Тема: «Метод прогонки решения СЛАУ»

Метод Гаусса является не единственным точным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. Если матрица системы имеет какое-либо особое свойство, то естественно стремление построить метод, использующий это свойство, т. е. более эффективный.

Например, матрица высокого порядка почти полностью состоит из нулей. Точнее говоря, ненулевыми элементами матрицы могут быть только элементы главной диагонали и двух других диагоналей, находящихся над главной диагональю и под ней. Такую матрицу называют трехдиагональной. Итак, матрица системы $Ax=b$ имеет вид:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

При решении такой системы методом Гаусса происходит переход к равносильной системе с треугольной матрицей, в которой почти половина элементов равна нулю. Однако вопреки этому, после первых же шагов нули, уже имеющиеся в большом количестве в матрице ненужным преобразованиям.

Метод прогонки, который изложен ниже, изначально свободен от преобразования нулевых элементов основной матрицы системы в силу этого более эффективен в данном случае.

При решении систем данного вида на ЭВМ матрицу почти пустую для большой системы целесообразно заменить тремя линейными массивами, составленных из чисел, стоящих на ненулевых диагоналях.

$$\alpha=a_{i,i-1}\left(i=2,...,n\right);\ \beta=a_{i,i}\left(i=1,...,n\right);\ \gamma=a_{i,i+1}\left(i=1,...,n-1\right).$$

При этом экономится значительная часть памяти, и автоматически исключаются манипуляции с нулевыми элементами матрицы.

В новых обозначениях систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \beta_1 x_1+\gamma_1 x_2=b_1; \\ \alpha_i x_{i-1}+\beta_i x_i+\gamma_i x_{i+1}=b_i \quad \left(i=2,...,n-1\right); \\ \alpha_n x_{n-1}+\beta_n x_n=b_n. \end{cases}$$

Будем искать решение системы в виде рекуррентной формулы:

$x_i = c_{i+1}x_{i+1} + d_{i+1}\left(i = 1,2,...,n\right)$, (*) в которой c_{i+1} - коэффициенты, подлежащие определению. Для их нахождения понизим формально индекс в формуле.

$x_{i-1} = c_i x_i + d_i = c_i\left(c_{i+1}x_{i+1} + d_{i+1}\right) + d_i\left(i = 1,2,...,n\right)$, подставив это все в систему, получим:

$$\left[\ c_{i+1}\left(\alpha_i c_i + \beta_i\right) + \gamma_i\ \right] x_{i+1} + \left[\ d_{i+1}\left(\alpha_i c_i + \beta_i\right) + \left(\alpha_i d_i - b_i\right)\ \right] = 0.$$

Итак, $c_{i+1} = \dfrac{-\gamma_i}{\left(\alpha_i c_i + \beta_i\right)}$; $d_{i+1} = \dfrac{b_i - \alpha_i d_i}{\left(\alpha_i c_i + \beta_i\right)}$ (**) - рекуррентные формулы для определения коэффициентов c_i, d_i.

Процедура решения системы методом прогонки в целом выглядит так: в начале по рекуррентным формулам (**) находят коэффициенты c_i, d_i (этап прямой прогонки),а затем по формулам (*) определяют неизвестные x_i (этап обратной прогонки).

Для использования этих формул нужны стартовые значения:

$$c_2 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1},\ d_2 = \frac{b_1}{\beta_1},\ x_n = \frac{b_n - \alpha_n d_n}{\alpha_n c_n + \beta_n}.$$

Пример 3.9. Решить методом прогонки систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_3 + x_4 + x_5 = -2; \\ 3x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

Сравнивая с (3.8), выпишем массивы коэффициентов:

$$\alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 3;$$
$$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 4,\ \beta_3 = -2,\ \beta_4 = 1,\ \beta_5 = -1;$$
$$\gamma_1 = 3,\ \gamma_2 = -1,\ \gamma_3 = 1,\ \gamma_4 = 1;$$
$$b_1 = 5,\ b_2 = 1,\ b_3 = 3,\ b_4 = -2,\ b_5 = -1.$$

Находим c_2 и d_2: $c_2 = -\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} = -3,\ d_2 = -\dfrac{b_1}{\beta_1} = 5.$

Далее последовательно находим по формулам (3.11) (здесь и далее вычисления ведутся с точностью, отраженной в записанных значащих цифрах):

$$c_3 = 0{,}1000;\ c_4 = 0{,}5555;\ c_5 = -0{,}6429;$$
$$d_3 = 1{,}1000;\ d_4 = 2{,}3333;\ d_5 = -2{,}7858.$$

На этом прямая прогонка завершена и начинаем обратную прогонку. Находим x_5:

$$x_5 = \frac{b_5 - \alpha_5 d_5}{\alpha_5 c_5 + \beta_5} = -2{,}5122.$$

Далее последовательно находим по формуле (3.9):

$$x_4 = -1{,}1707;\ x_3 = 1{,}6830;\ x_2 = 1{,}2683;\ x_1 = 1{,}1951.$$

Упражнение.

Составить решение системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки с пооперационным учетом вычислительных погрешностей.