

# Lecture Notes

für Studierende der Studiengänge Embedded Systems Engineering,  
Mirkosystemtechnik und Sustainable Systems Engineering

Andreas Greiner und Lars Pastewka  
Professur für Simulation  
Institut für Mikrosystemtechnik  
Universität Freiburg



16. September 2021



# **Teil I**

## **Differentialgleichungen**



## Lernziele:

- Verständnis der Klassifizierung unterschiedlicher Differenzialgleichungen
- Benutzung unterschiedlicher Typen von Gleichungen zur Modellierung von Phänomenen
- Analytische und numerische Lösungen und deren Visualisierung und Interpretationen

Die meisten Phänomene denen wir in den Ingenieurwissenschaften begegnen, werden sehr gut durch Differentialgleichungen beschrieben. Lineare zeitinvariante System der Systemtheorie (LTI-Systeme) im Zeitbereich, werden durch ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODE = ordinary differential equation) mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher beschrieben. Ein Diffusionsprozess, wie z.B. der Wärmetransport in einem Bauteil auf einem Kühlkörper, das einer Wärmequelle ausgesetzt ist, ist ein Phänomen das am Besten mit einer partiellen Differentialgleichung (PDE = partial differential equation) beschrieben wird.

## Literatur:

- J. Brenner und P. Lesky, Mathematik für Ingenieure und naturwissenschaftler I-IV. Dies ist ein sehr umfassendes Werk mit vielen Beispielen. Band III enthält Kapitel über Differentialgleichungen, Band IV über Fourier- und Laplacetransformationen aber auch vieles mehr. Einer der Autoren dieses Manuskripts (A.G.) hatte die Ehre die Vorlesungsreihe bei Peter Albin Lesky<sup>1</sup> hören zu dürfen und ist heute noch von seiner didaktischen Kunst beeindruckt.
- V. I. Arnol'd, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Formal, kurze Darstellung.
- G. Baker, Differential equations as models in science and engineering. Sehr viele anwendungsbezogene Beispiele.
- Frank Ayres, Differentialgleichungen. 1900 ausführliche Lösungsbeispiele.
- J. Jäckle, Einführung in die Transporttheorie. Dies wurde als Grundlage für das Kapitel über die Theorie der linearen Antwort genommen.
- H. Haken, Advanced Synergetics, 2nd printing, Springer 1987. Für das Kapitel über die Adiabatische Elimination in Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen. Diese Buch geht weit über das hier dargestellte hinaus und behandelt Anwendungen des von H. Haken entwickelten Formalismus auf zahlreiche naturwissenschaftliche Phänomene. Besonders zu empfehlen.
- Mary L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, Wiley 2005. Sehr anwendungsorientiert mit vielen Anwendungsbeispielen. Kompendium zu Höherer Mathematik

---

<sup>1</sup>Peter Albin Lesky (\* 6. Dezember 1926 in Graz; † 12. Februar 2008 in Innsbruck) war ein österreichischer Mathematiker ([https://de.wikipedia.org/wiki/Peter\\_Albin\\_Lesky](https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Albin_Lesky)).

- K. Meyberg und P. Vachenauer, Höhere Mathematik 2, Springer 1997. Sehr mathematisch gehalten mit Merkboxen zum Vorgehen bei der Lösung von Differentialgleichungen.
- Harumi Hattori, Partial differential equations: methods, applications and theories, World Scientific 2019

Dies ist eine sehr eingeschränkte Sicht auf die Literatur. Diese Liste wird, wie das ganze Manuskript, ständig erweitert werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>iii</b>
<b>1</b>	<b>Erinnerung an die ...</b>	<b>1</b>
1.1	Sätze der Differential- und Integralrechnung . . . . .	1
1.2	Taylorreihe . . . . .	2
1.3	Lineare Algebra . . . . .	3
1.3.1	Der Vektorraum . . . . .	4
1.3.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis . . . . .	5
1.3.3	Der Rang einer Matrix . . . . .	5
1.3.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	6
1.3.5	Das Inverse einer Matrix . . . . .	7
1.3.6	Eigenwerte, Eigenvektoren, Normalformen . . . . .	8
1.4	Das Computeralgebrasystem Maxima . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>13</b>
2.1	Allgemeine analytische Lösung . . . . .	14
2.2	Lösung durch Iteration . . . . .	15
2.3	Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades . . . . .	16
2.3.1	Separierbare Differentialgleichungen . . . . .	16
2.3.2	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen</b>	<b>19</b>
3.1	Gleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	19
3.2	Lösung der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	20
3.2.1	Taylorreihe und Potenzreihenansatz . . . . .	20

3.2.2	Der Exponentialansatz . . . . .	21
3.3	Das Fundamentalsystem von Lösungen . . . . .	22
3.4	Taylorreihenansatz für Gleichungen mit variablen Koeffizienten . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Gewöhnliche lineare inhomogene Gleichung</b>	<b>27</b>
4.1	Variation der Konstanten . . . . .	27
4.1.1	Motivation . . . . .	27
4.1.2	Allgemeine Form . . . . .	27
4.2	Lösung der inhomogenen Gleichung: Operatormethode . . . . .	29
4.3	Randwertprobleme . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>35</b>
5.1	Homogene Systeme erster Ordnung . . . . .	36
5.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Integraltransformationen</b>	<b>41</b>
6.1	Vollständige normierte Orthogonalsysteme (VNOS) . . . . .	41
6.2	Die Fourierreihen . . . . .	42
6.3	Die Fouriertransformation . . . . .	43
6.4	Die Laplacetransformation . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Theorie der linearen Antwort</b>	<b>49</b>
7.1	Der gedämpfte harmonische Oszillator: <i>Exkursion zur Drosophila melanogaster der Physik</i> . . . . .	49
7.2	Die Funktion der linearen Antwort . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>55</b>
8.1	Einleitung . . . . .	55
8.2	Ordnungsparametergleichungen . . . . .	57
8.2.1	Adiabatische Näherung . . . . .	57
8.2.2	Exakte Eliminationsprozedur . . . . .	58
8.3	Normalformen . . . . .	59
8.4	Modellidentifikation . . . . .	60



<b>9</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>61</b>
9.1	PDEs erster Ordnung . . . . .	61
9.2	PDEs zweiter Ordnung . . . . .	63
9.2.1	Die Fundamentallösung oder Green'sche Funktion . . . . .	67
<b>10</b>	<b>Numerische Lösungsmethoden</b>	<b>71</b>
10.1	Die Eulersche Methode . . . . .	71
10.2	Runge-Kutta-Methode . . . . .	72
10.3	Mehrschrittmethoden . . . . .	73
10.4	Finite Differenzen (FD) Operatoren . . . . .	73
10.5	FD für die Lösung von PDEs . . . . .	75
<b>11</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>77</b>
11.1	Das Funktional . . . . .	77
11.2	Exkurs zur Diracschen Deltafunktion . . . . .	78
11.2.1	Definition der Deltafunktion . . . . .	78
11.2.2	Eigenschaften der Deltafunktion . . . . .	79
11.3	Funktionalableitung oder Variation des Funktional . . . . .	80
11.3.1	Liste wichtiger Funktionalableitungen . . . . .	81
11.3.2	Das Extremalprinzip in der Mechanik . . . . .	82
11.3.3	Variation von Mehrfachintegralen . . . . .	84
11.3.4	Die schwingende Saite, ein ausführliches Beispiel . . . . .	86
<b>Anhang A</b>	<b>Der Residuensatz</b>	<b>89</b>
<b>Anhang B</b>	<b>Interpolation und Kurvenanpassung</b>	<b>91</b>
B.1	Least square fit . . . . .	91
B.1.1	Polynomial basis . . . . .	91
B.1.2	Spherical harmonics function as a basis . . . . .	93



# Kapitel 1

## Erinnerung an die Integral- und Differentialrechnung und die Lineare Algebra

In diesem Kapitel wollen wir an die in den Grundvorlesungen der Mathematik für Ingenieurinnen und Informatiker behandelten Themen erinnern.

### 1.1 Sätze der Differential- und Integralrechnung

#### Satz 1: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn für eine stetige Funktion  $f(x)$  das Integral  $F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  existiert, dann ist

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi = f(x)$$

Satz 1.1 in Worten: “Die Ableitung des Integrals ist gleich der Funktion im Integranden an der oberen Integrationsgrenze”.

#### Beispiel 1: Ableitung eines Integrals

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x e^{-\xi} d\xi = \frac{d}{dx} (-e^{-x} + e^{-x_0}) = e^{-x}$$

**Satz 2: Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Gegeben eine Funktion  $f(x)$ , die auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig ist, sowie eine Funktion  $g(x)$  für die im Intervall  $[a, b]$  entweder  $g(x) \geq 0$  oder  $g(x) \leq 0$  gelte. Dann gibt es mindestens eine Stelle  $\xi \in [a, b]$ , so dass mit deren entsprechendem Funktionswert

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (1.1)$$

gilt.

Wenn wir  $g(x) = 1$  setzen, dann wird dies gemeinhin als erster Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet. Es gilt also:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (1.2)$$

**Satz 3: Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Gegeben 2 Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ , die beide auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig und differenzierbar seien. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$ , so dass

$$f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a)) \quad (1.3)$$

Wenn wir  $g'(x) = 1$  setzen, dann wird dies gemeinhin als erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung bezeichnet. Es gilt also:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1.4)$$

## 1.2 Taylorreihe

Die Taylorreihe ist zweifelsohne eines der wichtigen Instrumente. Sie dient zur Abschätzung des Verhaltens von Funktionen und findet in numerischen Methoden Anwendung, wie z.B. den Finiten Differenzen.

**Satz 4: Der Taylorsche Satz**

Sei  $f$  eine Funktion, die eine  $(n+1)$ -te stetige Ableitung auf einem Intervall  $J$  besitze. Es seien  $a, b \in J$ . Dann ist

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{(n)!} f^{(n)}(a) + R_n$$

mit

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s) ds$$

Des weiteren merken wir an, dass eine Zahl  $c \in [a, b]$  existiert, so dass

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

gilt.

**Beweis:** Wir wenden Satz 1 an und integrieren partiell

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \int_a^b f'(s) ds = f(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^0}{0!} f'(s) ds \\ &= f(a) - \frac{(b-s)^1}{1!} f'(s) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{(b-s)^1}{1!} f''(s) ds = \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Vollständige Induktion liefert den Schluss des Beweises.

**Beispiel 2: Taylorreihenentwicklung**

Man entwickle  $f(x) = e^{-x}$  um  $x = 0$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + R_3$$

## 1.3 Lineare Algebra

In der Mathematik treffen wir auf verschiedene Arten von Objekten, die untereinander addiert und mit Zahlen multipliziert werden können. Eine Ansammlung von Objekten nennen wir eine Menge. Ein Beispiel ist die Menge von Vektoren ein und derselben Dimension. Wir wollen für all die Spezialfälle eine allgemeine Definition geben.

### 1.3.1 Der Vektorraum

Ein **Vektorraum**  $V$  ist eine Menge von Objekten, die addiert und mit Zahlen multipliziert werden können und zwar so, dass die Summe zweier Elemente aus  $V$  wieder ein Element aus  $V$  ergibt, das Produkt eines Elementes aus  $V$  mit einer Zahl ebenfalls wieder in  $V$  ist und folgende Eigenschaften erfüllt sind:.

**VR 1.** Gegeben  $u, v, w \in V$ . Es soll Assoziativität gelten:  $(u + v) + w = u + (v + w)$

**VR 2.** Es gibt ein Element  $0$  in  $V$ , so dass gilt  $0 + u = u + 0 = u$  für alle  $u \in V$ . Wir nennen dieses Element den Nullvektor.

**VR 3.** Für jedes  $u \in V$  gibt es ein Element  $(-1)u \in V$  für das  $u + (-1)u = 0$  gilt. D.h. jedes Element hat ein Inverses.

**VR 4.** Für alle  $u, v \in V$  soll Kommutativität gelten  $u + v = v + u$

**VR 5.** Für eine Zahl  $c$  gilt Distributivität  $c(u + v) = cu + cv$

**VR 6.** Für zwei Zahlen  $a, b$  gilt Assoziativität bezüglich der Addition  $(a + b)u = au + bu$

**VR 7.** Für zwei Zahlen  $a, b$  gilt Assoziativität bezüglich der Multiplikation  $(ab)u = a(bu)$

**VR 8.** Für alle  $u \in V$  gilt  $1 \cdot u = u$

Als einen Unterraum  $W$  von  $V$  bezeichnen wir einen Raum für den gilt

1.  $\forall u, v \in W$  ist auch  $u + v \in W$
2.  $\forall u \in W$  und  $c \in \mathbb{R}$  ist auch  $cu \in W$
3.  $0 \in V$  ist auch Element von  $W$

#### Beispiel 3: Beispiele für Vektorräume

- Der dreidimensionale Euklidische Raum  $\mathbf{R}^3$  ist ein Vektorraum.
- Die Menge der Polynome kleiner gleich vierten Grades

$$p_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

ist ein Vektorraum.

Man verifiziere dies anhand der oben gegebenen Definition.

### 1.3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis

Eine Linearkombination von Vektoren  $(v_1, \dots, v_m) \in V$  schreiben wir als  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ , wobei  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  oder auch  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ . Alle möglichen Linearkombinationen der  $v_i$  nennen wir die lineare Hülle der  $(v_1, \dots, v_m) \in V$  und schreiben dafür  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . Die  $m$  Vektoren spannen einen Unterraum  $W \subset V$  auf.

#### Beispiel 4: Lineare Hülle

Es ist

$$(7, 2, 9) = 2(2, 1, 3) + 3(1, 0, 1).$$

Der Vektor  $(7, 2, 9)$  ist also eine Linearkombination von  $(2, 1, 3)$  und  $(1, 0, 1)$ . Daher sagen wir auch  $(7, 2, 9) \in \text{span}((2, 1, 3), (1, 0, 1))$  und damit nennen wir diesen Vektor auch linear abhängig.

Wir nennen Vektoren  $(v_1, \dots, v_m) \in V$  linear unabhängig, wenn keiner der  $m$  Vektoren als Linearkombination der restlichen  $m - 1$  Vektoren geschrieben werden kann. Eine Basis des Vektorraums  $V$  ist gegeben durch die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren, die ganz  $V$  aufspannen. Diese muss nicht eindeutig sein.

#### Beispiel 5: Basen

- $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  spannen den  $\mathbb{R}^3$  auf.
- Genauso tut das aber auch die Basis  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ .
- Die Monome  $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  bilden die Basis der Vektorraums aus der Menge der Polynome vierten Grades und kleiner.

### 1.3.3 Der Rang einer Matrix

Gegeben die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

#### N.B.:

Vektoren und Matrizen schreiben wir in Fettdruck. Wir bezeichnen der Rang einer Matrix  $\mathbf{A}$  mit  $\text{Rg}(\mathbf{A})$ .

Durch Streichen von Zeilen oder Spalten erhalten wir quadratische  $s \times s$  Untermatrizen. Gehen wir davon aus, dass  $A$  nicht die Nullmatrix ist, dann finden wir sicherlich unter den  $s \times s$  Untermatrizen solche, deren Determinanten von Null verschieden sind. Die Maximale Zahl  $r$  an Reihen, bzw. Spalten, der von Null verschiedenen Determinanten, die bei dieser Operation entstehen, nennen wir den Rang der Matrix  $\text{Rg}(\mathbf{A})$ .

#### Beispiel 6: Rang einer $5 \times 7$ -Matrix

Man bestimme den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -8 & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen aus der linearen Algebra, dass der Wert einer Determinante unverändert bleibt, wenn zu einer Zeile bzw. einer Spalte ein beliebiges Vielfaches einer Zeile bzw. einer Spalte addiert wird.

Dies machen wir uns zunutze und addieren Vielfache der Zeilen der obigen Matrix sukzessive solange, bis folgende Matrix entsteht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

Beachte: alle linear abhängigen Zeilen und Spalten können wir streichen.

Als letzte Umformung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

woraus wir den Rang  $r = \text{Rg}(\mathbf{A}) = 4$  ablesen.

Der Rang einer Matrix  $\mathbf{M}$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten. Die linear unabhängigen Zeilenvektoren spannen die lineare Hülle des Zeilenvektorraums auf.

### 1.3.4 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Nach dem Satz von Kronecker-Capelli ist ein LGS  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}|\mathbf{b}$  ist. Die



erweiterte Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}|\mathbf{b}$  bilden wir, indem wir den Spaltenvektor  $\mathbf{b}$  an die Matrix  $\mathbf{A}$  anfügen. Wir schreiben dies  $\{\mathbf{A}|\mathbf{b}\}$ .

#### Beispiel 7: Lösbarkeit eines LGS

•

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad \text{also schreiben wir } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Es ist  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 1$  und  $\text{Rg}(\{\mathbf{A}|\mathbf{b}\}) = 1$ , also ist das LGS lösbar. Allerdings erhalten wir in diesem Fall eine parametrische Lösung und es existieren somit unendlich viele Lösungen.

•

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad \text{also schreiben wir } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Es ist  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 1$  und  $\text{Rg}(\{\mathbf{A}|\mathbf{c}\}) = 2$ , also ist das LGS nicht lösbar. In diesem Fall sehen wir das auch gleich mit bloßem Augen, denn die beiden Gleichungen  $x_1 + x_2 = 2$  und  $x_1 + x_2 = 1.5$  führen auf einen Widerspruch.

Wohingegen das LGS

•

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (\text{wir schreiben } \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c})$$

eine eindeutige Lösung hat. Der Nachweis sei dem geneigten Leser überlassen.

**Anleitung:** Berechne zunächst zur Übung  $\text{Rg}(\mathbf{D})$  und  $\text{Rg}(\{\mathbf{D}|\mathbf{c}\})$ . Berechne dann die Lösung.

### 1.3.5 Das Inverse einer Matrix

Gegeben eine  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$ . Gibt es ein Inverses  $\mathbf{A}^{-1}$  zu dieser Matrix, so dass  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix ergibt? In der Tat gibt es dies, wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  regulär ist. Eine Matrix ist regulär, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist, sonst heisst sie singulär.

Berechnet wir die Inverse folgendermaßen

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}, \quad (1.7)$$

Wobei die Elemente  $A_{ij}^{ad}$  der Adjunkten  $\text{adj } \mathbf{A}$  der Matrix  $\mathbf{A}$  folgendermaßen definiert sind: Man streiche die Zeile  $i$  und die Spalte  $j$  der Matrix  $\mathbf{A}$  transponiere diese  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, berechne deren Determinante und multipliziere diese mit  $(-1)^{i+j}$ . Zur praktischen Durchführung nehmen wir allerdings den Algorithmus von Gauß und Jordan:

Erweitere die Matrix  $\mathbf{A}$  um eine Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  derselben Dimension

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Nun wenden wir die erlaubten Zeilenoperationen auf die erweiterte Matrix an, sodass aus der linken Hälfte die  $n \times n$  Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  wird, dann erhalten wir in der rechten Hälfte die inverse der Matrix  $\mathbf{A}$ . Sollte die Inverse nicht existieren, dann merken wir das sofort daran, dass auf der Hauptdiagonalen eine Null resultiert.

### 1.3.6 Eigenwerte, Eigenvektoren, Normalformen

Die Menge der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nennt man auch ihr Spektrum. Von den drei Matrizen  $\mathbf{M}_i$  mit  $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

wollen wir das Spektrum berechnen. Es ist  $\text{Rg}(\mathbf{M}_i) = 3$  (Nachweis!).

$$\begin{vmatrix} -9-\lambda & 2 & 6 \\ 5 & 0-\lambda & -3 \\ -16 & 4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-2) = 0$$

Wir erhalten drei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  und  $\lambda_3 = 2$ . Aus  $(\mathbf{M}_1 - \lambda_i \mathbb{1}) \cdot \mathbf{x}_i = 0$  berechnen wir die Eigenvektoren. Für  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \\ -16 & 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein LGS, dessen Rang der Koeffizientenmatrix 2 ist, gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Damit erwarten wir eine parametrische Lösung mit einem frei wählbaren

Parameter. Wir sehen, dass die ersten beiden Zeilen der Koeffizientenmatrix linear abhängig sind (multipliziere 2. Zeile mit  $-2$  und erhalte Zeile 1). Davon ist allerdings die dritte Zeile unabhängig. Also hat die Koeffizientenmatrix den Rang 2. Der Rangabfall gegenüber  $\mathbf{M}_1$  ist 1 und dies ist gleich der Vielfachheit des Eigenwertes, im vorliegenden Fall 1. In der Tat haben wir 3 verschiedene Eigenwerte.

Die Eigenvektoren  $\mathbf{x}_i$  lauten daher

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die Komponenten so gewählt, dass sie ganze Zahlen ergeben, das ist natürlich willkürlich bei einer Parameterlösung.

Die Eigenvektoren bilden die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}_1$ , mit deren Hilfe wir  $\mathbf{M}_1$  auf Diagonalgestalt bringen und zwar mit  $\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{P}_1$ . Es ist

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{M}_2$  sind  $\lambda_1 = 7$  und  $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ . wir haben einen doppelt auftretenden Eigenwert. Für  $\lambda_1 = 7$  erhalten wir den Eigenvektor  $\mathbf{x}_1 = (2/3, 2/3, -1/3)^T$ . Was passiert nun mit dem doppelten Eigenwert, können wir hierfür Eigenvektoren identifizieren? Wir untersuchen die Matrix  $\mathbf{M}_2 - \lambda_2 \mathbb{1}$  und stellen fest dass diese einen Rangabfall von 2 aufweist. Damit erhalten wir für die Lösung des Gleichungssystems  $(\mathbf{M}_2 - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdot \mathbf{x}_i = 0$  eine zweiparametrische Lösung und wir finden die zwei linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Konstruktion von  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{P}_2^{-1}$  mit diesen Eigenvektoren erlaubt uns die Transformation von  $\mathbf{x}_2$  auf Diagonalform

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eine ganz andere Situation liegt bei  $\mathbf{M}_3$  vor. Wir berechnen die Eigenwerte und stellen fest, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ . Die Eigenvektoren berechnen wir aus  $(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1}) \cdot \mathbf{x}_i = 0$ . Wir stellen fest, dass

$\text{Rg}(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1}) = 2$  nicht einen Rangabfall von 3 aufweist, wie es bei einem dreifachen Eigenwert der Fall sein müsste. Also haben wir nur eine zweiparametrische Lösung vorliegen, die wir aus einer der linear abhängigen Gleichungen  $(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1}) \cdot \mathbf{x}_i = 0$  berechnen können:

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen sofort, dass diese drei Gleichungen linear abhängig sind

$$7x_{i1} - 6x_{i2} + 5x_{i3} = 0$$

und wir nur eine zweiparametrische Lösung bekommen. Wir wählen schlauerweise  $x_{i1} = 5 \cdot s_i$  und  $x_{i2} = 5 \cdot t_i$  und erhalten damit  $x_{i3} = -7 \cdot s_i + 6 \cdot t_i$ . Für  $s_1 = \frac{1}{5}$  und  $t_1 = \frac{2}{5}$  ergibt sich der Eigenvektor  $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 1)^T$ . Mit  $s_2 = \frac{3}{5}$  und  $t_2 = \frac{1}{5}$  ergibt sich der Eigenvektor  $\mathbf{x}_2 = (3, 1, -3)^T$ . Alle weiteren Eigenvektoren sind Linearkombination aus  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ . D.h. das LGS gibt keine weiteren Eigenvektoren her.  $\mathbf{P}_3$  wäre singulär und nicht invertierbar. Daher können wir  $\mathbf{M}_3$  nicht auf Diagonalform bringen. Berechnen wir anstelle eines linear abhängigen dritten Eigenvektors den Lösungsvektor von  $(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1})^2 \cdot \mathbf{x}_i = 0$ , dann lässt sich zeigen, dass ein  $\mathbf{P}_3$  gebildet aus den ersten beiden Eigenvektoren und diesem Lösungsvektor  $\mathbf{M}_3$  zumindest auf die JORDANSche Normalform transformieren kann. Dies ist keine Diagonalform. Auf der Diagonalen stehen zwar die Eigenwerte, aber die obere Nebendiagonale ist mit Einsen besetzt. Bei  $k$ -fachem Eigenwert und Rangabfall  $r \leq k$  stehen genau  $k - r$  Einsen auf der oberen Nebendiagonale. Diese Aussage beweisen wir nicht. Berechnen wir zunächst den Lösungsvektor von  $(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1})^2 \cdot \mathbf{x}_i = 0$ . Wir sehen, dass  $(\mathbf{M}_3 + \mathbb{1})^2$  die Nullmatrix ist und damit die Lösung des Gleichungssystems beliebig. Ganz beliebig geht natürlich nicht, der Vektor muss zumindest linear unabhängig von den ersten beiden Eigenvektoren sein. Wir wählen  $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 1)^T$  und konstruieren uns die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -7 & 6 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{M}_3 \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Das Computeralgebrasystem Maxima

Maxima ist ein Computeralgebrasystem (CAS). Der Quellcode wurde seit 1982 von William Shelter<sup>1</sup> entwickelt und 1998 unter der GNU General Public License (GPL) veröffentlicht.

