پردازش سیگنال‌های حیاتی
مبحث دهم- آنالیز کپستروم

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث دهم– آنالیز کپستروم

- مقدمه
- تعریف کپستروم مختلط و کپستروم حقیقی
- کپستروم مختلط سیگنال‌هایی با تبدیل z کسر گویا
- خواص کپستروم مختلط
- محاسبه کپستروم مختلط در حوزه زمان
- محاسبه کپستروم مختلط با استفاده از DFT
- محاسبه کپستروم مختلط سیگنال می‌نیمم فاز از روی کپستروم حقیقی
- ویژگی مهم کپستروم مختلط: تبدیل کانولوشن به جمع
- ریشه نام‌گذاری کپستروم
- دیکانولوشن
- کاربرد

مقدمه

- یادآوری مفاهیم کلی مربوط به سیگنال
  - حوزه زمان/حوزه فرکانس/حوزه z
  - تغییرات مختلف روی سیگنال
- یادآوری مفاهیم مختلف مربوط به سیستم
  - سیستم LTI
  - پاسخ ضربه/پاسخ فرکانسی/تابع تبدیل
  - تابع تبدیل کسر گویا/صفر و قطب
  - پایداری/سببی بودن/وارون سیستم
  - سیستم FIR و IIR
  - سیستم تمام گذر
  - سیستم می‌نیمم فاز/ماکزیمم فاز
  - سیستم با فاز خطی تعمیم یافته

$x[n]$	$X(e^{j\omega})$	$X(z)$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$	$X(\frac{1}{z}) = X(z^{-1})$
$(-1)^n x[n]$	$X(e^{j(\omega-\pi)})$	$X(-z)$
$x[Mn]$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega}{M}-k\frac{2\pi}{M})})$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-jk\frac{2\pi}{M}} z^{\frac{1}{M}})$
$\begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = kL \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$X(e^{j\omega L})$	$X(z^L)$

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

تعریف کپستروم مختلط و کپستروم حقیقی

- تعریف کپستروم مختلط (بدلیل استفاده از لگاریتم مختلط)
  - سیگنال پایدار

$$x[n]\Rightarrow X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\angle X(e^{j\omega})}\Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega})=\ln X(e^{j\omega})=\ln\left|X(e^{j\omega})\right|+j\angle X(e^{j\omega})\Rightarrow \hat{x}[n]$$

- تعریف کپستروم حقیقی (بدلیل استفاده از لگاریتم حقیقی)
  - سیگنال پایدار

$$x[n]\Rightarrow X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\angle X(e^{j\omega})}\Rightarrow C_x(e^{j\omega})=\ln\left|X(e^{j\omega})\right|\Rightarrow c_x[n]$$

- ارتباط دو کپستروم
  - کپستروم مختلط وارون پذیر است ولی کپستروم حقیقی نیست

$$C_x(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\left\{\hat{X}(e^{j\omega})\right\}\Rightarrow c_x[n]=\frac{\hat{x}[n]+\hat{x}^*[-n]}{2}$$

- تعریف دیگر کپستروم مختلط

$$x[n]\Rightarrow X(z)=\left|X(z)\right|e^{j\angle X(z)}\Rightarrow \hat{X}(z)=\ln X(z)=\ln\left|X(z)\right|+j\angle X(z)\Rightarrow \hat{x}[n]$$

  - معمولا با شرط پایداری تعریف می‌شود
- تعریف برای سیگنال حقیقی و مختلط
  - حقیقی بودن سیگنال و کپستروم مختلط بودن
    - تقارن هرمیتی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی
  - یک ملاحظه مهم: ضرب سیگنال حقیقی در منفی یک

$$y[n]=-x[n]\Rightarrow Y(z)=-X(z)$$
$$\Rightarrow \hat{Y}(z)=\hat{X}(z)+\ln(-1)=\hat{X}(z)+j\pi$$
$$\Rightarrow \hat{y}[n]=\hat{x}[n]+j\pi\delta[n]$$

کپستروم مختلط

- شرایط کپستروم مختلط در حوزه z و حوزه فرکانس
  - پیوسته و تحلیلی بودن در ناحیه همگرایی
  - فاز پیوسته در حوزه فرکانس

$$x[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) = \ln X(e^{j\omega}) \Rightarrow \hat{x}[n]$$

$$x[n] \Rightarrow X(z) \Rightarrow \hat{X}(z) = \ln X(z) \Rightarrow \hat{x}[n]$$

- روش‌های محاسبه کپستروم مختلط
  - تبدیل z و تبدیل z معکوس
  - تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس
  - استفاده از DFT و DFT معکوس برای سیگنال‌های با طول محدود
  - محاسبه مستقیم در حوزه زمان (با روابط بازگشتی)
- وارون کپستروم مختلط
  - تابع نمایی

$$\hat{x}[n] \Rightarrow \hat{X}(z) \Rightarrow X(z) = \exp\left(\hat{X}(z)\right) \Rightarrow x[n]$$

