Sharif University of Technology

پردازش سیگنال‌های حیاتی
مبحث دوم- فرآیندهای تصادفی

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

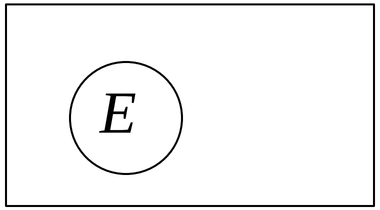
نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث دوم – فرآیندهای تصادفی

- مقدمه از احتمالات
- متغیر تصادفی /امید ریاضی
- دومتغیر تصادفی /بردار تصادفی
- تخمین یک متغیر تصادفی بدون مشاهده /تخمین یک متغیر تصادفی با مشاهده یک متغیر تصادفی دیگر
- چند نامساوی مفید
- تساوی دو متغیر تصادفی
- خواص ماتریس کواریانس و ماتریس همبستگی
- تعریف فرآیند تصادفی پیوسته و توصیف مرتبه اول و دوم آن
- تعریف ایستایی
- چند فرآیند معروف
- عبور فرآیند از یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان یقینی
- تعریف ارگادیک بودن
- توصیف فرآیند در حوزه فرکانس
- چگالی طیف توان
- سفید کردن فرآیند
- فرآیندهای تصادفی گسسته
- فرآیند خطی
- سفید کردن فرآیند تصادفی گسسته

مقدمه

- تعاریف اولیه
  - آزمایش تصادفی
  - فضای نمونه $\Omega = \{\omega\}$
    - پیوسته/گسسته
  - پیشامد
    - پیشامد قطعی/پیشامد ناممکن
    - دو پیشامد ناسازگار $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$
    - پیشامد مکمل E^C
    - پیشامدهای کامل ناهم‌پوشان $\bigcup_i E_i = \Omega, \quad E_i \bigcap E_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$



Ω

مقدمه

- تعاریف اولیه

$$E \subset \Omega \xrightarrow{\quad P \quad} \Re$$

– تعریف احتمال: تابعی که به هر زیرمجموعه از فضای نمونه، یک عدد حقیقی با ویژگی‌های زیر نسبت می‌دهد:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(E) \geq 0,$$

$$E_1 \bigcap E_2 = \varnothing \Rightarrow P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

– و با این ویژگی‌ها ثابت می‌شود:

$$P(E^C) = 1 - P(E) \geq 0,$$

$$P(\varnothing) = 0, \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

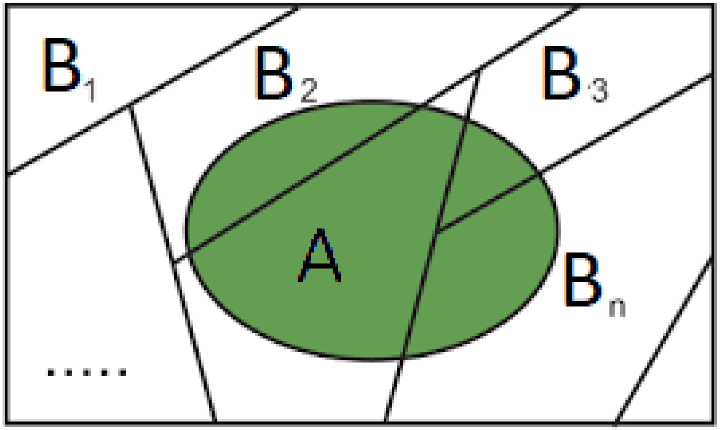
$$P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \bigcap E_2)$$

– احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \bigcap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$$

– دو پیشامد مستقل

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \bigcap B) = P(A).P(B)$$



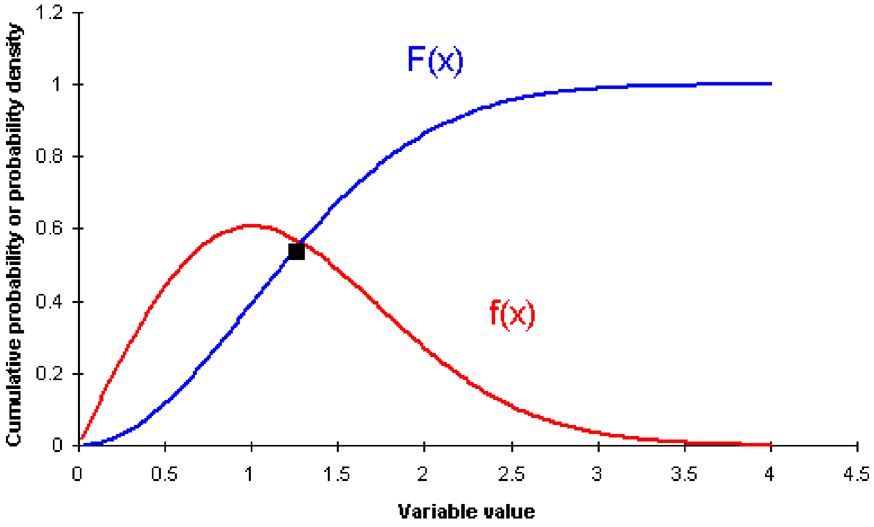
مقدمه

- قضیه بیز در احتمال شرطی
  - فضای احتمال به تعدادی پیشامد ناهم‌پوشان افراز شده است
  - احتمال پیشین پیشامد A معلوم است
  - احتمال پسین پیشامد A به شرط هر یک از پیشامدهای ناهم‌پوشان معلوم است
  - هدف محاسبه احتمال هر یک از پیشامدهای ناهم‌پوشان به شرط وقوع پیشامد A است

$$B_i \cap B_j = \varnothing$$

$$\bigcup_i B_i = \Omega$$

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j).P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_j).P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i).P(A|B_i)}$$



متغیر تصادفی

- تعریف متغیر تصادفی $\qquad \Omega \xrightarrow{X} \Re$
  - تعریف تابع توزیع احتمال

Probability Distribution Function (PDF)

$$F_X(x) = P(X \le x) \Rightarrow 0 \le F_X(x) \le 1$$

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(+\infty) = 1, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

$$P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

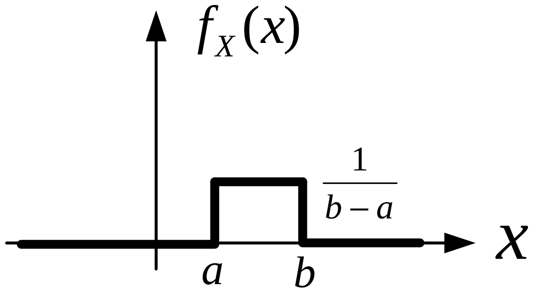
  - تابع چگالی احتمال probability density function (pdf)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad f_X(x) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$P\{X \in A\} = \int_A f_X(x)dx, \quad P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx, \quad P(X = x_0) = \begin{cases} 0 & \text{اگر شامل ضربه نباشد} \\ p_0 & \text{اگر شامل ضربه باشد} \end{cases}$$

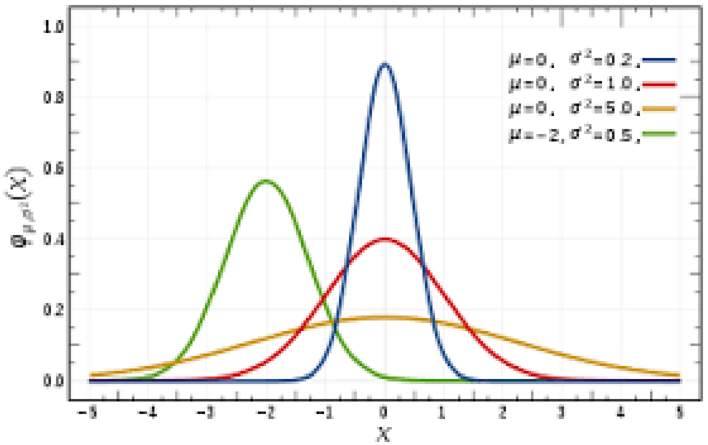
$$P(x_1 < X \le x_1 + \Delta) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta} f_X(x)dx \cong f_X(x_1)\Delta$$

متغیر تصادفی



- تابع چگالی احتمال یکنواخت

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



- تابع چگالی احتمال گوسی (نرمال)

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

- تابع یک متغیر تصادفی

$$Y=g(X),\quad f_X(x)\Rightarrow f_Y(y)=?$$

$$P(x<X\le x+dx)=P(y<Y\le y+dy)\Rightarrow f_X(x)dx=f_Y(y)dy$$

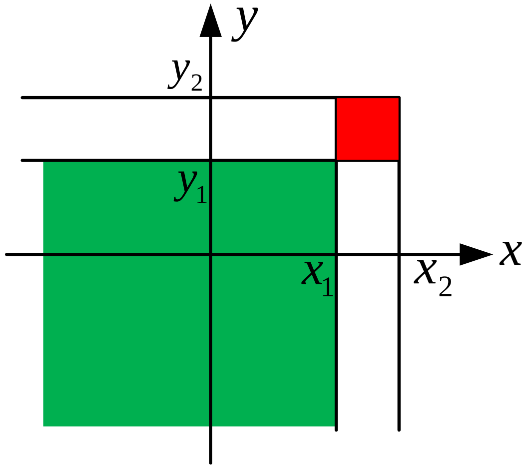
$$f_Y(y)=\left|\frac{dx}{dy}\right|f_X(x)\Big|_{X=g^{-1}(Y)}$$