Maxima ist die Engine, die hinter den Stackaufgaben auf ILIAS steht, die wir im Rahmen dieses Kurses bearbeiten. Es ist daher ratsam, sich zumindest mit der Syntax von Maxima zu beschäftigen, da diese zur Eingabe bei den Aufgaben benutzt werden muss. Die Syntax ist einigermaßen intuitiv, es schadet aber nicht, sich einmal damit zu beschäftigen. Weitere Information ist hier [http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/de/maxima.html#SEC\\_Top](http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/de/maxima.html#SEC_Top) zu finden.

---

<sup>1</sup>William Frederick Schelter (1947 – July 30, 2001) war Professor für Mathematik der University of Texas in Austin. Er war Lisp Entwickler und Programmierer (siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/Bill\\_Schelter](https://en.wikipedia.org/wiki/Bill_Schelter)).



# Kapitel 2

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung sei folgendermaßen gegeben

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (2.1)$$

Anstatt den Differentialoperator  $\frac{d}{dt}$  auszuschreiben, benutzen wir für (2.1) auch die Schreibweise  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ . Dabei bezeichne  $t$  die unabhängige Veränderliche,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  einen Vektor bekannter Funktionen und  $\mathbf{y}$  einen Vektor gesuchter Funktionen  $y_i(t)$ . Wir betrachten verschiedene Differentialgleichungen, benennen deren Eigenschaften und erkennen die verschiedenen Typen.

**Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen DGL** Die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

ist eine *lineare* inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator beschreibt. Die Gleichung

$$\ddot{x} + \mu(x(t)^2 - 1)\dot{x} + x(t) = 0$$

hingegen ist eine *nichtlineare* Bewegungsgleichung für  $x(t)$ . Sie beschreibt den sogenannten van-der-Pol-Oszillator.

**Die Ordnung einer DGL** Die Gleichung

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x = h(t)$$

beschreibt einen getriebenen Relaxator, den wir gleich näher betrachten werden. Die rechte Seite dieser Gleichung bezeichnen wir als Inhomogenität. Beispiele für Gleichungen 2. Ordnung sind der van-der-Pol-Oszillator und der harmonische Oszillator (siehe oben).

**Systeme von DGL 1. Ordnung** Die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} &= -y(\gamma - \delta x)\end{aligned}$$

sind die bekannten Räuber-Beute-Gleichungen, auch Lotka-Volterra-Gleichungen genannt.

**Transformation von Gleichungen höherer Ordnung auf ein System von Gleichungen 1. Ordnung** Man nehme als Beispiel den gedämpften Harmonische Oszillator

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = f(t).$$

Durch Substitution von  $y_1 = x$  und  $y_2 = \dot{x}$  erhalten wir zwei Gleichungen erster Ordnung anstelle der ursprünglichen Gleichung zweiter Ordnung, nämlich

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ m\dot{y}_2 &= -k \cdot y_1 - c \cdot y_2 + f(t)\end{aligned}$$

**Grad einer DGL** Der Grad einer Differentialgleichung ist der Exponent der Potenz der höchsten vorkommenden Ableitung.

Bei all diesen Differentialgleichungen sind wir immer an einer Lösung für einen bestimmten Anfangswert interessiert, also z.B.  $x(t=0) = x_0$ . Um ein System von Gleichungen lösen zu können, müssen wir für jede Variable Anfangsbedingungen angeben. Da aus einer Gleichung  $n$ -ter Ordnung ein System mit  $n$  Variablen wird, schließen wir daraus, dass wir für eine solche Differentialgleichung ebenfalls  $n$  Anfangsbedingungen brauchen.

## 2.1 Allgemeine analytische Lösung

Wenn wir gewöhnliche Differentialgleichungen analytisch lösen wollen so ist dies nicht in allen Fällen möglich. Betrachten wir das Anfangswertproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

mit  $y(t_0) = y_0$ . Die Funktion  $f(t, y(t))$  sei stetig im Bereich der  $(t, y)$ -Ebene, gegeben durch  $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$  und  $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ . Der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist in diesem Falle nicht immer möglich. Wir wollen eine alternative Vorgehensweise vorschlagen.

Wir nehmen an,  $y(t)$  sei eine Lösung des Anfangswertproblems und es gelte  $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$  für  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  mit  $0 < \alpha \leq a$ , so ergibt sich aus obiger Voraussetzung für  $f(t, y(t))$ , dass



die Lösung im Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  eine stetige Ableitungsfunktion  $\dot{y}(t)$  besitzt. Also lässt sich die Lösungsfunktion dort als Stammfunktion dieser Ableitung darstellen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.2)$$

Wobei  $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$  gilt. Dies bedeutet aber, dass jede Lösung des obigen Anfangswertproblems auch Lösung der Integralgleichung (2.2) ist. Umgekehrt ist auch jede Lösung von (2.2) Lösung des Anfangswertproblems.

## 2.2 Lösung durch Iteration

Schreiben wir die Integralgleichung (2.2) in der Form

$$y(t) = \Phi[y] \text{ mit } \Phi[y] = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.3)$$

### N.B.: Funktional statt Integral

In (2.3) schreiben wir absichtlich  $\Phi[y]$ , d.h. das  $y$  in eckigen Klammern geschrieben, weil  $\Phi[y]$  ein Funktional ist. Es hängt nicht nur vom Zeitpunkt  $t$  in der unabhängigen Variablen ab, sondern vom gesamten Verlauf der Funktion  $y(t)$ . Wir werden im Kapitel 11 *Variationsrechnung* darauf zurückkommen.

Wir sehen, dass die Lösung von (2.3) wie der Fixpunkt  $y^*$  der Gleichung

$$y = \Phi(y)$$

zu bestimmen ist. Hierbei gehen wir iterativ vor. Wir starten bei einem Rohwert  $y_0$  und berechnen sukzessiv nach der Vorschrift

$$y_{n+1} = \Phi(y_n)$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass die Iteration konvergiert. Dies ist für die Lösung der Integralgleichung (2.2) der Fall, wenn die Abbildung  $\Phi$  kontrahierend ist.

### Beispiel 8: Iterative Lösung

Gegeben die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\alpha y(t)$$

Zeige, dass die iterative Lösung im Limes mit der analytischen Lösung übereinstimmt.

## 2.3 Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades

Wir gehen von einer Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$p(t, y) + q(t, y)\dot{y}(t) = 0$$

aus, die sich in der Form

$$p(t, y)dt + q(t, y)dy = 0 \quad (2.4)$$

schreiben lässt. Wobei  $p(t, y)$  und  $q(t, y)$  den gemeinsamen Definitionsbereich  $a \leq t \leq b$  und  $\alpha \leq y \leq \beta$  haben

### Beispiel 9: Umformung

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y+t}{y-t} = 0$$

kann mit  $p(t, y) = y + t$  und  $q(t, y) = y - t$  auf die Form

$$(y+t)dt + (y-t)dy = 0$$

gebracht werden.

### 2.3.1 Separierbare Differentialgleichungen

Den Spezialfall

$$p(t) + q(y)\dot{y}(t) = 0 \quad (2.5)$$

nennen wir eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Existieren für  $p$  und  $q$  im angegebenen Definitionsbereich die Integrale  $P$  und  $Q$ , mit  $\dot{P}(t) = p(t)$  und  $\frac{dQ(y)}{dy} = q(y)$  so ist

$$\mu(t, y) = P(t) + Q(y) = \text{const.}$$

denn es ist wegen (2.5)

$$d\mu = \dot{P}(t)dt + \frac{dQ(y)}{dy}dy = p(t)dt + q(y)dy = 0$$

**Beispiel 10: Separierbare Differentialgleichung**a)  $t\dot{y} = y$  und b)  $y\dot{y} = -t$ a) Für  $t \neq 0$  und  $y \neq 0$  erhalten wir

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$$

b)  $ydy = -tdt$ **2.3.2 Exakte Differentialgleichungen**

Gegeben die Differentialgleichung in der Form wie in (2.4) dargestellt. Ist  $p(t,y)dt + q(t,y)dy$  das vollständige Differential einer Funktion  $\mu(y,t)$ , d.h. ist

$$d\mu(y,t) = \frac{\partial\mu(y,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial\mu(y,t)}{\partial y}dy = p(t,y)dt + q(t,y)dy = 0$$

dann nennen wir (2.4) eine *exakte Differentialgleichung* und  $\mu(y,t) = \text{const.}$  ist eine allgemeine Lösung. Damit (2.4) eine exakte Differentialgleichung ist, muss die Bedingung

$$\frac{\partial p(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(t,y)}{\partial t} \quad (2.6)$$

erfüllt sein (Warum?).

Nicht immer sieht man allerdings der Differentialgleichung die Exaktheit an. Selbst wenn wir sehen, dass (2.4) keine exakte Differentialgleichung ist, da (2.6) nicht erfüllt ist, gibt es aber unter Umständen die Möglichkeit eine Funktion zu finden, mit der man die Gleichung multiplizieren kann, sodass diese exakt wird.

**N.B.: Integrierender Faktor**

$3ydt + 2tdy = 0$  ist keine exakte Differentialgleichung. Multipliziert man aber  $\Xi(y,t) = t^2y$  mit dieser Gleichung, so erhält man  $3t^2y^2dt + 2t^3ydy = 0$ . Dies kann man als vollständiges Differential der Funktion  $\mu(y,t) = t^3y^2$  schreiben und somit ist  $t^3y^2 = C$  eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Funktion  $\Xi(y,t)$  heißt integrierender Faktor.

Angenommen (2.4) sei keine exakte Differentialgleichung, dann müssen wir einen solchen versuchen zu finden

1. Wenn

$$\frac{\frac{\partial p(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(t,y)}{\partial t}}{q(t,y)} = f(t)$$

eine Funktion von  $t$  allein ist, dann ist  $e^{\int f(t)dt}$  ein integrierender Faktor. Ebenso wenn

$$\frac{\frac{\partial p(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(t,y)}{\partial t}}{p(t,y)} = -g(y)$$

nur eine Funktion von  $y$  ist, dann ist  $e^{\int g(y)dy}$  ein integrierender Faktor.

2. Ist (2.4) homogen, d.h. sind  $p(t,y)$  und  $q(t,y)$  homogene Funktionen vom selben Grad, und  $p(t,y) \cdot t + q(t,y) \cdot y \neq 0$ , dann ist  $\frac{1}{p(t,y) \cdot t + q(t,y) \cdot y}$  ein integrierender Faktor.
3. Wenn (2.4) in der Form  $y \cdot f(t \cdot y)dt + t \cdot g(t \cdot y)dy = 0$  geschrieben werden kann, dann ist  $\frac{1}{t \cdot y(f(t \cdot y) - g(t \cdot y))} = \frac{1}{p \cdot t - q \cdot y}$  ein integrierender Faktor.
4. Durch genaues Hinschauen kann man durch Umgruppieren von Termen einen integrierenden Faktor finden, wenn man bestimmte Gruppen von Termen als Teil eines vollständigen Differentials identifiziert.

# Kapitel 3

## Gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen

### 3.1 Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ist ein Zusammenhang folgender Art

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad (3.1)$$

Dabei ist  $y(t)$  eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $t$ . Differentialgleichungen vom Typ (3.1) beschreiben zahlreiche Phänomene in Naturwissenschaft und Technik. Zunächst einmal wollen wir die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersuchen. Die Funktion  $f(t)$  sei nur von der unabhängigen Veränderlichen  $t$  abhängig. Wenn  $f(t) = 0$  nennen wir (3.1) eine homogene Differentialgleichung, wenn dem nicht so ist, heisst (3.1) inhomogen.

#### N.B.: Homogene Funktion vom Grad $n$

Eine Funktion  $f(x)$  wird homogen vom Grad  $n$  genannt, wenn gilt  $f(\lambda \cdot x) = \lambda^n \cdot f(x)$ . Deshalb nennt man  $f(t)$  der linearen Differentialgleichung (3.1) auch die *Inhomogenität* der Differentialgleichung.

Man beachte, dass die Koeffizienten der Ableitungen von  $y(t)$  nicht notwendigerweise Konstanten sein müssen, sondern bekannte Funktionen  $a_k(t)$  sein können. Wichtig für die Bezeichnung als lineare Differentialgleichung ist ganz einfach die Tatsache, dass das Superpositionsprinzip gilt.

**N.B.: Lineare Superposition von Lösungen**

D.h. wenn  $y_a(t)$  und  $y_b(t)$  je eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung sind, dann ist auch  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$  eine Lösung. Es löse  $y_f(t)$  die Differentialgleichung mit der Inhomogenität  $f(t)$  und  $y_g(t)$  diejenige mit der Inhomogenität  $g(t)$ , dann löst  $y(t) = \alpha y_f(t) + \beta y_g(t)$  die Differentialgleichung mit der Inhomogenität  $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ . Man beweise diese Aussage!

## 3.2 Lösung der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zur Lösung der Gleichungen vom Typ (3.1) haben wir verschiedene Herangehensweisen. Dabei gehen wir davon aus, dass es genau eine Lösung von (3.1) mit  $f(t) = 0$ , also der homogenen Differentialgleichung, gibt, die den Bedingungen

$$y(t_0) = b_0, \dot{y}(t_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1} \quad (3.2)$$

genügt. Man möge den Beweis dieses Satzes in den einschlägigen Lehrbüchern nachlesen.

### 3.2.1 Taylorreihe und Potenzreihenansatz

Zur Lösung von (3.1) liegt es nahe, den Ansatz

$$y(t) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v \quad (3.3)$$

zu versuchen. D.h. wir vermuten die Lösung in der Form (3.3) finden zu können. Hierzu gibt es zwei Herangehensweisen. Einmal mit Hilfe der Taylorreihe und zum anderen durch direktes Einsetzen von (3.3).

Wir arbeiten beides am Beispiel des Relaxators aus.

#### Beispiel 11: Taylorreihe verglichen mit Potenzreihenansatz

Gegeben die homogene Differentialgleichung  $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$  mit Anfangsbedingung  $y(0) = b_0$  - wir setzen o.B.d.A.  $t_0 = 0$ . Wir haben

$$\dot{y}(t) = -a_0 y(t), \ddot{y}(t) = -a_0 \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t) = -a_0 y^{(n-1)}(t)$$

Damit erhalten wir die Ableitungen bei  $t = 0$

$$y(0) = b_0, \dot{y}(0) = -a_0 b_0, \ddot{y}(0) = a_0^2 b_0, \dots, y^{(n)}(0) = (-1)^n a_0^n b_0$$

und können die Taylorreihe für  $y(t)$  um  $t = 0$  schreiben als

$$y(t) = b_0 \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{a_0^v}{v!} t^v = b_0 e^{-a_0 t} \quad (3.4)$$

Wenn wir (3.3) direkt einsetzen, dann erhalten wir die Lösung durch Koeffizientenvergleich.

$$\sum_{v=0}^{\infty} v c_v t^{v-1} + a_0 \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) c_{\mu+1} t^{\mu} + a_0 \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v = \sum_{v=0}^{\infty} ((v+1) c_{v+1} + a_0 c_v) t^v$$

Aus der Anfangsbedingung erhalten wir eine Rekursionsformel für die  $c_v$

$$(v+1) c_{v+1} + a_0 c_v = 0 \quad (3.5)$$

Mit  $y(0) = b_0$  haben wir  $c_0 = b_0$  und finden damit die  $c_v$  aus (3.5)

$$c_v = (-1)^v \frac{a_0^v b_0}{v!} \quad (v = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.6)$$

Mit den Koeffizienten (3.6) erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{a_0^v b_0}{v!} t^v = b_0 e^{-a_0 t} \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Der Exponentialansatz

Setzen wir  $y(t) = e^{\lambda t}$  in (3.1) ein, so erhalten wir

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.8)$$

Die Gleichung (3.8) hat  $n$  Nullstellen und somit haben wir auch  $n$  Lösungen, die wir als Superposition zur Lösung des Anfangswertproblems angeben können. Für unseren Relaxator bedeutet dies

$$\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

Und daraus erhalten wir die Lösung  $y(t) = c e^{-a_0 t}$ . Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, setzen wir  $c = b_0$ .

#### Beispiel 12: Der Exponentialansatz für eine Gleichung 2. Ordnung

Gegeben die Gleichung  $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 3y(t) = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 2$  und  $\dot{y}(0) = -2$ . Die charakteristische Gleichung (3.8) lautet für diesen Fall  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$  mit den beiden Lösungen  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -3$ . Wir schreiben die Lösung der

Gleichung als Superposition  $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$ . Wenn wir die beiden Anfangsbedingungen erfüllen, dann sind  $c_1 = c_2 = 1$  festgelegt. Damit ist die Lösung  $y(t) = e^t + e^{-3t}$ .

Damit erhebt sich die berechtigte Frage, warum man den Potenzreihenansatz dann überhaupt in Betracht zieht. Wir erörtern dies an folgendem Beispiel:

**Beispiel 13: Mehrfachlösungen des charakteristischen Polynoms**

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = 0, \text{ mit } y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2$$

Mit dem Exponentialansatz  $e^{\lambda t}$  erhalten wir das charakteristische Polynom  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ . Dieses hat eine doppelte Nullstelle, aber wie lautet die zweite Lösung?

Versuchen wir es mit dem Potenzreihenansatz (3.3) wir erhalten die Rekursionsformel

$$(v+1)(v+2)c_{v+2} - 2(v+1)c_{v+1} + c_v = 0$$

Mit  $d_v = c_v v!$  erhalten wir die Rekursionsformel  $d_{v+2} - 2d_{v+1} + d_v = 0$ , wobei wegen der Anfangsbedingungen  $d_0 = c_0 = 1$  und  $d_1 = c_1 = 2$  sein muss und wir sehen dass  $d_v = v + 1$ . Damit ist aber

$$y(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1+v}{v!} t^v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{(v-1)!} = e^t + t \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} = e^t + t e^t$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass bei einer  $r$ -fachen Lösung  $\lambda_1$  des charakteristischen Polynoms neben  $e^{\lambda_1 t}$  auch  $t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda_1 t}$  Lösungen sind. Man zeige dies durch einsetzen der einzelnen Lösungen in die homogene Differentialgleichung  $(D - \lambda_1)^r [y(t)] = 0!$

### 3.3 Das Fundamentalsystem von Lösungen

Die Frage nach der Zahl der Lösungen soll im folgenden behandelt werden, d.h. wir suchen das Fundamentalsystem von Lösungen zu (3.1).

**Beispiel 14: Fundamentalsystem der Gleichung 2. Ordnung**

Wir wissen, dass für die Gleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$



zwei Bedingungen vorliegen müssen, damit die Lösung eindeutig angegeben werden kann. Also nehmen wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0 \text{ und } \dot{y}(0) = 0 \text{ oder} \\ y(0) &= 0 \text{ und } \dot{y}(0) = b_1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Der Potenzreihenansatz

$$y(t) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v$$

führt auf

$$\begin{aligned} \sum_{v=2}^{\infty} v(v-1)c_v t^{v-2} + a_0 \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v &= 0 \\ \sum_{v=0}^{\infty} ((v+2)(v+1)c_{v+2} + a_0 c_v) t^v &= 0 \end{aligned}$$

und mit der ersten Anfangsbedingung auf die Lösungen  $y_1(t)$  mit

$$c_{2\mu} = (-1)^\mu \frac{a_0^\mu b_0}{(2\mu)!}, \quad c_{2\mu+1} = 0$$

während die zweite Anfangsbedingung auf die Lösung  $y_2$  mit

$$c_{2\mu} = 0, \quad c_{2\mu+1} = (-1)^\mu \frac{a_0^\mu b_1}{(2\mu+1)!}$$

führt. Damit erfüllt die Summe der beiden Lösungen die allgemeine Anfangsbedingung

$$y(0) = b_0 \text{ und } \dot{y}(0) = b_1$$

Das obige Beispiel legt nahe, bei homogenen Differentiagleichungen  $n$ -ter Ordnung, wie in (3.1) mit  $f(t) = 0$  angegeben, ähnlich vorzugehen, indem wir der Reihe nach folgende Anfangsbedingungen aufstellen

$$\begin{aligned} y(t_0) &= 1, \dot{y}(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0; \\ y(t_0) &= 0, \dot{y}(t_0) = 1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ y(t_0) &= 0, \dot{y}(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 1; \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die entsprechenden Lösungen mit  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ . Für die Anfangsbedingung  $y(t_0) = b_0, \dot{y}(t_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}$  können wir damit sofort die Lösung in der Form

$$y(t) = b_0 y_1(t) + b_1 y_2(t) + \cdots + b_{n-1} y_n(t) \quad (3.10)$$

angeben. Dies ist allerdings bisher auf die Stelle  $t_0$  beschränkt, wir wollen versuchen eine allgemeine Aussage zu machen. Wir bilden mit den obigen Lösungen

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

was wieder Lösung der Differentialgleichung (3.1) ist.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) &= b_0 \\ c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) + \dots + c_n \dot{y}_n(t_0) &= b_1 \\ c_1 \ddot{y}_1(t_0) + c_2 \ddot{y}_2(t_0) + \dots + c_n \ddot{y}_n(t_0) &= b_2 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-2)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-2)}(t_0) &= b_{n-2} \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= b_{n-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

hat die eindeutige Lösung  $c_1 = b_0, c_2 = b_1, \dots, c_n = b_{n-1}$ . Das bedeutet dass die Koeffizientendeterminante

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \dot{y}_1(t_0) & \dot{y}_2(t_0) & \cdots & \dot{y}_n(t_0) \\ \ddot{y}_1(t_0) & \ddot{y}_2(t_0) & \ddots & \ddot{y}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t_0) & y_2^{(n-2)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t_0) \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

von null verschieden ist. Die Determinante (3.12), wird Wronskideterminante genannt und sie ist also, wenn eine Lösung für die Anfangsbedingungen bei  $t_0$  vorliegt, von null verschieden. Wenn dies aber für beliebige Stellen  $t$  der Fall sein soll, müssen wir das allgemeine Verhalten der Wronskideterminante untersuchen, d.h. sie muss für jedes beliebige  $t$  von null verschieden sein.

