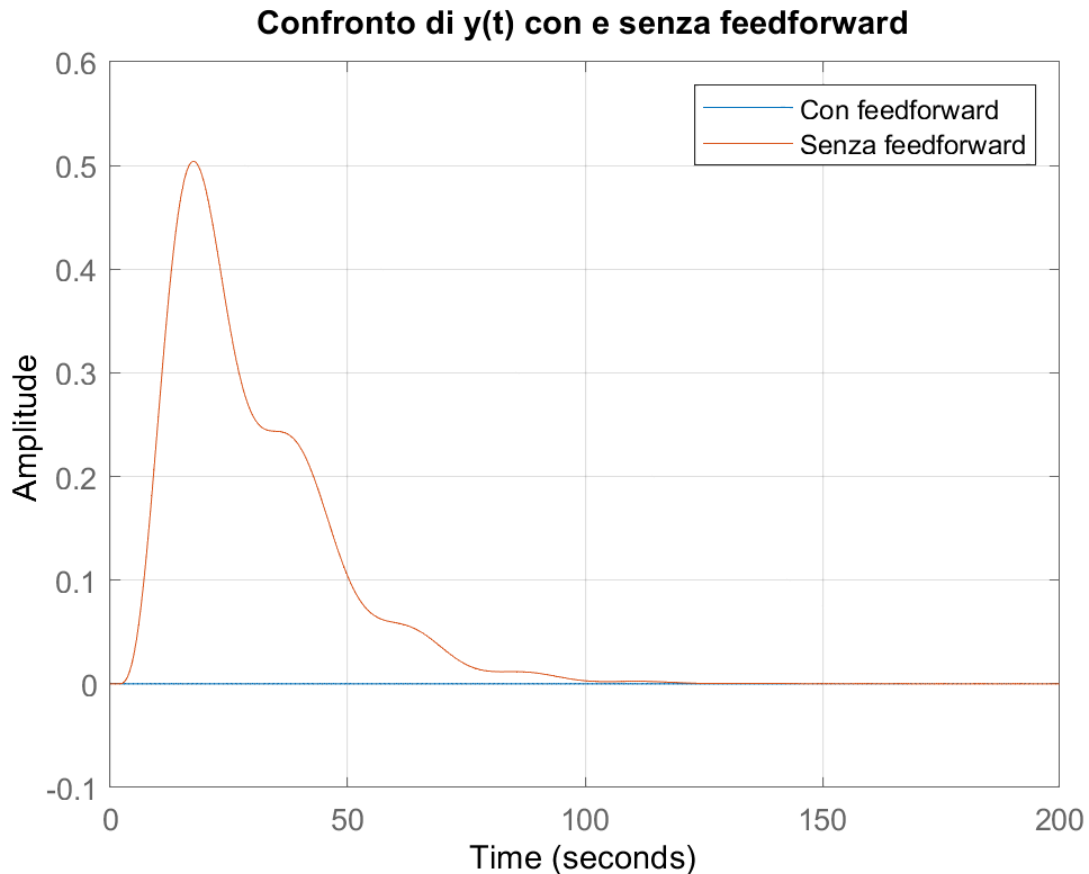
Lo studio della risposta in anello chiuso per ingresso a gradino del disturbo è stata fatta analizzando le seguenti funzioni di trasferimento:

$Y(s) = \frac{P_d(s)+P(s)C_{ff}(s)}{1+P(s)C(s)} D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $y(t)$ .

$U_1(s) = -C(s) \frac{P_d(s)+C_{ff}(s)P(s)}{1+P(s)C(s)} D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $u_1(t)$  del controllore feedback.