کپستروم مختلط

- تبدیل z وارون لگاریتم

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \quad |x|<1$$

$$\hat{X}(z) = \ln(1-\alpha z^{-1}) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n}z^{-n} \quad |z|>|\alpha| \Rightarrow \hat{x}[n] = -\frac{\alpha^n}{n}u[n-1] = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^n}{n} & n\ge 1 \\ 0 & n\le 0 \end{cases} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{k}\delta[n-k]$$

$$\hat{X}(z) = \ln(1-\beta z) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\beta^n}{n}z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\beta^{-n}}{n}z^{-n} \quad |z|<\frac{1}{|\beta|} \Rightarrow \hat{x}[n] = \frac{\beta^{-n}}{n}u[-n-1] = \begin{cases} \dfrac{\beta^{-n}}{n} & n\le -1 \\ 0 & n\ge 0 \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\beta^{-k}}{k}\delta[n-k]$$

- خاصیت لگاریتم
  - تبدیل ضرب به جمع
- محاسبه ساده کپستروم مختلط
  - سیگنال‌هایی که تبدیل z آنها به شکل حاصلضرب عبارت‌هایی به فرم $1-\alpha z^{-1}$ هستند

کپستروم مختلط سیگنال‌هایی با تبدیل z کسر گویا

- ویژگی‌های کسر گویا
  - فاقد قطب و صفر روی دایره واحد
  - صفرهای داخل و بیرون دایره واحد
  - قطب‌های داخل و بیرون دایره واحد

$$X(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{n_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{n_o}(1-d_k z)} \qquad |a_k|,|b_k|,|c_k|,|d_k|<1, \quad r_1<|z|<r_2$$

$$\hat{X}(z) = \ln X(z) = \ln A + \ln z^r + \sum_{k=1}^{m_i}\ln(1-a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_0}\ln(1-b_k z) - \sum_{k=1}^{n_i}\ln(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{n_0}\ln(1-d_k z)$$

$$= \ln A + \ln z^r - \sum_{k=1}^{m_i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_k^n}{n}z^{-n} + \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{b_k^{-n}}{n}z^{-n} + \sum_{k=1}^{n_i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_k^n}{n}z^{-n} - \sum_{k=1}^{n_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{d_k^{-n}}{n}z^{-n} \qquad r_3<|z|<r_4$$

$$r=0 \Rightarrow \qquad \hat{X}(z) = \left(\sum_{k=1}^{m_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{b_k^{-n}}{n}z^{-n} - \sum_{k=1}^{n_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{d_k^{-n}}{n}z^{-n}\right) + \ln A + \left(-\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_k^n}{n}z^{-n} + \sum_{k=1}^{n_i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_k^n}{n}z^{-n}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n] = \begin{cases} \ln A & n=0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_k^n}{n} & n>0 \\ \sum_{k=1}^{m_0}\frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{n_0}\frac{d_k^{-n}}{n} & n<0 \end{cases}$$

  - ناحیه همگرایی شامل دایره واحد
    - سیگنال پایدار
    - مثبت فرض کردن ضریب A برای حقیقی ماندن کپستروم سیگنال حقیقی
    - تحلیلی نبودن تبدیل روی دایره واحد برای تاخیر مخالف صفر (فاز خطی متناوب و ناپیوسته در π)

$x[n]$ real $\Leftrightarrow \hat{x}[n]$ real

A real

$\ln A = \ln|A| + j\pi \Rightarrow A>0$

$\hat{x}[0] = \ln A$

کپستروم مختلط سیگنال‌هایی با تبدیل z کسر گویا

- خواص کپستروم مختلط
  - نامحدود حتی برای سیگنال با طول محدود
  - نزولی از هر دو طرف
  - سببی برای سیگنال می‌نیمم فاز
  - ضدسببی برای سیگنال ماکزیمم فاز

$$X(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{n_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{n_o}(1-d_k z)} \qquad |a_k|,|b_k|,|c_k|,|d_k|<1$$

$$A>0, r=0 \Rightarrow \hat{x}[n] = \begin{cases} \ln A & n=0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_k^n}{n}+\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_k^n}{n} & n>0 \\ \sum_{k=1}^{m_0}\frac{b_k^{-n}}{n}-\sum_{k=1}^{n_0}\frac{d_k^{-n}}{n} & n<0 \end{cases}$$