Dazu bilden wir die Ableitung von  $W(t)$  und erhalten

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \ddots & \ddots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \ddots & \dots & \ddots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \dots \quad (3.13)$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \ddots & \dots & \ddots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \ddots & \dots & \ddots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Nur die letzte der resultierenden Determinanten ist von null verschieden. O.b.d.A. nehmen wir  $a_n = 1$  in (3.1) an<sup>1</sup> und erhalten damit

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \ddots & \dots & \ddots \\ -a_{n-1}y_1^{(n-1)}(t) - \dots - a_0y_1 & \dots & -a_{n-1}y_n^{(n-1)}(t) - \dots - a_0y_n(t) \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Nun multiplizieren wir die erste Zeile von (3.15) mit  $a_0$  und addieren sie zur letzten Zeile, sukzessive bis  $a_{n-2}$  multipliziert mit den vorletzten Zeile und wir erhalten

$$\dot{W}(t) = -a_{n-1}W(t) \quad (3.16)$$

Für diese Differentialgleichung haben wir eine Anfangsbedingung  $W(t_0) = w_0$  und können sie damit lösen. Wir erhalten

$$W(t) = w_0 e^{-a_{n-1}(t-t_0)} \quad (3.17)$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, schließen wir aus (3.17), dass wenn  $W(t)$  an irgendeiner Stelle von null verschieden ist, sie überall von null verschieden ist. Wir sehen also, da  $W(t)$  im gegebenen Fall nicht null werden kann, dass immer eine Lösung existiert.

**N.B.:**

Beachte das über multiple Lösungen des charakteristischen Polynoms oben gesagte!

<sup>1</sup>Wir teilen (3.1) durch  $a_n$ , vorausgesetzt  $a_n \neq 0$ , denn wenn das nicht der Fall ist, liegt eine Differentialgleichung (n-1)-ter Ordnung vor.

### 3.4 Taylorreihenansatz für Gleichungen mit variablen Koeffizienten

Wir gehen von einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten der Form

$$\ddot{y}(t) = p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) \quad (3.18)$$

aus, mit den Anfangsbedingungen  $y(t_0) = y_0$  und  $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ .

Wir setzen die Anfangsbedingungen in (3.18) ein und erhalten

$$\ddot{y}(t_0) = p(t_0)\dot{y}_0 + q(t_0)y_0 = \ddot{y}_0 \quad (3.19)$$

Durch Differentiation von (3.18) erhalten wir bei  $t = t_0$

$$\ddot{y}(t_0) = p(t_0)\dot{y}_0 + (\dot{p}(t_0) + q(t_0))\dot{y}_0 + \dot{q}(t_0)y_0. \quad (3.20)$$

Dies setzen wir fort, bis wir alle Ableitung der Funktion  $y(t)$  bei  $t = t_0$  berechnet haben. Damit können wir die Lösung als Taylorreihe um  $t = t_0$  schreiben:

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0(t - t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{y}_0(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y_0^{(n)}(t - t_0)^n + \cdots \quad (3.21)$$

# Kapitel 4

## Gewöhnliche lineare inhomogene Gleichung

### 4.1 Variation der Konstanten

#### 4.1.1 Motivation

wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = A_0(t) + A_1(t) \cdot y(t) \quad (4.1)$$

Es sei  $\tilde{y}(t)$  eine spezielle - also nicht die allgemeine - Lösung von (4.1). Wir schreiben  $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ , setzen dies in (4.1) ein und erhalten die homogene Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = A_1(t) \cdot z(t) \quad (4.2)$$

(4.2) nennen wir die zu (4.1) gehörige lineare Differentialgleichung. Wenn  $z(t)$  eine beliebige Lösung dieser Gleichung ist, dann ist  $y(t)$  aus (4.2) Lösung von (4.1).

#### 4.1.2 Allgemeine Form

Diese Methode lässt sich auch bei variablen Koeffizienten anwenden. Die Lösung der homogenen Gleichung hierfür, soll allerdings erst später besprochen werden. Daher gehen wir von einer Differentialgleichung der Form (3.1) aus. Die Idee hinter der Methode ist die gefundenen Fundamentallösungen zu superponieren, die benutzten Koeffizienten aber als noch zu bestimmende Funktionen anzusetzen. Wir setzen also folgendes an

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) \quad (4.3)$$

Nun brauchen wir natürlich auch  $n$  Bedingungen um die Funktionen  $c_i(t)$  zu bestimmen. Wir nehmen an dass die  $c_i(t)$  mindestens einmal differenzierbar seien. Die Lösung  $y(t)$  hingegen muss

$n$ -mal differenzierbar sein. Dann legen wir folgendes fest für die  $c_i(t)$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= c_1(t)\dot{y}_1(t) + c_2(t)\dot{y}_2(t) + \cdots + c_n(t)\dot{y}_n(t) \\
 &\quad + \underbrace{\dot{c}_1(t)y_1(t) + \dot{c}_2(t)y_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)y_n(t)}_{=0} \\
 \ddot{y}(t) &= c_1(t)\ddot{y}_1(t) + c_2(t)\ddot{y}_2(t) + \cdots + c_n(t)\ddot{y}_n(t) \\
 &\quad + \underbrace{\dot{c}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{y}_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\dot{y}_n(t)}_{=0} \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 y^{(n)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) \\
 &\quad + \underbrace{\dot{c}_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dot{c}_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)y_n^{(n-1)}(t)}_{=g(t)}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Gegeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind, so ist (4.3) Lösung der Differentialgleichung. Dies können wir sofort erkennen, denn wenn wir die so berechneten Ableitungen aus (4.4) in die Differentialgleichung einsetzen, ist diese erfüllt.

Für die  $\dot{c}_k(t)$  dagegen haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_1(t)y_1(t) + \dot{c}_2(t)y_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)y_n(t) &= 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 \dot{c}_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dot{c}_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)y_n^{(n-1)}(t) &= g(t)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die Koeffizientendeterminante von (4.5) ist die Wronskideterminante von der wir in (3.17) gezeigt haben, dass sie von null verschieden ist. Damit ist sichergestellt, dass (4.5) eine Lösung hat. Es bleibt die Aufgabe die  $c_i(t)$  zu berechnen.

#### Beispiel 15: Variation der Konstanten

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

Die allgemeine Lösung ist  $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$  und wir machen für die spezielle Lösung den Ansatz

$$y(t) = c_1(t) \cos(t) + c_2(t) \sin(t)$$

und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_1(t) \cos(t) + \dot{c}_2(t) \sin(t) &= 0 \\
 -\dot{c}_1(t) \sin(t) + \dot{c}_2(t) \cos(t) &= \frac{1}{\cos(t)}
 \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung ist damit

$$y(t) = \cos(t) \ln(|\cos(t)|) + t \sin(t)$$

## 4.2 Lösung der inhomogenen Gleichung: Operatormethode

Für die Ableitung benutzen wir als Abkürzung eine Operatorschreibweise der Form  $\frac{dy(t)}{dt} = D[y(t)]$ . Entsprechend soll  $D^{-1}[y(t)] = \int y(t)dt$  verwendet werden. Wir wissen ja aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass die Ableitung die Umkehrung des Integrals ist. Für einen Operator  $D$  schreiben wir dessen Inverse als  $D^{-1}$ . Ein  $r$ -faches Hintereinanderausführen eines Operators können wir also mit  $D^r$  schreiben.

### N.B.:

Mit dieser Schreibweise wird uns klar, dass z.B. die Exponentialfunktion der Ableitung

$$e^{\frac{d}{dt}} = e^D = 1 + D + \frac{D^2}{2} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{D^v}{v!}$$

bedeutet.

Merke: Funktionen von Operatoren sind über ihre Reihenentwicklung definiert.

Eine offensichtliche Anwendung sehen wir mit der Taylorentwicklung von  $y(t + \tau)$  um den Zeitpunkt  $t$

$$y(t + \tau) = y(t) + \frac{\tau}{1!} \dot{y}(s) \Big|_{s=t} + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{y}(s) \Big|_{s=t} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\tau^v}{v!} \frac{d^v}{ds^v} y(s) \Big|_{s=t} = e^{\tau \frac{d}{dt}} y(t)$$

Wir nennen  $e^{\tau \frac{d}{dt}} = e^{\tau D}$  den Verschiebungs- oder Shiftoperator.

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{y}(t) - \lambda y(t) = g(t) \text{ oder in Operatorform } (D - \lambda)y(t) = g(t) \quad (4.6)$$

Wir wissen, dass (4.6) als homogene Lösung  $y(t) = e^{\lambda t}$  hat, also versuchen wir es mit dem Produktansatz<sup>1</sup>

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot D^{-1}[e^{-\lambda t} g(t)] \quad (4.7)$$

Wir verifizieren das durch einsetzen in (4.6). Nun wenden wir das auf die Differentialgleichung  $(D - \lambda)^2[y(t)] = g(t)$  an und machen hierfür den entsprechenden Produktansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot D^{-2}[e^{-\lambda t} g(t)] \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>Eingesetzt ergibt dies  $D[e^{\lambda t} D^{-1}[e^{-\lambda t} g(t)]] - \lambda e^{\lambda t} D^{-1}[e^{-\lambda t} g(t)] = g(t)$ . Wenn wir die Operation  $D$  ausführen - Achtung Produktregel - und  $DD^{-1} = 1$  beachten, dann erhalten wir  $g(t) = g(t)$

und zeigen wieder, dass (4.8) die Differentialgleichung erfüllt. nun stellt sich die Frage nach der Verallgemeinerung, d.h. was geschieht wenn die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - \alpha \dot{y}(t) + \beta y(t) = g(t) \quad (4.9)$$

vorliegt, wobei wir  $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$  und  $\beta = \lambda_1 \lambda_2$  schreiben. Damit haben wir

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)[y(t)] = g(t) \quad (4.10)$$

Die Gleichung (4.9) können wir mit  $(D - \lambda_2)[y(t)] = y^*(t)$  in der Form  $(D - \lambda_1)[y^*(t)] = g(t)$  schreiben.

Nun lösen wir das ganze sukzessive auf

$$\begin{aligned} y^*(t) &= e^{\lambda_1 t} \cdot D^{-1} \left[ e^{-\lambda_1 t} g(t) \right] \\ y(t) &= e^{\lambda_2 t} \cdot D^{-1} \left[ e^{-\lambda_2 t} y^*(t) \right] = \\ &= e^{\lambda_2 t} \cdot D^{-1} \left[ e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot D^{-1} \left[ e^{-\lambda_1 t} g(t) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Damit ist auch der allgemeine Fall für ein Polynom beliebiger Ordnung

$$P(D)[y(t)] = (D - \lambda_1)^{r_1} \cdot (D - \lambda_2)^{r_2} \cdots (D - \lambda_n)^{r_n} [y(t)]$$

zugänglich, nämlich

$$y(t) = e^{\lambda_s t} \cdot D^{-r_s} [e^{(\lambda_{s-1} - \lambda_s)t} \cdot D^{-r_{s-1}} [\dots e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} D^{-r_1} [e^{-\lambda_1 t} g(t)] \dots]] \quad (4.12)$$

#### Beispiel 16: Ganzrationale Inhomogenität

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) - 2y(t) = 4t^2 - 2$$

Hat die charakteristische Gleichung

$$(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet somit

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$$

Mit (4.12) erhalten wir

$$y(t) = e^{-t} \cdot D^{-2} [e^{3t} \cdot D^{-1} [e^{-2t} (4t^2 - 2)]] = -2t^2 + 6t - 8$$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} - 2t^2 + 6t - 8$$

Die  $c_i$  werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.



Hieraus leiten wir eine allgemeine herangehensweise bei Polynomen als Inhomogenitäten ab.

**N.B.: Spezielle Lösung bei speziellen Inhomogenitäten**

1. Ist die Inhomogenität gegeben als ein Polynom  $n$ -ter Ordnung, so setzt man die spezielle Lösung der Differentialgleichung als allgemeines Polynom  $n$ -ter Ordnung an und bestimmt die Polynomkoeffizienten durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich. Wir haben 2 Fälle zu betrachten

2. Ist  $g(t) = e^{\mu t}$  und  $\mu \neq \lambda_i$  dann erhalten wir durch einsetzen in (4.12)

$$y(t) = \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda_1)^{r_1} \dots (\mu - \lambda_s)^{r_s}}$$

3. Liegt hingegen Resonanz vor, z.B.  $\mu = \lambda_s$ , dann schreiben wir (4.12)

$$y(t) = e^{\lambda_s t} \cdot D^{-r_s} \left[ \frac{e^{(\mu - \lambda_s) \cdot t}}{(\mu - \lambda_1)^{r_1} \dots (\mu - \lambda_{s-1})^{r_{s-1}}} \right]$$

Beachte, die Reihenfolge der Operatoren  $(D - \lambda_i)^{r_i}$  kann beliebig vertauscht werden und wir erhalten im Resonanzfall

$$y(t) = e^{\mu t} \cdot D^{-r_s} \left[ \frac{1}{(\mu - \lambda_1)^{r_1} \dots (\mu - \lambda_{s-1})^{r_{s-1}}} \right]$$

Was sich wiederum integrieren lässt zu

$$y(t) = \frac{t^{r_s} e^{\mu t}}{(\mu - \lambda_1)^{r_1} \dots (\mu - \lambda_{s-1})^{r_{s-1}}} \cdot \frac{1}{r_s!}$$

Wir fassen die allgemeine Vorgehensweise im Diagramm in Abbildung 4.1 zusammen. Zur Erfüllung der Randbedingungen gibt es zwei Vorgehensweisen, die wir im folgenden diskutieren wollen.

In der ersten Vorgehensweise überlagern wir die gefundene spezielle Lösung mit der homogenen Lösung, die ja noch zu wählende Konstanten beinhaltet  $y(t) = y_{hom}(t) + y_{par}(t)$ . Dann setzen wir diese Lösung in die Randbedingungen ein und bestimmen so die Konstanten. Dies ist die sichere Variante.

Für die zweite Vorgehensweise erinnern wir uns an die Variation der Konstanten. Dort hatten wir für eine inhomogene Gleichung erster Ordnung  $(D - \lambda)y(t) = f(t)$  den Ansatz  $y_{par}(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$  gemacht. Die Bestimmungsgleichung für  $c(t)$  lautete  $\dot{c}(t) = e^{-\lambda t} \cdot f(t)$ . Nun integrieren wir über  $t$  in den Grenzen von 0 bis  $t$ . Damit erhalten wir  $c(t) - c(0) = \int_0^t e^{-\lambda t'} \cdot f(t') dt'$ . Die Konstante  $c(0)$  ist unbestimmt. Wir wählen  $c(0) = 0$ . Die Integration in den Grenzen wenden wir auch auf (4.12)

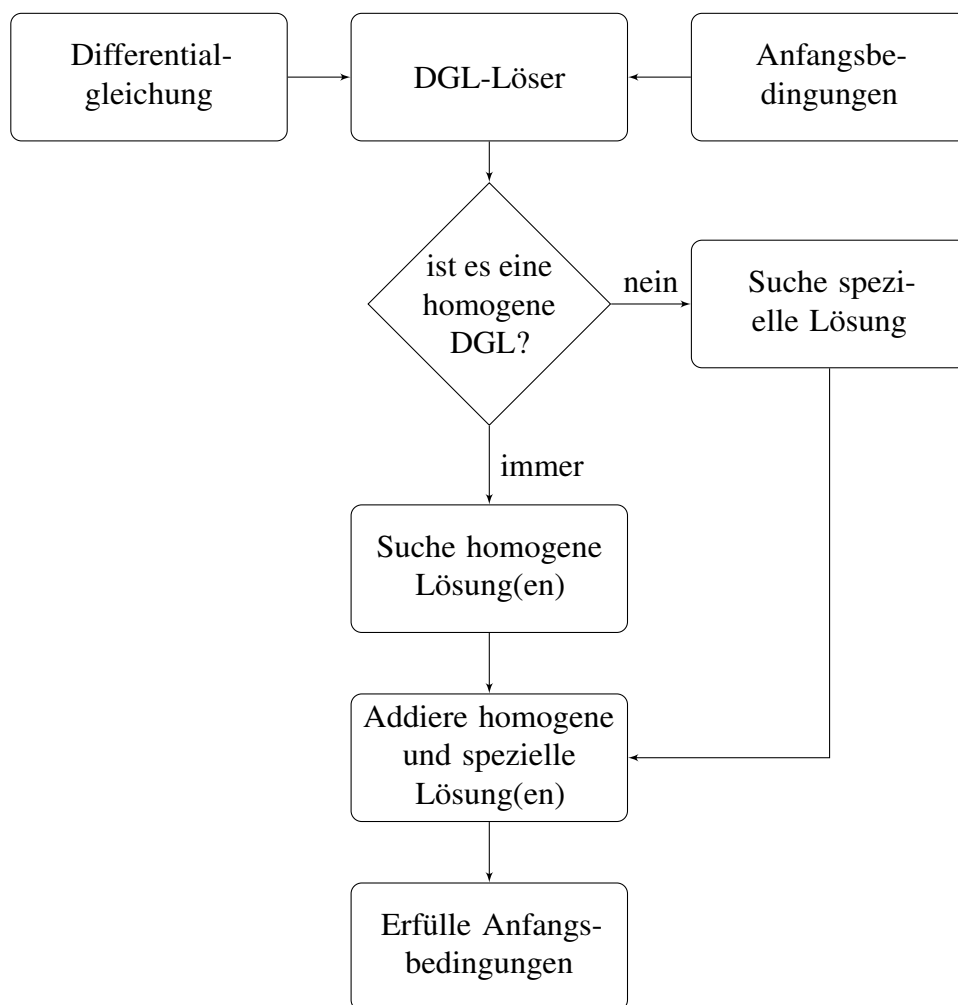


Abb. 4.1: Flussdiagramm zur Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen.

an. Damit wird (4.12) zu

$$y_p(t) = e^{\lambda_n t} \int_0^t e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t'} \int_0^{t'} e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})t''} \dots \int_0^r e^{(\lambda_1 - \lambda_2)p} \int_0^p e^{-\lambda_1 q} f(q) dq dp \dots dt'' dt' \quad (4.13)$$

Wie man leicht sieht, gilt  $y_p(0) = 0$ ,  $\dot{y}_p(0) = 0, \dots, y_p^{(n-1)}(0) = 0$  (wir zeigen dies in der Anmerkung unten). Damit bleibt die Aufgabe, die  $c_i$  der homogenen Lösung so zu bestimmen, dass die homogene Lösung die Anfangsbedingungen erfüllt.

**N.B.: Die Ableitungen von  $y_p(t)$  aus (4.13) bei  $t = 0$**

Wir leiten (4.13) einmal nach  $t$  ab, dann erhalten wir (Kettenregel beachten)

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) = \lambda_n y_p(t) + e^{\lambda_n t} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t'} \int_0^{t'} e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})t''} \dots \\ \dots \int_0^r e^{(\lambda_1 - \lambda_2)p} \int_0^p e^{-\lambda_1 q} f(q) dq dp \dots dt'' dt' \end{aligned} \quad (4.14)$$

Unter dem Integral über  $dt'$  steht eine Funktion  $g(t')$ , n'est-ce pas? Nämlich

$$g(t') = e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t'} \int_0^{t'} e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})t''} \dots \int_0^r e^{(\lambda_1 - \lambda_2)p} \int_0^p e^{-\lambda_1 q} f(q) dq dp \dots dt''$$

Also haben wir

$$\dot{y}_p(t) = \lambda_n y_p(t) + e^{\lambda_n t} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t') dt'$$

Davon wissen wir aber, dass gilt

$$\lambda_n y_p(t) + e^{\lambda_n t} g(t)$$

Es ist aber  $y_p(0) = 0$  und, wie wir leicht sehen, auch  $g(0) = 0$ . Der geneigte Leser möge letzte Aussage beweisen. Also ist auch  $\dot{y}_p(0) = 0$ . Das geht weiter bis zur Ableitung der Ordnung  $n - 1$ .

## 4.3 Randwertprobleme

Gegeben eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten 2. Ordnung

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a \frac{dy(x)}{dx} + by(x) = g(x) \quad (4.15)$$

Wir machen einen Exponentialansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  und erhalten für die homogene Differentialgleichung (4.15)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (4.16)$$

als charakteristische Gleichung. Hat (4.16) zwei Lösungen, so ergibt dies auch zwei Lösungen  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  und  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ . Die zwei Lösungen überlagern wir um eine Lösung von (4.15) zu

erhalten

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Nun sei  $g(x) = 0$  und die beiden Randbedingungen  $y(0) = \alpha$  und  $y(L) = \beta$  seien gegeben. Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem, das wir erfüllen müssen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Aus (4.17) berechnen wir die Lösungen für  $c_1$  und  $c_2$ , wobei diese Gleichung nicht notwendigerweise eine Lösung hat, dies ist zuerst zu zeigen. Sollte (4.17) nicht lösbar sein, so haben wir Randbedingungen gefordert, die durch das Gleichungssystem nicht erfüllt werden können.

In Falle  $g \neq 0$  gehen wir vor, wie wir es bei den Anfangswertproblemen auch getan haben. Wir überlagern die homogene und die partikuläre Lösung  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  und bekommen ein Gleichungssystem, das nun auch die Funktion  $g(x)$  enthält, nämlich durch (4.11) eben in der Form

$$y_p(x) = e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\eta} \int_0^\eta e^{-\lambda_1 \xi} g(\xi) d\xi d\eta$$

Damit wird (4.17) zu

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + y_p(0) \\ \beta + y_p(L) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

# Kapitel 5

## Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir benutzen die Operatorschreibweise, um ein allgemeines System von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anzugeben. Wir betrachten somit Systeme der Art

$$P_{i_1}(D)[y_1(t)] + P_{i_2}(D)[y_2(t)] + \cdots + P_{i_n}(D)[y_n(t)] = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.1)$$

Um (4.5) zu lösen gibt es zwei Strategien: Erstens könnten wir aus dem vorliegenden System eine Differentialgleichung höherer Ordnung machen oder zweitens könnten wir versuchen auf ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung überzugehen.

Anhand zweier Beispiele wollen wir die Vor- und Nachteile beider Methoden untersuchen und aus den Nachteilen gegebenenfalls Rückschlüsse auf die Modelle ziehen.

