Resumen Análisis III

1. Números complejos

Propiedades básicas

- $Arg(Z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & b \geq 0\ ;\ a < 0 \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & b < 0\ ;\ a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & b > 0\ ;\ a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & b < 0\ ;\ a = 0 \end{cases}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $z.\bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$
- $arg(\dfrac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $|\dfrac{z}{z}| = \dfrac{|z|}{|z|}$
- $|z|^n = |z^n|$
- $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$
- $z^{-1} = \dfrac{1}{z^2} \cdot |\bar{z}|$
- $arg(z^{-1}) = -arg(z)$
- Desigualdad Triangular:
    - $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
    - $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$; $z_1 \geq z_2$

Forma exponencial

La forma exponencial de un numero complejo es:

$$re^{i\theta} = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)$$

Observaciones

$$|e^{i\theta}| = 1 \qquad e^{(i\theta)-1} = e^{i-\theta}$$
$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta)} \qquad e^{i\theta} = e^{(i\theta+2k\pi)}$$

Potencias y raíces

Potencias:

$z = x + iy \Rightarrow z^n = (x+iy)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}(iy)^k$

Pero es mejor encarar el problema de la forma exponencial:

$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\theta}$

Raíces:

$\sqrt[n]{z}$? Buscamos: $w / w^n = z$

La solucion es de la forma $= \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{R} \end{cases}$

Funciones Complejas:

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con u y v campos escalares reales.

$f(z) = f(re^{i\theta}) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$

Limite

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0: punto de acumulacion de D.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que :

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z-l)| < \epsilon z \in D$$

Propiedades:

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z_0 - l)| = 0$

- El limite se comporta de forma esperada con las operaciones basicas.
- $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z)) = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$