FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Probabilidad y Estadistica B

Resumen Probabilidad y Estadistica B
Segundo cuatrimestre de 2021

Índice

1. Axiomas de Probabilidad

Una probabilidad es una funcion de P que a cada evento A le hace corresponder un numero real P(A) con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. Experimentos con resultados equiprobables

2.1. Laplace

Evento A con M elementos y Ω espacio finito de N elementos:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

3. Conteo

3.1. Regla del producto

Sirve para conjunto de pares ordenados entre dos conjuntos A y B: (cada uno de A con cada uno de B)

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\} = card(A) \cdot card(B)$$

3.2. Permutaciones

Sirve para saber de cuantas formas se pueden ordenar n elementos de un conjunto:

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times n$$

3.3. Variaciones

Sirve para subconjuntos ordenados de k elementos, pertenecientes a un conjunto de n elementos, se representa como $(n)_k$:

$$(n)_k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

OBS: se hace con el boton nPr

3.4. Combinaciones

Sirve para subconjuntos sin ordenar de k elementos, pertenecientes a un conjunto de n elementos, se representa como $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

OBS: se hace con el boton nCr

3.5. Bolas y urnas

Sirve para bolas indistinguibles y urnas:

$$\#CP = \binom{B + (U - 1)}{B}$$

OBS: se hace con el boton nPr

4. Teoremas sobre conjuntos de eventos

4.1. Teorema 1

Sea $A(n)$ una sucesion de eventos tales que $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ y $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

4.2. Teorema 2

Sea $A(n)$ una sucesion de eventos tales que $A_{n+1} \subset A_n \forall n$ y $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

4.3. Teorema σ-aditividad

Sea $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ con los eventos A_i mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces:

$$P(A) = P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

5. Relaciones entre dos eventos: probabilidad condicional e independencia

5.1. Probabilidad condicional

Es la probabilidad que un evento A se de, sabiendo que ya se dio el evento B (A dado B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades de la probabilidad condicional

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Si $A \cap C = \emptyset \rightarrow P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$
4. Si $P(B) > 0$:
   - $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$
   - $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(A|B) \cdot P(C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C)$

Teorema de la probabilidad total

Dada una particion de Ω en $B_1, B_2, ..., B_n$ eventos, dado un evento superpuesto A, la probabilidad de A es:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

5.2. Independencia de eventos

Dos eventos son independientes cuando:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esto implica que hay la misma proporcion de B en A que en todo Ω y viceversa.

Propiedades de la independencia de eventos

1. Si A y B son independientes, tambien lo son $\bar{A}$ y B, A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y $\bar{B}$
2. $A_1, A_2, ..., A_n$ son independientes sii para cada subconjunto de mas de dos elementos, la interseccion de los sucesos coincide con el producto de las probabilidades.

5.3. Teorema de Bayes

Sean $B_1, B_2, ..., B_k$ una particion de Ω, A un evento de probabilidad positiva:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Se deduce de la definicion de probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total.

6. Variables aleatorias

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X: $\Omega \to \mathbb{R}$ una funcion, diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Se puede calcular probabilidad como:

$$P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

6.1. Funcion de distribucion

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A., definimos su funcion de distribucion:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta funcion se encarga de acumular probabilidad desde $-\infty$ hasta x.
OBS: $P(A < X \leq B) = F_X(B) - F_X(A)$

Propiedades de la funcion de distribucion

1. $F_X \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. F_X es monotona np decreciente.
3. F_X es continua a derecha.
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

6.2. Soporte de una V.A

El soporte de X es:

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) - F_X(x^-) \neq 0 \vee \frac{dF_X(x)}{dx} \neq 0\}$$

6.3. Variables aleatorias discretas

La variable X tiene una distribucion discreta si hay un conjunto $A \in \mathbb{R}$ finito o infinito numerable, tal que $P(X \in A) = 1$.
Sea para cada $x \in A : p_X(x) = P(X = x)$, se verifica que si $B \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap A} p_X(x)$$

Y en particular:

$$\sum_{x \in A} p_X(x) = 1$$

Y la funcion de distribucion es dado un $B = (-\infty, t]$ resulta:

$$P(X \in B) = P(X \leq t) = F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x)$$

6.4. Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria es continua si:

1. *a*) El conjunto de valores posibles se compone de todos los numeros que hay en un solo intervalo o una union excluyente de estos.
   b) Ninguno de estos valores tiene un valor de probabilidad positivo $P(x = c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. Se dice que X es una variable continua si existe una funcion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada <u>funcion de densidad</u> de probabilidad, que satisface las siguientes condiciones:
   a) $f_X \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
   c) Para cualquier a y b tales que $-\infty < a < b < +\infty$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Teorema

Sea $F_X(x)$ una funcion de distribucion de una V.A.C. (admite derivada), luego:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

OBS: La funcion de densidad solo existe para V.A.C.