### Beispiel 17: Rückführung auf DGL höherer Ordnung

Ähnlich dem Gauß'schen Eliminationsverfahren schreiben wir

$$\begin{array}{rcl} D^2[y_1(t)] + & y_2(t) & = 0 \\ y_1(t) + & D^2[y_2(t)] & = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} D^2 \\ \cdot (-1) \end{array} \right.$$

und erhalten die DGL  $D^4[y_1(t)] - y_1(t) = 0$ .

Versuchen wir die Methode hingegen auf das System

$$\begin{array}{rcl} (D+1)[y_1(t)] + (D^2-1)[y_2(t)] & = & 0 \\ y_1(t) + (D-1)[y_2(t)] & = & 0 \end{array}$$

anzuwenden, gelingt die Elimination von  $y_1(t)$  oder  $y_2(t)$  nicht, denn die beiden Gleichungen sind linear abhängig (warum?).

Wie wir aus dem Gegenbeispiel gesehen haben, ist die Tatsache der linearen Abhängigkeit auf eine nicht eindeutige Formulierung der Problemstellung zurückzuführen. Denn entweder ist  $y_1(t)$

oder  $y_2(t)$  frei wählbar und die Gleichung dann nach der jeweils anderen Funktion zu lösen. Diese Wahlfreiheit bedeutet aber einen Mangel an Information über das Modellsystem. Für eine eindeutige Lösung müssen wir uns Gedanken über weitere Bedingungen machen, die wir dem System auferlegen, damit es eindeutig mit Hilfe der Differentialgleichungen formuliert werden kann. Das bedeutet dann noch nicht, dass es lösbar sein wird.

#### Beispiel 18: Rückführung auf ein System linearer DGL 1. Ordnung

Aus dem System

$$\ddot{y}_1(t) + y_2(t) = 0$$

$$\ddot{y}_2(t) + y_1(t) = 0$$

erhalten wir mit  $\dot{y}_1(t) = y_3(t)$  und  $\dot{y}_2(t) = y_4(t)$  das System

$$\dot{y}_1(t) = y_3(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = y_4(t)$$

$$\dot{y}_3(t) = -y_2(t)$$

$$\dot{y}_4(t) = -y_1(t)$$

Versuchen wir allerdings diese Methode auf das System

$$\ddot{y}_2(t) + \dot{y}_1(t) + y_1(t) - y_2(t) = 0$$

$$\dot{y}_2(t) + y_1(t) - y_2(t) = 0$$

anzuwenden, dann lässt sich dieses nicht in ein System der gewünschten Art überführen. In diesem Fall lässt sich die Funktion  $y_1(t)$  frei wählen und dann das lineare System lösen. Da aber von vornherein  $y_1(t)$  nicht eindeutig bestimmt ist, gilt das oben gesagte.

Wir werden uns im folgenden daher nur mit der Form

$$\dot{y}_i(t) = a_{i1}y_1(t) + a_{i2}y_2(t) + \cdots + a_{in}y_n(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

befassen.

## 5.1 Homogene Systeme erster Ordnung

Ein homogenes System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung hat die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Das System (5.2) lässt sich mit Hilfe der Operatorschreibweise auch so darstellen

$$\begin{pmatrix} a_{11} - D & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - D & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Oder wir schreiben es ganz einfach als

$$\dot{\vec{y}}(t) = A \cdot \vec{y}(t) \quad (5.4)$$

Es gibt genau eine Lösung  $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  von (5.2), so dass die zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  gewählten Bedingungen

$$y_1(t_0) = b_1, y_2(t_0) = b_2, \dots, y_n(t_0) = b_n \quad (5.5)$$

erfüllt sind. Wir werden den Beweis hier nicht antreten und verweisen stattdessen auf die einschlägigen Lehrbücher.

Für die Lösung der Systeme (5.2) benutzen wir den Exponentialansatz  $e^{\lambda t}$ . Da wir  $n$  Funktionen zu bestimmen haben, schreiben wir diesen gleich in der Form

$$y_i(t) = c_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, \dots, n \text{ und } c_i \in \mathbb{R}) \quad (5.6)$$

Wir setzen den Ansatz in (5.2) ein und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)c_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Oder einfacher

$$(A - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{c} = 0 \quad (5.8)$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass (5.8) nur eine Lösung hat, wenn gilt  $|A - \lambda \mathbb{1}| = 0$  und die für die Lösungen gewählten Werte der  $\lambda$  sind die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix  $A$ .

Um (5.8) zu lösen erinnern wir uns an Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen quadratischer Matrizen. Wir wissen es gibt drei Fälle:

1. Alle Eigenwerte  $\lambda_i$  sind voneinander verschieden.
2. Es treten mehrfache Eigenwerte auf. Der Rang der Matrix  $A - \lambda \mathbb{1}$  fällt für jeden mehrfachen Eigenwert um soviel gegenüber  $n$ , wie die Vielfachheit des entsprechenden Eigenwertes beträgt.

3. Es tritt mindestens ein mehrfacher Eigenwert auf für den der Rangabfall nicht die obere Regel erfüllt.

Die ersten beiden Fälle erlauben uns die Matrix  $A$  auf Diagonalform

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

zu bringen. Was bedeutet das für unser Gleichungssystem? Wir schreiben  $\vec{y}^T$  als Transformierte eines Vektors  $\vec{z}^T$  dergestalt  $\vec{y}^T = C \cdot \vec{z}^T$  und damit auch  $\dot{\vec{y}}^T = C \cdot \dot{\vec{z}}^T$ . Damit erhalten wir

$$C \cdot \dot{\vec{z}}^T = A \cdot C \cdot \vec{z}^T$$

und wenn wir mit  $C^{-1}$  multiplizieren ergibt sich

$$\dot{\vec{z}}^T = C^{-1} A \cdot C \cdot \vec{z}^T \quad (5.10)$$

Der Vorteil erschließt sich uns sofort: wir lösen das einfache Diagonalsysteme (5.10) und transformieren dann zurück um  $\vec{y}(t)$  zu erhalten.

**Fall 1:** Wir bestimmen zunächst die Eigenvektoren  $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ , die zu den jeweiligen Eigenwerten  $\lambda_i$  gehören. Diese bilden die Spalten der Transformationsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

mit deren Hilfe wir die Matrix  $A$  in die Diagonalform  $\Lambda$  überführen können

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \Lambda \quad (5.12)$$

Mit (5.11) können wir die allgemeine Lösung angeben

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_1 & c_{21}d_2 & \dots & c_{n1}d_n \\ c_{12}d_1 & c_{22}d_2 & \dots & c_{n2}d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n}d_1 & c_{2n}d_2 & \dots & c_{nn}d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Die beliebig wählbaren reellen Konstanten  $d_i$  benutzen wir zur Erfüllung der Anfangsbedingungen.

**Fall 2:** Es treten mehrfache Eigenwerte auf und der Rangabfall der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus (5.7) ist gleich dem Vielfachen des Eigenwertes. Auch in diesem Fall lässt sich  $A$  in die Diagonalform bringen. Wir erhalten parametrische Lösungen für die Eigenvektoren



der mehrfachen Eigenwerte, die wir so wählen können, dass sie linear unabhängig sind. Das weitere Vorgehen ist genauso, wie in Fall 1.

**Fall 3:** In diesem Fall können wir die Matrix  $A$  nicht auf Diagonalform jedoch auf die Jordansche Normalform bringen.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Die  $\lambda_i$  sind die Eigenwerte der Matrix  $A$  und die  $\delta_i$  entweder 0 oder 1. Es gibt eine Transformationsmatrix  $C$ , die  $A$  auf die Jordanform gemäß

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = J$$

abbildet. Für einen vielfachen Eigenwert  $\lambda_k$  mit der Multiplizität  $k$  bilden wir aus den Lösungen der Gleichungen  $(A - \lambda_k \mathbb{I})^2 \vec{c}^T = 0$ ,  $(A - \lambda_k \mathbb{I})^3 \vec{c}^T = 0$ ,  $\dots$ ,  $(A - \lambda_k \mathbb{I})^k \vec{c}^T = 0$  linear unabhängige Vektoren, die wir zur Transformationsmatrix zusammenbauen. Wir bringen das System (5.2) auf die Jordanform und lösen dann die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Wieder lösen wir das System (5.14) nach  $\vec{z}^T$  auf und transformieren danach wieder zurück  $\vec{y}^T = C \cdot \vec{z}^T$ .

## 5.2 Inhomogene Systeme erster Ordnung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den inhomogenen Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} \quad (5.15)$$

Eine Fundamentallösung von (5.15) in der Form einer Matrixfunktion  $\Phi(t)$  gehorcht der Gleichung

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t) \quad (5.16)$$

$\Phi(t) = e^{At}$  ist eine Fundamentalmatrix, welche die Bedingung  $\Phi(0) = \mathbb{1}$  erfüllt. Wenn aber mit  $\Phi(t)$  eine Fundamentalmatrix gefunden ist, dann ist es leicht ein System wie (5.15) mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  zu lösen

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\vec{\mathbf{b}}(\tau)d\tau \quad (5.17)$$

Dies erinnert an das Vorgehen bei der Variation der Konstanten. Setzen wir hier  $\Phi(t) = e^{At}$  ein, dann erhalten wir

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \vec{\mathbf{b}}(\tau)d\tau$$

#### Beispiel 19: Getriebener harmonischer Oszillator

$$\ddot{x}(t) + x(t) = f(t)$$

kann als inhomogenes System erster Ordnung geschrieben werden. Wir setzen  $y_1(t) = x(t)$  und  $y_2(t) = \dot{x}(t)$

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = -y_1(t) + f(t)$$

In diesem Fall ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = R(t)$$

eine Rotationsmatrix ist und es ist

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = R(-t)$$

Wir erhalten als Lösung

$$\mathbf{y}(t) = R(t)\mathbf{y}_0 + R(t) \int_0^t \begin{pmatrix} f(\tau) \sin(\tau) \\ f(\tau) \cos(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Das ursprüngliche Oszillatorsystem hat also die Lösung  $x(t) = y_1(t)$

$$x(t) = x_0 \cos(t) - v_0 \sin(t) + \int_0^t f(\tau) \sin(\tau - t) d\tau$$

# Kapitel 6

## Integraltransformationen

Eine Integraltransformation der Form

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b K(y,x) f(x) dx \quad (6.1)$$

ist gegeben als ein linearer Operator  $\int_a^b K(y,x) \cdot dx$ , der auf eine Funktion  $f(x)$  wirkt. Um die Anwendung solcher Integraltransformationen verstehen zu können, beschäftigen wir uns zunächst kurz mit den Funktionensystemen.

### 6.1 Vollständige normierte Orthogonalsysteme (VNOS)

Es sei eine Funktionenfolge  $\{\varphi_v(x)\}$  mit dem diskreten Laufindex  $v$  und einem gemeinsamen Definitionsbereich  $a \leq x \leq b$  gegeben. Alle Elemente aus  $\{\varphi_v(x)\}$  unterliegen denselben Einschränkungen. Diese können z.B. in Form von Symmetrieeigenschaften oder Randbedingungen vorliegen. Alle Elemente der Funktionenfolge sind linear abhängig, d.h.

$$\varphi \neq \sum_{v \neq \mu} c_v \varphi_v \quad (6.2)$$

Die Funktionenfolge  $\{\varphi_v(x)\}$  kann immer orthonormalisiert werden. D.h. wir können eine neue Folge aus Superpositionen generieren, die die Orthonormalitätsbedingung

$$\int_a^b \varphi_\mu^*(x) \varphi_v(x) dx = \delta_{\mu v} \quad (6.3)$$

erfüllen.

Ein orthonormales Funktionensystem ist vollständig, wenn man jede Funktion, die denselben Einschränkungen unterliegt als Überlagerung der Funktionen aus der Folge darstellen kann. Es gilt also

$$f(x) = \sum_{\mu} c_{\mu} \varphi_{\mu}(x) \quad (6.4)$$

Die Koeffizienten  $c_{\mu}$  bestimmen wir, in dem wir (6.3) in (6.4) benutzen und erhalten

$$c_{\nu} = \int_a^b \varphi_{\nu}^*(x) f(x) dx \quad (6.5)$$

Setzen wir nun wiederum (6.5) in (6.4) ein, dann erhalten wir

$$f(x) = \int_a^b f(x') \sum_{\mu} \varphi_{\mu}^*(x') \varphi_{\mu}(x) dx' \quad (6.6)$$

Da  $f(x)$  eine beliebige denselben Restriktionen wie die  $\varphi_{\mu}$  unterliegende Funktion sein kann muss

$$\sum_{\mu} \varphi_{\mu}^*(x') \varphi_{\mu}(x) = \delta(x' - x) \quad (6.7)$$

sein. Wobei  $\delta(x' - x)$  die Diracsche Deltafunktion repräsentiere, die folgende Eigenschaft hat

$$f(x) = \int_a^b f(x') \delta(x' - x) dx' \equiv f(x). \quad (6.8)$$

Wir werden im Kapitel 11 genauer auf deren Eigenschaften eingehen. Für die momentane Anwendung reicht uns (6.8).

## 6.2 Die Fourierreihen

Erinnern wir uns zunächst an die Fourierreihe: Jede stückweise stetige und im Intervall  $I = [-L/2, L/2]$  quadratintegrale Funktion  $f(x)$  ist durch eine Fourierreihe darstellbar:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{ik_n x}, \text{ mit } k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad (6.9)$$

Die Funktionen  $e^{ik_n x}$  sind auf dem Intervall  $I = [-L/2, L/2]$  orthogonal zueinander, d.h. es gilt

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_n x} e^{ik_m x} dx = L \delta_{mn}$$

Indem wir in

$$f_m = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_m x} f(x) dx \quad (6.10)$$

(6.9) einsetzen erhalten wir

$$f_m = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_m x} f(x) dx = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_m x} e^{ik_n x} dx}_{L\delta_{mn}} = \delta_{mn} f_n \quad (6.11)$$

Es gehören also die beiden Darstellungen im Raum der Wellenzahlen und dem Ortsraum zusammen

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{ik_n x} \quad (6.12)$$

$$f_m = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_m x} f(x) dx \quad (6.13)$$

#### N.B.: Quadratintegrabel

Als quadratintegrabel wird eine reelle oder komplexwertige Funktion  $f(x)$  auf einem Intervall  $I = [a, b]$  dann bezeichnet, wenn das Integral des Quadrats des Absolutbetrags der Funktion über  $I$  existiert und konvergiert, also

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

## 6.3 Die Fouriertransformation

Mit (6.11) in (6.9) erhalten wir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{ik_n x} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{ik_n x} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x') e^{-ik_n x'} dx' \quad (6.14)$$

Wir schreiben

$$\Delta k_n = k_n - k_{n-1} = \frac{2\pi}{L}$$

und erhalten damit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x') e^{-ik_n x'} dx'}_{\text{im Limes } (L \rightarrow \infty) \rightarrow F(k)} e^{ik_n x} \Delta k_n$$

Wir machen den Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  und erhalten damit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformation und ihre Inverse als

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (6.15)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk \quad (6.16)$$

#### N.B.: Verschiedene Formen der Fouriertransformation

##### 1. Frequenz $\nu$ (Hertz) und unitär

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} d^n x = \hat{f}_2(2\pi \mathbf{v}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}_3(2\pi \mathbf{v}) \\ f(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_1(\mathbf{v}) e^{2\pi i \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{v} \end{aligned}$$

##### 2. Kreisfrequenz $\omega$ (rad/s) und nicht unitär

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega \cdot \mathbf{x}} d^n x = \hat{f}_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}_3(\omega) \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_2(\omega) e^{i\omega \cdot \mathbf{x}} d^n \omega \end{aligned}$$

##### 3. unitär

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega \cdot \mathbf{x}} d^n x = \frac{\hat{f}_1(\omega/2\pi)}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{\hat{f}_2(\omega)}{(2\pi)^{n/2}} \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_3(\omega) e^{i\omega \cdot \mathbf{x}} d^n \omega \end{aligned}$$

Wir verwenden im folgenden die 2. Form der Fouriertransformation.

An Unstetigkeiten muss die Funktion die Bedingungen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon) + f(t - \varepsilon)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk$$

erfüllen.

## Beispiel 20: Rechteck

Gegeben die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

Dann ist die Fouriertransformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

## 6.4 Die Laplacetransformation

Wir betrachten die Fouriertransformation der auf einem Halbraum definierten Funktion  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Voraussetzung ist, dass  $f(t) \cdot e^{-tx}$ , für  $x > 0$  im Intervall  $[0, \infty)$  quadratintegrabel ist. Also ist deren Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{e^{-xt} f(t)\} = F(y) = \int_0^{\infty} e^{-iyt} e^{-xt} f(t) dt \quad (6.17)$$

Setzen wir  $s = x + iy$  und beschränken wir uns auf  $\Re(s) > 0$  dann können wir für die Funktion  $f(t)$  folgende Integraltransformation definieren

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.18)$$

Aufgrund des positiven Realteils von  $s$  konvergiert das Integral für  $t > 0$  und wir nennen  $F(s)$  die **Laplacetransformierte** von  $f(t)$ .

Die Umkehrung der Laplacetransformation erhalten wir aus der komplexen Inversionsformel

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\eta}^{\gamma + i\eta} F(s) e^{st} ds \quad (6.19)$$

wobei wir  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  verlangen und  $\gamma$  so wählen, dass alle Singularitäten links davon liegen. Wir integrieren also entlang der Geraden  $s = \gamma + iy$  von  $y = -\eta$  bis  $y = +\eta$  und machen den Grenzübergang für  $\eta \rightarrow \infty$ . Die Berechnung des Integrals lässt sich wesentlich einfacher gestalten mit der sogenannten Bromwich-Kurve. Die Motivation hierfür ist, dass man den Residuensatz ausnutzen kann. Denn wenn wir die in Abbildung 6.1 anschauen, dann sehen wir dort den Integrationsweg, der in (6.19) benutzt wurde. Diesen ergänzen wir mit dem Integrationsweg  $\Gamma$  und erhalten eine geschlossene positiv orientierte Kurve  $\mathcal{C}$  bestehend aus der Strecke von A nach B und dem Kreisausschnitt  $\Gamma$ , über welche wir die Funktion  $F(s)$  integrieren können

$$c(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} e^{st} F(s) ds \quad (6.20)$$

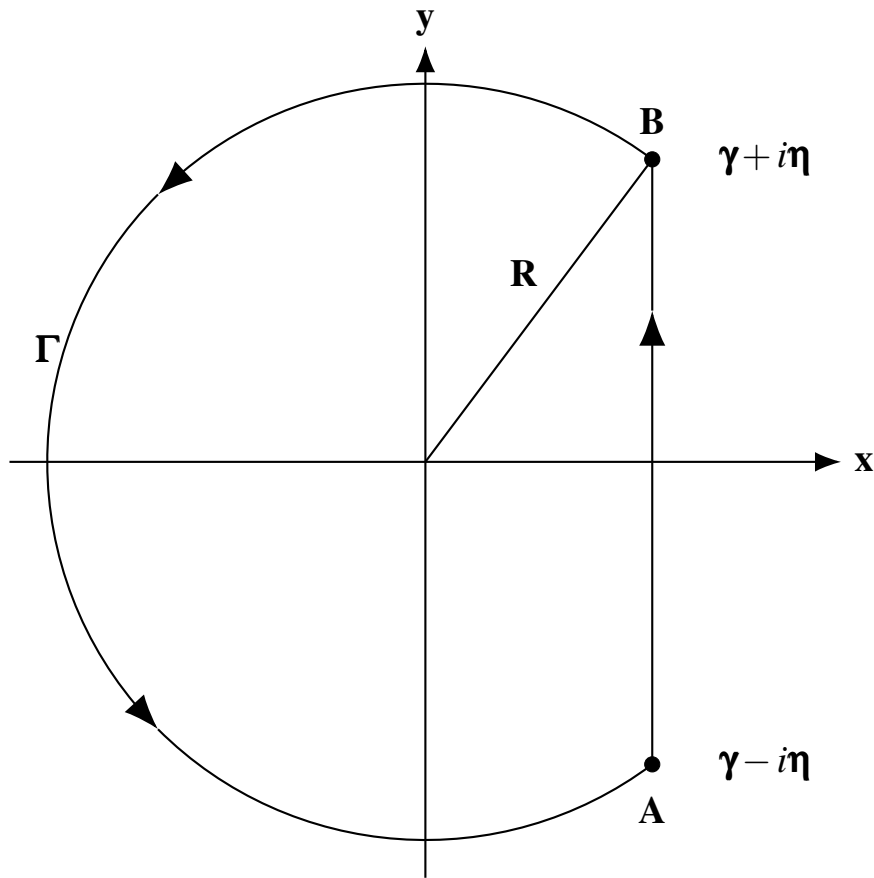


Abb. 6.1: Die Bromwich-Kurve

Dieses Integral kann mit Hilfe des Residuensatzes (siehe Anhang A) ausgewertet werden. Nun haben wir aber einen Fehler gemacht, den wir korrigieren müssen, das Integral über den Weg  $\Gamma$  muss wieder abgezogen werden, damit wir die inverse Laplacatransformation, wie in (6.19) rekonstruieren

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} e^{st} F(s) ds}_{\text{Residuensatz}} - \underbrace{\int_{\Gamma} F(s) e^{st} ds}_{\rightarrow 0} \right] \quad (6.21)$$

Das zweite Integral geht aber unter bestimmten Bedingungen gegen Null. Dies ist immer der Fall, wenn auf  $\Gamma$

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k}$$

gilt, wobei  $M > 0$  und  $k > 0$  ist.



## Beispiel 21: Anwendung

Wir wenden die Laplacetransformation auf das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = g(t), \quad (6.22)$$

$$\text{mit } y(0) = y_0 \text{ und } \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}_0 \text{ an.}$$

Durch partielle Integration können wir zeigen, dass gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = y(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_{t_0}^{\infty} y(t) e^{-st} dt = -y_0 + sY(s)$$

Durch zweimalige partielle Integration zeigen wir, dass gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{d^2y(t)}{dt^2} e^{-st} dt = -\dot{y}_0 - sy_0 + s^2Y(s)$$

Des weiteren gilt  $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$ . Damit erhalten wir bei Anwendung der Laplacetransformation auf sämtliche Terme von (6.22)

$$\underbrace{s^2Y(s) + sY(s) + 2Y(s)}_{\text{Differentialoperator}} \underbrace{-y_0 - \dot{y}_0 - sy_0}_{\text{Anfangsbedingungen}} = \underbrace{G(s)}_{\text{Inhomogenität}}$$

oder

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)}{s^2 + s + 2}}_{\text{inhom. Lösung}} + \underbrace{\frac{(s+1)y_0 + \dot{y}_0}{s^2 + s + 2}}_{\text{hom. Lösung+Anfangsb.}} \quad (6.23)$$



# Kapitel 7

## Theorie der linearen Antwort

Dieses äusserst wichtige Thema behandelt die linearen passive Systeme, wie wir sie aus der Elektrotechnik kennen. Hierbei bedeutet “Passivität”, dass das System im zeitlichen Mittel nur Arbeit bzw. Energie aufnimmt, wenn äussere Kräfte darauf einwirken. Dieser Abschnitt folgt im wesentlichen der Darstellung, wie sie in (Jaekle, 1978) zu finden ist.

