پردازش سیگنال‌های حیاتی
مبحث چهارم- تخمین پارامترهای آماری فرآیند

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث چهارم- تخمین پارامترهای آماری فرآیند

- مقدمه
- تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته
  - تخمین متوسط
  - تخمین واریانس
  - تخمین تابع همبستگی
- تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته
  - تخمین متوسط
  - تخمین واریانس
  - تخمین تابع همبستگی
- متوسط‌گیری سنکرون

مقدمه

- پارامترهای آماری مرتبه اول و دوم یک فرآیند حقیقی WSS

$$m_x = E\{X(t)\} = \overline{x(t)}$$

$$\sigma_x^2 = C_x(0) = E\left\{\left(X(t)-m_x\right)^2\right\} = E\left\{\left(X(t)\right)^2\right\} - \left(m_x\right)^2 = R_x(0) - \left(m_x\right)^2$$

$$R_x(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\} = E\{X(t)X(t+\tau)\}$$

- محاسبه پارامترهای آماری با متوسط زمانی برای فرآیند ارگادیک با یک تابع نمونه $x(t), \forall t$

$$m_x = \langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \qquad \sigma_x^2 = \left\langle \left(x(t)-m_x\right)^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(x(t)-m_x\right)^2 dt$$

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t-\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t-\tau)dt$$

- تخمین پارامترهای آماری با متوسط زمانی برای فرآیند ارگادیک با یک تکه از یک تابع نمونه

$x(t), 0 < t < T$

  - تخمین‌گر
  - وابستگی تخمین به تابع نمونه (مشاهده)
  - متغیرتصادفی بودن تخمین

$$\hat{m}_x \to \hat{m}_x(x,T)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 \to \hat{\sigma}_x^2(x,T)$$

$$\hat{R}_x(\tau) \to \hat{R}_x(\tau; x, T)$$

مقدمه

- ارزیابی تخمین‌گر
  - بایاس تخمین‌گر
    - تخمین‌گر بدون بایاس unbiased
  - واریانس تخمین‌گر
    - تخمین‌گر مقاوم Consistent

$$X(t), \quad p_x$$
$$x(t), 0<t<T \Rightarrow \hat{p}_x : RV$$
$$B_{\hat{p}_x} = E\{\hat{p}_x\} - p_x$$
$$\sigma^2_{\hat{p}_x} = E\left\{\left(\hat{p}_x - E\{\hat{p}_x\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\hat{p}_x\right)^2\right\} - \left(E\{\hat{p}_x\}\right)^2$$

- مدل‌کردن سیگنال

$$X(t): m_x, \sigma_x^2, R_x(\tau) \Rightarrow X(t) = m_x + N(t)$$
$$N(t): m_n = 0, \sigma_n^2 = \sigma_x^2, R_n(\tau) = E\{N(t)N(t-\tau)\} = R_x(\tau) - \left(m_x\right)^2$$

- تبدیل مسائل مختلف به فرم مسئله تخمین پارامترهای یک فرآیند
- مثال: اندازه‌گیری یک کمیت که فرض می‌شود مقداری است ثابت ولی مجهول
  - اندازه‌گیری دمای یک نقطه
  - اندازه‌گیری پتانسیل استراحت یک سلول
  - قرار دادن یک سنسور و ثبت یک سیگنال در یک بازه زمانی

$$p$$
$$x(t), 0<t<T \Rightarrow \hat{p} : RV$$
$$x(t) = p + n(t)$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته

- تخمین متوسط

$$X(t),\quad m_x = E\{X(t)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

– تخمین/تخمین گر

$$x(t), 0<t<T \Rightarrow \hat{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad \Rightarrow \quad X(t): \hat{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt \quad RV$$

