

# Probabilidad y Estadística B

Resumen Probabilidad y Estadística B  
Segundo cuatrimestre de 2021

# Índice

<b>1. Axiomas de Probabilidad</b>	<b>3</b>
<b>2. Experimentos con resultados equiprobables</b>	<b>3</b>
2.1. Laplace . . . . .	3
<b>3. Conteo</b>	<b>3</b>
3.1. Regla del producto . . . . .	3
3.2. Permutaciones . . . . .	3
3.3. Variaciones . . . . .	3
3.4. Combinaciones . . . . .	3
3.5. Bolas y urnas . . . . .	4
<b>4. Teoremas sobre conjuntos de eventos</b>	<b>4</b>
4.1. Teorema 1 . . . . .	4
4.2. Teorema 2 . . . . .	4
4.3. Teorema $\sigma$ -aditividad . . . . .	4
<b>5. Relaciones entre dos eventos: probabilidad condicional e independencia</b>	<b>4</b>
5.1. Probabilidad condicional . . . . .	4
5.2. Independencia de eventos . . . . .	5
5.3. Teorema de Bayes . . . . .	5
<b>6. Variables aleatorias</b>	<b>5</b>
6.1. Funcion de distribucion . . . . .	5
6.2. Soporte de una V.A . . . . .	6
6.3. Variables aleatorias discretas . . . . .	6
6.4. Variables aleatorias continuas . . . . .	6
6.5. Eventos equivalentes . . . . .	6
<b>7. Modelos continuos: distribuciones notables</b>	<b>7</b>
7.1. Distribucion Uniforme . . . . .	7
7.2. Distribucion exponencial . . . . .	7
7.3. Funcion de Riesgo (para V.A.C.) . . . . .	7
7.4. Distribucion Gamma . . . . .	7
7.5. Distribucion normal estandar . . . . .	7
7.6. Cuantil de una V.A . . . . .	8
<b>8. Funciones de variables aleatorias</b>	<b>8</b>
8.1. Simulacion . . . . .	8
<b>9. Truncamiento</b>	<b>8</b>
<b>10. Vectores Aleatorios</b>	<b>8</b>
10.1. Funcion de distribucion de un vector aleatorio . . . . .	9
10.2. Propiedades del vector aleatorio ( $\mathbb{X} = (X, Y)$ ) . . . . .	9
10.3. Funcion de probabilidad de vectores aleatorios discretos (probabilidad conjunta) . . . . .	9
10.3.1. Funciones de probabilidad marginales y de conjuntos . . . . .	9
10.4. Funcion de densidad de un vector aleatorio continuo . . . . .	9
10.4.1. Funciones de densidad marginales . . . . .	9
10.5. Independencia de vectores aleatorios . . . . .	10
10.5.1. Propiedades de la independencia de vectores aleatorios . . . . .	10

<b>11.Momentos</b>	<b>10</b>
11.1. Esperanza . . . . .	10
11.1.1. Propiedades . . . . .	10
11.1.2. CASO GENERAL . . . . .	10
11.2. Esperanza condicional . . . . .	11
11.2.1. Propiedad . . . . .	11
11.3. Varianza . . . . .	11
11.3.1. Propiedad . . . . .	11
11.3.2. Desvio estandar . . . . .	11
11.3.3. Mediana . . . . .	11
11.3.4. Moda . . . . .	11

## 1. Axiomas de Probabilidad

Una probabilidad es una función de  $P$  que a cada evento  $A$  le hace corresponder un número real  $P(A)$  con las siguientes propiedades:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

## 2. Experimentos con resultados equiprobables

### 2.1. Laplace

Evento  $A$  con  $M$  elementos y  $\Omega$  espacio finito de  $N$  elementos:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

## 3. Conteo

### 3.1. Regla del producto

Sirve para conjunto de pares ordenados entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ : (cada uno de  $A$  con cada uno de  $B$ )

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

### 3.2. Permutaciones

Sirve para saber de cuantas formas se pueden ordenar  $n$  elementos de un conjunto:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

### 3.3. Variaciones

Sirve para subconjuntos ordenados de  $k$  elementos, pertenecientes a un conjunto de  $n$  elementos, se representa como  $(n)_k$ :

$$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**OBS:** se hace con el botón  $nPr$