### 7.1 Der gedämpfte harmonische Oszillator: *Exkursion zur Drosophila melanogaster der Physik*

Da der harmonische Oszillator in zahlreichen Variationen und auf den verschiedensten Gebieten immer wieder anzutreffen ist, wollen wir ihm hier einen extra Unterabschnitt widmen.

Die Auslenkung  $x(t)$  eines gedämpften harmonischen Oszillators als Antwort auf eine von außen angelegte zeitabhängige Kraft  $f(t)$  ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$m \left( \frac{d^2}{dt^2} + \beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) = f(t) \quad (7.1)$$

wobei  $\beta$  die Dämpfungskonstante bezeichne und  $\omega_0/2\pi$  die Eigenfrequenz des Oszillators ohne Dämpfung.

Für eine beliebige äussere Kraft  $f(t)$  existiert eine sogenannte *lineare Antwortfunktion* oder auch *Greensche Funktion*  $G(\tau)$  genannt, mit Hilfe derer wir die Lösung des Anfangswertproblems mit  $\lim_{t_0 \rightarrow 0} x(t_0) = 0$  und  $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \dot{x}(t_0) = 0$  auf folgende Weise schreiben können

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt' \quad (7.2)$$

Die Greensche Funktion ist eine lineare Abbildung der Funktion  $f(t)$  auf die Funktion  $x(t)$  (man zeige dass (7.2) tatsächlich eine lineare Abbildung ist!).

Für  $\frac{\beta}{2} < \omega_0$ , dem Fall schwacher Dämpfung, lautet die Greensche Funktion

$$G(\tau) = \frac{1}{m\omega_r} e^{-\frac{\beta}{2}\tau} \sin(\omega_r \tau) \Theta(\tau) \quad (7.3)$$

wobei  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}$  die Resonanzfrequenz im Dämpfungsfall bezeichne und

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Lösung des harmonischen Oszillators mit Hilfe einer linearen Antwortfunktion oder der Greenschen Funktion kann in gleicher Weise auf eine große Klasse von Systemen linearer Differentialgleichungen verallgemeinert werden.

Wir sehen im Fall des harmonischen Oszillators, dass die Greensche Funktion die Differentialgleichung

$$m \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \beta \frac{d}{d\tau} + \omega_0^2 \right) G(\tau) = \delta(\tau) \quad (7.4)$$

erfüllt. Dies zeigt man durch einsetzen von (7.2) in (7.1). Die Greensche Funktion beschreibt deshalb die Lösung der harmonischen Oszillorgleichung als Antwort auf einen Deltapuls, also die Impulsantwortfunktion.

#### Aufgabe 1: Die Antwort des Oszillators

Zeige mit Hilfe der Laplacetransformation, dass (7.3) die Impulsantwortfunktion des gedämpften harmonischen Oszillators ist.

Es interessiert uns besonders die harmonische Antwort des Oszillators. Wir suchen die Lösung von (7.1) bei einer Inhomogenität der Form

$$f(t) = \Re\{f_0 \cdot e^{-izt}\} = |f_0| \cos(\omega t - \delta) e^{\eta t} \text{ mit } z = \omega + i\eta \text{ und } \eta > 0 \quad (7.5)$$

#### N.B.: Adiabatisches Einschalten

$\eta > 0$  entspricht einem langsamen "adiabatischen" Einschalten der externen treibenden Kraft. Wir betrachten immer den Limes  $\eta \rightarrow 0$  interessiert.

Wir suchen eine partikuläre Lösung der Form

$$x(t) = \Re\{x_0 \cdot e^{-izt}\} = |x_0| \cos(\omega t - \delta - \phi) e^{\eta t} \quad (7.6)$$

Wir setzen nun (7.5, 7.6) in (7.1) ein und erhalten damit für das Verhältnis der komplexen Amplituden

$$\frac{x_0}{f_0} = \frac{1/m}{-z^2 - i\beta z + \omega_0^2} = \chi(z) \quad (7.7)$$

## 7.1. DER GEDÄMPFTE HARMONISCHE OSZILLATOR: EXKURSION ZUR DROSOPHILA MELANOGA

Wir nennen  $\chi(z)$  die *dynamische Suszeptibilität* des Systems, in unserem Fall des harmonischen Oszillators. Die dynamische Suszeptibilität bestimmt die Antwort  $x(t)$  des gedämpften harmonischen Oszillators auf eine harmonische treibende Kraft  $f(t)$ , die mit der Frequenz  $\omega$  oszilliert. Wir können die dynamische Suszeptibilität auch mit der Greenschen Funktion nach (7.2) erhalten. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass die dynamische Suszeptibilität die Laplacetransformierte der Greenschen Funktion ist

$$\chi(z) = \int_0^\infty G(t)e^{izt} dt \quad (7.8)$$

**N.B.:**

Zeige, dass die Form der Laplacetransformation in (7.8) äquivalent derjenigen in (6.18) ist!

Nun definieren wir uns den Fall der Resonanz und zwar auf zwei verschiedene Arten. Einmal als die Frequenz, bei der der Oszillator mit der maximalen Amplitude "antwortet" und zum anderen als diejenige, bei der seine Leistungsaufnahme maximal ist. Für ersteres gilt

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |\chi(\omega + i\eta)| = \frac{1}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta\omega)^2}} \quad (7.9)$$

und das Maximum der Auslenkung liegt bei  $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/2}$ , also etwas unterhalb der natürlichen Frequenz  $\omega_0$ . Die momentane Leistungsaufnahme eines Systems, die an ihm verrichtet wird, ist gegeben durch die äussere Kraft multipliziert mit der zeitlichen Veränderung der Auslenkung - also der Geschwindigkeit - was sich schreiben lässt als  $P(t) = f(t) \cdot \dot{x}(t)$ . Wir berechnen die über eine Schwingungsperiode  $T$  gemittelte Leistung als

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\dot{x}(t) dt \quad (7.10)$$

Um  $\dot{x}(t)$  zu berechnen benutzen wir (7.7) und erhalten zunächst

$$x(t) = \Re[f_0 \cdot \chi(z) \cdot e^{-izt}]$$

Wir bilden die Ableitung und machen den Grenzübergang  $\eta \rightarrow 0$  und erhalten

$$\dot{x}(t) = \omega \cdot |f_0| (-\chi'(\omega) \sin(\omega t) + \chi''(\omega) \cos(\omega t)) \quad (7.11)$$

Dabei haben wir folgenden Grenzübergang gemacht

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \chi(\omega + i\eta) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$

Wenn wir dies in (7.10) einsetzen, dann erhalten wir

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} |f_0|^2 \omega \chi''(\omega) \quad (7.12)$$

Der wesentliche Faktor ist also

$$\omega \chi''(\omega) = \frac{\beta \omega^2 / m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \quad (7.13)$$

Die beiden Resonanzkurven für Amplituden- und Leistungsresonanz zeigen wir in einem Diagramm in Bild 7.1

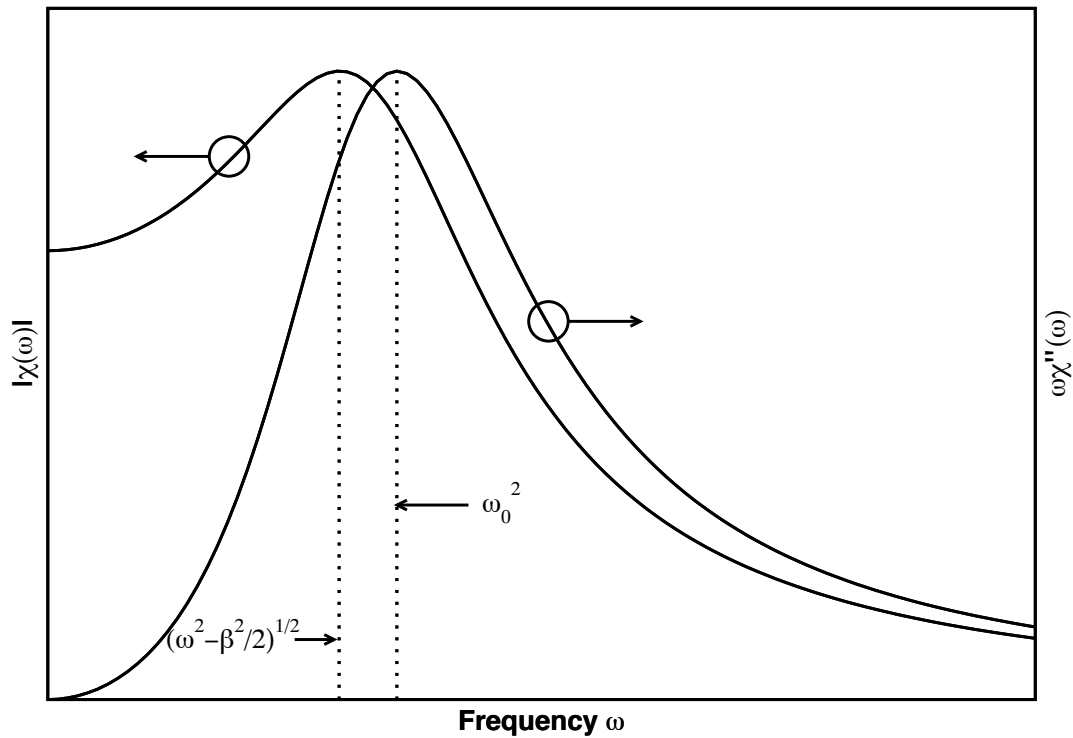


Abb. 7.1: Amplituden- und Leistungsresonanz eines gedämpften harmonischen Oszillators.

#### Aufgabe 2: Amplituden- und Leistungsresonanz

Interpretiere die beiden Resonanzkurven aus Abbildung 7.1!

## 7.2 Die Funktion der linearen Antwort

Im allgemeinen Fall eines linearen zeitinvarianten Systems (LTI-System) wissen wir, dass die Antwortfunktion nur von der Zeitdifferenz  $t - t'$  abhängt, d.h. die allgemeine Antwort reduziert sich auf die Form wie beim harmonischen Oszillator

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{LTI}(t, t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') f(t') dt' \quad (7.14)$$

Wir interessieren uns also nur für die Laplacetransformierte von  $G(\tau)$ , wobei wir wissen, dass  $G(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ . Dann ist die Antwort auf die angelegte Kraft

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') F(t') dt' \quad (7.15)$$

$G(\tau)$  ist die reelle Systemfunktion. Wir nennen Sie die Funktion der linearen Antwort. Das System solle sich kausal verhalten, was bedeutet, dass  $x(t) = 0$  für alle Zeiten  $t$ , die vor dem Einschalten der Kraft  $f(t)$  liegen. Das bedeutet, dass  $G(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ .

Ausserdem sollen  $x(t)$  und  $f(t)$  die momentane Arbeitsleistung des Systems bestimmen durch

$$P(t) = f(t) \cdot \dot{x}(t).$$

Passivität des Systems soll nun bedeuten, dass bei einer periodischen von aussen anregenden Kraft, die mittlere von aussen geleistete Arbeit nicht negativ ist.

Die Antwort auf eine periodische äussere Kraft  $f(t) = \Re\{f_0 e^{-izt}\}$  mit  $\Im\{z\} > 0$  erhalten wir aus (7.15) zu  $x(t) = \Re\{x_0 e^{-izt}\}$ , wobei

$$\frac{x_0}{f_0} = \chi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{iz\tau} d\tau$$

wie bereits in (7.8) gesehen. Das Integral erstreckt sich weiterhin der Kausalität wegen nur auf positive Zeiten  $\tau > 0$ . Wir schreiben die Inverse Laplacetransformation der Suszeptibilität als

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} e^{-iz\tau} \chi(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+i\eta)\tau} \chi(\omega+i\eta) d\omega, \quad \eta > 0 \quad (7.16)$$

Den Beweis hierfür schauen wir uns im nächsten Abschnitt genauer an.

Zunächst benutzen wir die Zerlegung der Suszeptibilität nach Real- und Imaginärteil, mit dem Grenzübergang, wie wir das schon im vorigen Abschnitt getan haben

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \chi(\omega+i\eta) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$

Dies erlaubt uns die Lösung  $x(t) = \Re\{x_0 e^{-izt}\}$  in zwei verschiedenphasige Komponenten zu zerlegen

$$x(t) = \Re\{x_0 e^{-izt}\} = |f_0| e^{\eta t} (\chi'(\omega) \cos(\omega t - \varphi) + \chi''(\omega) \sin(\omega t - \varphi)) \quad (7.17)$$

Da  $\chi(z)$  die Laplacetransformierte einer reellen Funktion ist, gilt

$$[\chi(\omega+i\eta)]^* = [\chi(-\omega+i\eta)]$$

Daraus wiederum folgt, dass der Realteil  $\chi'$  eine gerade und der Imaginärteil  $\chi''$  eine ungerade Funktion von  $\omega$  ist

$$\chi'(-\omega) = \chi'(\omega), \quad \chi''(-\omega) = -\chi''(\omega)$$

Wir berechnen die mittlere Energieabsorption des Systems pro Zeiteinheit bei einer periodischen Anregung mit einer äusseren Kraft der Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  und der Amplitude  $f_0$ :

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} |f_0|^2 \omega \chi''(\omega)$$

Damit wird die Bedingung für die Passivität  $\omega \chi''(\omega) \geq 0$ .





# Kapitel 8

## Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt behandelt Beispiele nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen und deren Lösung mit verschiedenen Zugängen. Zuerst sollen nichtlineare Systeme erster Ordnung und ersten Grades behandelt werden, die eine eindeutige Zeitskalentrennung der abhängigen veränderlichen aufweisen und bei denen es möglich ist, das qualitative Lösungsverhalten durch wenige instabile Freiheitsgrade auszudrücken ([H.Haken, Advanced Synergetics, Kapitel 7](#)). Dies führt auf die sogenannten Ordnungsparametergleichungen. Danach wird auf die numerische Lösung von Differentialgleichungen eingegangen.

### 8.1 Einleitung

Die Differentialgleichung  $\dot{q} = \alpha q$  ist linear und von erster Ordnung, während die Gleichung  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$  eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist, die wir auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades zurückführen können. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= -\omega^2 q_1 \end{aligned} \quad \text{oder allgemein} \quad \dot{\mathbf{q}} = L \cdot \mathbf{q}$$

$L$  bezeichnet hierbei die Koeffizientenmatrix, wir haben es mit einem linearen System von Differentialgleichungen zu tun.

Jetzt erweitern wir das Konzept auf nichtlineare Differentialgleichungen, genauer auf ein System nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \alpha q_1 + \beta q_1 q_2 \\ \dot{q}_2 &= \dots \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\beta$  ein Kontrollparameter, der die nichtlineare Kopplung zwischen den Freiheitsgraden

$q_1$  und  $q_2$  kontrolliert. Allgemein schreiben wir so etwas als

$$\dot{\mathbf{q}} = N(\mathbf{q}) \quad (8.1)$$

### Beispiel 22: Nichtlineare Differentialgleichungen

#### 1. Der van der Pol Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \mu(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

den wir wiederum umschreiben zu 1. Ordnung

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \mu(1 - y_1(t)^2)y_2(t) - \omega^2 y_1(t)$$

Wie sieht das Phasenraumbild aus?

#### 2. Der Lorenz Attraktor

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

In Wikipedia steht zu lesen: “Formuliert wurde das System um 1963 von dem Meteorologen Edward N. Lorenz (1917–2008), der es als Idealisierung eines hydrodynamischen Systems entwickelte. Basierend auf einer Arbeit von Barry Saltzman (1931–2001) ging es Lorenz dabei um eine Modellierung der Zustände in der Erdatmosphäre zum Zweck einer Langzeitvorhersage. Allerdings betonte Lorenz, dass das von ihm entwickelte System allenfalls für sehr begrenzte Parameterbereiche von  $\sigma$ ,  $\rho$  und  $\beta$  realistische Resultate liefert.” (siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor>).

#### 3. Das Volterra-Lotka System der Populationsdynamik

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = -y + xy$$

Finden Sie ein Darstellung der Phasenraumbilder der drei Systeme aus obigen Beispiel!

## 8.2 Ordnungsparametergleichungen

Wir betrachten folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades in den Variablen  $u(t)$  und  $s(t)$ .

$$\dot{u} = \alpha u - us \quad (8.2)$$

$$\dot{s} = -\beta s + u^2 \quad (8.3)$$

Wir nehmen an  $\alpha \geq 0$  und  $\beta > 0$ . Wir nennen  $u$  die instabile und  $s$  die stabile Mode - das erklären wir später genauer. Erstmal wollen wir die  $s$  durch die  $u$  ausdrücken, indem wir so tun, als wären letztere bekannt. Dann erhalten wir — Variation der Konstanten anwenden — folgende Lösung

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u(\tau)^2 d\tau \quad (8.4)$$

mit der Anfangsbedingung  $\lim_{t \rightarrow -\infty} s(t) = 0$ .

### 8.2.1 Adiabatische Näherung

Wenn wir (8.4) partiell integrieren, erhalten wir

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} 2(u(\tau)\dot{u}(\tau)) d\tau \quad (8.5)$$

Nehmen wir nun an, dass  $u(t)$  sich wenig ändere, so daß  $\dot{u}$  als sehr klein angenommen werden kann, dann liegt es nahe das Integral in (8.5) zu vernachlässigen. Damit erhalten wir

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t), \quad (8.6)$$

was wir auch sofort aus (8.3) erhalten würden, wenn wir  $\dot{s} = 0$  setzten.

Unter welchen Bedingungen sich das Integral in (8.5) vernachlässigen lässt, müssen wir hier noch genauer untersuchen. Wir betrachten das Maximum des Ausdrucks  $\text{Max}(u(\tau)\dot{u}(\tau)) = (|u||\dot{u}|)_{\max}$  in (8.5) und schreiben dieses vor das Integral anstatt  $(u(\tau)\dot{u}(\tau))$  und integrieren. Dann ist unsere Näherung sicherlich gut, wenn gilt

$$\frac{(|u||\dot{u}|)_{\max}}{\beta^2} \ll \frac{|u|^2}{\beta} \quad (8.7)$$

oder  $|\dot{u}|_{\max} \ll \beta|u|$ . Dies bedeutet, dass  $u$  sich langsam ändert im Vergleich zur durch die Diffusionskonstante  $\beta$  vorgeschriebenen Änderung. Dies ist die Interpretation der adiabatischen Näherung.

### 8.2.2 Exakte Eliminationsprozedur

Um die wesentlichen Merkmale diese Prozedur heraus zu arbeiten, wählen wir das Beispiel  $\alpha = 0$ , so dass (8.3) ersetzt wird durch  $\dot{u} = -us$ . Wir nutzen jetzt die immer noch exakte Gleichung (8.5) und substituieren darin  $\dot{u}$  mit  $-us$  und erhalten

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (u(\tau)^2 s(\tau)) d\tau \quad (8.8)$$

(8.8) ist eine Integralgleichung für  $s(t)$ , die wir durch Iteration lösen. In niedrigster Ordnung drücken wir  $s(t)$  durch die Näherung in (8.6) aus und erhalten

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{1}{\beta} u(\tau)^4 d\tau. \quad (8.9)$$

Um den nächsten Iterationsschritt zu erhalten, integrieren wir (8.9) partiell und erhalten

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta^3} u(t)^4 - \frac{8}{\beta^3} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (u^3(\tau) \dot{u}(\tau)) d\tau. \quad (8.10)$$

Unter dem Integral ersetzen wir wieder  $\dot{u}$  wie oben und ersetzen  $s$  durch den zweiten Iterationsschritt (8.10) in dem wir das Integral vernachlässigt haben und erhalten

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta^3} u(t)^4 - \underbrace{\frac{8}{\beta^3} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u^4(\tau) \left( \frac{1}{\beta} u^2(\tau) + \frac{2}{\beta^3} u(\tau)^4 \right) d\tau}_I \quad (8.11)$$

Wir behalten vom Integral  $I$  aus (8.11) zunächst nur die Terme 6-ter Ordnung

$$I = \frac{8}{\beta^4} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u^6(\tau) d\tau + \text{h.O.}$$

Eine erneute partielle Integration führt auf

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta^3} u(t)^4 + \frac{8}{\beta^5} u(t)^6 + \dots$$

Es ist offensichtlich, dass wir diese Iteration immer weiter betreiben und somit  $s(t)$  als eine Potenzreihe in  $u$  ausdrücken können. Wenn  $u$  klein genug ist, erwarten wir,  $s$  durch wenige Terme in  $u$  annähern zu können.

Dieses Verfahren können wir auch für allgemeinere Gleichungen als  $\dot{u} = -us$ , wie in unserem Beispiel verwendet, anwenden. Für diese Diskussion sei auf die Literatur verwiesen. Was wir

hier festhalten wollen, ist die Tatsache, dass unter der oben genannten Bedingung (8.7), eine adiabatische Elimination der stabilen Moden eines Systems durchgeführt werden kann.

Noch einmal: warum nennen wir  $s$  eine stabile Mode?  $\beta$  ist sehr groß und daher relaxiert  $s$  sehr schnell auf den stationären Wert, der nun aber durch  $u$  vorgegeben wird. Das ist eine sehr vage Behauptung und diese muss daher durch eine genaue Untersuchung der Konvergenz der Potenzreihenentwicklung geklärt werden.

## 8.3 Normalformen

Anstatt eine Differentialgleichung zu lösen, kann man versuchen, sie in eine möglichst einfache Form über zu führen. D.h. wir suchen eine Variablentransformation, die eine beliebige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung überführt. Dies wird nicht immer gelingen.

### Beispiel 23: Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = \lambda x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (8.12)$$

mit  $\lambda \neq 0$ . Wir führen folgende Transformation durch

$$x = y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \dots \quad (8.13)$$

Wir versuchen die  $\alpha_i$  so zu bestimmen, dass die Gleichung für  $y$  linear ist. Dazu setzen wir (8.13) in (8.12) ein und erhalten

$$\dot{y}(1 + 2\alpha_2 y + 3\alpha_3 y^2 + \dots) = \lambda y + (\lambda\alpha_2 + a_2)y^2 + (\lambda\alpha_3 + 2a_2\alpha_2 + \alpha_3)y^3 + \dots$$

Wir dividieren durch den Koeffizienten von  $\dot{y}$  und entwickeln um  $y = 0$ . Damit erhalten wir

$$\dot{y} = \lambda y + (a_2 - \lambda\alpha_2)y^2 + (\lambda\alpha_3 + 2\lambda\alpha_2^2 - 2\lambda\alpha_3)y^3$$

Setzen wir nun

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{\lambda} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \frac{a_2^2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{2\lambda},$$

dann verschwinden die Terme  $y^2$  und  $y^3$ . D.h. wir haben (8.12) auf eine Normalform dritten Grades gebracht.

## 8.4 Modellidentifikation

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Fragen stellen, ob es möglich ist aus Signalen eine Differentialgleichung erster Ordnung, oder ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu rekonstruieren. Was meinen wir damit?

Gegeben die Signale  $x_i(t)$ , von denen wir vermuten, dass sie gekoppelt sind. Wie lautet das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{8.14}$$

das als Lösung die  $x_i(t)$  ergibt? D.h. wir suchen das zu den Signalen  $x_i(t)$  gehörige Anfangswertproblem.