- مثال ۱

$$x[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-1] \Rightarrow X(z)=1-0.5z^{-1} \Rightarrow \hat{x}[n]=-\frac{(0.5)^n}{n}u[n-1]=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(0.5)^k}{k}\delta[n-k]$$

$$x[n]=(0.5)^n u[n] \Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}} \Rightarrow \hat{x}[n]=\frac{(0.5)^n}{n}u[n-1]=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(0.5)^k}{k}\delta[n-k]$$

$$x[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-n_0] \Rightarrow X(z)=1-0.5z^{-n_0} \Rightarrow \hat{X}(z)=\ln(1-0.5z^{-n_0})=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(0.5)^n}{n}z^{-nn_0} \Rightarrow \hat{x}[n]=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(0.5)^k}{k}\delta[n-kn_0]$$

محاسبه کپستروم مختلط در حوزه زمان

- رابطه سیگنال حقیقی و کپستروم مختلط آن در حوزه زمان
  - معادله تفاضلی غیرخطی

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\hat{X}(z)=\ln X(z)\Rightarrow \frac{d\hat{X}(z)}{dz}=\frac{\frac{dX(z)}{dz}}{X(z)}\Rightarrow \frac{dX(z)}{dz}=\frac{d\hat{X}(z)}{dz}.X(z)\Rightarrow\left(-z\frac{dX(z)}{dz}\right)=\left(-z\frac{d\hat{X}(z)}{dz}\right).X(z)$$

$$\Rightarrow\left(nx[n]\right)=\left(n\hat{x}[n]\right)*x[n]\Rightarrow nx[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k\hat{x}[k]x[n-k]\Rightarrow \boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]\qquad n\neq 0}$$

- حالت خاص اول: سیگنال می‌نیمم فاز و کپستروم سببی

$$x[n]=0\quad n<0,\hat{x}[n]=0\quad n<0,x[0]\neq 0$$

$$\Rightarrow x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]=\hat{x}[n]x[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]\qquad n>0$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{x}[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \frac{x[n]}{x[0]}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\hat{x}[k]\frac{x[n-k]}{x[0]} & n>0\\ \ln A=\ln x[0] & n=0\end{cases}}$$

$$\begin{cases}X(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_kz^{-1})}{\prod_{k=1}^{n_i}(1-c_kz^{-1})} & |a_k|,|c_k|<1,\quad r_1<|z|\\ x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)=A\end{cases}$$

محاسبه کپستروم مختلط در حوزه زمان

- حالت خاص دوم: سیگنال ماکزیمم فاز و کپستروم ضدسببی

$x[n]=0 \quad n>0, \hat{x}[n]=0 \quad n>0, x[0]\neq 0$

$$\Rightarrow x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]=\sum_{k=n}^{0}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k]=\hat{x}[n]x[0]+\sum_{k=n+1}^{0}\frac{k}{n}\hat{x}[k]x[n-k] \qquad n<0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]}{x[0]}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{0}\frac{k}{n}\hat{x}[k]\frac{x[n-k]}{x[0]} & n<0\\ 0 & n>0\\ \ln A=\ln x[0] & n=0\end{cases}}$$

$$\begin{cases}X(z)=A\dfrac{\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{n_o}(1-d_k z)} & |b_k|,|d_k|<1, \quad |z|<r_2\\ x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z^{-1})=A\end{cases}$$

- مثال ۲

$$x[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-1]\Rightarrow \hat{x}[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{x[n]}{1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\hat{x}[k]\frac{x[n-k]}{1} & n>0\\ \ln 1 & n=0\end{cases}=\begin{cases}0 & n<0\\ -\dfrac{(0.5)^n}{n} & n>0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

محاسبه کپستروم مختلط با استفاده از DFT

- سیگنال سببی با طول محدود
  - سیگنال N نقطه‌ای

$$x[n] \quad 0 \le n \le N-1 (FIR) \Rightarrow \begin{cases} X(e^{j\omega}) \Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) = \ln X(e^{j\omega}) \Rightarrow \hat{x}[n] (IIR) \\ X[k] \Rightarrow \hat{X}[k] = \ln X[k] \Rightarrow \hat{x}_p[n] (FIR) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{N}} \\ \hat{X}[k] = \hat{X}(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow \hat{x}_p[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}[n+kN] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{cases}$$

- کپستروم بدست آمده متناوب شده کپستروم اصلی است.