متغیر تصادفی

$$\Omega \xrightarrow{X} \Re$$

- تابع توزیع و چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی

$$\Omega \xrightarrow{Y} \Re \qquad \Omega \xrightarrow{X,Y} \Re^2$$



$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) \Rightarrow 0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$$

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x,-\infty) = F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = 0, \quad F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = 1$$

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) + F_{X,Y}(x_1,y_1)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad f_{X,Y}(x,y) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1, \quad P\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

- توابع توزیع و چگالی احتمال کناری (حاشیه‌ای)

$$F_X(x) = P(X \le x, Y \le +\infty) = F_{X,Y}(x,+\infty), \quad F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

متغیر تصادفی

- تابع چگالی احتمال شرطی دو متغیر تصادفی

$$F_X(x|Y \le y) = P(X \le x|Y \le y) = \frac{P(X \le x, Y \le y)}{P(Y \le y)} = \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y|X \le x) = F_Y(y)F_X(x|Y \le y)$$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y|x) = f_Y(y)f_X(x|y)$$

- استقلال‌دومتغیرتصادفی

$$F_X(x|Y \le y) = F_X(x) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_X(x|y) = f_X(x) \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- امید ریاضی

$$X, \quad f_X(x) \Rightarrow E\{g(X)\} = \overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- تابع مشخصه

$$\Phi_X(\omega) = E\left\{e^{j\omega X}\right\}$$

$$(X,Y), \quad f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow E\{g(X,Y)\} = \overline{g(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy$$

متغیر تصادفی (آمارگان)

- ممان مرتبه k یک متغیر تصادفی
  - متوسط (میانگین)

$$m_k = E\left\{X^k\right\} = \overline{x^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx = (-j)^k \left.\frac{d^k\Phi_X(\omega)}{d\omega^k}\right|_{\omega=0}$$

$$m_1 = E\left\{X\right\} = \bar{x}, \quad m_2 = E\left\{X^2\right\} = \overline{x^2}$$

- ممان مرکزی مرتبه k یک متغیر تصادفی
  - واریانس (انحراف معیار)

$$\mu_k = E\left\{(X-\bar{x})^k\right\} = \overline{(x-\bar{x})^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^k f_X(x)dx$$

Variance

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = E\left\{(X-\bar{x})^2\right\} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \sigma_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

  - ترکیب ممان‌های متغیر تصادفی
  - برابری با ممان برای متغیر تضادفی با متوسط صفر

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = m_2 - \left(m_1\right)^2 \\ \mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 3\left(m_1\right)^3 - \left(m_1\right)^3 \\ \mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2\left(m_1\right)^2 - 4\left(m_1\right)^4 + \left(m_1\right)^4 \end{cases}$$

متغیر تصادفی (آمارگان)

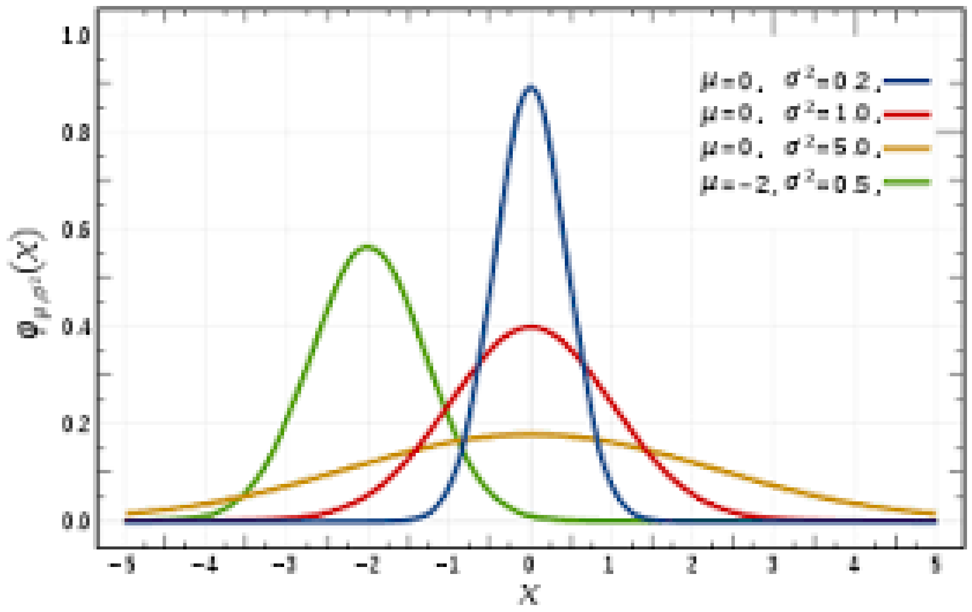
- کامیولنت مرتبه k یک متغیر تصادفی
  - ترکیب خاصی از ممان‌های متغیر تصادفی
  - متفاوت با ممان مرکزی
  - متفاوت با ممان برای متغیر تصادفی با متوسط صفر
  - کامیولنت اول
    - میانگین
  - کامیولنت دوم: پراکندگی حول میانگین
    - واریانس
  - کامیولنت سوم: تقارن حول میانگین
    - چولگی Skewness
  - کامیولنت چهارم: میزان شباهت به توزیع گوسی (توزیعی با کامیولنت مرتبه چهار به بالای برابر با صفر)
    - پخی Kurtosis

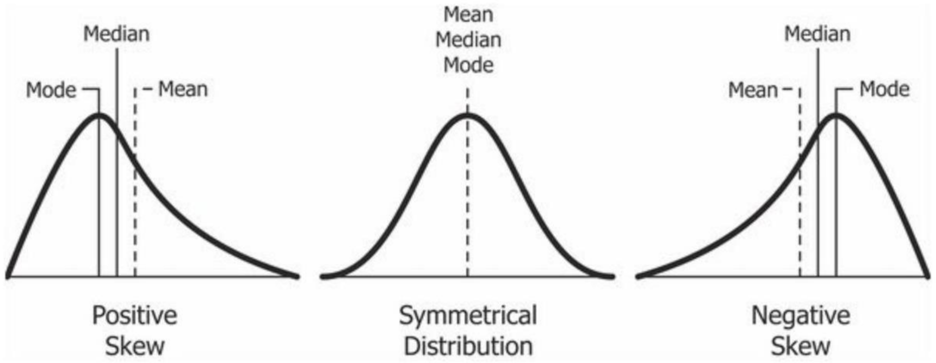
$$c_k = (-j)^k \left. \frac{d^k \ln \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0}$$

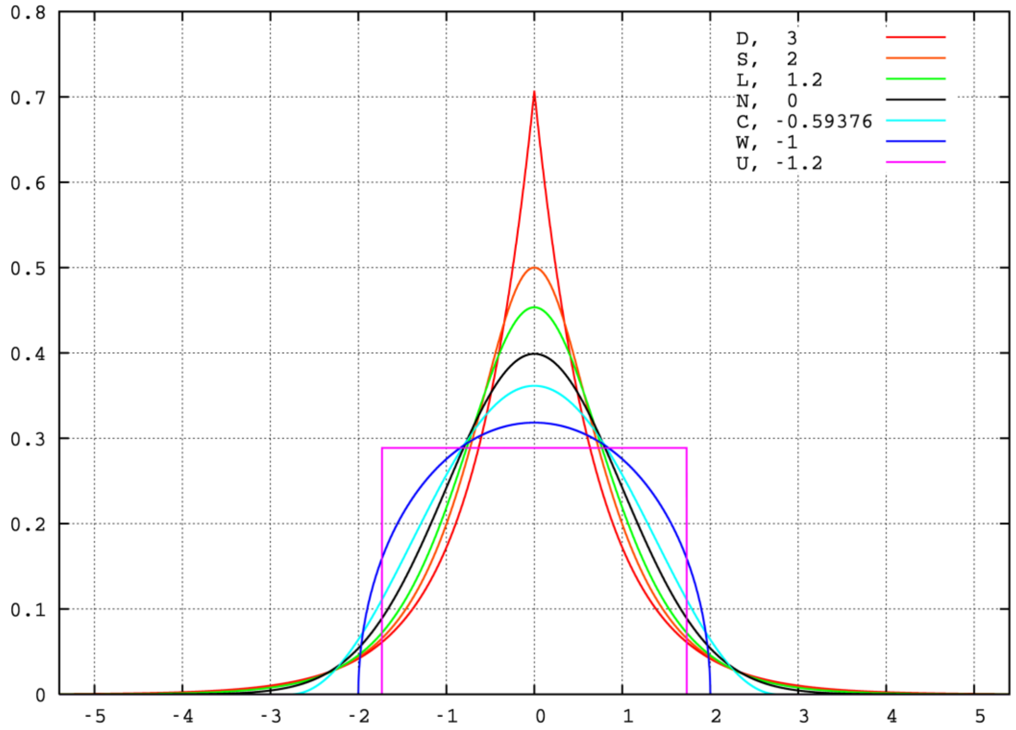
$$\begin{cases} c_1 = m_1 \\ c_2 = m_2 - (m_1)^2 = \sigma_x^2 \\ c_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2(m_1)^3 \\ c_4 = m_4 - 4m_3m_1 - 3(m_2)^2 + 12m_2(m_1)^2 - 6(m_1)^4 \end{cases}$$