### Beispiel 24: Rekonstruktion eines Systems von 2 gekoppelten Differentialgleichung 1. Ordnung

Wir haben 2 Messsignale  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  gegeben. Nehmen wir für den Moment mal an, sie lägen analytisch vor, nämlich  $y_1(t) = \cos(t)$  und  $y_2(t) = \sin(t)$ . Dann berechnen wir  $\dot{y}_1(t) = -\sin(t)$  und  $\dot{y}_2(t) = \cos(t)$ . Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)\end{aligned}$$

So einfach haben wir es i.a. nicht. Die allgemeine Vorgehensweise für die Rekonstruktion obigen Systems wäre

1. Bilde  $\frac{dy_1(t)}{dt}$  und  $\frac{dy_2(t)}{dt}$  - meist wird das nur numerisch möglich sein.
2. Suche zwei Funktionen  $f_1(y_1, y_2)$  und  $f_2(y_1, y_2)$ .
3. Löse das System

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(y_1, y_2)\end{aligned}$$

Versuchen Sie genau mit dieser Vorgehensweise den harmonischen Oszillator numerisch zu rekonstruieren.

Wie das Beispiel zeigt, liegt die Aufgabe darin geeignete  $f_i(y_1, \dots, y_n)$  zu finden. Wenn wir genügend Datenpunkte vorliegen haben, dann gelingt dies eventuell mit der Methode wie sie in Anhang B beschrieben ist.

# Kapitel 9

## Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen mit mehr als einer unabhängigen Variablen. Als Beispiel stellen wir uns ein zeitabhängiges Wärmetransportproblem in einer Dimension vor. Dieses wird mit einer Diffusionsgleichung für die lokale Temperatur des Systems dargestellt. Die Temperatur wird daher als Funktion zweier unabhängiger Variablen, der Zeit  $t$  und der räumlichen Position  $x$  dargestellt

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

dabei bezeichnet  $\kappa$  den Wärmeleitungskoeffizienten.

### 9.1 PDEs erster Ordnung

Quasilineare PDEs erster Ordnung, also Gleichungen der Form

$$P(x,t;u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x,t;u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = R(x,t;u), \quad (9.1)$$

für eine Funktion  $u(x,t)$  und der Anfangsbedingung  $u(x,t=0) = u_0(x)$  können systematisch auf ein System gekoppelter ODEs erster Ordnung zurückgeführt werden können. Diese wichtige Eigenschaft wollen wir untersuchen.

#### N.B.: Allgemeine Problemstellung

In (9.1) wurde zur Illustration eine Darstellung im 2D gewählt. Allgemein können wir schreiben:

$$\sum_i P_i(x_i;u) \frac{\partial u(x_i)}{\partial x_i} = R((x_i;u)$$

(9.1) können wir auf ein System von ODEs transformieren. Dies wird die Methode der Charakteristiken genannt. Das bedeutet nicht, dass das resultierende System von ODEs analytisch lösbar ist. In jedem Falle werden wir aber den Vorteil haben, dass der ganze Formalismus zur Lösung eines Systems von ODEs angewandt werden kann, entweder die Analytik oder die Numerik.

Wir gehen folgendermaßen vor:

1. Parametrisiere die unabhängigen Veränderlichen in (9.1) mit dem Parameter  $s$  gemäß  $x(s)$  und  $t(s)$ .
2. Bilde die totale Ableitung von  $u(x(s), t(s))$  nach  $s$

$$\frac{du(x(s), t(s))}{ds} = \frac{\partial u(x(s), t(s))}{\partial x} \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial u(x(s), t(s))}{\partial t} \frac{dt(s)}{ds} = R(x, t; u)$$

3. Schreibe (9.1) als gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{du(s)}{ds} = R(u(s))$$

entlang bestimmter Kurven in der  $(x, t)$ -Ebene.

4. Bestimme die Kurven mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx(s)}{ds} &= P(x, t, u) \\ \frac{dt(s)}{ds} &= Q(x, t, u) \end{aligned}$$

5. Somit erhalten wir ein System dreier gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

#### Beispiel 25: Methode der Charakteristiken am Beispiel in 2D

Die Transportgleichung

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

mit der Anfangsbedingung  $u(x, t = 0) = u_0(x)$  soll gelöst werden. Wir gehen nach obigem Rezept vor und schreiben:

1. Verwende Parametrisierung mit  $s$ , also  $x(s)$  und  $t(s)$ .
2. Totale Ableitung:

$$\frac{du(x(s), t(s))}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt(s)}{ds} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$



3.

$$\frac{du(x(s), t(s))}{ds} = 0$$

4.

$$\frac{dx(s)}{ds} = c$$

$$\frac{dt(s)}{ds} = 1$$

5. Anfangsbedingungen:  $t(0) = 0$ ,  $x(0) = \xi$  und  $u(x, t = 0) = f(\xi)$ 6. Damit haben wir  $t = s$ ,  $x = ct + \xi$  und  $u = f(\xi) = f(x - ct)$ 

Interpretation: Die Anfangsbedingung  $f(\xi)$  wird mit der Geschwindigkeit  $c$  in die positive  $x$ -Richtung transportiert. Die Lösung für  $u$  bleibt konstant, da die Ableitung von  $u$  Null ist, also behält  $u$  den durch die Anfangsbedingung gegebenen Wert.

## 9.2 PDEs zweiter Ordnung

Beispiele von PDEs zweiter Ordnung:

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (9.2)$$

Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9.4)$$

Allgemeine Form linearer PDEs zweiter Ordnung.

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y; u, u_x, u_y) \quad (9.5)$$

Nimm an, dass  $F = 0$  und  $a, b, c$  konstant seien.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9.6)$$

Mache den Ansatz  $u(x, y) = f(mx + y)$  und setze in (9.6) ein. Dies führt zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m^2 f'' \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = m f'' \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \quad (9.9)$$

Einsetzen von (9.7-9.9) in (9.6) ergibt

$$(am^2 + bm + c)f'' = 0 \quad (9.10)$$

(9.10) hat zwei Faktoren, die Null sein können damit eine Lösung gefunden werden kann. Diese zwei Fälle sind:

1.  $f'' = 0$  was  $f(mx + y) = f_0 + mx + y$  ergibt. Das ist nicht die allgemeinste Lösung.
2.  $am^2 + bm + c = 0$  ergibt zwei Lösungen für  $m$

$$m_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9.11)$$

Für (9.11) haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

**Der Fall  $b^2 - 4ac > 0$ :** ergibt die so genannte hyperbolische PDE.

Es gibt nach (9.11) zwei reelle Lösungen für  $m$  in diesem Fall. Daher können wir die Lösung für  $u(x, y) = F(m_1 x + y) + G(m_2 x + y) = F(\xi) + G(\eta)$  bestimmen. Mit  $\xi = m_1 x + y$  und  $\eta = m_2 x + y$  bekommen wir

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} m_1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} m_2 \right) = \\ &= a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} m_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} m_1 m_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} m_2^2 \right) \\ a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a \left( m_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + m_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u \end{aligned} \quad (9.12)$$

Für das gemischte Glied zweiter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= b \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) m_1 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) m_2 \right] \\ &= -\frac{b^2}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Die zweite Ableitung nach  $y$  lautet in den neuen Variablen  $\xi$  und  $\eta$

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] = c \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u \quad (9.14)$$

Eingesetzt in (9.6) ergibt

$$\underbrace{(am_1^2 + bm_1 + c)}_{=0} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \underbrace{(am_2^2 + bm_2 + c)}_{=0} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (2m_1m_2 + bm_1 + bm_2 + 2c) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (9.15)$$

Die ersten zwei Klammern in (9.15) verschwinden nach (9.10) und daher bleibt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (9.16)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu (9.6) in den neuen Variablen  $\xi$  und  $\eta$ . Integration von (9.16) nach  $\xi$  und  $\eta$  ergibt die Lösung  $u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ , wobei  $F$  und  $G$  beliebige Funktionen sind, die durch die Randbedingungen bestimmt sind und nur der Bedingung unterliegen, dass sie zwei mal differenzierbar sein müssen.

**Der Fall  $b^2 - 4ac = 0$  mit  $b \neq 0$  und  $a \neq 0$ :** führt zu einer parabolischen PDE.

Es gibt nur eine Lösung für (9.10) und wir erhalten  $m = -b/(2a)$ . Wir unterziehen (9.6) der folgenden Variablentransformation  $\xi = mx + y$  und  $\eta = y$  und erhalten

$$(am^2 + bm + c) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (bm + 2c) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (9.17)$$

Für  $c \neq 0$  bekommen wir

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad (9.18)$$

Durch Integration bezüglich der Variablen  $\eta$  erhalten wir die allgemeine Lösung von (9.18) gegeben durch  $u(\xi, \eta) = F(\xi) + \eta G(\xi)$  und welche in den ursprünglichen Variablen lautet:

$$u(x, y) = F(mx + y) + yG(mx + y) \quad (9.19)$$

Die eindimensionale Diffusionsgleichung ist ein Beispiel für eine parabolische PDE. Sie ist gegeben durch  $a = b = 0$ . Beachte: die Diffusionsgleichung ist nicht in unserer Liste der Spezialfälle enthalten, da sie auch noch eine erste Ableitung enthält.

**Der Fall  $b^2 - 4ac < 0$ :** führt zu einer elliptischen PDE.

Hier haben wir  $m_2 = m_1^*$  vorliegen. Die allgemeine Lösung ist damit gegeben als

$$u(x, y) = F(m_1x + y) + G(m_2x + y) = F(\xi) + G(\xi^*) \quad (9.20)$$

Mit  $\xi = v_1 + iv_2$  erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v_2^2} = 0 \quad (9.21)$$

Eine Beispiel für eine elliptische Gleichung im Zweidimensionalen wie (9.21) ist die Laplacegleichung.

Diese drei Typen linearer PDEs 2. Ordnung lassen sich für manche Problemstellungen auch analytisch lösen. Wir geben im Folgenden ein Beispiel hierzu.

#### Beispiel 26: Wellengleichung

Wir lösen die eindimensionale Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (9.22)$$

durch separation der Variablen. Dafür machen wir den Ansatz  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , was zu

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (9.23)$$

führt. In (9.23) hängt die linke Seite nur von der Variablen  $x$  ab, während die rechte Seite nur von  $t$  abhängt. Für beliebige  $x$  und  $t$  kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind und wir erhalten somit

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (9.24)$$

Dies ergibt die folgenden zwei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0$$

mit der Lösung  $X(x) = e^{\pm ikx}$  und

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0$$

mit der Lösung  $T(t) = e^{\pm i\omega t}$ , wobei wir  $\omega^2 = c^2 k^2$  gesetzt haben. Dieses Beispiel braucht zur Ergänzung Anfangsbedingungen, damit wir eine Lösung finden können.

### 9.2.1 Die Fundamentallösung oder Green'sche Funktion

Die Idee hinter der Fundamentallösung stammt aus der linearen Antworttheorie

Beispiel 27: Fundamentallösung der Diffusionsgleichung.

Wir wenden uns im zweiten Beispiel der Untersuchung der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu. Wir wollen die Herleitung ihrer Fundamentallösung etwas genauer betrachten und uns einige Anwendung anschauen.

Gegeben die Diffusionsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t) \quad (9.25)$$

wobei  $D$  die Diffusionskonstante bezeichne und die Inhomogenität  $h(x, t)$  eine bekannte Funktion sei. Man denke sich diese als raumzeitliche Quelle für  $u(x, t)$ .

Zunächst wollen wir  $h(x, t) = 0$  annehmen und die Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = f(x)$  festlegen. Nun wenden wir eine Fouriertransformation bezüglich der Variablen  $x$  an, der Raum sei unbegrenzt. Bezüglich der Zeit  $t$  wenden wir eine Laplacetransformation an, da wir ein Anfangswertproblem vorliegen haben. Wir erhalten

$$sU(k, s) - F(k) + k^2 U(k, s) = 0 \quad (9.26)$$

In transformierten Variablen erhalten wir die Lösung

$$U(k, s) = \frac{F(k)}{s + k^2}$$

Die Funktion  $G(k, s) = (s + k^2)^{-1}$  ist die Antwortfunktion des Systems im Wellenzahlraum und im Frequenzbereich. Die inverse Laplacetransformation ergibt

$$U(k, t) = e^{-k^2 t} F(k)$$

Wir nennen  $G(k, t) = e^{-k^2 t}$  die Antwortfunktion im Raum der Wellenzahlen und im Zeitbereich. Um die Antwortfunktion zu bekommen, haben wir  $F(k) = 1$  gewählt, was äquivalent dazu ist, dass wir  $f(x) = \delta(x)$  setzen. Der letzte Schritt verlangt eine inverse Fouriertransformation und führt zu

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ikx} dk \quad (9.27)$$

Quadratische Ergänzung im Exponenten führt zu

$$-k^2 t + ikx = -\left(k\sqrt{t} + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4t} \quad (9.28)$$

Daher erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k\sqrt{t} + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2} dk = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

Die Antwortfunktion oder Greensche Funktion oder Fundamentallösung der Diffusionsgleichung ist daher

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (9.29)$$

#### Beispiel 28: Fundamentallösung der Wellengleichung

Wir üben diese Vorgehensweise auch mit der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x,t) \quad (9.30)$$

Die benötigten Anfangsbedingungen lauten  $u(x,0) = f(x)$  und  $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ . Die Fourier- und Laplacetransformierte ergeben die Lösung im Frequenzbereich und dem Raum der Wellenzahlvektoren

$$U(k,s) = \frac{Q(k,s)}{s^2 + k^2} + \frac{G(k) + sF(k)}{s^2 + k^2} \quad (9.31)$$

Wir wählen  $g(x) = f(x) = 0$  und  $q(x,t) = \delta(x-x')\delta(t-t')$ . Die Transformierte der Deltafunktionen lautet

$$Q(k,s) = e^{ikx' - st'}$$

**Achtung:** was bedeutet diese Wahl der Anfangsbedingungen und der Inhomogenität?

Nun müssen wir die inverse Fouriertransformation und die inverse Laplacetransformation anwenden, um die Greensche Funktion  $G(x,t;x',t')$  zu bekommen und wir erhalten

$$G(x,t;x',t') = \frac{1}{2} \left( H(t-t' - (x-x')) + H(t-t' + (x-x')) \right) = G(x-x', t-t') \quad (9.32)$$

#### Beispiel 29: Fundamentallösung der Poissongleichung

Verifiziere durch Anwendung der Fouriertransformation auf die Poissongleichung

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (9.33)$$

dass deren Fundamentallösung gegeben ist durch

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (9.34)$$





# Kapitel 10

## Numerische Lösungsmethoden

Nichtlineare Differentialgleichungen sind im Allgemeinen nicht analytisch lösbar, d.h. es ist nicht möglich eine geschlossene Lösung anzugeben. Daher ist es sinnvoll, sich mit numerischen Lösungsmethoden zu beschäftigen. Wir wollen hier nur eine begrenzte Zahl ansprechen. Bei der Auswahl muss zwischen dem Arbeitsaufwand und der Genauigkeit der Ergebnisse abgewogen werden. Deshalb kann man nicht allgemein sagen, welche Methode die beste ist.

Wir gehen von einem Anfangswertproblem einer Differentialgleichung 1. Ordnung und 1. Grades aus, wobei hierin auch System erster Ordnung eingeschlossen seien. Wir schreiben das Anfangswertproblem eines Systems, wie es in (8.1) dargestellt ist als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0\end{aligned}\tag{10.1}$$

### 10.1 Die Eulersche Methode

Wir nehmen an  $y(t)$  sei gekannt, dann können wir  $y(t + \Delta t)$  in eine Potenzreihe entwickeln und erhalten bei Vernachlässigung aller Terme 2. und höherer Potenzen in  $\Delta t$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t f(y(t), t) + O(\Delta t^2),\tag{10.2}$$

wobei  $O(\Delta t^2)$  für quadratische und höhere Terme steht.

#### N.B.: Fehler

Keine Angabe eines Algorithmus zur Lösung einer DGL ist sinnvoll, wenn nicht gleichzeitig auch zumindest die Fehlerordnung, wenn nicht gar der lokale Diskretisierungsfehler angegeben ist.

Wie groß ist der Fehler, den wir bei der Lösung machen, wenn wir (10.2) für gleiche Zeitabstände zu diskreten Zeitpunkten  $t_i$  anwenden? Zumindest in einem Zeitschritt gelingt uns sofort eine

Aussage. Angenommen  $Y_i$  sei die exakte Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt  $t_i$ . Dann können wir  $Y_{i+1}$  ebenfalls durch eine Taylorreihe darstellen

$$Y_{i+1} = Y_i + \underbrace{\Delta t \left( \frac{dY}{dt} \right)_i}_{f(Y_i, t_i)} + \underbrace{\frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{d^2 Y}{dt^2} \right)_i}_{\dot{f}(Y_i, t_i)} + \dots \quad (10.3)$$

Wobei wir jetzt auf der rechten Seite von (10.3)  $Y_i$  durch  $y_i$  ersetzen und von (10.2) die Potenzreihe (10.3) abziehen. Damit erhalten wir für den Fehler

$$y_{i+1} - Y_{i+1} = E_{i+1} = -\frac{\Delta t^2}{2} \dot{f}(Y_i, t_i) O(\Delta t^3) \quad (10.4)$$

Dies ist der Fehler pro Zeitschritt, auch lokaler Diskretisierungsfehler genannt.

## 10.2 Runge-Kutta-Methode

Wir gehen von einer zentralen finiten Differenzenformel aus. Das bedeutet, dass die finite Differenz die Ableitung zum Zeitpunkt  $t_i + \frac{\Delta t}{2}$  nähert. Wir erhalten

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta} = \dot{y}_{i+1/2} = f(y_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \quad (10.5)$$

wobei aber  $y_{i+1/2}$  unbekannt ist. Dies beschaffen wir uns durch Vorwärtsintegration um einen halben Zeitschritt  $\frac{\Delta t}{2}$ , somit

$$\begin{aligned} \hat{y}_{i+1/2} &= y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i) \\ t_{i+1/2} &= t_i + \frac{\Delta t}{2} \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta t f(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \end{aligned}$$

Dies ist das sogenannte Runge-Kutta-Schema 2. Ordnung. Wir sehen, dass wir hier, im Gegensatz zur Euler-Methode die Funktion  $f$  zweimal auswerten müssen.

Ein verbessertes Schema ist die Runge-Kutta-Methode 4. Ordnung. Wie der Name sagt, müssen wir hier die Funktion  $f$  viermal auswerten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{\Delta t}{6} (f(y_i, t_i) + 2f(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) + 2f(\hat{\hat{y}}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) + f(\hat{y}_{i+1}, t_{i+1})) \\ \hat{y}_{i+1/2} &= y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i) \\ \hat{\hat{y}}_{i+1/2} &= y_i + \frac{\Delta t}{2} f(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ \hat{y}_{i+1} &= y_i + \Delta t f(\hat{\hat{y}}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \end{aligned} \quad (10.6)$$

## 10.3 Mehrschrittmethoden

Die Idee hinter den Mehrschrittmethoden ist, (8.1) zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$  zu integrieren

$$y(t_{n+s}) = y(t_{n+s-1}) + \int_{t_{n+s}}^{t_{n+s-1}} f(y(t'), t') dt'$$

Das Integral gilt es nun zu nähern. Wir haben ja bereits Werte für  $y(t_i)$  zu den Zeitpunkten  $t_n$  bis  $t_{n+s-1}$  berechnet. Wir nehmen diese um eine Interpolationsfunktion aufzustellen, die wir nun in den Grenzen von  $t_{n+s-1}$  bis  $t_{n+s}$  integrieren können. Wir nähern  $f(y(t), t)$  z.B. durch ein Polynom  $p(t)$  der Ordnung  $s - 1$ , das wir dergestalt konstruiert haben, dass es an den Interpolationspunkten mit  $f(y(t), t)$  übereinstimmt

Das Interpolationspolynom ist analytisch integrierbar. Explizit schreiben wir das folgendermaßen

$$p(t) = \sum_{m=0}^{s-1} p_m(t) f(y(t_{n+m}, t_{n+m})).$$

Hierbei bezeichne  $p_m(t)$  ein Polynom, das zum Zeitpunkt  $t_{n+m}$  gleich 1 ist und zu allen anderen Zeitpunkten 0. Damit nutzen wir  $s$  vorhergehende Zeitschritte aus. Daher auch der Name Mehrschrittverfahren und hier im speziellen beschrieben ist die Methode von Adams.

## 10.4 Finite Differenzen (FD) Operatoren

Entwickle die Funktion  $f(x)$  um  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}} h^{n-1} + O(h^n)$$

oder

$$f(x+h) = f(x) + f(x)'h + \frac{1}{2!} f(x)''h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f(x)^{(n-1)} h^{n-1} + O(h^n)$$

wir bezeichnen die Funktionswerte auf dem Gitter mit

$$\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

Damit definieren wir eine Reihe von Operatoren,

Shiftoperator:	$(\mathcal{E} z)_k = z_{k+1}$
Vorwärts-Differenzoperator:	$(\Delta_+ z)_k = z_{k+1} - z_k$
Rückwärts-Differenzoperator:	$(\Delta_- z)_k = z_k - z_{k-1}$
Zentraler Differenzoperator:	$(\Delta_0 z)_k = z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}}$
Mittelwertoperator:	$(\gamma_0 z)_k = \frac{1}{2}(z_{k+\frac{1}{2}} + z_{k-\frac{1}{2}})$
Differentialoperator:	$(\mathcal{D} z)_k = (z')_k$

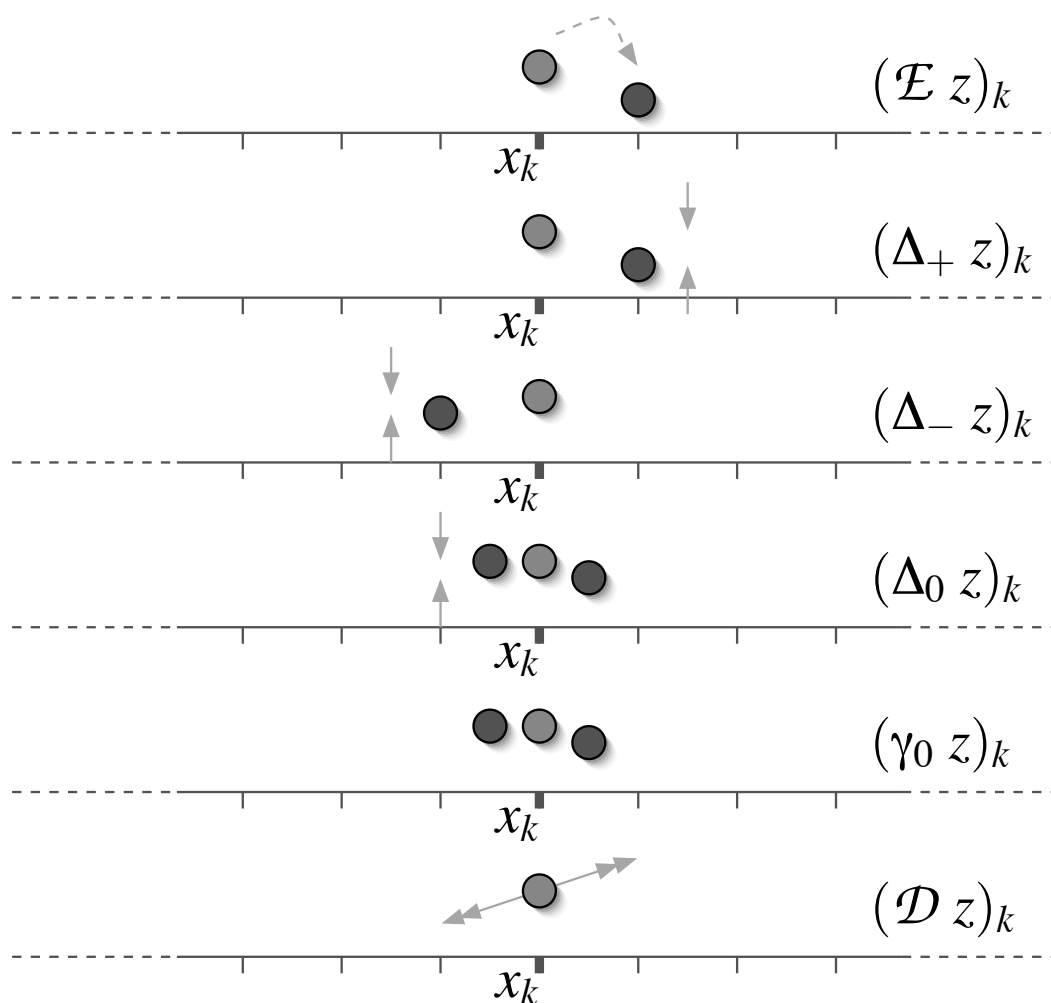


Abb. 10.1: Schematic representation of operator actions.