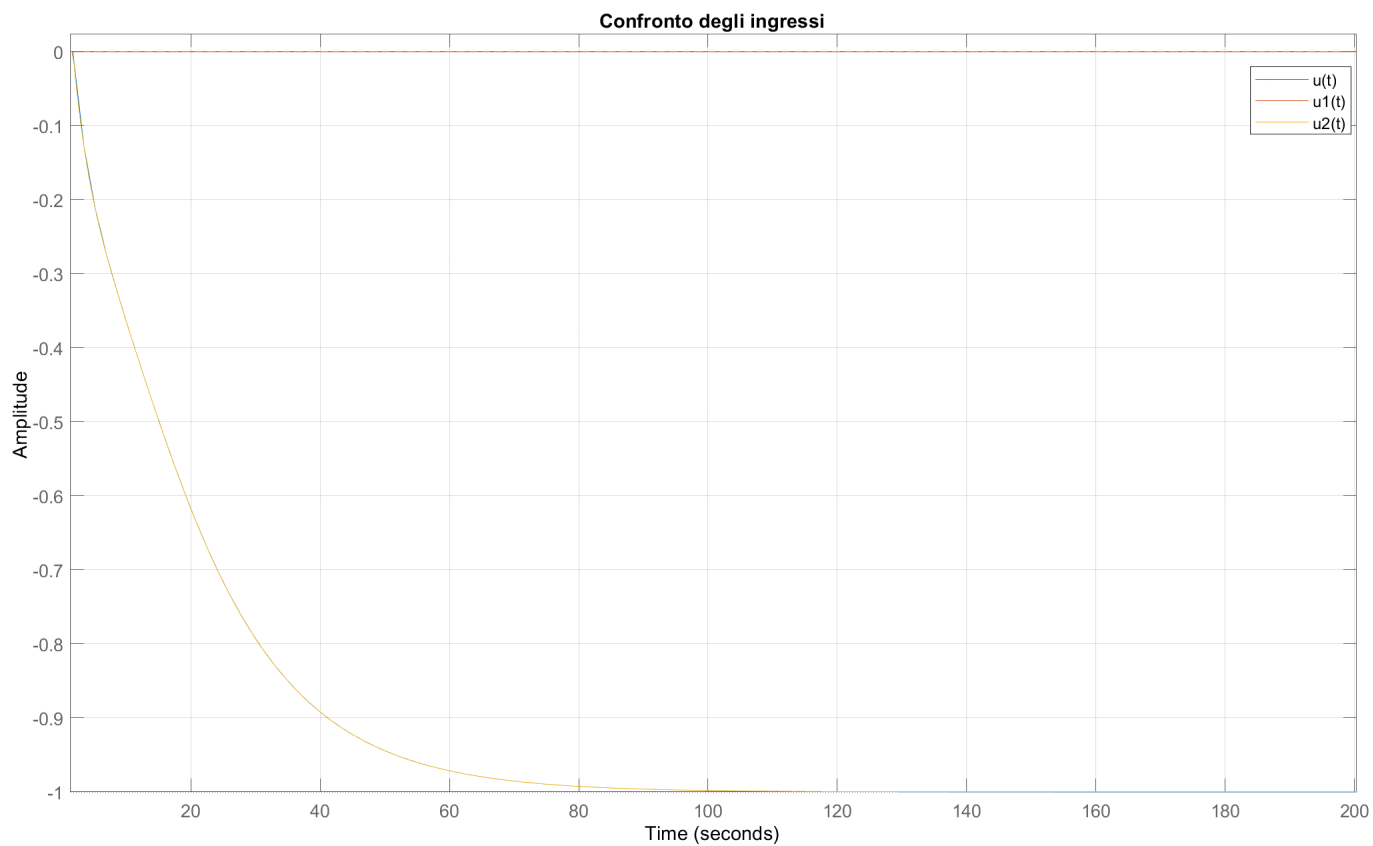
$U_2(s) = C_{ff} D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $u_2(t)$  del controllore feedforward.

$U(s) = U_1(s) + U_2(s) = \frac{C_{ff}(s) - C(s)P_d(s)}{1+P(s)C(s)} D(s)$  funzione di trasferimento che collega il disturbo al segnale  $u(t)$  in ingresso al processo  $P(s)$ .



Si nota come grazie all'azione anticipatrice del controllore feedforward si riesce a evitare un effetto del disturbo sull'uscita, in quanto non è presente la sovraelongazione come accade nel caso in cui questo controllo non si abbia.

Si riporta infine il confronto tra l'azione regolatrice del controllore feedback  $u_1(t)$ , del controllore feedforward  $u_2(t)$  e l'azione regolatrice complessiva  $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$ . L'azione regolatrice complessiva coincide con l'azione regolatrice dovuta al controllore feedforward, l'effetto del regolatore feedback è talmente basso da risultare ininfluenza rispetto al primo regolatore.



A dimostrazione di quanto detto, il controllore in feedback ha un effetto che c'è, ma è di molti ordini di grandezza inferiore rispetto al feedforward al punto di non essere rilevante nel processo.