### 3.4. Combinaciones

Sirve para subconjuntos sin ordenar de  $k$  elementos, pertenecientes a un conjunto de  $n$  elementos, se representa como  $\binom{n}{k}$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**OBS:** se hace con el botón  $nCr$

### 3.5. Bolas y urnas

Sirve para bolas indistinguibles y urnas:

$$\#CP = \binom{B + (U - 1)}{B}$$

**OBS:** se hace con el boton  $nPr$

## 4. Teoremas sobre conjuntos de eventos

### 4.1. Teorema 1

Sea  $A(n)$  una sucesion de eventos tales que  $A_n \subset A_{n+1} \forall n$  y  $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

### 4.2. Teorema 2

Sea  $A(n)$  una sucesion de eventos tales que  $A_{n+1} \subset A_n \forall n$  y  $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$  :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

### 4.3. Teorema $\sigma$ -aditividad

Sea  $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  con los eventos  $A_i$  mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## 5. Relaciones entre dos eventos: probabilidad condicional e independencia

### 5.1. Probabilidad condicional

Es la probabilidad que un evento  $A$  se de, sabiendo que ya se dio el evento  $B$  ( $A$  dado  $B$ ):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

#### Propiedades de la probabilidad condicional

1.  $0 \leq P(A|B) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$
2.  $P(\Omega|B) = 1$
3. Si  $A \cap C = \emptyset \rightarrow P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$
4. Si  $P(B) > 0$  :
  - $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(A|B) \cdot P(C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C)$

**Teorema de la probabilidad total**

Dada una partición de  $\Omega$  en  $B_1, B_2, \dots, B_n$  eventos, dado un evento superpuesto  $A$ , la probabilidad de  $A$  es:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

**5.2. Independencia de eventos**

Dos eventos son independientes cuando:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esto implica que hay la misma proporción de  $B$  en  $A$  que en todo  $\Omega$  y viceversa.

**Propiedades de la independencia de eventos**

1. Si  $A$  y  $B$  son independientes, también lo son  $\bar{A}$  y  $B$ ,  $A$  y  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$
2.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son independientes si y solo si para cada subconjunto de más de dos elementos, la intersección de los sucesos coincide con el producto de las probabilidades.

**5.3. Teorema de Bayes**

Sean  $B_1, B_2, \dots, B_k$  una partición de  $\Omega$ ,  $A$  un evento de probabilidad positiva:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Se deduce de la definición de probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total.

**6. Variables aleatorias**

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función, diremos que  $X$  es una variable aleatoria si  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Se puede calcular probabilidad como:

$$P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

**6.1. Función de distribución**

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X$  una V.A., definimos su función de distribución:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta función se encarga de acumular probabilidad desde  $-\infty$  hasta  $x$ .

**OBS:**  $P(A < X \leq B) = F_X(B) - F_X(A)$

**Propiedades de la función de distribución**

1.  $F_X \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
2.  $F_X$  es monótona no decreciente.
3.  $F_X$  es continua a derecha.
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

## 6.2. Soporte de una V.A

El soporte de  $X$  es:

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) - F_X(x^-) \neq 0 \vee \frac{dF_X(x)}{dx} \neq 0\}$$

## 6.3. Variables aleatorias discretas

La variable  $X$  tiene una distribución discreta si hay un conjunto  $A \in \mathbb{R}$  finito o infinito numerable, tal que  $P(X \in A) = 1$ .

Sea para cada  $x \in A : p_X(x) = P(X = x)$ , se verifica que si  $B \subset \mathbb{R}$ :

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap A} p_X(x)$$

Y en particular:

$$\sum_{x \in A} p_X(x) = 1$$

Y la función de distribución es dado un  $B = (-\infty, t]$  resulta:

$$P(X \in B) = P(X \leq t) = F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x)$$

## 6.4. Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria es continua si:

1.
  - a) El conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo o una unión excluyente de estos.
  - b) Ninguno de estos valores tiene un valor de probabilidad positivo  $P(x = c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. Se dice que  $X$  es una variable continua si existe una función  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada función de densidad de probabilidad, que satisface las siguientes condiciones:
  - a)  $f_X \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
  - c) Para cualquier  $a$  y  $b$  tales que  $-\infty < a < b < +\infty$ :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Teorema

Sea  $F_X(x)$  una función de distribución de una V.A.C. (admite derivada), luego:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

**OBS:** La función de densidad solo existe para V.A.C.

## 6.5. Eventos equivalentes

Dos eventos son equivalentes si acumulan la misma probabilidad. Para V.A.D. significa que ambos eventos tienen la misma probabilidad.