- مثال ۳

$$x[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-1] \Rightarrow \hat{x}[n] = -\frac{(0.5)^n}{n} u[n-1] = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(0.5)^k}{k} \delta[n-k]$$

$$X[k] = 1 - 0.5e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow \hat{X}[k] = \ln X[k] \Rightarrow \hat{x}_p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}[n+kN] \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$\hat{x}_p[0] = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{x}[0+kN] = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{x}[kN] = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(0.5)^{kN}}{kN} \cong 0 \qquad N >> 1$$

$$\hat{x}_p[1] = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{x}[1+kN] = -0.5 + \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{x}[1+kN] = -0.5 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(0.5)^{1+kN}}{1+kN} = -0.5 - 0.5\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(0.5)^{kN}}{kN} \cong -0.5 - 0 \qquad N >> 1$$

محاسبه کپستروم مختلط سیگنال می‌نیمم فاز از روی کپستروم حقیقی

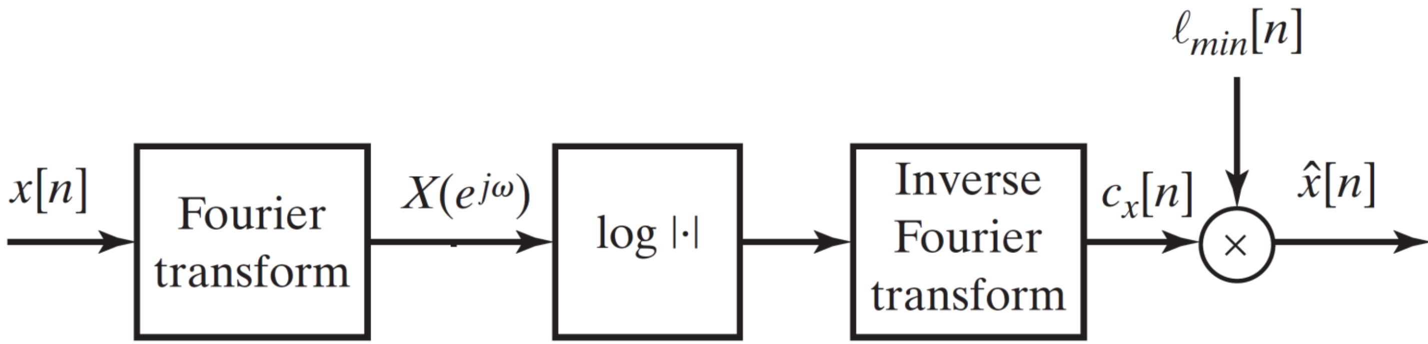
- سیگنال حقیقی و می‌نیمم فاز
  - کپستروم مختلط آن حقیقی و سببی است
  - کپستروم حقیقی آن جزء زوج کپستروم مختلط است
  - کپستروم مختلط به طور یکتا از کپستروم حقیقی بدست می‌آید

$$C_x(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{\hat{X}(e^{j\omega})\right\} \Rightarrow c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}^*[-n]}{2}$$

$$x[n] \quad real \Rightarrow c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]}{2}$$

$$\hat{x}[n] \quad causal \Rightarrow \hat{x}[n] = \begin{cases} 2c_x[n] & n > 0 \\ c_x[0] & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{x}[n] = c_x[n].l_{\min}[n]$$

$$l_{min}[n] = u_+[n] = 1 + \mathrm{sgn}[n] = 2u[n] - \delta[n] = \begin{cases} 2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

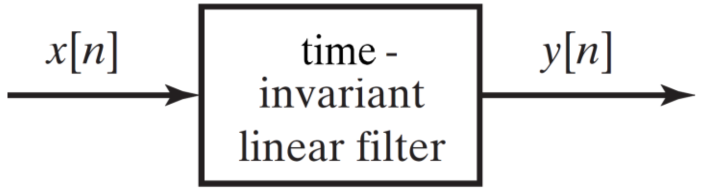


ویژگی مهم کپستروم مختلط: تبدیل کانولوشن به جمع

- کپستروم مختلط کانولوشن دو سیگنال

$$x[n]=x_1[n]*x_2[n]\Rightarrow X(z)=X_1(z).X_2(z)\Rightarrow \hat{X}(z)=\hat{X}_1(z)+\hat{X}_2(z)\Rightarrow \hat{x}[n]=\hat{x}_1[n]+\hat{x}_2[n]$$

- کاربرد مهم کپستروم مختلط: دیکانولوشن
  - جدا سازی دو سیگنال کانوالو شده در حوزه زمان
  - استخراج یکی از آنها در صورت عدم همپوشانی در حوزه کپستروم
  - نوعی فیلتر کردن در حوزه کپستروم
  - شبیه به فیلتر کرده سیگنال‌های جمع شونده در حوزه زمان و عدم همپوشانی در حوزه فرکانس
  - دلیل نام‌گذاری کپستروم
  - ارتباط با سیستم‌های هومومورفیک (فصل ۱۳ کتاب)



ریشه نام‌گذاری کپستروم

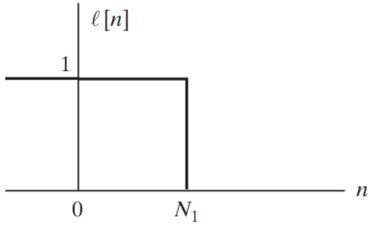
- روش‌های مختلف جداسازی دو سیگنال
  - فیلترکردن معمولی در صورت عدم همپوشانی فرکانسی دو سیگنال جمع شونده در حوزه فرکانس

