

1. Números impares

Resuelve la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n^{(*)}$$

donde

$$x_0 = -1, x_1 = 1$$

Solución:

Podríamos intentar resolver el problema planteando la ecuación resolvente.

$$r^2 = 2r - 1$$

igualando a cero

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Sin embargo, al resolver la ecuación de segundo grado nos damos cuenta de que solo tiene una solución $r = 1$, por lo cual este método no nos lleva a una solución. Otra opción viable es desarrollar la sucesión.

$$x_2 = 2x_1 - x_0 = 2(1) - (-1) = 3$$

$$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2(3) - (1) = 5$$

$$x_4 = 2x_3 - x_2 = 2(5) - (3) = 7$$

\vdots

Podemos observar que la sucesión parecen ser los números impares, por lo cual, una posible solución es $x_n = 2n - 1$, lo cual podemos comprobar al sustituir esta solución en $(*)$.

$$2x_{n+1} - x_n = 2(2(n+1) - 1) - (2n - 1) = 2n + 3 = 2(n+2) - 1 = x_{n+2}$$

2. Problema de enfriamiento

Una taza de café tiene una temperatura inicial de $165F^\circ$, pero se enfría a $155F^\circ$ en un minuto en una habitación con temperatura de $70F^\circ$. Sea T_n la temperatura del café después de n minutos, encuentra una fórmula para T_n y gráficala.

Solución:

Por la ley del enfriamiento se sabe que la diferencia entre la temperatura final y la temperatura inicial de un objeto que se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura inicial y la temperatura ambiental T_a , e.i. existe una k en los reales, tal que

$$T_n - T_{n-1} = k(T_a - T_{n-1})$$

Despejando a k y sustituyendo los datos en la ecuación se obtiene que

$$k = \frac{T_n - T_{n-1}}{T_a - T_{n-1}} = \frac{165 - 155}{70 - 165} = -\frac{10}{95} = -\frac{2}{19}$$

De tal manera que ahora podemos plantear una ecuación en diferencias a partir de

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= \frac{2}{19} (70 - T_{n-1}) \\ \Rightarrow T_n &= \frac{17}{19} T_{n-1} + \frac{140}{19} \end{aligned}$$