متغیر تصادفی (آمارگان)

– متوسط (میانگین)
– واریانس (انحراف معیار)
– چولگی (میزان تقارن حول متوسط)
– پخی (میزان شباهت به گوسی)







دو متغیر تصادفی

- ممان و ممان مرکزی توام مرتبه $k+l$ دو متغیر تصادفی

$$m_{k,l} = E\left\{X^k Y^l\right\} = \overline{x^k y^l} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^l f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$m_{1,0} = \overline{x}, \quad m_{2,0} = \overline{x^2}, \quad m_{0,1} = \overline{y}, \quad m_{0,2} = \overline{y^2}, \quad m_{1,1} = \overline{xy} = E\left\{XY\right\}$$ همبستگی

$$\mu_{k,l} = E\left\{(X-\overline{x})^k (Y-\overline{y})^l\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^k (y-\overline{y})^l f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0, \quad \mu_{2,0} = \sigma_x^2, \quad \mu_{0,2} = \sigma_y^2, \quad \mu_{1,1} = \sigma_{xy} = \overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})} = \overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}$$ کوواریانس

- متوسط و واریانس یک متغیر تصادفی و همبستگی و کوواریانس دو متغیر تصادفی

$$\overline{x}, \quad \sigma_x^2, \quad \overline{y}, \quad \sigma_y^2, \quad \overline{xy}, \quad \sigma_{xy} = \overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}, \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad |r| \le 1$$

- تعامد دو متغیر تصادفی $\overline{xy} = 0$
- ناهمبستگی دو متغیر تصادفی $\sigma_{xy} = 0$
- استقلال دو متغیر تصادفی $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

دو متغیر تصادفی

- دو متغیر تصادفی تواما گوسی
  - تعریف

$$X \sim \aleph(\bar{x},\sigma_x^2), \quad Y \sim \aleph(\bar{y},\sigma_y^2)$$

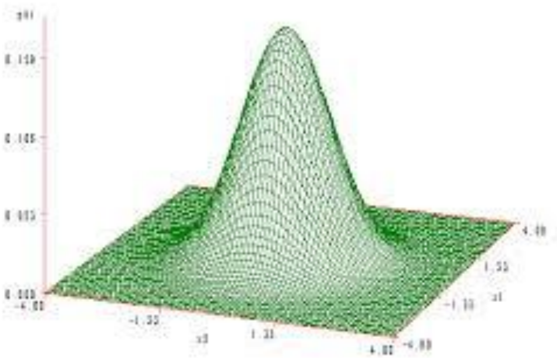
$$Z = \alpha X + \beta Y \Rightarrow Z \sim \aleph(\bar{z},\sigma_z^2)$$

$$\bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad \sigma_z^2 = \alpha^2\sigma_x^2 + \beta^2\sigma_y^2 + 2\alpha\beta\sigma_{xy}$$

  - تابع چگالی احتمال توام

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}}} e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\bar{x} & y-\bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix}}$$

Bivariate Normal Density − r= 0.0



  - تابع چگالی احتمال شرطی

$$f_X(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} e^{-\frac{(x-\bar{v})^2}{2\sigma_v^2}}, \quad \bar{v} = \bar{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\bar{y}), \quad \sigma_v^2 = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}$$

بردار تصادفی

- تعاریف برای بردار تصادفی حقیقی

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\underline{X} \le \underline{x}) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{\underline{-\infty}}^{\underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}, \quad f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\underline{X}}(\underline{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

$$E\{g(\underline{X})\} = \int_{\underline{-\infty}}^{\underline{x}} g(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

- بردار متوسط

$$\underline{m}_x = E\{\underline{X}\} = \underline{\overline{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$$

- ماتریس همبستگی

$$R_x = E\{\underline{X}\underline{X}^T\} = E\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \overline{x_1^2} & \overline{x_1 x_2} & \cdots & \overline{x_1 x_n} \\ \overline{x_2 x_1} & \overline{x_2^2} & \cdots & \overline{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{x_n x_1} & \overline{x_n x_2} & \cdots & \overline{x_n^2} \end{pmatrix}$$

بردار تصادفی

- ماتریس کواورایانس

$$C_x = E\left\{(\underline{X} - \underline{m}_x)(\underline{X} - \underline{m}_x)^T\right\}$$

$$= E\left\{\begin{pmatrix} X_1 - \overline{x}_1 \\ X_2 - \overline{x}_2 \\ \vdots \\ X_n - \overline{x}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 - \overline{x}_1 & X_2 - \overline{x}_2 & \cdots & X_n - \overline{x}_n \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = R_x - \underline{m}_x \underline{m}_x^T$$

- تعامد و ناهمبستگی درایه‌های یک بردار تصادفی

$$C_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad R_x = \begin{pmatrix} \overline{x_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{x_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{x_n^2} \end{pmatrix}$$

- استقلال درایه‌های یک بردار تصادفی

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

بردار تصادفی

- تعاریف برای دو بردار تصادفی

$$\underline{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix},\quad \underline{m}_x,R_x,C_x,\quad \underline{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_m\end{pmatrix},\quad \underline{m}_y,R_y,C_y$$

- ماتریس همبستگی متقابل و ماتریس کوواریانس متقابل

$$R_{xy}=E\left\{\underline{X}\,\underline{Y}^T\right\}=\begin{pmatrix}\overline{x_1y_1} & \overline{x_1y_2} & \cdots & \overline{x_1y_m}\\ \overline{x_2y_1} & \overline{x_2y_2} & \cdots & \overline{x_2y_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{x_ny_1} & \overline{x_ny_2} & \cdots & \overline{x_ny_m}\end{pmatrix}$$

$$C_{xy}=E\left\{(\underline{X}-\underline{m}_x)(\underline{Y}-\underline{m}_y)^T\right\}=\begin{pmatrix}\sigma_{x1y1} & \sigma_{x1y2} & \cdots & \sigma_{x1ym}\\ \sigma_{x2y1} & \sigma_{x2y2} & \cdots & \sigma_{x2ym}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{xny1} & \sigma_{xny2} & \cdots & \sigma_{xnym}\end{pmatrix}=R_{xy}-\underline{m}_x\underline{m}_y^{\ T}$$

بردار تصادفی

- تعامد و ناهمبستگی دو بردار تصادفی

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- استقلال دو بردار تصادفی

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{x})\, f_{\underline{Y}}(\underline{y})$$

- بردار تصادفی گوسی (نرمال)
  - تعریف

$$\underline{X} \sim \aleph(\underline{m}_x, C_x)$$

  - تابع چگالی احتمال

(تابع چگالی احتمال توام درایه‌های بردار)

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_x}}\, e^{-\frac{1}{2}(\underline{X}-\underline{m}_x)^T C_x^{-1}(\underline{X}-\underline{m}_x)}$$

بردار تصادفی

- خواص ماتریس همبستگی
  - تعریف در حالت کلی

$$R_x = E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^H\right\} = E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^{*T}\right\} = \begin{pmatrix} \overline{|x_1|^2} & \overline{x_1 x_2^*} & \cdots & \overline{x_1 x_n^*} \\ \overline{x_2 x_1^*} & \overline{|x_2|^2} & \cdots & \overline{x_2 x_n^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{x_n x_1^*} & \overline{x_n x_2^*} & \cdots & \overline{|x_n|^2} \end{pmatrix}$$