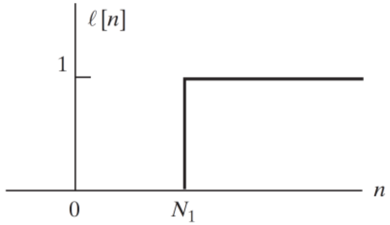
$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]\Rightarrow X(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})\Rightarrow Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\left(X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})\right)=X_1(e^{j\omega})\Rightarrow y[n]=x_1[n]$$

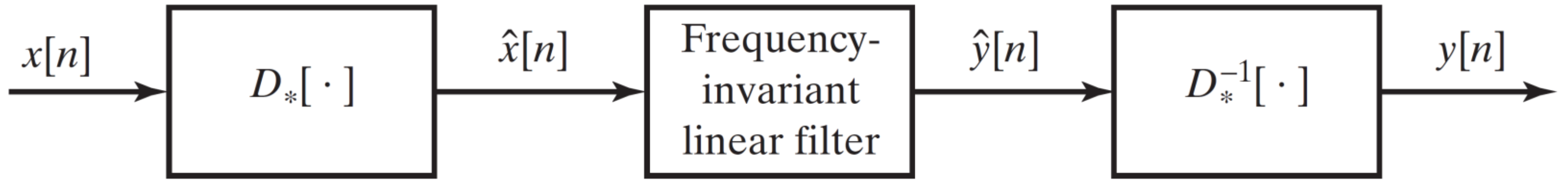
- ضرب در حوزه فرکانس/سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان
- مفاهیم Spectrum/Frequency/Filter/Lowpass/Highpass
  - فیلترکردن در حوزه کپستروم در صورت عدم همپوشانی در حوزه کپستروم دو سیگنال جمع شونده در حوزه کپستروم

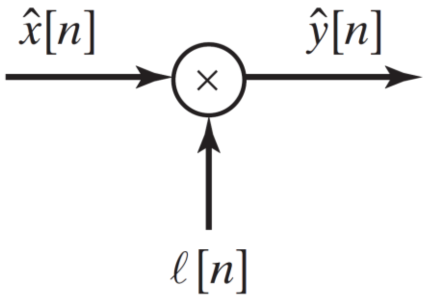
$$x[n]=x_1[n]*x_2[n]\Rightarrow \hat{x}[n]=\hat{x}_1[n]+\hat{x}_2[n]\Rightarrow \hat{y}[n]=l[n]\hat{x}[n]=l[n]\left(\hat{x}_1[n]+\hat{x}_2[n]\right)\Rightarrow \hat{y}[n]=\hat{x}_1[n]$$

- ضرب در حوزه کپستروم/سیستم خطی تغییرناپذیر با فرکانس / سیستم Homomorphic
- مفاهیم Cepstrum/Quefrency/Lifter/Shortpass/Longpass
- عمل دیکانولوشن در حوزه زمان









