Тема: «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.».

Одна из задач, часто встречающихся в научных вычислениях — это решение системы линейных уравнений, при этом обычно число уравнений равно числу неизвестных. Эту систему можно представить в матричном виде: $Ax = b$.

Существует несколько основных способов решения таких систем.

Правило Крамера, согласно которому все компоненты решения представляются отношениями определителей с различными числителями и общим знаменателем. Если бы нам потребовалось решить систему, состоящую из 20 уравнений таким способом, то пришлось бы при вычислении определителей произвести $21 \times 20! \times 19$ умножений, плюс примерно такое же число сложений. Кроме того, правило Крамера часто ведет к чрезмерным ошибкам округления.

Часто для решения систем линейных уравнений используют матричный метод (метод обратной матрицы), т. е. $x = A^{-1}b$.Однако во многих практических задачах вовсе необязательно, а даже нежелательно использовать обратную матрицу.

Вследствие этого обратим внимание на прямое решение систем линейных уравнений.

Важно различать два типа матриц:

1. *Хранимая матрица*, т. е. матрица, все n^2 элементов которой хранятся в оперативной памяти машины.
2. *Разреженная матрица,* т. е. матрица большинство элементов которой нули, а ненулевые элементы которой могут храниться какой-либо специальной структуры данных или регенерироваться по мере необходимости.

Эти два типа матриц могут пересекаться. Хранимая матрица может иметь много нулевых элементов, т. е. быть в то же время и разреженной. Однако, если для нулевых элементов отводится место в оперативной памяти, то разреженность неважна. Очень большая неразреженная матрица может храниться на внешней памяти и вследствие этого требовать более изощренных способов обработки. *Ленточная матрица* — это матрица, все ненулевые элементы которой находятся вблизи главной диагонали.

Линейные системы с хранимыми матрицами.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с хранимой матрицей $n \times n$-матрицей A и векторами b и x порядка n. Пусть A-невырожденная матрица.

Рассмотрим метод последовательных исключения неизвестных (метод Гаусса).

При его применении важны два аспекта: выбор ведущего элемента и надлежащая интерпретация влияния ошибок округления.

В общем случае гауссово исключение состоит из двух этапов: *прямого хода* и *обратной подстановки*. Прямой ход состоит из $n-1$ шагов. На k шаге кратные k-го уравнения вычитаются из оставшихся уравнений с целью исключить k-ое неизвестное.

При выборе ведущего элемента важно сделать так, чтобы множители по абсолютной величине не превосходили 1. Это можно обеспечить с помощью *частичного выбора ведущего элемента*. На k-ом шаге прямого хода в качестве ведущего берется наибольший элемент (по абсолютной величине) в не приведённой части k-го столбца. Строка, содержащая этот элемент переставляется с k-ой строкой, чтобы перевести элемент в позицию (k, k). Такие же перестановки должны производиться и с элементами правой части b. Неизвестные в векторе x не переупорядочиваются, поскольку столбцы в A не переставлялись. Если до начала исключений столбец или строка в A умножались на масштабирующий множитель, то проделывают компенсирующее изменение вычисленного решения. Обычная практика заключается в том, чтобы уравновесить матрицу, так чтобы максимальные элементы каждой строки и каждого столбца были примерно одной величины. Однако проблема построения гарантированного масштабирующего алгоритма пока не решена.

Ошибки округления, совершенные в процессе вычислений, почти всегда приводят к тому, что вычисленное решение (x_*) в определенной степени отличается от теоретического. Действительно оно и должно отличаться, так как компоненты вектора x обычно не являются числами с плавающей точкой.

Имеются две общие меры отклонения для x_* (ошибка и невязка):

$e = x - x_*; r = b - Ax_*$. Теория матриц говорит, что если одна из этих величин равна нулю, то и другая равна нулю. Итак, Гауссово исключение с частичным выбором ведущего элемента гарантированно дает малые невязки.

***Упражнения*:**

Решить систему методом Гаусса и найти невязки (значения разностей между свободными членами и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных):

а) $\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41; \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44; \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4,43x_1 - 7,21x_2 + 8,05x_3 + 1,23x_4 - 2,56x_5 = 2,62; \\ -1,29x_1 + 6,47x_2 + 2,96x_3 + 3,22x_4 + 6,12x_5 = -3,97; \\ 6,12x_1 + 8,31x_2 + 9,41x_3 + 1,78x_4 - 2,88x_5 = -9,12; \\ -2,57x_1 + 6,93x_2 - 3,74x_3 + 7,41x_4 + 5,55x_5 = 8,11; \\ 1,46x_1 + 3,62x_2 + 7,83x_3 + 6,25x_4 - 2,35x_5 = 7,23. \end{cases}$

Примечание. Чтобы уменьшить влияние ошибок округления и исключить деление на нуль на каждом этапе прямого хода, уравнения системы необходимо переставлять так, чтобы деление проводилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент. Таким образом, в начале каждого этапа прямого хода решения системы следует добавить логику перестановки строк для выполнения приведенного условия.