

Тема: «Полиномиальная интерполяция. Интерполяция кубическими сплайнами»

Любая непрерывная функция на замкнутом интервале может быть хорошо приближена некоторым полиномом.

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$ степень которого не больше n и выполняются условия: $L_n(x) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$. Будем искать $L_n(x)$ в виде:

$$L_n(x) = p_0(x)y_0 + p_1(x)y_1 + \dots + p_n(x)y_n = \sum_{i=0}^n p_i(x)y_i,$$

где $p_i(x)$ — многочлен степени, т. е. $p_i(x)$ только в одной точке отличен от нуля при $i = j$, а в остальных точках он обращается в нуль. Следовательно, все эти точки являются для него корнями:

$$p_i(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n);$$

при $x = x_i$,

$$p_i(x_i) = c(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n);$$
$$c = [(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)]^{-1};$$

подставим c в формулу $p_i(x)$
получим:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

отсюда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i.$$

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа. По исходной таблице формула позволяет весьма просто составить внешний вид многочлена.

Задания:

1) Для заданной функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ построить на отрезке $[-1, 1]$ ее график вместе с графиком интерполяционного полинома Лагранжа для различных значений n :

а) с равноотстоящими узлами;

б) с чебышевскими узлами.

2) Исследовать (по графикам) отклонение ИП от исходной функции для функций $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционного многочлена. Этого можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей. При этом в точках стыка будет разрывна первая производная интерполяционных многочленов. В этом случае пользуются особым видом кусочно-полиномиальной интерполяцией - интерполяцией сплайнами.

Определение. Функция $S_m(x)$ называется интерполяционным сплайном порядка m для функции $f(x)$, заданной таблицей

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

если:

1) на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) $S(x)$ является многочленом порядка m ;

2) $S(x)$ и ее производные до $(m-1)$ -го порядка включительно непрерывны на $[x_0; x_n]$;

3) $S(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) — непосредственно условие интерполяции.

Можно доказать, что эти условия достаточны для существования сплайна порядка m ($m \geq 2$), но не гарантируют его единственности.

Пример 4.7. Построить кубический сплайн для функции $y=f(x)$, заданной таблицей

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительными условиями: $S'(-1) = S'(2) = 0$. Найти с помощью $S(x)$ значение функции $y=f(x)$ при $x=0,3$. (Заметим, что в основу таблицы положена функция $y=2^x$).

Учитывая, что $c_0 = c_3 = 0$, систему (4.52) сведем всего к двум уравнениям:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = \frac{3}{2}; \\ c_1 + 4c_2 = 3. \end{cases}$$

Ее решение (будем в этом простейшем примере вести решение в простых дробях):

$$c_1 = \frac{1}{5}; \quad c_2 = \frac{7}{10}.$$

Далее находим по (4.51) значение коэффициентов d_i :

$$d_1 = \frac{1}{15}; \quad d_2 = \frac{1}{6}; \quad d_3 = -\frac{7}{30}.$$

Теперь по формулам (4.48) находим коэффициенты b_i :

$$b_1 = \frac{19}{30}; \quad b_2 = \frac{23}{15}; \quad b_3 = \frac{67}{30}.$$

Поскольку значения коэффициентов a_i — значения функции из таблицы (см. (4.42)), то сплайн построен:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, & x \in [-1; 0]; \\ P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x-1) + \frac{7}{10}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3, & x \in [0; 1]; \\ P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)^3, & x \in [1; 2]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия непрерывности $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ в точках $x=0$ и $x=1$ выполнены.

Для нахождения значения интерполирующей функции в заданной точке $x=0,3$ заметим, что $0,3 \in [0; 1]$, и поэтому используем многочлен $P_2(x)$: $P_2(0,3) \approx 1,2125$. Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера: $2^{0,3} = 1,2311$.

Задания:

- 1) Для заданной функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ построить на отрезке $[-1, 1]$ ее график вместе с графиком кубического сплайна для различных значений n . Исследовать (по графикам) отклонение кубического сплайна от исходной функции.
- 2) Построить кубический сплайн для функции, заданной таблицей. Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках. Построить график кубического сплайна и отобразить на нем узловые точки :

x	2	3	5	7
f(x)	4	-2	6	-3