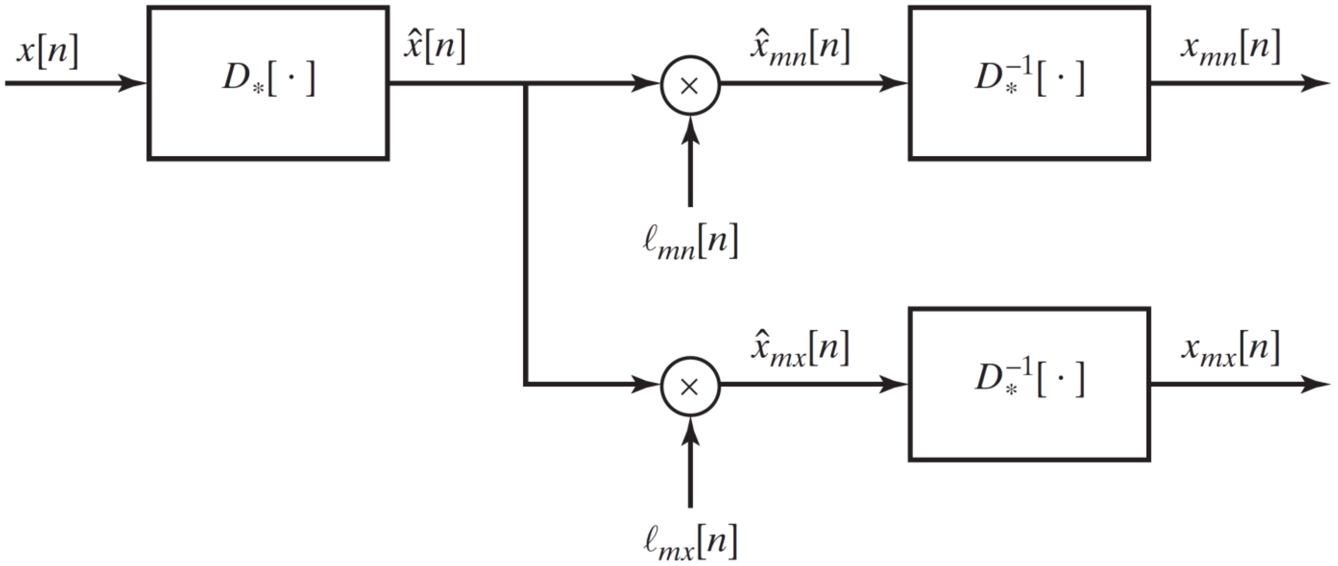
دیکانولوشن

- ۱– جدا کردن جزء می‌نیمم فاز و جزء ماکزیمم فاز
  – سیگنال بدون صفر و قطب روی دایره واحد
  – فرض: $\hat{x}_{mx}[0]=0$
  – فرض ممکن دیگر:

$$X(z)=X_{mn}(z).X_{mx}(z)\Rightarrow x[n]=x_{mn}[n]*x_{mx}[n]\Rightarrow \hat{x}[n]=\hat{x}_{mn}[n]+\hat{x}_{mx}[n]$$

$$\hat{x}[0]=\hat{x}_{mn}[0]+\hat{x}_{mx}[0]$$

$$\begin{cases}\hat{x}_{mn}[n] & causal\\ \hat{x}_{mx}[n] & anticausal\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{x}_{mn}[n]=u[n].\hat{x}[n]=l_{mn}[n].\hat{x}[n]\\ \hat{x}_{mx}[n]=u[-n-1].\hat{x}[n]=l_{mx}[n].\hat{x}[n]\end{cases}$$



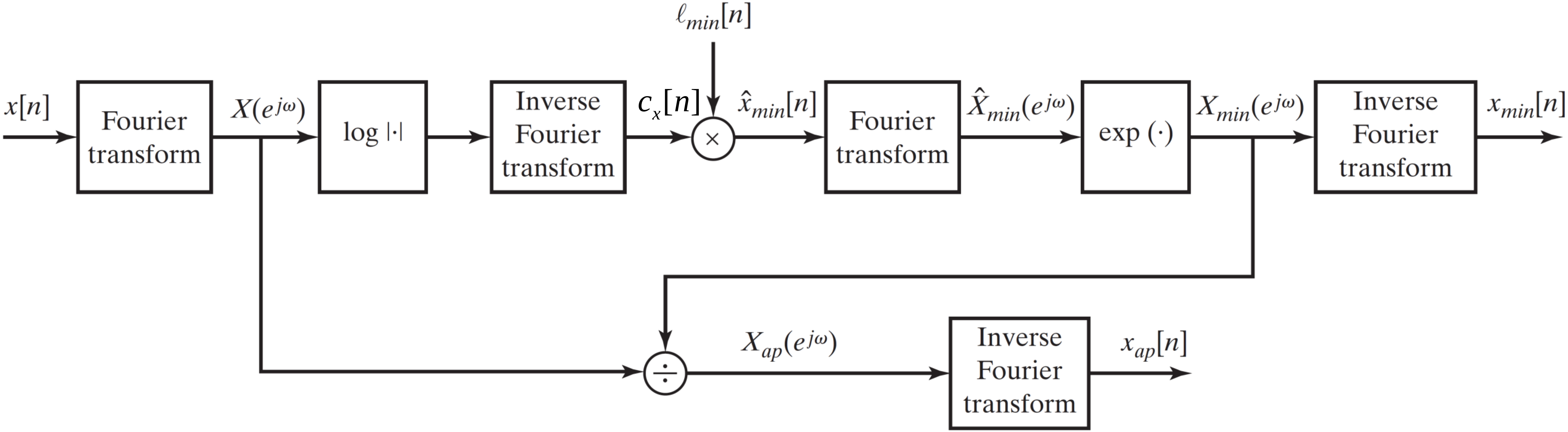
دیکانولوشن

- ۲- جدا کردن جزء می‌نیمم فاز و جزء تمام گذر

$$X(z) = X_{min}(z).X_{ap}(z) \Rightarrow x[n] = x_{min}[n] * x_{ap}[n] \Rightarrow \hat{x}[n] = \hat{x}_{min}[n] + \hat{x}_{ap}[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_{min}(e^{j\omega}).X_{ap}(e^{j\omega}) \Rightarrow \left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X_{min}(e^{j\omega})\right| \Rightarrow c_x[n] = c_{x_{min}}[n]$$

$$\hat{x}_{min}[n] \quad causal \Rightarrow \hat{x}_{min}[n] = l_{min}[n].c_{x_{min}}[n]$$