  - معین نامنفی (دترمینان نامنفی) $\det R_x \geq 0$
  - تقارن هرمیتی (متقارن برای بردار حقیقی) $R_x^{\ T} = R_x^{\ *} \Rightarrow Real \quad R_x^{\ T} = R_x$
  - مقادیر ویژه حقیقی نامنفی
  - قابل تعمیم برای ماتریس کواریانس
- استقلال درایه‌های یک بردار تصادفی $E\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right|^2\right\} > 0, \quad \forall \underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$
  - معین مثبت (دترمینان مثبت)
- وابستگی درایه‌های یک بردار تصادفی

$$\exists \underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k X_k = 0$$

  - دترمینان صفر و حداقل یک مقدار ویژه صفر

تخمین

- تخمین یک متغیر تصادفی حقیقی بدون هیچ مشاهده‌ای

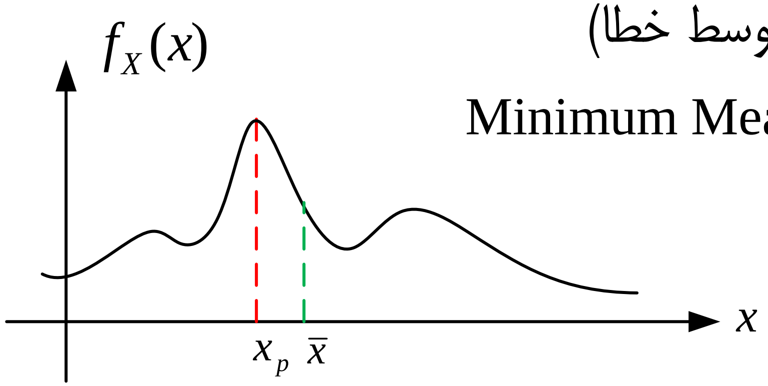
$$X, f_X(x) \Rightarrow \hat{X}$$

  – معیار محتمل‌ترین (پیوسته: ماکزیمم تابع چگالی/گسسته: بزرگترین ضربه)

$$\hat{x} = \arg \underset{x}{Max}\, f_X(x) = x_p$$

  – معیار کم‌خطاترین (کمترین مربع متوسط خطا)

Minimum Mean Square Error (MMSE)



$$e = X - \hat{X}$$

$$\varepsilon = \overline{e^2} = E\left\{e^2\right\} = E\left\{\left(X - \hat{X}\right)^2\right\} = \overline{(x-\hat{x})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\hat{x})^2 f_X(x)dx$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\hat{x}} = 0 \Rightarrow \hat{x} = \arg \underset{x}{Min}\, \varepsilon = \bar{x} = m_x, \quad \varepsilon_{min} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \sigma_x^2$$

  – مثال تاس: احتمال عدد یک ۳ برابر احتمال اعداد دیگر (که با هم برابرند)

تخمین

- تخمین یک متغیر تصادفی با مشاهده یک متغیر تصادفی دیگر

$$\left.\begin{array}{l} X,\, f_X(x) \\ Y,\, f_Y(y) \end{array}\right\} y \;\; is \;\; given \Rightarrow \hat{X}$$

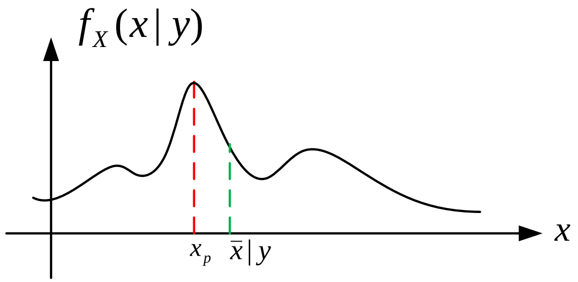
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y|x) = f_Y(y).f_X(x|y)$$

  - تابع چگالی پیشین a priori $\quad f_X(x),\, m_x = \overline{x}, \sigma_x^2$
  - تابع چگالی پسین a posteriori $\quad f_X(x|y),\, m_{x|y} = \overline{x}|y, \sigma_{x|y}^2$
  - تابع درستنمایی Likelihood $\quad f_Y(y|x)$

- ۱- تخمین با مشاهده با معیار محتمل‌ترین MAP $\quad \hat{x} = \arg \underset{x}{Max}\, f_X(x|\mathrm{y})$
- ۲- تخمین با مشاهده با معیار MMSE

$$\varepsilon = E\left\{e^2 | Y\right\} = E\left\{\left(X - \hat{X}\right)^2 | Y\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\hat{x})^2 f_X(x|y)dx$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\hat{x}} = 0 \Rightarrow \hat{x} = \arg \underset{x}{Min}\, \varepsilon = \overline{x}|y = m_{x|y}, \quad \varepsilon_{min} = \sigma_{x|y}^2$$



تخمین

- دو حالت خاص:
  - استقلال $f_X(x|y)=f_X(x)\Rightarrow \hat{x}=m_{x|y}=m_x,\quad \varepsilon_{min}=\sigma_{x|y}^2=\sigma_x^2$
  - وابستگی کامل $X=g(Y)\Rightarrow f_X(x|y)=\delta\left(x-g(y)\right)\Rightarrow \hat{x}=g(y),\quad \varepsilon_{min}=0$
- ۳- تخمین با مشاهده با معیار ماکزیمم درستنمایی ML

$$\hat{x}=\arg\underset{x}{Max}\ f_Y(y|x)$$

- ۴- تخمین خطی بر حسب مشاهده با معیار MMSE

$$\hat{X}=aY\Rightarrow \varepsilon=E\left\{e^2\right\}=E\left\{\left(X-\hat{X}\right)^2\right\}=E\left\{\left(X-aY\right)^2\right\}$$

$$\frac{d\varepsilon}{da}=0\Rightarrow -2E\left\{\left(X-aY\right)Y\right\}=0\Rightarrow E\left\{XY\right\}=aE\left\{YY\right\}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\overline{xy}}{\overline{y^2}},\quad \varepsilon_{min}=\frac{\overline{x^2}.\overline{y^2}-\left(\overline{xy}\right)^2}{\overline{y^2}}$$

- اصل تعامد خطا بر مشاهدات

$$\left(Min\ \varepsilon\equiv e\perp Y\right)\Rightarrow X-\hat{X}\perp Y\Rightarrow E\left\{\left(X-\hat{X}\right)Y\right\}=0\Rightarrow E\left\{\left(X-aY\right)Y\right\}=0$$

تخمین

- ۵- تخمین آفین بر حسب مشاهده با معیار MMSE

$$\hat{X} = aY + b \Rightarrow \varepsilon = E\left\{e^2\right\} = E\left\{\left(X - \hat{X}\right)^2\right\} = E\left\{\left(X - aY - b\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0 \Rightarrow -2E\left\{\left(X - aY - b\right)\right\} = 0 \Rightarrow b = \overline{x} - a\overline{y}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0 \Rightarrow -2E\left\{\left(X - aY - b\right)Y\right\} = 0 \Rightarrow E\left\{\left(X - aY - \left(\overline{x} - a\overline{y}\right)\right)Y\right\} = 0$$

$$E\left\{\left[\left(X - \overline{x}\right) - a\left(Y - \overline{y}\right)\right]\left(Y - \overline{y}\right)\right\} = 0 \Rightarrow E\left\{\left(X - \overline{x}\right)\left(Y - \overline{y}\right)\right\} = aE\left\{\left(Y - \overline{y}\right)^2\right\}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}, \quad \varepsilon_{min} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2} \qquad \hat{x} = \overline{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\left(y - \overline{y}\right)$$

- بهینه بودن تخمین آفین برای حالت تواما گوسی بودن

$$f_X(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} e^{-\frac{(x-\overline{v})^2}{2\sigma_v^2}}, \quad \overline{v} = m_{x|y} = \overline{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y}), \quad \sigma_v^2 = \sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}$$

چند نکته

- چند نامساوی پرکاربرد
  - نامساوی کلی
    $$P\left(\left|X\right|\geq a\right)\leq \frac{\overline{\left|x\right|^{n}}}{a^{n}} \quad a>0, \quad n\in \aleph$$
  - نامساوی مارکوف
    $$P\left(X\geq k\,\overline{x}\right)\leq \frac{1}{k} \quad X\geq 0$$
  - نامساوی چبی‌شف
    $$P\left(\left|X-\overline{x}\right|\geq k\sigma_{x}\right)\leq \frac{1}{k^{2}}$$
  - نامساوی شوارتز
    $$\left(\overline{xy}\right)^{2}\leq \overline{x^{2}}.\overline{y^{2}}, \quad \sigma_{xy}\leq \sigma_{x}.\sigma_{y}$$
- تعریف تساوی دو متغیر تصادفی
  - تساوی به مفهوم دقیق
    $$X(\omega)=Y(\omega) \quad \forall\omega\in\Omega$$
  - تساوی به مفهوم با احتمال یک
    $$X=Y\Leftrightarrow P\left(\left|X-Y\right|\geq a\right)=0 \quad a>0$$
  - تساوی به مفهوم Mean square (ms)
    $$X=Y\Leftrightarrow E\left\{\left(X-Y\right)^{2}\right\}=\overline{(x-y)^{2}}=0$$
- **تمرین:** با استفاده از نامساوی کلی نشان دهید دو تساوی به مفهوم با احتمال یک و به مفهوم (ms) معادل هستند.