Siehe die schematische Darstellung in Abb. 10.1.

Durch eine Reihenentwicklung des Shiftoperators erhalten wir den Ausdruck für den Differentialoperator

$$\mathcal{E}z(x) = z(x+h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[ \frac{d^j z(x)}{dx^j} \right] h^j = \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (hD)^j \right] z(x) = e^{hD} z(x)$$

womit wir schreiben können

$$D = \frac{\ln(\mathcal{E})}{h}$$

Beachte, dass Funktionen von Operatoren nur über deren Reihenentwicklung definiert sind. Es ist möglich alle finiten Differenzenoperatoren durch den Shiftoperator auszudrücken:

Shiftoperator:	$(\mathcal{E} z)_k = z_{k+1}$
Vorwärts-Differenzoperator:	$(\Delta_+ z)_k = z_{k+1} - z_k = ((\mathcal{E} - \mathcal{I}) z)_k$
Rückwärts-Differenzoperator:	$(\Delta_- z)_k = z_k - z_{k-1} = ((\mathcal{I} - \mathcal{E}^{-1}) z)_k$
Zentraler Differenzoperator:	$(\Delta_0 z)_k = z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}} = \left( (\mathcal{E}^{\frac{1}{2}} - \mathcal{E}^{-\frac{1}{2}}) z \right)_k$
Mittelwertoperator:	$(\gamma_0 z)_k = \frac{1}{2}(z_{k+\frac{1}{2}} + z_{k-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \left( (\mathcal{E}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{E}^{-\frac{1}{2}}) z \right)_k$
Differentialoperator:	$(\mathcal{D} z)_k = \frac{1}{h} ((\ln[\mathcal{E}]) z)_k$

Somit erhalten wir für den Differentialoperator

$$\mathcal{D} = \frac{1}{h} \ln[\mathcal{I} + \Delta_+] = \frac{1}{h} \left( \Delta_+ - \frac{1}{2} \Delta_+^2 + \frac{1}{3} \Delta_+^3 + O(\Delta_+^4) \right)$$

## 10.5 FD für die Lösung von PDEs

Wir formulieren die FD Form der partiellen Ableitungen auf einem regulären 2D Gitter, wie z.B. in Fig. 10.2 dargestellt.

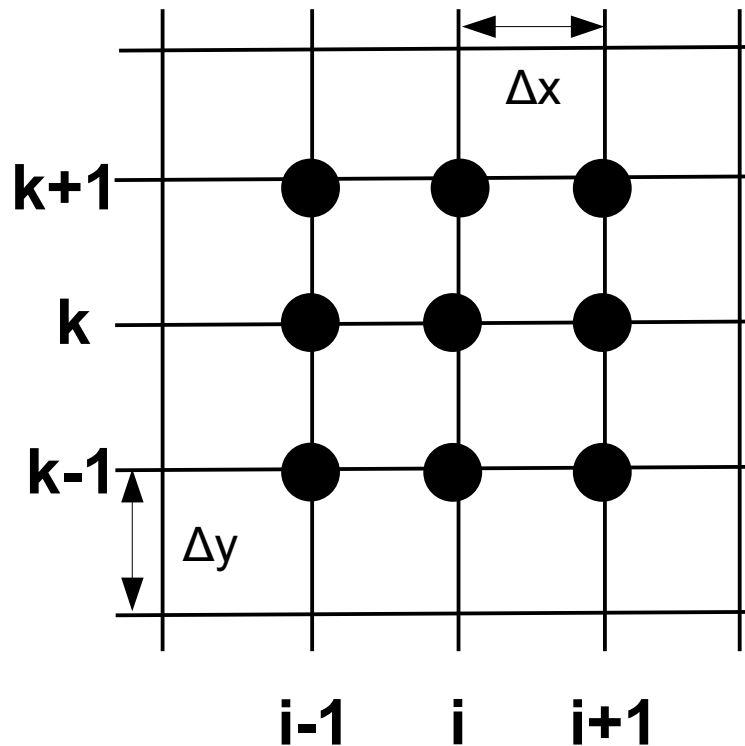


Abb. 10.2: 2D FD regular grid.

Die ersten und zweiten Ableitungen auf dem Gitter lauten (verify through Taylor expansion!):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,k} &= \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,k} &= \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,k} &= \frac{1}{\Delta x^2}(f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,k} &= \frac{1}{\Delta y^2}(f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,k} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y}(f_{i+1,k+1} - f_{i+1,k-1} + f_{i-1,k-1} - f_{i-1,k+1})\end{aligned}$$

#### Beispiel 30: Laplacegleichung 2D

Wie lautet die diskrete Form der Laplacegleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = 0$$

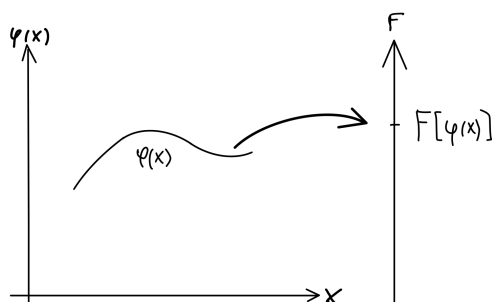
gemäß der Methode der finiten Differenzen?

# Kapitel 11

## Variationsrechnung

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Veränderung von Funktionalen  $F[\varphi(x)]$ , wenn wir die Funktion  $\varphi(x)$ , die dem Funktional zugrunde liegt variieren. Dazu müssen wir zunächst den Begriff des Funktional erklären, dann einen Exkurs zur Deltafunktion machen und uns schließlich die Funktionalableitung anhand von Beispielen erarbeiten.

### 11.1 Das Funktional



Gegeben eine Funktion  $\varphi(x)$ , dann nennen wir  $F[\varphi(x)]$  ein Funktional. Dies ist eine Erweiterung des Konzepts einer Funktion  $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = F(\varphi_i)$  mehrerer Variabler, bei der wir den diskreten Index  $i$  durch eine kontinuierliche Variable  $x$  ersetzen. Ein Funktional ordnet also einer Funktion  $\varphi(x)$  einen Wert zu. Wir stellen uns das vor, wie in Abbildung 11.1 skizziert.

Abb. 11.1: Das Funktional der Funktion  $\varphi(x)$ . Man beachte, dass hiermit der gesamten Funktion  $\varphi(x)$  ein Wert zugewiesen wird.

## Beispiel 31: Verschiedene Beispiele von Funktionalen

Ein Funktional kann repräsentiert sein durch

- $F[\varphi] = \int_a^b \varphi(x) dx$ , das Integral von  $\varphi(x)$  über einem Intervall  $[a, b]$ , oder
- $F[\varphi] = \int_a^b f(\varphi(x)) dx$ , das Integral einer Funktion  $f$  von  $\varphi(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$ , oder
- $F[\varphi] = \int_a^b f(\varphi(x), \varphi'(x)) dx$ , das Integral einer Funktion  $f$  von  $\varphi(x)$ , die auch von der Ableitung  $\varphi'(x)$  abhängt, oder
- $F[\varphi] = \varphi(y) = \int_a^b \varphi(x) \delta(y-x) dx$ , einem Integral dessen Integrand die Deltafunktion enthält, usw.

Eine Erweiterung auf mehrere Funktionen, die auch noch von mehreren Variablen abhängen können ist möglich  $F[\varphi_i(x_k)]$ . Dabei kann  $F[\varphi_i(x_k)]$  auch ein Integral einer Funktion  $f$  der  $\varphi_i(x_k)$  und deren partieller Ableitungen sein.

## 11.2 Exkurs zur Diracschen Deltafunktion

Zunächst sei hier eine Warnung ausgesprochen. Deltafunktionen sind keine Funktionen im eigentlichen Sinne, obwohl sie oftmals so bezeichnet werden. In der Mathematik werden diese Objekte als Distributionen bezeichnet. Da ihre Wirkung auf echte Funktionen von ihrer genauen Definition abhängt, ist Vorsicht bei ihrer Anwendung geboten.

### 11.2.1 Definition der Deltafunktion

Wir beginnen mit einem Beispiel und legen die Folge von Glockenkurven

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (11.1)$$

zugrunde. Mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  werden diese Funktionen immer schmaler und höher, wie man in Abbildung 11.2 sehen kann.

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist die Funktion gleich Null für  $x \neq 0$  und für  $x = 0$  divergiert sie. Wir schreiben dies formal als

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$



Die unter den in (11.1) definierten Kurven liegende Fläche ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Diese ist unabhängig von  $\varepsilon$  immer 1, wie wir sehen.

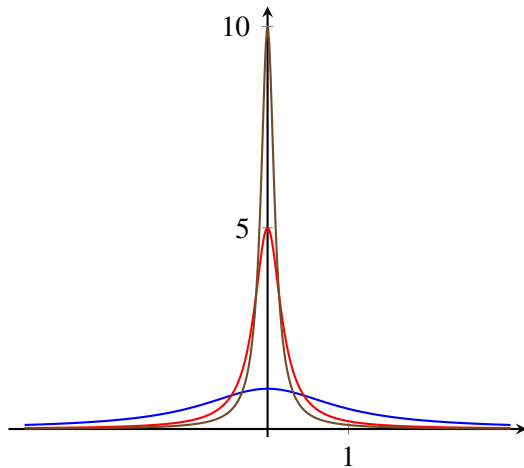


Abb. 11.2: Glockenkurven wie in (11.1) definiert, mit den  $\varepsilon$ -Werten 1. (blau), 0.2 (rot) und 0.1 (grün).

wir

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon \xi) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} d\xi$$

Das Integral über die Glockenfunktion ist, wie wir bereits ausgerechnet haben, gegeben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} d\xi = 1.$$

Damit können wir den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $F(\varepsilon)$  unter dem Integral ausführen und erhalten

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} d\xi = f(0)$$

### 11.2.2 Eigenschaften der Deltafunktion

Gegeben eine stetige Funktion  $g(x)$  mit einfachen Nullstellen bei  $x_n$ , d.h.  $g(x_n) = 0$  und  $g'(x_n) \neq 0$ , so gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

Gegeben eine stetige Funktion  $f(x)$ . Wir betrachten das Integral

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) y(x, \varepsilon) dx$$

als Funktion von  $\varepsilon$  und schreiben den Grenzübergang formal als

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) y(x, \varepsilon) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad (11.2)$$

Die so definierte Deltafunktion ist ein Symbol und keine Funktion im Sinne der Analysis. Wir sollten uns stets vor Augen halten, dass die Bildung des Grenzwertes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  mit der Integration über  $x$  nicht vertauschbar ist, das heißt, dass vor der Limesbildung stets die Integration auszuführen ist.

Um den Grenzwert in (11.2) ausrechnen zu können, machen wir die Substitution  $x = \varepsilon \xi$ . Damit erhalten

Bilden wir die Ableitung der Funktion  $y(x, \varepsilon)$  nach  $x$ , so erhalten wir von der Glockenkurve ausgehend

$$y'(x, \varepsilon) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon x}{(\varepsilon^2 + x^2)^2}$$

Nun berechnen wir den Grenzübergang des Integrals

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) y'(x, \varepsilon) dx = \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) y(x, \varepsilon) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x) dx \quad (11.3)$$

In (11.3) zeigt sich im ersten Term auf der rechten Seite der Gleichung die erste Schwierigkeit. Damit dieser an den Grenzen verschwindet, muss  $y(x, \varepsilon)$  im Grenzübergang schneller gegen Null gehen als  $f(x)$ . Daher die Warnung am Anfang des Abschnitts.

Wir erinnern uns an die Fourierintegrale (6.15, 6.16)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk$$

Setzen wir die erste in die zweite Zeile ein, dann erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} f(x') dx' dk$$

mit der Integration über  $k$  nach der über  $x'$ . Wenn das Gleichheitszeichen gelten soll, dann muss

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk.$$

Wobei “” bedeutet, dass die Integration über  $k$  erst nach der über  $x'$  erfolgen soll. Dies ist die Fourierdarstellung der  $\delta$ -Funktion.

## 11.3 Funktionalableitung oder Variation des Funktionals

Gegeben das Funktional  $F[\varphi(x)]$ . Wenn wir nun die Funktion  $\varphi(x)$  um einen Wert  $\Delta\varphi$  verändern, dann ändert sich auch das Funktional  $F[\varphi + \Delta\varphi] = F[\varphi] + \Delta F$ .

Um dies zu verstehen, variieren wir  $\varphi(x)$  nur in einer endlichen Umgebung  $dx_0$  des Punktes  $x_0$ , also  $F[\varphi + \varepsilon(x_0, dx_0)\Delta\varphi]$ , mit

$$\varepsilon(x_0, dx_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [x_0 - \frac{dx_0}{2}, x_0 + \frac{dx_0}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11.4)$$

Damit schreiben wir  $\Delta F = F[\varphi + \varepsilon(x_0, dx_0)\Delta\varphi] - F[\varphi]$ . Dies schreiben wir im Grenzübergang für verschwindende  $\Delta\varphi$  und  $dx_0$  als

$$\lim_{dx_0 \rightarrow 0} \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{F[\varphi + \varepsilon(x_0, dx_0)\Delta\varphi] - F[\varphi]}{\Delta\varphi dx_0} = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x_0)} \quad (11.5)$$

Diese Funktionalableitung oder Variation von  $F$  ist die Verallgemeinerung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial F[\phi]}{\partial \phi_k}$ . Das Differential  $\Delta F$  zu einer beliebigen differentiellen Veränderung  $\delta\phi$  erhalten wir durch

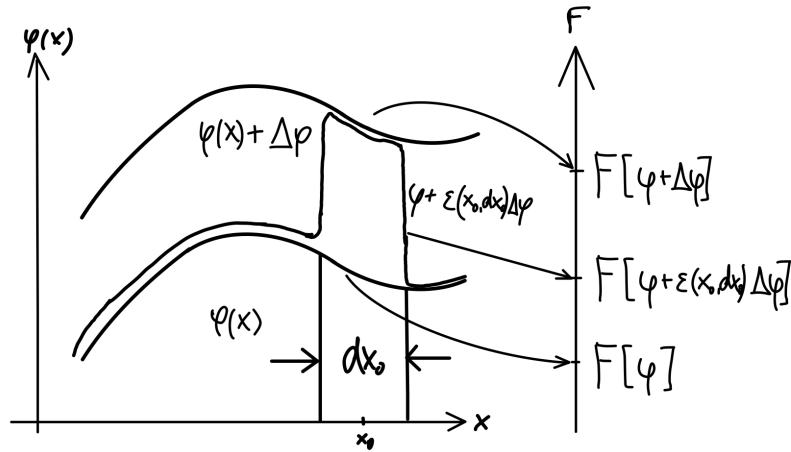


Abb. 11.3: Die Variation eines Funktionals der Funktion  $\varphi(x)$ . Wie ändert sich das Funktional, wenn die gesamte Funktion  $\varphi(x)$  variiert wird?  $F[\phi]$  ist der Wert des Funktionals,  $F[\phi + \varepsilon(x_0, dx_0)\Delta\phi]$  ist der Wert des Funktionals wenn wir in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  die Funktion  $\phi$  um  $\Delta\phi$  ändern. Somit ist die Änderung des Funktionals  $\Delta F = F[\phi + \varepsilon(x_0, dx_0)\Delta\phi] - F[\phi]$ , wenn wir in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  die Funktion  $\phi$  um  $\Delta\phi$  ändern. Die gesamte Änderung ergibt sich nun durch das Integral über  $\Delta F$ .

Integration über alle  $x_0$

$$\Delta F = \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x_0)} \Delta \phi(x_0) dx_0, \quad (11.6)$$

wobei die entsprechende diskrete Version des Differentials, wie wir bereits kennen, folgendermaßen definiert ist

$$\Delta F = \sum_k \frac{\partial F[\phi_k]}{\partial \phi_k} \Delta \phi_k \quad (11.7)$$

### 11.3.1 Liste wichtiger Funktionalableitungen

- Sei  $F[\phi] = \phi(\tilde{x})$  dann erhalten wir

$$\frac{\delta \phi(\tilde{x})}{\delta \phi(x)} = \lim_{dx_0 \rightarrow 0} \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\phi(\tilde{x}) + \varepsilon(\tilde{x}, x, dx_0) \Delta \phi - \phi(\tilde{x})}{\Delta \phi dx_0} = \lim_{dx_0 \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\tilde{x}, x, dx_0)}{dx_0} = \delta(\tilde{x} - x)$$

- Mit der obigen Überlegung und  $F[\phi] = \phi'(\tilde{x})$  erhalten wir analog

$$\frac{\delta \phi'(\tilde{x})}{\delta \phi(x)} = \frac{d}{d\tilde{x}} \frac{\delta \phi(\tilde{x})}{\delta \phi(x)} = \frac{d}{d\tilde{x}} \delta(\tilde{x} - x) = -\frac{d}{dx} \delta(\tilde{x} - x)$$

wobei hier wieder Vorsicht geboten ist mit der Wirkung der Ableitung einer Deltafunktion (siehe Abschnitt 11.2).

- Für  $F[\varphi] = f(\varphi(\tilde{x}))$  erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\delta f(\varphi(\tilde{x}))}{\delta \varphi(x)} = \frac{df}{d\varphi} \frac{\delta \varphi(\tilde{x})}{\delta \varphi(x)} = \frac{df}{d\varphi} \delta(\tilde{x} - x).$$

Deshalb haben wir im Fall  $F[\varphi] = f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))$

$$\frac{\delta f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(\tilde{x})} \delta(\tilde{x} - x) - \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi'(\tilde{x})} \frac{d}{dx} \delta(\tilde{x} - x).$$

- Setzen wir  $F[\varphi] = \int f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x})) d\tilde{x}$  dann erhalten wir

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(x)} d\tilde{x} = \int \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(\tilde{x})} \frac{\partial \varphi(\tilde{x})}{\partial \varphi(x)} d\tilde{x} = \int \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(\tilde{x})} \delta(\tilde{x} - x) d\tilde{x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Wir wenden die obigen Fälle auf das Funktional  $F[\varphi] = \int f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x})) d\tilde{x}$  an und erhalten

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int \frac{\delta f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\delta \varphi(x)} d\tilde{x} = \int \left( \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(\tilde{x})} \delta(\tilde{x} - x) - \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi'(\tilde{x})} \frac{d}{dx} \delta(\tilde{x} - x) \right) d\tilde{x}.$$

Die Ableitung nach „x“ unter dem Integral können wir vor das Produkt ziehen, so dass wir

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int \frac{\delta f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\delta \varphi(x)} d\tilde{x} = \int \left( \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi(\tilde{x})} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x}), \varphi'(\tilde{x}))}{\partial \varphi'(\tilde{x})} \right) \delta(\tilde{x} - x) d\tilde{x}.$$

erhalten. Nach dem Ausführen der Integration bleibt

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial f(\varphi(x), \varphi'(x))}{\partial \varphi(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(\varphi(x), \varphi'(x))}{\partial \varphi'(x)}$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis, das wir im folgenden genauer betrachten wollen.

### 11.3.2 Das Extremalprinzip in der Mechanik

Gegeben sei eine Funktion  $L(q(t), \dot{q}(t))$ . Wir stellen uns die Frage für welche Funktion  $q(t)$  das Funktional

$$S[q(t)] = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

extremal wird. D.h. wir suchen unter allen möglichen Funktionen  $q(t)$  diejenige, die  $S[q(t)]$  extremal werden lässt. Oder in anderen Worten, wir wollen dasjenige  $q(t)$  finden, für das jegliche Variation von  $S[q(t)]$  verschwindet, also

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q} = 0$$

Diese Variation haben wir aber bereits im vorigen Abschnitt als Beispiel angegeben

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q} = \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} = 0$$

#### N.B.: Der harmonische Oszillator

Wir setzen  $L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2$  und erhalten

$$\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} = -kq(t) - \frac{d}{dt}m\dot{q}(t) = 0.$$

Dies ist die wohlbekannte Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = 0.$$

Hieraus folgern wir, ohne dass wir hier den Beweis antreten, dass die Lagrangefunktion  $L = T^* - V$  eines mechanischen Systems aus der Differenz zwischen kinetischer Koenergie<sup>a</sup>  $T^*$  und potentieller Energie  $V$  gebildet wird. Indem wir fordern, dass die Variation des Integrals über die Lagrangefunktion verschwindet, erhalten wir die Bewegungsgleichungen, der entsprechenden mechanischen Systeme. Diese Gleichungen nennen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen.

<sup>a</sup>Die Unterscheidung zwischen kinetischer Energie  $T = \frac{p^2}{2m}$  und kinetischer Koenergie  $T^* = \frac{mv^2}{2}$  ist nur wichtig im Falle, dass der Impuls nicht mehr als  $p = m \cdot v$  geschrieben werden kann. Dies ist z.B. der Fall, wenn relativistische Effekte wichtig werden. Wir nehmen an, dass dies im Folgenden nicht der Fall sei und machen fortan diese Unterscheidung nicht.

Wir fügen ein Beispiel allgemeinerer Natur an.

#### Beispiel 32: Das Brachistochronenproblem

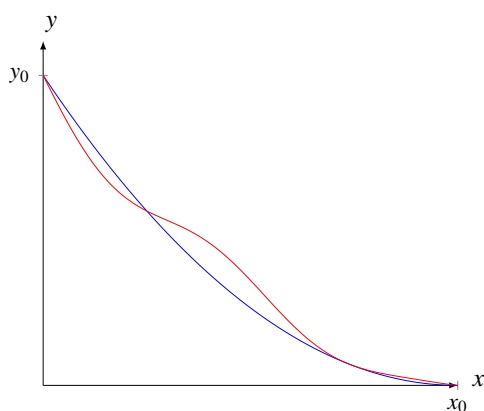


Abb. 11.4: Verschiedene Notrutschen.