## 7. Modelos continuos: distribuciones notables

### 7.1. Distribucion Uniforme

Supongamos una V.A.C. que toma todos los valores sobre un intervalo  $[a, b]$ . Si  $f_X(x)$  esta dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < X < b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Se denota como  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

### 7.2. Distribucion exponencial

Una variable aleatoria tiene una distribucion exponencial de parametro  $\lambda > 0$  si su funcion de densidad esta dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Y su funcion de distribucion es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} & \text{e.o.c} \end{cases}$$

#### Propiedades de la exponencial

1. (PERDIDA DE MEMORIA) Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  entonces  $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$   $\forall t, s \in \mathbb{R}$ .
2. Si  $X$  es una V.A.C. y  $P(X > t + s | X > t) = P(X > s) \forall t, s \in \mathbb{R}^+$  entonces existe  $\lambda > 0$  tal que  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

### 7.3. Funcion de Riesgo (para V.A.C.)

Dada la funcion intensidad de fallas  $\lambda(t)$ , la funcion de distribucion es:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \quad \text{si } t > 0$$

### 7.4. Distribucion Gamma

Se dice una V.A tiene distribucion Gamma de parametros  $\lambda$  y  $k$  si su funcion de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} \quad \text{si } \{x > 0\}$$

### 7.5. Distribucion normal estandar

La V.A.  $X$  que toma los valores  $-\infty < x < +\infty$  tiene una distribucion normal estandar si su funcion de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Para calcular probabilidades de esta distribucion hay que mirar la tabla o integrar numericamente.



## 7.6. Cuantil de una V.A

Un cuantil  $\alpha$  de  $X$  es cualquier numero  $x_\alpha$  tal que :

$$P(X < x_\alpha) \leq \alpha \text{ y } P(X > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

## 8. Funciones de variables aleatorias

Sea  $Y = g(X)$  con  $X$  una variable aleatoria:  
Si  $X$  es una V.A.D.,  $Y$  sera discreta con:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in B} p_X(x) \quad \text{con} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = y\}$$

$Y$  en general:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y)$$

$Y$  con esta ultima se calcula la probabilidad  $\forall y \in \mathbb{R}$

### 8.1. Simulacion

Sabiendo la distribucion de  $X$  y teniendo una variable aleatoria  $U$  para generar valores al azar, sabiendo su distribucion, entonces se busca una  $F_U(u_i) = F_X(x_i)$ , de donde se puede despejar  $x_i$  en funcion de  $u_i$ . Este despeje se puede hacer mediante la INVERSA GENERALIZADA:

$$F_X^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq u\} \quad \text{con } u \in (0, 1)$$

### Teorema

Si  $f$  es una funcion que cumple:

- Ser no decreciente.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- Continua a derecha.

$\Rightarrow X = F^{-1}(U)$  con  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , se tiene que  $X$  es una V.A. cuya funcion de de distribucion es la funcion  $F$  dada.

## 9. Truncamiento

Sea  $X$  una V.A con  $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_{X|X \in A}(x) = P(X \leq x | X \in A) = \frac{P(X \leq x, X \in A)}{P(X \in A)}$$

Si  $X$  es continua,  $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

$$\Rightarrow f_{X|X \in A}(x) = \frac{d}{dx} F_{X|X \in A}(x) = \frac{f_X(x) \mathbb{1}\{X \in A\}}{P(X \in A)}$$

## 10. Vectores Aleatorios

$\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio de dimension  $n$  si para cada  $j = 1, \dots, n$ ;  $X_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una V.A.