فرآیندهای تصادفی

- تعریف فرآیند تصادفی

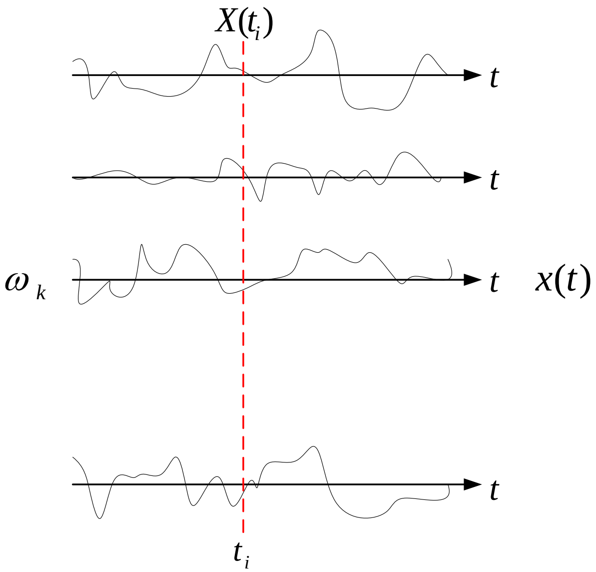
$$\Omega \times T \xrightarrow{X(\omega,t)} \Re$$

  - تعمیم متغیر تصادفی به بردار تصادفی، تعمیم بردار تصادفی به فرآیند تصادفی
  - تخصیص یک سیگنال پیوسته یا گسسته به نتیجه هر آزمایش تصادفی (تابع نمونه)
  - فرآیند تصادفی پیوسته و فرآیند تصادفی گسسته

$$X(\omega,t) \to X(t) = \{x(t)\}$$

$$X(\omega,n] \to X[n] = \{x[n]\}$$

  - یک متغیر تصادفی در هر لحظه
  - یک سیگنال یقینی برای نتیجه هر آزمایش (تابع نمونه)



- توصیف یک فرآیند

۱- توصیف تحلیلی: تابع چگالی توام همه متغیرهای تصادفی

۲- توصیف آماری

  - توصیف مرتبه اول $\forall t \quad f_{X(t)}(x(t))$
  - توصیف مرتبه دوم $\forall t_1,t_2 \quad f_{X(t_1),X(t_2)}(x(t_1),x(t_2))$
  - توصیف مرتبه n $\quad \forall t_1,t_2,\cdots,t_n \quad f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n))$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- توصیف یک فرآیند

۳– توصیف آماری با ممان‌های مرتبه اول و دوم

$X(t)$

– تابع متوسط

$$m_x(t)=\overline{x(t)}=E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, f_{X(t)}\big(x(t)\big)\,dx(t)$$

– تابع همبستگی

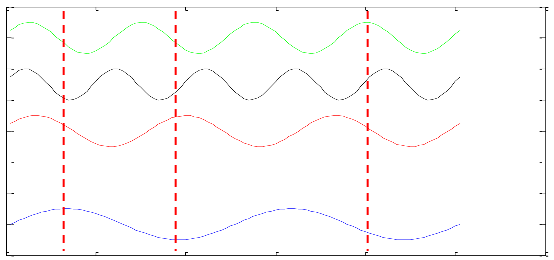
$$R_x(t_1,t_2)=\overline{x(t_1)x^*(t_2)}=E\{X(t_1)X^*(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x^*(t_2)\, f_{X(t),X(t_2)}\big(x(t_1),x(t_2)\big)\,dx(t_1)dx(t_2)$$

– تابع کواریانس

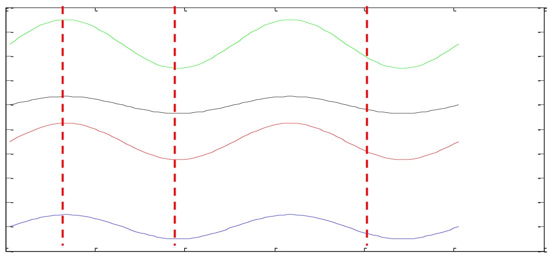
$$C_x(t_1,t_2)=E\left\{\big(X(t_1)-m_x(t_1)\big)\big(X(t_2)-m_x(t_2)\big)^*\right\}=R_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x^*(t_2)$$

- مثال ۱– فرآیند تصادفی سینوسی حقیقی $X(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

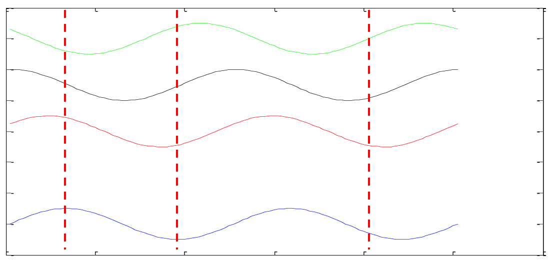
فرکانس تصادفی



دامنه تصادفی



فاز تصادفی با توزیع یکنواخت در $(0,2\pi)$



فرآیندهای تصادفی پیوسته

- دو فرآیند تصادفی

$$X(t),\quad m_x(t), R_x(t_1,t_2), C_x(t_1,t_2)$$

$$Y(t),\quad m_y(t), R_y(t_1,t_2), C_y(t_1,t_2)$$

  - تابع همبستگی متقابل

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)Y^*(t_2)\right\}$$

  - تابع کواریانس متقابل

$$C_{xy}(t_1,t_2) = E\left\{\Big(X(t_1)-m_x(t_1)\Big)\Big(Y(t_2)-m_y(t_2)\Big)^*\right\}$$

- ایستایی (stationarity)
  - ایستایی به مفهوم اکید (strict sense stationary: SSS)

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n, \forall\tau, \forall n$$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}\big(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)\big) =$$
$$f_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau)}\big(x(t_1+\tau),x(t_2+\tau),\cdots,x(t_n+\tau)\big)$$

  - ایستایی به مفهوم وسیع (wide sense stationary: WSS)

$$m_x(t) = E\left\{X(t)\right\} = m_x = cte$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)X^*(t_2)\right\} = f(t_1-t_2) \Rightarrow R_x(\tau) = E\left\{X(t)X^*(t-\tau)\right\}$$

  - متوسط مستقل از زمان/همبستگی تابعی از تفاضل دو لحظه

$$SSS \Rightarrow WSS$$

  - تفاوت WSS با ایستایی SSS برای توزیع مرتبه اول و دوم

$$f_{X(t)}\big(x(t)\big) = f_{X(t+\tau)}\big(x(t+\tau)\big)$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- چند فرآیند معروف
  - فرآیند گوسی (نرمال)
    - تعریف: متغیرهای تصادفی تعریف شده در هر تعداد از لحظات آن، تواما گوسی هستند. $\forall n, \quad \forall t_1, t_2, \cdots, t_n$
    - توصیف با تابع متوسط و تابع کواریانس $\left(x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)\right)$
    - اگر WSS باشد حتما SSS هم خواهد بود. $WSS \Rightarrow SSS$

$$\underline{X} = \left(x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)\right)^T$$

  - فرآیند نویز سفید ایستا
    - متوسط صفر
    - تابع همبستگی ضربه در مبدا

$$m_x = 0, \quad R_x(\tau) = C_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

  - فرآیند وینر (انتگرال نویز سفید ایستای گوسی)

$$N(t) \quad WSS / White / gaussian$$

$$t \geq 0 \quad X(t) = \int_0^t N(\lambda) d\lambda$$

- مثال ۲– نشان دهید فرایند وینر:

الف) گوسی است.

ب) متوسط آن صفر است.

پ) غیرایستا است و تابع همبستگی آن برابر است با: $R_x(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2}\min(t_1, t_2)$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۳- محاسبه اطلاعات آماری مرتبه اول و دوم فرآیند سینوسی حقیقی

الف) فقط فاز تصادفی است با توزیع یکنواخت بین $(0, 2\pi)$

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$m_x(t) = E\{A\cos(\omega_0 t + \varphi)\} = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t + \varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi = 0$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\{A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\} = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

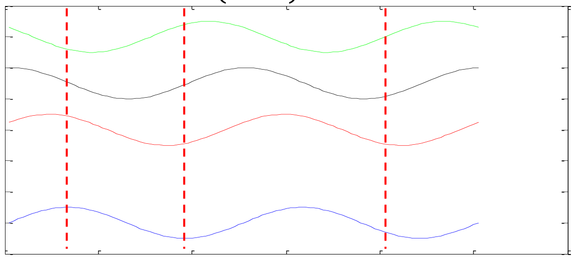
$$\int_0^{2\pi}\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi\right)\frac{1}{2\pi}d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega_0(t_1-t_2)\right)\frac{1}{2\pi}d\varphi = 0 + \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega_0(t_1-t_2)\right)$$

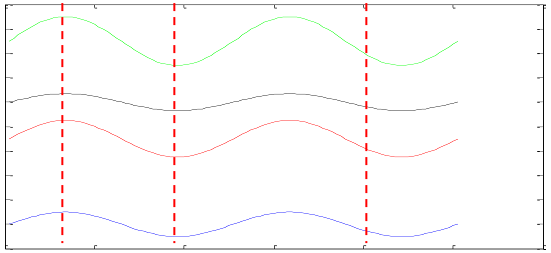
ب) فقط دامنه تصادفی با تابع چگالی $f_A(a)$

$$m_x(t) = E\{A\cos(\omega_0 t + \varphi)\} = E\{A\}\cos(\omega_0 t + \varphi) = \bar{a}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\{A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\} = E\{A^2\}\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)$$

$$= \overline{a^2}\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)$$





فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۳– محاسبه اطلاعات آماری مرتبه اول و دوم فرآیند سینوسی حقیقی