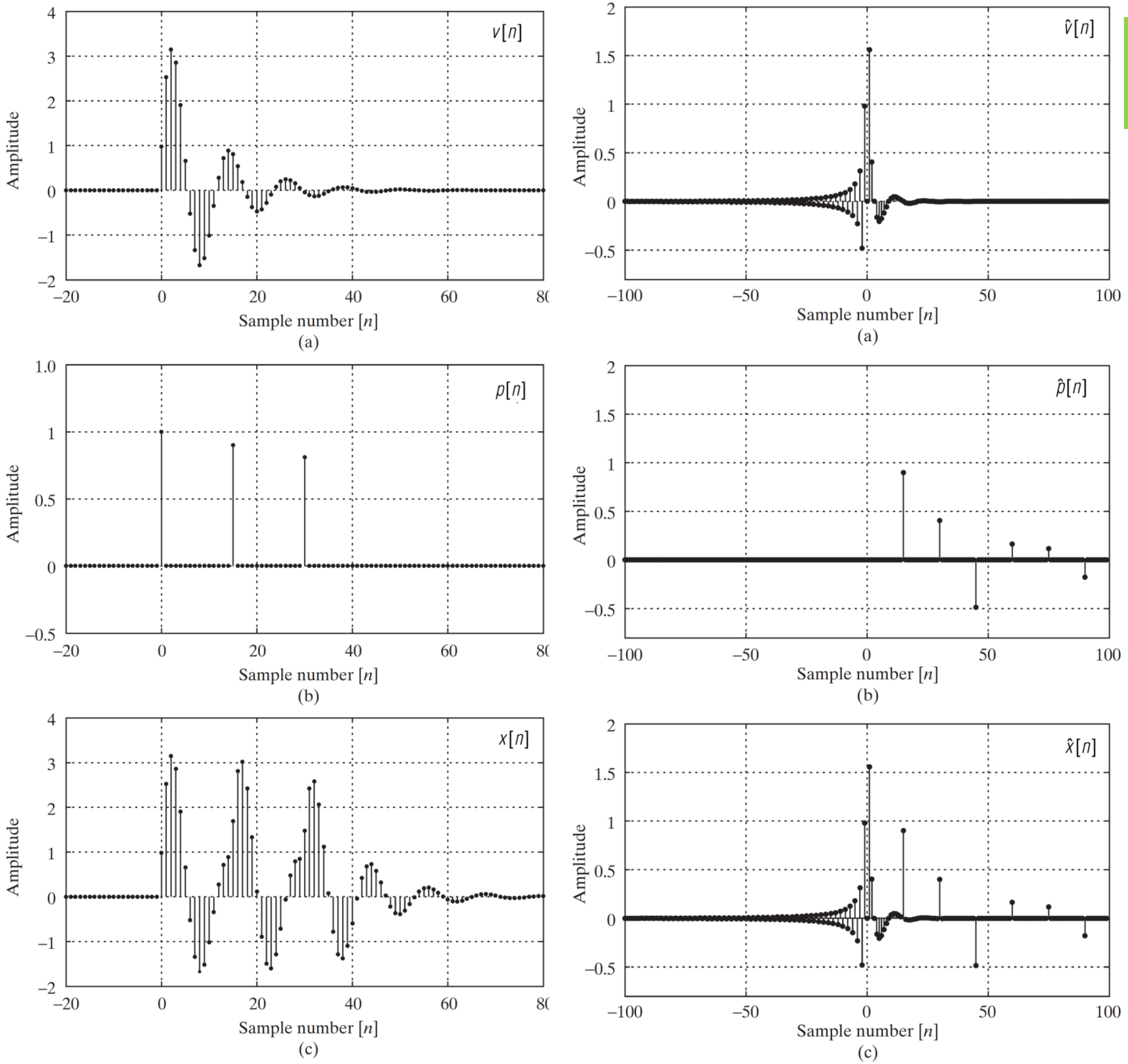


دیکانولوشن

- ۳– جدا کردن دو سیگنال وقتی یکی از آنها شبیه قطاری از ضربه است.
  - سیگنال $p[n]$ شامل تعدادی ضربه در مبدا و نقطه $N1$ و بعضی از مضارب مثبت $N1$
  - کپستروم سیگنال $p[n]$ فقط در و مضارب مثبت آن $N1$
  - دو حالت برای لیفتر
    - صفر کردن لحظات بعد از $N1$ (در صورت میرایی کپستروم سیگنال اصلی)
    - صفر کردن در لحظه $N1$ و مضارب مثبت $N1$

$$x[n] = v[n] * p[n]$$
$$\Rightarrow \hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n]$$
$$\Rightarrow \hat{y}[n] = l[n]\hat{x}[n]$$
$$= l[n]\left(\hat{v}[n] + \hat{p}[n]\right)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{p}[n] : impluse\ train \\ l[n] : lifter \\ \hat{y}[n] = \hat{v}[n] \end{cases}$$