### 10.1. Funcion de distribucion de un vector aleatorio

Sea  $\mathbb{X}$  un vector aleatorio de dimension  $n$ , definimos la funcion de distribucion de  $\mathbb{X}$  como:

$$F_{\mathbb{X}}(\bar{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_n \leq x_n)$$

### 10.2. Propiedades del vector aleatorio ( $\mathbb{X} = (X, Y)$ )

1.  $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F_{\mathbb{X}}(x) = 1$ ,
2.  $F_{\mathbb{X}}(x)$  es monotona no decreciente en cada variable.
3.  $F_{\mathbb{X}}(x)$  es continua a derecha en cada variable.
4.  $P((X, Y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = F_{\mathbb{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbb{X}}(b_1, a_2) - F_{\mathbb{X}}(a_1, b_2) + F_{\mathbb{X}}(a_1, a_2)$

### 10.3. Funcion de probabilidad de vectores aleatorios discretos (probabilidad conjunta)

Sean  $X$  e  $Y$  dos V.A.D definidas en el espacio muestral  $\Omega$  de un experimento. La funcion de probabilidad conjunta se define para cada par de numeros  $(x, y)$  como:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Debe cumplirse que:

1.  $p_{X,Y}(x, y) \geq 0$
2.  $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$

#### 10.3.1. Funciones de probabilidad marginales y de conjuntos

Para el caso de las variables aleatorias recién mencionadas, sus funciones de probabilidad marginales están dadas por:

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

Para el caso de cualquier conjunto  $A$  compuesto por pares de valores  $(x, y)$  entonces:

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} \sum p_{X,Y}(x, y)$$

### 10.4. Funcion de densidad de un vector aleatorio continuo

Sean  $X$  e  $Y$  V.A.C una funcion de densidad de probabilidad conjunta  $f_{X,Y}(x, y)$  de estas dos variables es una funcion que satisface:

1.  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$

#### 10.4.1. Funciones de densidad marginales

Para calcular las funciones de densidad marginales de  $X$  e  $Y$ :

1.  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$
2.  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$

## 10.5. Independencia de vectores aleatorios

Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio, las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes si y solo si:

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \forall A, B$$

### 10.5.1. Propiedades de la independencia de vectores aleatorios

1. Se dice que  $X_1 \dots X_n$  son V.A independientes si

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

2. Se dice que las V.A discretas  $X_1, \dots, X_n$  independientes si

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

3. Se dice que las V.A continuas  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

## 11. Momentos

### 11.1. Esperanza

Es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una V.A. (centro de masa") Sea  $X$  una V.A.D con funcion de probabilidad  $p_X(x)$ , el valor esperado (o media) de  $X$  es:

1. Para discretas:

$$E(X) = \sum_{x \in R_x} x \cdot p_X(x)$$

2. Para continuas:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

#### 11.1.1. Propiedades

1. El valor de la esperanza de cualquier funcion  $h(x)$  (una V.A.) se calcula como:

- a) Para discretas:

$$E(h(x)) = \sum_{x \in R_x} h(x) \cdot p_x(x)$$

- b) Para continuas:

$$E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_x(x) dx$$

2. Sea  $X$  una V.A. con  $E(X) = \mu$  si  $h(x) = aX + b \rightarrow E(h(X)) = a\mu + b$

#### 11.1.2. CASO GENERAL

Sea  $X$  una V.A. con funcion de distribucion  $F_X(x) = P(X \leq x)$  si  $h(X)$  es una funcion cualquiera de  $X$ , si definimos  $A$  como el conjunto de atomos (valores de  $X$  que concentren masa positiva), entonces:

$$E[h(X)] = \sum_{x \in A} h(x) \cdot P(X = x) + \int_{\mathbb{R}/A} h(x) \cdot F'_X(x) dx$$

## 11.2. Esperanza condicional

$$E[X|X \in A] = \frac{E[X \mathbb{1}_{X \in A}]}{P(X \in A)}$$

Si despejo, y pienso en una particion tenemos:

$$E(X) = E[X|X \in A] \cdot P(X \in A) + E[X|X \in \bar{A}] \cdot P(X \in \bar{A})$$

### 11.2.1. Propiedad

Otra manera para calcular la esperanza que puede ser util:

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx$$

## 11.3. Varianza

Sea  $X$  una V.A, definimos la varianza  $X$  como:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

### 11.3.1. Propiedad

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$

Si  $E(X) = \mu$

$$\rightarrow Var(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

### 11.3.2. Desvio estandar

Se define como la raiz cuadrada de la varianza de una V.A.:

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$$

### 11.3.3. Mediana

Es el valor de  $X$  que acumula una probabilidad de 0.5 (es el cuantil 0.5) :  $X/F_X(x) = 0,5$

### 11.3.4. Moda

Es el valor de  $X$  con mayor probabilidad.