پ) دامنه و فاز تصادفی مثل الف و ب ولی مستقل

$$m_x(t) = E\left\{A\cos(\omega_0 t+\varphi)\right\} = E\left\{A\right\} E\left\{\cos(\omega_0 t+\varphi)\right\} = 0$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\left\{A\cos(\omega_0 t_1+\varphi)A\cos(\omega_0 t_2+\varphi)\right\}$$

$$= E\left\{A.A\right\} E\left\{\cos(\omega_0 t_1+\varphi)\cos(\omega_0 t_2+\varphi)\right\} = \overline{a^2}\left(0+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0(t_1-t_2)\right)\right)$$

- مثال ۴– محاسبه اطلاعات آماری فرآیند سینوسی مختلط $X(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$
  - فرکانس تصادفی با تابع چگالی و تابع مشخص $f_{\Omega_0}(\omega_0), \quad \Phi_{\Omega_0}(\omega) = E\left\{e^{j\omega\omega_0}\right\}$

$$m_x(t) = E\left\{Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right\} = Ae^{j\varphi}E\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = Ae^{j\varphi}\Phi_{\Omega_0}(t)$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\left\{Ae^{j(\omega_0 t_1+\varphi)}Ae^{-j(\omega_0 t_2+\varphi)}\right\} = A^2E\left\{e^{j\omega_0(t_1-t_2)}\right\} = A^2\Phi_{\Omega_0}(t_1-t_2)$$

- مثال ۵– یک فرآیند گوسی ایستا $X(t): \quad m_x = 0, \quad R_x(\tau) = C_x(\tau) = 4e^{-|\tau|}$

الف) تابع چگالی احتمال کناری و توام سه متغیر تصادفی $X_1 = X(1), X_2 = X(3), X_3 = X(10)$

$$E\{X_1\} = E\{X_2\} = E\{X_3\} = m_x = 0, \quad \sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2 = \sigma_{x3}^2 = C_x(0) = 4$$

$$\sigma_{x1x2} = C_x(1-3) = 4e^{-2}, \quad \sigma_{x1x3} = C_x(1-10) = 4e^{-9} \cong 0, \quad \sigma_{x2x3} = 4e^{-7} \cong 0$$

$$f_{x_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.(4)}} e^{-\frac{(x_k-0)^2}{2.(4)}} \qquad k = 1, 2, 3$$

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) \cong f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) f_{X_3}(x_3)$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det\begin{pmatrix} 4 & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 4 \end{pmatrix}}} e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1-0 & x_2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1-0 \\ x_2-0 \end{pmatrix}}$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۵- یک فرآیند گوسی ایستا $X_1 = X(1), X_2 = X(3), X_3 = X(10)$

ب) اگر مقدار فرآیند در لحظه یک برابر ۱۰ باشد، تخمین آفین فرآیند با معیار MMSE در لحظه ۳ چقدر است؟ آیا این بهترین تخمین با معیار MMSE است؟

$$\hat{X} = aY + b, \quad b = \overline{x} - a\overline{y}, \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}, \quad \varepsilon_{min} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2} \qquad \hat{x} = \overline{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\left(y - \overline{y}\right)$$

$$X = X_2, \quad Y = X_1 \Rightarrow b = 0, \quad a = \frac{\sigma_{x2x1}}{\sigma_{x1}^2} = e^{-2}, \quad \varepsilon_{min} = \sigma_{x2}^2 - \frac{\sigma_{x2x1}^2}{\sigma_{x1}^2} = 4(1 - e^{-4})$$

$$\hat{x}_2 = \overline{x}_2 + \frac{\sigma_{x2x1}}{\sigma_{x1}^2}\left(x_1 - \overline{x}_1\right) = 10e^{-2}$$

پ) احتمال اینکه مقدار فرآیند در لحظه ۵ از ۲ کمتر باشد را حساب کنید.

$$X = X(5) \sim \aleph(0,4)$$

$$P\left(X < 2\right) = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi.(4)}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2.(4)}} dx$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- عبور فرآیند از یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان یقینی

$$\begin{array}{lcl} X(t) & \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow & Y(t) \\ m_x(t) & & m_y(t) \\ R_x(t_1,t_2) & & R_y(t_1,t_2) \end{array}$$

$$m_y(t) = E\left\{Y(t)\right\} = E\left\{X(t) * h(t)\right\} = E\left\{\int X(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

$$= \int E\left\{X(\lambda)\right\} h(t-\lambda)d\lambda = \int m_x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = m_x(t) * h(t)$$

$$R_y(t_1,t_2) = E\left\{Y(t_1)Y^*(t_2)\right\} = E\left\{\int X(u)h(t_1-u)du \int X^*(v)h^*(t_2-v)dv\right\}$$

$$= E\left\{\iint X(u)X^*(v)h(t_1-u)h^*(t_2-v)dudv\right\} = \iint E\left\{X(u)X^*(v)\right\} h(t_1-u)h^*(t_2-v)dudv$$

$$= \int\left(\int R_x(u,v)h(t_1-u)du\right)h^*(t_2-v)dv = \int\left[R_x(t_1,v) * h(t_1)\right]h^*(t_2-v)dv$$

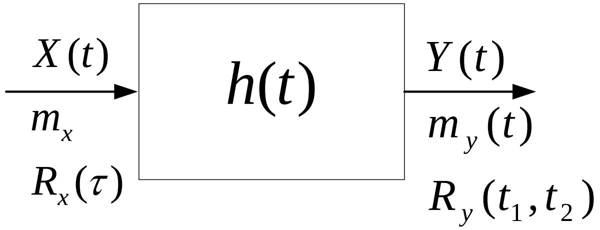
$$= R_x(t_1,t_2) * h(t_1) * h^*(t_2)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) * h^*(t_2)$$

$$R_{yx}(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) * h(t_1)$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- عبور فرآیند ایستا از یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان یقینی



$$m_y(t)=E\left\{Y(t)\right\}=m_x\int h(t-\lambda)d\lambda=m_x\int h(\lambda)d\lambda=m_xH(j0)$$

$$R_y(t_1,t_2)=E\left\{Y(t_1)Y^*(t_2)\right\}=E\left\{\int X(t_1-u)h(u)du\int X^*(t_2-v)h^*(v)dv\right\}$$

$$=E\left\{\iint X(t_1-u)X^*(t_2-v)h(u)h^*(v)dudv\right\}=\iint E\left\{X(t_1-u)X^*(t_2-v)\right\}h(u)h^*(v)dudv$$

$$=\iint R_x\big((t_1-t_2)-(u-v)\big)h(u)h^*(v)dudv=f(t_1-t_2)\quad t_1-t_2=\tau,\quad u-v=\lambda$$

$$R_y(\tau)=\iint R_x(\tau-\lambda)h(u)h^*(u-\lambda)dud\lambda=\int R_x(\tau-\lambda)\left(\int h(u)h^*(u-\lambda)du\right)d\lambda$$

$$=\int R_x(\tau-\lambda)\big(h(\lambda)*h^*(-\lambda)\big)d\lambda=R_x(\tau)*h(\tau)*h^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(\tau)=R_x(\tau)*h^*(-\tau)\qquad R_{yx}(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۶– محاسبه پارامترهای آماری فرآیند خروجی سیستم زیر به ورودی نویز سفید

$$\underset{\substack{m_x \\ R_x(\tau)}}{\xrightarrow{X(t)}} \boxed{h(t)} \underset{\substack{m_y(t) \\ R_y(t_1,t_2)}}{\xrightarrow{Y(t)}} \quad h(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

$$m_y(t) = m_x \int h(\lambda)d\lambda = 0$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * e^{-a\tau}u(\tau) * e^{a\tau}u(-\tau)$$

$$\Im\left\{R_y(\tau)\right\} = \frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{a+s}\cdot\frac{1}{a-s} \Rightarrow R_y(\tau) = \frac{N_0}{4a}e^{-a|\tau|}$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

$X(t);\{x(t)\}$

- مفهوم ارگادیک بودن
  - متوسط زمانی از توابع نمونه
    - یک متغیر تصادفی

$$\left\langle g\left(x(t)\right)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g\left(x(t)\right)dt$$

  - متوسط آماری یک فرآیند
    - یک تابع یقینی

$$E\left\{g\left(X(t)\right)\right\} = \overline{g\left(x(t)\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x(t)\right) f_{X(t)}\left(x(t)\right)dx(t)$$