Unsere Aufgabe sei es, eine Notrutsche für die Evakuierung eines Flugzeugs zu konstruieren. Die Rutsche soll eine solche Form haben, dass die Passagiere darauf auf dem schnellsten Weg den Boden erreichen. Die Situation ist in 11.4 schematisch dargestellt. Die Passagiere steigen bei  $x = 0$  auf die Rutsche in einer Höhe von  $y = y_0$  und rutschen zum Punkt  $x = x_0$  bei  $y = 0$ .

Hier ist eine Funktion  $y(x)$  gesucht, die eine Bedingung erfüllen muss, die wir nun formulieren wollen. Wir gehen von Energieerhaltung aus, d.h. die Lageenergie am Einstiegspunkt wird bis zum momentanen

Punkt auf der Rutsche in kinetische Energie

umgewandelt, oder

$$mgy_0 = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{x}^2) + mgy$$

oder

$$g(y_0 - y) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \quad (11.8)$$

Wie wir sehen, kürzt sich die Masse raus. D.h. schwere und leichte Passagiere rutschen gleich schnell. Ist das Modell vollständig?

Wir schreiben (11.8) um

$$(dt)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2g(y_0 - y)} \quad (11.9)$$

(11.9) kann nun benutzt werden um die Zeit  $T$  zu berechnen, die es braucht um auf einer gegebenen Funktion  $y(x)$  von  $(0, y_0)$  nach  $(x_0, 0)$  zu rutschen. Die Zeit  $T$  ist ein Funktional

$$T[y] = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}{2g(y_0 - y)}} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_0 - y(x))}} dx = \int_0^{x_0} f(y(x), y'(x)) dx = F[y] \quad (11.10)$$

Damit haben wir das Variationsproblem  $\frac{\delta T[y]}{\delta y} = 0$  zu lösen. D.h. bei welchem  $y$  ist  $T$  minimal? Aus der obigen Liste der wichtigsten Funktionalableitungen in Abschnitt 11.3.1 sehen wir, dass wir die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial f(y(x), y'(x))}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(y(x), y'(x))}{\partial y'(x)} = 0$$

benutzen können und bekommen damit eine Differentialgleichung zur Bestimmung von  $y(x)$ .

### 11.3.3 Variation von Mehrfachintegralen

Wir erweitern den Begriff des Funktionals, wie wir ihn in Abschnitt 11.1 definierten, indem wir anstatt des Integrals der Funktion  $L(q(t), \dot{q}(t))$  nun ein Funktional betrachten, das aus einem Mehrfachintegral besteht. Dafür setzen wir anstatt der Funktion  $q(t)$ , das Feld  $\phi(x_\mu)$  in  $L$  ein und schreiben die Funktion  $L$  von nun an als  $\mathcal{L}$ . Hierbei bezeichne  $x_\mu$  die  $\mu$ -te unabhängige Variable. Ausserdem erweitern wir die in  $\mathcal{L}$  vorhandenen Ableitungen auf die partiellen Ableitungen erster

und höherer Ordnung der Funktion  $\varphi(\mathbf{x})$ . Damit ist  $\mathcal{L}$  eine Funktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \varphi(x_\mu), \frac{\partial \varphi(x_\mu)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial^2 \varphi(x_\mu)}{\partial x_\nu \partial x_\kappa} \dots; x_\mu \right) \quad (11.11)$$

und wir haben ein mehrdimensionales Variationsproblem vorliegen. Das Funktional sei gegeben als n-dimensionales Integral

$$J[\varphi] = \int_{\Omega} \mathcal{L} \left( \varphi(x_\mu), \partial_\nu \varphi(x_\mu), \partial_{\nu\kappa} \varphi(x_\mu) \dots; x_\mu \right) d^n x_\mu \quad (11.12)$$

wobei wir für  $\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial_\nu$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \partial_{\mu\nu}$  geschrieben haben. Variieren wir nun die Funktion  $\varphi(x_\mu)$  um einen Wert  $\psi(x_\mu)$ , wie bereits in Abschnitt 11.3 beschrieben, dann erhalten wir für die Variation des Integrals in (11.12)

$$\begin{aligned} \delta J[\varphi] &= J[\varphi + \varepsilon \psi] - J[\varphi] = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \mathcal{L}(\varphi(x_\mu) + \varepsilon \psi(x_\mu), \partial_\nu \varphi(x_\mu) + \varepsilon \partial_\nu \psi(x_\mu), \partial_{\nu\kappa} \varphi(x_\mu) + \varepsilon \partial_{\nu\kappa} \psi(x_\mu) \dots; x_\mu) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}(\varphi(x_\mu), \partial_\nu \varphi(x_\mu), \partial_{\nu\kappa} \varphi(x_\mu) \dots; x_\mu) \right] d^n x_\mu \end{aligned} \quad (11.13)$$

Wir entwickeln (11.13) in eine Potenzreihe nach  $\varepsilon$  und behalten alle Glieder bis zur ersten Ordnung, dann erhalten wir

$$\delta J[\varphi] = \varepsilon \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu\nu} \varphi)} \partial_{\mu\nu} \psi + \dots \right) d^n x_\mu \quad (11.14)$$

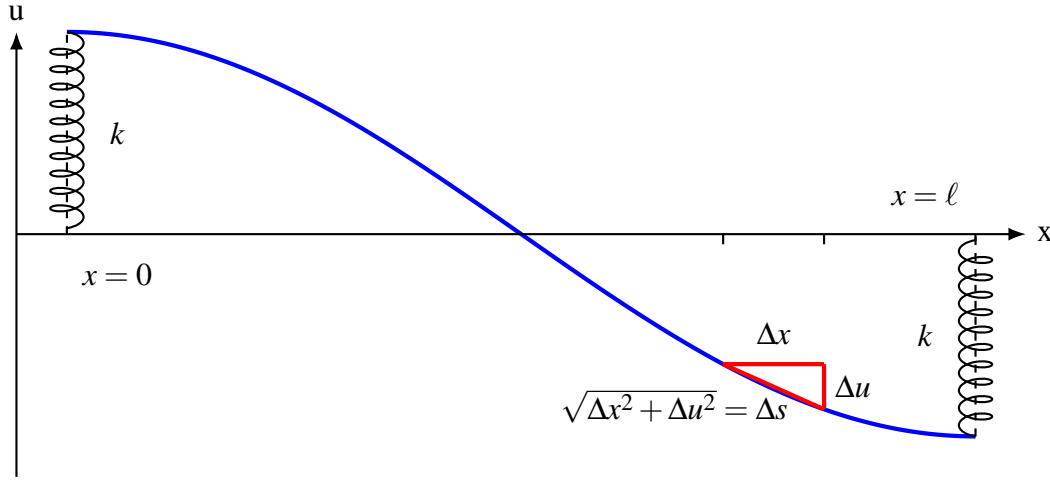
Wir wählen  $\psi$  dergestalt, dass es auf dem Rand des Integrationsgebietes verschwindet, also  $\psi(x_\mu \in \Omega) = 0$ , dann erhalten wir durch partielle Integration von (11.14)

$$\delta J[\varphi] = \varepsilon \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} + \partial_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu\nu} \varphi)} - \dots \right) \psi d^n x_\mu \quad (11.15)$$

Für beliebige  $\psi$  folgen daraus die Bewegungsgleichungen für das Feld  $\varphi(x_\mu)$  zu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} + \partial_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu\nu} \varphi)} - \partial_{\mu\nu\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu\nu\gamma} \varphi)} \dots = 0 \quad (11.16)$$

### 11.3.4 Die schwingende Saite, ein ausführliches Beispiel



Eine Saite der Länge  $\ell$  sei bei  $x = 0$  und  $x = \ell$  jeweils über eine Feder elastisch aufgehängt. Die Aufhängepunkte sollen sich nur senkrecht zur  $x$ -Richtung bewegen können (siehe Zeichnung). Die Saite habe eine Massendichte  $\rho$  pro Längeneinheit und eine Spannung  $\tau$ . Die Federn der Aufhängung haben eine Federkonstante  $k$ .

Die kinetische Energie eines Abschnitts  $\Delta x$  der Saite ist

$$\Delta T^* = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta x \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2,$$

wobei wir kleine Relativauslenkungen  $\Delta u$  angenommen haben. Die gesamte kinetische Energie ist die Summer aller Beiträge der Abschnitte  $\Delta x$ . Im Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  wird hieraus ein Integral

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \int_0^\ell \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (11.17)$$

Dasselbe machen wir nun mit der potentiellen Energie. Aus der Grafik erkennen wir, dass die elastische Energie gleich der Saitenspannung  $\tau$  multipliziert mit der Streckung  $\Delta x$  ist. Ohne Auslenkung können wir so die gesamte elastische Energie ausrechnen. Wenn aber lokal eine Verschiebung  $\Delta u$  vorliegt, dann wird die Saite gedehnt auf die neue Länge  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \Delta s$ . Die elastische Energie, die die Saite zusätzlich durch die Dehnung aufnimmt ist gerade die Differenz  $\Delta V = \tau \cdot (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} - \Delta x)$ . Dies können wir auch schreiben als  $\Delta V = \tau \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right) \Delta x$ . Für kleine Dehnungen  $\left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$  entwickeln wir den Term unter der Wurzel und erhalten näherungsweise

$$V = \tau \cdot \left( 1 + \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 - 1 \right) \Delta x = \tau \cdot \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 \Delta x$$



Im Grenzübergang wird hieraus

$$V = \frac{1}{2}\tau \int_0^\ell \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (11.18)$$

Wir müssen noch die zwei Terme der potentiellen Energie an den Aufhängepunkten berücksichtigen, diese sind

$$V_k = \frac{1}{2}k \cdot u(0,t)^2 + \frac{1}{2}k \cdot u(\ell,t)^2. \quad (11.19)$$

Damit erhalten wir folgende Lagrangefunktion

$$L = \int_0^\ell \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2}k (u(0,t)^2 + u(\ell,t)^2). \quad (11.20)$$

Das Funktional  $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} L(u(x,t))dt$  nennen wir das Wirkungsintegral. Wir berechnen die Variation des Wirkungsintegrals

$$\begin{aligned} \delta J[u] &= J[u + \varepsilon \psi] - J[u] \quad (11.21) \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^\ell \left[ \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \tau \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right] dx - k[u(0,t)\psi(0,t) + u(\ell,t)\psi(\ell,t)] \right\} dt \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell \left[ -\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \psi(x,t) dx dt - \varepsilon \int_0^\ell k[u(0,t)\psi(0,t) + u(\ell,t)\psi(\ell,t)] dt \\ &\quad + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \tau \left[ \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} \psi(\ell,t) - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \psi(0,t) \right] dt + \varepsilon \int_0^\ell \rho \left[ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} \psi(x,t_0) - \frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t} \psi(x,t_1) \right] dx \end{aligned}$$

Assume that for  $t = t_0$  and  $t = t_1$  we do not vary the path  $u$ , so the last term in (11.21) vanishes and therefore we get to first order in  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \delta J[u] &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell \left[ -\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \psi(x,t) dx dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left( \tau \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + k u(0,t) \right) \psi(0,t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left( -\tau \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} + k u(\ell,t) \right) \psi(\ell,t) dt \quad (11.22) \end{aligned}$$

$J[u]$  nimmt ein Extermum an, wenn  $\delta J[u] = 0$  gilt und zwar für beliebige Variationen  $\psi(x,t)$  des Pfades  $u(x,t)$ . Also setzen wir zunächst einmal eine Variation mit  $\psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0$  an. Dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$-\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (11.23)$$

Wenn  $u(x,t)$  (11.23) genügt, dann ist der erste Term in (11.22) immer null. Setzen wir abwechselnd  $\psi(0,t) = 0$  und  $\psi(\ell,t) \neq 0$  und umgekehrt, dann erhalten wir zwei zusätzliche Gleichungen

$$\tau \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + k u(0,t) = 0 \quad (11.24)$$

$$\tau \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} + k u(\ell,t) = 0 \quad (11.25)$$

(11.24) und (11.25) sind die zu (11.23) gehörigen Randbedingungen. Diese Beispiel zeigt, wie mit Hilfe der Variationsrechnung die Bewegungsgleichungen für ein System abgeleitet werden kann.

# Anhang A

## Der Residuensatz

Die Funktion  $f(z)$  der komplexen Zahl  $z = x + iy$  schreiben wir als Summe des Real- und Imaginärteils  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

### Beispiel 33: Komplexe Funktionen

Verifiziere:

$$z^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$\sin(z) = \underbrace{\sin(x) \cosh(y)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\cos(x) \sinh(y)}_{v(x,y)}$$

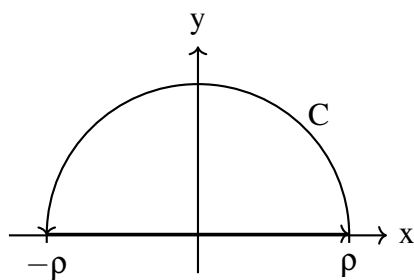


Abb. A.1: Integrationsweg in der komplexen Ebene.

Ein Integral im Reellen, also z.B.  $I = \int f(x)dx$ , wird im komplexen zu einem Linienintegral im zweidimensionalen Raum der durch  $x, y$  aufgespannt wird. Deshalb müssen wir zusätzlich noch den Integrationsweg angeben. In Parameterform würde das bedeuten, wir müssen die Funktionen  $x(s)$  und  $y(s)$  angeben für ein Intervall von  $s$ .

Wir sind speziell an geschlossenen Integrationswegen in der komplexen Ebene interessiert:  $I = \oint f(z)dz$ , wie z.B. dem geschlossenen Halbkreis in Abbildung A.1. Auf diesem Integrationsweg wollen wir das Integral der Funktion

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{z^2 + \Gamma^2}$$

angeben. Mit  $z = \rho e^{i\varphi}$  ist  $dz = e^{i\varphi}d\rho + i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ . Damit setzt sich das Integral aus zwei Anteilen

zusammen, das Integral über die reelle Achse von  $-\rho$  bis  $\rho$  und das über den Halbkreis

$$\oint f(z)dz = \int_{\substack{-\rho \\ (dy=0)}}^{\rho} \frac{e^{ikx}}{x^2 + \Gamma^2} dx + \int_{\substack{0 \\ (d\rho=0)}}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} e^{i\rho k \cos(\varphi) - \rho k \sin(\varphi)}}{\rho^2 e^{i2\varphi} + \Gamma^2} d\varphi$$

Dabei wird als Parameter  $s$  im ersten Summanden  $x$  benutzt, denn auf dem Teilstück des Wegs ist  $y = 0$ . Im zweiten Summanden hingegen ist  $\rho = \text{const.}$  und damit  $\varphi$  als Parameter zu nehmen.

Im Limes  $\rho \rightarrow \infty$  verschwindet der zweite Summand in obiger Gleichung und wir erhalten

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint f(z)dz = \int_{\substack{-\rho \\ (dy=0)}}^{\rho} \frac{e^{ikx}}{x^2 + \Gamma^2} dx = \int_{\substack{-\rho \\ (dy=0)}}^{\rho} \frac{\cos(kx)}{x^2 + \Gamma^2} dx = \frac{\pi}{\Gamma} e^{-k\Gamma}$$

Für die Berechnung von Integralen dieser Art benutzen wir den *Residuensatz*. Dazu müssen wir noch den Begriff der Pole einer Funktion  $f(z)$  klären. Die Funktion  $f(z)$  hat an der Stelle  $z = z_r$  einen *Pol 1. Ordnung*, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_r} (z - z_r) f(z) \neq 0,$$

oder einen *Pol m-ter Ordnung*, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_r} (z - z_r)^m f(z) \neq 0.$$

Die den Polen m-ter Ordnung zugeordneten Residuen sind definiert als

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_r} = \lim_{z \rightarrow z_r} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_r)^m f(z)] \quad (\text{A.1})$$

Nun sind wir in der Lage den Residuensatz zu formulieren.

#### Satz 5: Residuensatz

Der Wert eines geschlossenen Integrals in der Ebene ist gleich dem  $2\pi i$ -fachen der Summe der umschlossenen Residuen.

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{r=1 \\ (z_r \text{ innerhalb } C)}} \text{Res } f(z)|_{z=z_r} \quad (\text{A.2})$$

# Anhang B

## Interpolation und Kurvenanpassung

### B.1 Least square fit

Suppose you are given a set of data  $z_i \in \{Z\}$ , e.g. the  $i = 1, \dots, 29$  indicating the channels of an EEG measurement, measured at points  $x_i$  and  $y_i$ . We want to find a function  $f(x, y; \mathbf{p})$  which depends on a vector  $\mathbf{p}$  of parameters  $p_k$ .

#### B.1.1 Polynomial basis

Assume that  $f(x=0, y=0) = 0$ . Thus we propose a polynomial function  $f(x, y; \mathbf{p}) = p_0 \cdot x + p_1 \cdot y + p_2 \cdot x^2 + p_3 \cdot x \cdot y + p_4 \cdot y^2$  the data set of measurements  $\{x_i, y_i, z_i\}$  we want to fit to. We choose a least square method, i.e.

$$\sum_i (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2 = \text{Min.}$$

Which in turn is equivalent to require

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \sum_i (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2 = \sum_i (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i) \frac{\partial}{\partial p_k} f(x_i, y_i; \mathbf{p}) = 0$$

this yields a linear system of equation for the  $p_k$  to read

$$\begin{aligned}
p_0 \sum_i x_i^2 + p_1 \sum_i x_i \cdot y_i + p_2 \sum_i x_i^3 + p_3 \sum_i x_i^2 \cdot y_i + p_4 \sum_i x_i \cdot y_i^2 &= \sum_i z_i \cdot x_i \\
p_0 \sum_i x_i \cdot y_i + p_1 \sum_i y_i^2 + p_2 \sum_i x_i^2 \cdot y_i + p_3 \sum_i x_i \cdot y_i^2 + p_4 \sum_i y_i^3 &= \sum_i z_i \cdot y_i \\
p_0 \sum_i x_i^3 + p_1 \sum_i x_i^2 \cdot y_i + p_2 \sum_i x_i^4 + p_3 \sum_i x_i^3 \cdot y_i + p_4 \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 &= \sum_i z_i \cdot x_i^2 \\
p_0 \sum_i x_i^2 \cdot y_i + p_1 \sum_i x_i \cdot y_i^2 + p_2 \sum_i x_i^3 \cdot y_i + p_3 \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 + p_4 \sum_i x_i \cdot y_i^3 &= \sum_i z_i \cdot x_i \cdot y_i \\
p_0 \sum_i x_i \cdot y_i^2 + p_1 \sum_i y_i^3 + p_2 \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 + p_3 \sum_i x_i \cdot y_i^3 + p_4 \sum_i x_i \cdot y_i^4 &= \sum_i z_i \cdot y_i^2
\end{aligned}$$

Let us write this as a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$$

Note that  $\mathbf{A}$  is symmetric and the matrix entries read

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \cdot y_i & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot y_i^2 \\ \sum_i x_i \cdot y_i & \sum_i y_i^2 & \sum_i x_i^2 \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot y_i^2 & \sum_i y_i^3 \\ \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 \cdot y_i & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 \cdot y_i & \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 \\ \sum_i x_i^2 \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot y_i^2 & \sum_i x_i^3 \cdot y_i & \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 & \sum_i x_i \cdot y_i^3 \\ \sum_i x_i \cdot y_i^2 & \sum_i y_i^3 & \sum_i x_i^2 \cdot y_i^2 & \sum_i x_i \cdot y_i^3 & \sum_i x_i \cdot y_i^4 \end{pmatrix},$$

while we have for the r.h.s. of the linear system

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_i z_i \cdot x_i \\ \sum_i z_i \cdot y_i \\ \sum_i z_i \cdot x_i^2 \\ \sum_i z_i \cdot x_i \cdot y_i \\ \sum_i z_i \cdot y_i^2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}$  and  $\mathbf{b}$  can be easily calculated and thus we have  $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ . The only task left is to find an analytical expression for the inverse of  $\mathbf{A}$ , which components read

$$\mathbf{A}_{ij}^{-1} = \frac{\alpha_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$

where the  $\alpha_{ij}$  are the elements of the adjoint matrix  $\mathbf{A}_{ad}$ .

**N.B.:** The adjoint matrix elements

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}, \text{ where } a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$$

### B.1.2 Spherical harmonics function as a basis

Now let  $z_i \in \{Z\}$  be the  $i = 1, \dots, 29$  indicating the channels of an EEG measurement at positions  $\theta_i(t), \varphi_i(t)$ , i.e. 29 time series'. We propose a set of spherical harmonics functions  $f(x, y; \mathbf{p}) = Y_{nl}(\theta, \varphi)$  the data set of measurements  $\{\theta_i, \varphi_i, z_i\}$  we want to fit to. The least square method states that

$$\sum_i \left( \sum_{nl} c_{nl} Y_{nl}(\theta_i, \varphi_i) - z_i \right)^2 = \text{Min.}$$

Thus all the derivatives w.r.t.  $c_{mk}$  must vanish, to read

$$\sum_i 2 \left( \sum_{nl} c_{nl} Y_{nl}(\theta_i, \varphi_i) - z_i \right) \cdot Y_{mk}(\theta_i, \varphi_i) = 0 \quad (\text{B.1})$$

For the spherical harmonics we have  $l = -n, \dots, n$  for every  $n$ .

#### Beispiel 34: Spherical harmonics least square fit

Let us limit the number of spherical harmonics in (B.1) to  $n = 0, 1$ . Thus we are left with 4 parameters  $c_0 = c_0, c_{1,-1} = c_1, c_{1,0} = c_2, c_{1,1} = c_3$ . Thus (B.1) reads

$$\sum_{i=0}^{29} \left( \sum_{j=0}^3 c_j Y_j(\theta_i, \varphi_i) - z_i \right) \cdot Y_k(\theta_i, \varphi_i) = 0$$

We get four equations - remember  $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} c_0 \sum_i Y_0(\theta_i, \varphi_i) \cdot Y_0(\theta_i, \varphi_i) + c_1 \sum_i Y_1(\theta_i, \varphi_i) \cdot Y_0(\theta_i, \varphi_i) + \\ c_2 \sum_i Y_2(\theta_i, \varphi_i) \cdot Y_0(\theta_i, \varphi_i) + c_3 \sum_i Y_3(\theta_i, \varphi_i) \cdot Y_0(\theta_i, \varphi_i) = \sum_i z_i Y_0(\theta_i, \varphi_i) \end{aligned}$$

The  $a_{kj} = \sum_i Y_j(\theta_i, \varphi_i) \cdot Y_k(\theta_i, \varphi_i)$  and the  $b_k = \sum_i z_i Y_k(\theta_i, \varphi_i)$  are just real numbers. Thus we end up with the linear system

$$\begin{aligned} a_{00}c_0 + a_{01}c_1 + a_{02}c_2 + a_{03}c_3 &= b_0 \\ a_{10}c_0 + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 &= b_1 \\ a_{20}c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 &= b_2 \\ a_{30}c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 &= b_3 \end{aligned}$$

to determine the  $c_i$ .