6.5. Eventos equivalentes

Dos eventos son equivalentes si acumulan la misma probabilidad. Para V.A.D. significa que ambos eventos tiene la misma probabilidad.

7. Modelos continuos: distribuciones notables

7.1. Distribucion Uniforme

Supongamos una V.A.C. que toma todos los valores sobre un intervalo $[a, b]$. Si $f_X(x)$ esta dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a < X < b \\ \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Se denota como $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

7.2. Distribucion exponencial

Una variable aleatoria tiene una distribucion exponencial de parametro $\lambda > 0$ si su funcion de densidad esta dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Y su funcion de distribucion es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \\ \int_0^\alpha \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \alpha} & e.o.c \end{cases}$$

Propiedades de la exponencial

1. (PERDIDA DE MEMORIA) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $P(X > t + s|X > t) = P(X > s)$ $\forall \quad t, s \in \mathbb{R}$.
2. Si X es una V.A.C. y $P(X > t + s|X > t) = P(X > s)$ $\forall \quad t, s \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

7.3. Funcion de Riesgo (para V.A.C.)

Dada la funcion intensidad de fallas $\lambda(t)$, la funcion de distribucion es:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^\infty \lambda(s)ds} \qquad \text{si } t > 0$$

7.4. Distribucion Gamma

Se dice una V.A tiene distribucion Gamma de parametros λ y k si su funcion de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} \qquad \text{si } \{x > 0\}$$

7.5. Distribucion normal estandar

La V.A. X que toma los valores $-\infty < x < +\infty$ tiene una distribucion normal estandar si su funcion de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Para calcular probabilidades de esta distribucion hay que mirar la tabla o integrar numericamente.

7.6. Cuantil de una V.A

Un cuantil α de X es cualquier numero x_α tal que :

$$P(X < x_\alpha) \leq \alpha \text{ y } P(X > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

8. Funciones de variables aleatorias

Sea $Y = g(X)$ con X una variable aleatoria:
Si X es una V.A.D., Y sera discreta con:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in B} p_x(x) \qquad \text{con} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = y\}$$

Y en general:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y)$$

Y con esta ultima se calcula la probabilidad $\forall y \in \mathbb{R}$

8.1. Simulacion

Sabiendo la distribucion de X y teniendo una variable aleatoria U para generar valores al azar, sabiendo su distribucion, entonces se busca una $F_U(u_i) = F_X(x_i)$, de donde se puede despejar x_i en funcion de u_i. Este despeje se puede hacer mediante la INVERSA GENERALIZADA:

$$F_X^{-1}(u) = min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq u\} \qquad \text{con } u \in (0, 1)$$

Teorema

Si f es una funcion que cumple:

- Ser no decreciente.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- Continua a derecha.

$\Rightarrow X = F^{-1}(U)$ con $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, se tiene que X es una V.A. cuya funcion de de distribucion es la funcion F dada.

9. Truncamiento

Sea X una V.A con $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_{X|X \in A}(x) = P(X \leq x | X \in A) \qquad = \frac{P(X \leq x, X \in A)}{P(X \in A)}$$

Si X es continua, $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

$$\Rightarrow f_{X|X \in A}(x) = \frac{d}{dx} F_{X|X \in A(x)} = \frac{f_X(x)\mathbb{1}\{X \in A\}}{P(X \in A)}$$

10. Vectores Aleatorios

$\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ es un vector aleatorio de dimension n si para cada $j = 1, ..., n$; $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ es una V.A.

10.1. Funcion de distribucion de un vector aleatorio

Sea $\mathbb{X}$ un vector aleatorio de dimension n, definimos la funcion de distribucion de $\mathbb{X}$ como:

$$F_{\mathbb{X}}(\bar{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, ..., X_n \leq x_n)$$

10.2. Propiedades del vector aleatorio ($\mathbb{X} = (X, Y)$)

1. $\lim_{x,y \to \infty} F_{\mathbb{X}}(x) = 1$,