  - ارگادیک بودن به مفهوم تابع $g \Leftarrow$ $\left\langle g\left(x(t)\right)\right\rangle = E\left\{g\left(X(t)\right)\right\}$
    - مستقل بودن متوسط زمانی از تابع نمونه (تصادفی نبودن)
    - مستقل بودن متوسط آماری از زمان
    - برابر بودن دو عدد
  - ارگادیک به مفهوم کلی
  - شرط لازم برای ارگادیک بودن
    - ایستایی متناظر

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- ارگادیک به مفهوم متوسط Mean Ergodic (ME)
  - متوسط آماری تابعی از زمان نباشد
  - متوسط زمانی به تابع نمونه بستگی نداشته باشد
  - شرط ME بودن
    - مساحت تابع کواریانس کراندار باشد

$$\langle x(t)\rangle = E\{X(t)\} \Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt = m_x$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_x(t_1,t_2)dt_1t_2 = 0, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|C_x(\tau)\right|d\tau < \infty$$

- ارگادیک به مفهوم همبستگی Correlation Ergodic (CE)

$$\left\langle x(t)x^*(t-\tau)\right\rangle = E\left\{X(t)X^*(t-\tau)\right\} \Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)dt = R_x(\tau)$$

  - شرط لازم: ایستایی WSS

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۷– بررسی ارگادیک بودن فرآیند حقیقی سینوسی (مثال ۳) $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

الف) فقط فاز تصادفی است با توزیع یکنواخت بین $(0,2\pi)$ $m_x=0,\quad R_x(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$

- بررسی ME

$$\langle x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega_0 t+\varphi)dt=0$$

- بررسی CE

$$\langle x(t)x^*(t-\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega_0 t+\varphi)A\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}\cos\left(2\omega_0 t-\omega_0\tau+2\varphi\right)dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega_0\tau\right)dt=0+\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

ب) فقط دامنه تصادفی با تابع چگالی $f_A(a)$

پ) دامنه و فاز تصادفی مثل الف و ب ولی مستقل

$$m_x=0,\quad R_x(\tau)=\frac{\overline{a^2}}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- تجزیه و تحلیل فرآیند در حوزه فرکانس
  - توابع نمونه: سیگنال‌های یقینی توان
  - عدم وجود تبدیل فوریه برای فرآیند
  - تعریف چگالی طیف توان PSD

$$x(t) \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left|X_T(j\Omega)\right|^2 d\Omega$$

$$p_x = E\left\{P_{av}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left\{\left|X_T(j\Omega)\right|^2\right\} d\Omega$$

$$p_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\Omega) d\Omega \Rightarrow S_x(\Omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left\{\left|X_T(j\Omega)\right|^2\right\}$$

- چگالی طیف توان برای فرآیند ایستا

$$S_x(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \Leftrightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\Omega) e^{j\Omega\tau} d\Omega$$

- خواص چگالی طیف توان و تابع همبستگی
  - چگالی طیف توان حقیقی و نامنفی است
  - تابع همبستگی تقارن هرمیتی دارد
  - تابع همبستگی در مبدا بیشترین مقدار را دارد
  - تابع همبستگی متقابل و چگالی طیف توان متقابل برای دو فرآیند

$$R_x^*(\tau) = R_x(-\tau) \Leftrightarrow S_x(\Omega) \in \Re$$

$$R_x(0) \geq \left|R_x(\tau)\right| \Leftrightarrow S_x(\Omega) \geq 0$$

$$S_{xy}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته

- مثال ۸– چگالی طیف توان فرآیند حقیقی سینوسی (مثال ۳) $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

الف) فقط فاز تصادفی است با توزیع یکنواخت بین $(0, 2\pi)$

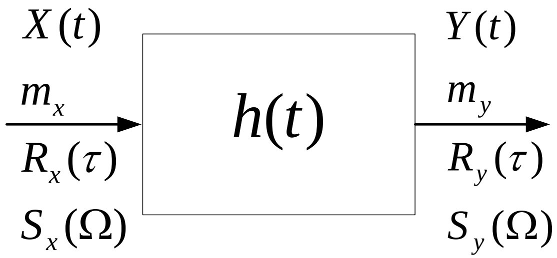
$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) \Rightarrow S_x(\Omega) = \frac{A^2}{2}\pi\left(\delta(\Omega-\omega_0) + \delta(\Omega+\omega_0)\right)$$

ب) فقط دامنه تصادفی با تابع چگالی $f_A(a)$

پ) دامنه و فاز تصادفی مثل الف و ب ولی مستقل

$$R_x(\tau) = \frac{\overline{a^2}}{2}\cos(\omega_0\tau) \Rightarrow S_x(\Omega) = \frac{\overline{a^2}}{2}\pi\left(\delta(\Omega-\omega_0) + \delta(\Omega+\omega_0)\right)$$

- چگالی طیف توان فرآیند خروجی یک سیستم



$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \Rightarrow S_y(\Omega) = \left|H(j\Omega)\right|^2 S_x(\Omega)$$

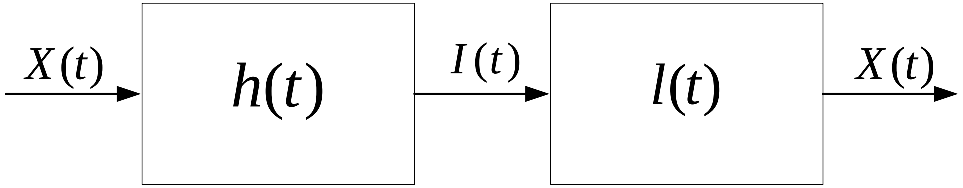
$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau) \Rightarrow S_{xy}(\Omega) = H^*(j\Omega)S_x(\Omega)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \Rightarrow S_{yx}(\Omega) = H(j\Omega)S_x(\Omega)$$

- چگالی طیف توان نویز سفید

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \Rightarrow S_x(\Omega) = \frac{N_0}{2}$$

فرآیندهای تصادفی پیوسته



- سفید کردن فرآیند
  - فیلتر سفید کننده و فیلتر ابداع
  - فیلتر LTI با پاسخ ضربه حقیقی
  - فیلتر پایداروسببی
  - واورن پایدار و سببی (می‌نیمم فاز)
  - پیدا کردن تابع تبدیل از روی $\left|H(j\Omega)\right|^2$
  - شرط لازم و کافی برای سفید شدن یک فرآیند
  - محاسبه ساده برای PSD کسر گویا

$$S_I(\Omega)=\left|H(j\Omega)\right|^2 S_x(\Omega)=1\Rightarrow\left|H(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{S_x(\Omega)}$$

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 \quad\Rightarrow\quad H(s),\quad L(s)=\frac{1}{H(s)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln S_x(\Omega)}{1+\Omega^2}d\Omega<\infty$$

- مثال ۹– محاسبه دو فیلتر

$$S_x(\Omega)=\frac{1+\Omega^2}{4+\Omega^4}\Rightarrow\left|H(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{S_x(\Omega)}=H(j\Omega)H(-j\Omega)$$

$$\begin{cases}4+s^4=0\\ \pm1\pm j\end{cases}$$

$$\Rightarrow H(s)H(-s)=\left.\frac{4+\Omega^4}{1+\Omega^2}\right|_{\Omega=\frac{s}{j}}=\frac{4+s^4}{1-s^2}=\frac{(1+s)^2+1}{1+s}.\frac{(1-s)^2+1}{1-s}\Rightarrow H(s)=\frac{(1+s)^2+1}{1+s}$$

$$\Rightarrow h(t)=\delta(t)+\delta'(t)+e^{-t}u(t),\quad L(s)=\frac{1}{H(s)}=\frac{1+s}{(1+s)^2+1}\Rightarrow l(t)=e^{-t}\cos t u(t)$$