دیکانولوشن



- ۳- جدا کردن دو سیگنال وقتی یکی از آنها شبیه قطاری از ضربه است.

$$x[n] = v[n] * p[n]$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n]$$

$$\Rightarrow \hat{y}[n] = l[n]\hat{x}[n]$$

$$= l[n]\left(\hat{v}[n] + \hat{p}[n]\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{p}[n] : impluse\ train \\ l[n] : lifter \\ \hat{y}[n] = \hat{v}[n] \end{cases}$$

دیکانولوشن

- ۳- جدا کردن دو سیگنال وقتی یکی از آنها شبیه قطاری از ضربه است.
  - حالت اول: ضربه در مبدا و در $N1$ (سیستم اکو با یک تاخیر)

$$x[n]=\delta[n]+a\delta[n-N_1], \quad |a|<1$$

$$\Rightarrow X(z)=1+az^{-N_1}$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z)=\ln(1+az^{-N_1})=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-a)^n}{n}z^{-nN_1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n]=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k}{k}\delta[n-kN_1]$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{a^k}{k}\delta[n-kN_1]=a\delta[n-N_1]-\frac{a^2}{2}\delta[n-2N_1]+\frac{a^3}{3}\delta[n-3N_1]-\frac{a^4}{4}\delta[n-4N_1]+\dots$$

دیکانولوشن

- ۳– جدا کردن دو سیگنال وقتی یکی از آنها شبیه قطاری از ضربه است.
  - حالت دوم: دو تاخیر

$$x[n]=\delta[n]+a\delta[n-N_1]+a^2\delta[n-2N_1],\quad |a|<1$$

$$\Rightarrow X(z)=1+az^{-N_1}+a^2z^{-2N_1}=\frac{1-a^3z^{-3N_1}}{1-az^{-N_1}}$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z)=\ln(1-a^3z^{-3N_1})-\ln(1-az^{-N_1})=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n}z^{-3nN_1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n}z^{-nN_1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n]=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{3k}}{k}\delta[n-3kN_1]+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{k}\delta[n-kN_1]$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n]=a\delta[n-N_1]+\frac{a^2}{2}\delta[n-2N_1]+\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{1}\right)\delta[n-3N_1]+\frac{a^4}{4}\delta[n-4N_1]+\ldots$$

  - حالت سوم: تعداد بی‌نهایت تاخیر

$$x[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\delta[n-kN_1],\quad |a|<1\Rightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(az^{-N_1}\right)^k=\frac{1}{1-az^{-N_1}}$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z)=-\ln(1-az^{-N_1})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n}z^{-nN_1}\Rightarrow \hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{k}\delta[n-kN_1]$$

$$\Rightarrow \hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{k}\delta[n-kN_1]=a\delta[n-N_1]+\frac{a^2}{2}\delta[n-2N_1]+\frac{a^3}{3}\delta[n-3N_1]+\frac{a^4}{4}\delta[n-4N_1]+\ldots$$

دیکانولوشن

- ۳– جدا کردن دو سیگنال وقتی یکی از آنها شبیه قطاری از ضربه است.
  - مثال اول: سیستم اکو
  - مثال دوم: مدلسازی حروف صدادار
    - قطار ضربه با پریود pitch وارد سیستمی که vocal tract را مدل می‌کند، آن را تحریک کرده و حروف صدادار را تولید می‌کند
  - مثال سوم: تولید سیگنال الکتریکی قلبی
    - پتاسیل عمل ماهیچه قلبی، از تابع تحریک ماهیچه قلب (به شکل چند ضربه) عبور می‌کند.

$$x[n] = v[n] * p[n] \Rightarrow \hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n]$$

$$\Rightarrow \hat{y}[n] = l[n]\hat{x}[n] = l[n]\left(\hat{v}[n] + \hat{p}[n]\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{p}[n] : impluse\ train \\ l[n] : lifter \\ \hat{y}[n] = \hat{v}[n] \end{cases}$$

کاربرد

- کاربرد کپستروم در پردازش صوت
- کاربرد کپستروم در طبقه‌بندی
  - تعریف ویژگی‌های مختلف مبتنی بر کپستروم
- مثال‌هایی از کاربرد آنالیز کپستروم در پردازش سیگنال قلبی
  - کتاب Biomedical Signal Processing, M. Akay