فرآیندهای تصادفی گسسته

- تعاریف

$$X[n]:\{x[n]\}$$

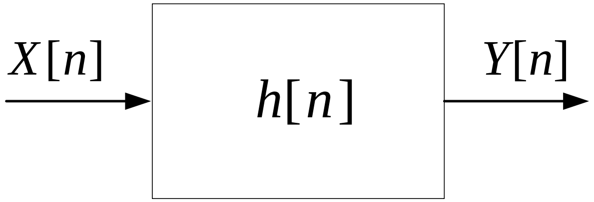
$$m_x[n]=\overline{x[n]}=E\left\{X[n]\right\},\quad R_x[n_1,n_2]=\overline{x[n_1]x^*[n_2]}=E\left\{X[n_1]X^*[n_2]\right\}$$

$$C_x[n_1,n_2]=E\left\{\left(X[n_1]-m_x[n_1]\right)\left(X[n_2]-m_x[n_2]\right)^*\right\}=R_x[n_1,n_2]-m_x[n_1]m_x^*[n_2]$$

$$WSS:\quad m_x=cte,\quad R_x[m]=E\left\{X[n]X^*[n-m]\right\},\quad S_x(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_x[m]e^{-j\omega m}$$

$$Ergodic:\quad \left\langle g\left(x[n]\right)\right\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}g\left(x[n]\right),\quad \left\langle g\left(x[n]\right)\right\rangle=E\left\{g\left(X[n]\right)\right\}$$

$$White\ noise:\quad m_x=0,\quad R_x[m]=\frac{N_0}{2}\delta[m]=\sigma_x^2\delta[m],\quad S_x(\omega)=\sigma_x^2$$



$$m_y[n]=m_x[n]*h[n] \qquad m_y=m_x\sum_n h[n]=m_xH(e^{j0})$$

$$R_y[n_1,n_2]=R_x[n_1,n_2]*h[n_1]*h^*[n_2] \qquad R_y[m]=R_x[m]*h[m]*h^*[-m]\Rightarrow S_y(\omega)=\left|H(e^{j\omega})\right|^2S_x(\omega)$$

$$R_{xy}[n_1,n_2]=R_x[n_1,n_2]*h^*[n_2] \qquad R_{xy}[m]=R_x[m]*h^*[-m]\Rightarrow S_{xy}(\omega)=H^*(e^{j\omega})S_x(\omega)$$

$$R_{yx}[n_1,n_2]=R_x[n_1,n_2]*h[n_1] \qquad R_{yx}[m]=R_x[m]*h[m]\Rightarrow S_{yx}(\omega)=H(e^{j\omega})S_x(\omega)$$

فرآیندهای تصادفی گسسته

- مثال ۱۰- فرآیند گسسته سینوسی حقیقی $X[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

الف) فقط فاز تصادفی است با توزیع یکنواخت بین $(0, 2\pi)$

$$m_x = 0, \quad R_x[m] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m) \Rightarrow S_x(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) \quad |\omega| < \pi$$

ب) فقط دامنه تصادفی با تابع چگالی $f_A(a)$

$$m_x[n] = \bar{a}\cos(\omega_0 n + \varphi), \quad R_x[n_1, n_2] = \frac{\overline{a^2}}{2}\cos(\omega_0 n_1 + \varphi)\cos(\omega_0 n_2 + \varphi)$$

پ) دامنه و فاز تصادفی مثل الف و ب ولی مستقل

$$m_x = 0, \quad R_x[m] = \frac{\overline{a^2}}{2}\cos(\omega_0 m) \Rightarrow S_x(\omega) = \frac{\overline{a^2}}{2}\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) \quad |\omega| < \pi$$

فرآیندهای تصادفی گسسته

- مثال ۱۱– دو فرایند $X[n]$ و $Y[n]$ (c,b,a سه متغیر تصادفی گوسی مستقل با متوسط صفر و واریانس واحد)

$$X[n]=a+bn,\quad Y[n]=an^2+c$$

الف) محاسبه اطلاعات آماری

$$m_x[n]=E\{a+bn\}=E\{a\}+E\{b\}n=0$$

$$m_y[n]=E\{an^2+c\}=E\{a\}n^2+E\{c\}=0$$

$$R_x[n_1,n_2]=E\{(a+bn_1)(a+bn_2)\}=1+n_1n_2$$

$$R_y[n_1,n_2]=E\{(an_1^2+c)(an_2^2+c)\}=n_1^2n_2^2+1$$

$$R_{xy}[n_1,n_2]=E\{(a+bn_1)(an_2^2+c)\}=n_2^2$$

ب) بررسی ایستایی و ارگادیک بودن

پ) بررسی گوسی بودن هر یک و تواما گوسی بودن

فرآیندهای تصادفی گسسته

- مثال ۱۲– فرایند $Y[n]$ خروجی یک سیستم با پاسخ ضربه $h[n]=a^n u[n] \quad 0<|a|<1$

و ورودی نویز سفید ایستا با واریانس σ_x^2

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

– محاسبه اطلاعات آماری فرآیند $Y[n]$

$$R_y[m]=R_x[m]*h[m]*h^*[-m], \quad S_y(\omega)=\left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_x(\omega), \quad S_y(z)=H(z)H(z^{-1})S_x(z)$$

$$S_y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-az}\sigma_x^2=\frac{-\frac{1}{a}z^{-1}\sigma_x^2}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)} \quad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}\Rightarrow R_y[m]=\frac{\sigma_x^2}{1-a^2}a^{|m|}$$

$$S_y(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{\left|1-ae^{-j\omega}\right|^2}=\frac{\sigma_x^2}{1+a^2-2a\cos\omega}, \quad m_y=0, \quad \sigma_y^2=R_y[0]=\frac{\sigma_x^2}{1-a^2}$$

- مثال ۱۳– بررسی فرآیند dc تصادفی: WSS هست ولی هیچ نوع ارگادیک نیست

$$X[n]:\left\{x[n]=x\right\} \quad \Rightarrow m_x[n]=E\left\{X[n]\right\}=\bar{x}, \quad R_x[n_1,n_2]=E\left\{X[n_1]X[n_2]\right\}=\overline{x^2}$$

$$\left\langle x[n]\right\rangle = x, \qquad \left\langle x[n_1]x[n_2]\right\rangle = x^2$$

فرآیندهای تصادفی گسسته

$$X[n],\ \sigma_x^2 \longrightarrow \boxed{H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}} \longrightarrow Y[n]$$

- فرآیند خطی
  - سیستم با تابع تبدیل کسر گویا
  - تعریف فرآیند خطی
    - ورودی نویز سفید ایستا
    - فرآیند AutoRegressive: AR(p)
    - فرآیند Moving Average MA(q)
    - فرآیند AutoRegressive Moving Average: ARMA(p,q)
  - مربع دامنه پاسخ فرکانسی به عنوان چگالی طیف توان

$$\sum_{k=0}^{p} a_k Y[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b_k X[n-k] \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$Y[n] = X[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k Y[n-k] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k X[n-k] \Rightarrow H(z) = B(z)$$

$$S_y(\omega) = \left|\frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 \sigma_x^2$$

- سفید کردن فرآیند
  - شرط لازم و کافی برای سفید شدن یک فرآیند

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\ln S_x(\omega)\right| d\omega < \infty$$

$$X[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \xrightarrow{I[n]} \boxed{l[n]} \longrightarrow X[n]$$

$$S_I(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_x(\omega) = 1 \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{S_x(\omega)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 \quad \Rightarrow \quad H(z), \quad L(z) = \frac{1}{H(z)}$$

فرآیندهای تصادفی گسسته

- مثال ۱۴- سفید کردن یک فرآیند گسسته
  - محاسبه دو فیلتر

$$S_x(\omega)=\frac{5-4\cos\omega}{10-6\cos\omega}=\frac{5-2e^{j\omega}-2e^{-j\omega}}{10-3e^{j\omega}-3e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right|^2=\frac{1}{S_x(\omega)}=H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})$$

$$\Rightarrow H(z)H(z^{-1})=\left.\frac{10-3e^{j\omega}-3e^{-j\omega}}{5-2e^{j\omega}-2e^{-j\omega}}\right|_{z=e^{j\omega}}=\frac{10-3z-3z^{-1}}{5-2z-2z^{-1}}=\frac{1-3z}{1-2z}.\frac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1-3z}{1-2z}=\frac{3}{2}\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Rightarrow h[n]=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

$$L(z)=\frac{1}{H(z)},\quad 3X[n]-X[n-1]=2I[n]-I[n-1]\quad\Rightarrow\quad ARMA(1,1)$$

- مثال ۱۵– فرآیند حقیقی $X[n]$ یک فرآیند ایستای نرمال با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_x[m]=\dfrac{1}{1+m^2}$ است. متغیر تصادفی حقیقی Z یک متغیر تصادفی نرمال با متوسط صفر و واریانس واحد و مستقل از فرآیند تصادفی گسسته $X[n]$ است. فرآیند تصادفی $Y[n]$ به صورت $Y[n]=2.X[n]-n.Z$ تعریف می‌شود.

الف) با محاسبه تابع متوسط و تابع همبستگی فرآیند $Y[n]$، ایستایی آن را بررسی کنید.

ب) آیا فرآیند $Y[n]$ نرمال است؟ چرا؟

پ) فرض‌کنید فرآیند $Y[n]$ نیز نرمال است. توابع‌چگالی احتمال‌کناری و توام دو نمونه ازاین فرآیند درلحظات $n_1=1$ و $n_2=2$ رابدست‌آورید. سپس تابع چگالی احتمال شرطی فرآیند در لحظه $n_2=2$ به شرط داشتن مقدار فرآیند در لحظه $n_1=1$ را بدست آورید.

ت) اگر مقدار فرآیند $Y[n]$ در لحظه $n_1=1$ برابر ۵۰ باشد، بهترین پیشگویی خطی با معیار MMS برای مقدار فرآیند در لحظه $n_2=2$ و خطای آن را حساب کنید.

ث) تابع هبستگی متقابل دو فرآیند $X[n]$ و $Y[n]$ (یعنی $R_{xy}[n_1,n_2]$) را بدست آورده و در صورت تواما ایستا بودن، آن‌را رسم کنید.