– بایاس تخمین گر متوسط

$$E\{\hat{m}_x\} = E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt\right\} = \frac{1}{T}\int_0^T E\{X(t)\}dt = \frac{1}{T}\int_0^T m_x dt = m_x\frac{1}{T}\int_0^T dt = m_x$$

$$\Rightarrow B_{\hat{m}_x} = E\{\hat{m}_x\} - m_x = 0$$

- تخمین گر بدون بایاس unbiased

– واریانس تخمین گر متوسط

$$\sigma^2_{\hat{m}_x} = E\left\{\left(\hat{m}_x - E\{\hat{m}_x\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\} - \left(E\{\hat{m}_x\}\right)^2 = E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\} - \left(m_x\right)^2$$

$$E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\} = E\{\hat{m}_x\hat{m}_x\} = E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T X(u)du\,\frac{1}{T}\int_0^T X(v)dv\right\} = E\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T X(u)X(v)dudv\right\}$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\{X(u)X(v)\}dudv = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_x(u-v)dudv = \frac{1}{T^2}\int_{v=0}^{T}\int_{\tau=-v}^{T-v} R_x(\tau)d\tau dv$$

$$\tau = u-v, 0<u<T \Rightarrow -v<u-v<T-v \Rightarrow -v<\tau<T-v$$

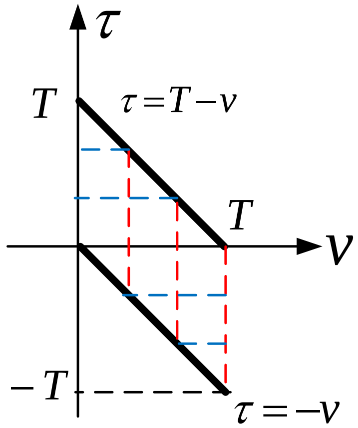
تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته

- تخمین متوسط
  - واریانس تخمین‌گر متوسط

$$E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\} = \frac{1}{T^2}\int_{v=0}^{T}\int_{\tau=-v}^{T-v} R_x(\tau)\,d\tau\,dv = \frac{1}{T^2}\int_{\tau=-T}^{0} R_x(\tau)\int_{v=-\tau}^{T} dv\,d\tau + \frac{1}{T^2}\int_{\tau=0}^{T} R_x(\tau)\int_{v=0}^{T-\tau} dv\,d\tau$$

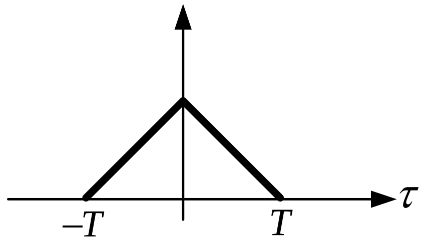
$$= \frac{1}{T^2}\int_{\tau=-T}^{0} R_x(\tau)(T+\tau)\,d\tau + \frac{1}{T^2}\int_{\tau=0}^{T} R_x(\tau)(T-\tau)\,d\tau = \frac{1}{T^2}\int_{\tau=-T}^{T} R_x(\tau)(T-|\tau|)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_x(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau \qquad \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = 1$$



$$\sigma^2_{\hat{m}_x} = E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\} - (m_x)^2 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_x(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau - (m_x)^2\,\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(R_x(\tau)-(m_x)^2\right)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_n(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau$$



  - وابستگی واریانس تخمین‌گر متوسط به مساحت تابع همبستگی نویز

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته

- تخمین متوسط
  - حالت خاص اول (مشاهدات بلند مدت)

$$\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_n(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau$$

$$T \to +\infty \quad \Rightarrow 1-\frac{|\tau|}{T} \to 1 \Rightarrow \sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau)d\tau \to 0 \quad if \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau)d\tau < \infty$$

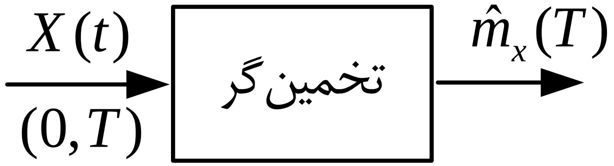
- شرط ارگادیک بودن (محدود بودن مساحت تابع کوواریانس فرآیند)

  - حالت خاص دوم (مشاهدات کوتاه مدت)

$$T \to 0 \quad \Rightarrow R_n(\tau) \approx R_n(0)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{m}_x}^2 \approx \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_n(0)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau = R_n(0)\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau = R_n(0) = \sigma_n^2 = \sigma_x^2$$

- نسبت سیگنال به نویز



$$SNR|_i = \frac{E\{X(t)\}}{Var\{X(t)\}} = \frac{m_x}{\sigma_x^2} = \frac{m_x}{\sigma_n^2}$$

$$SNR|_o = \frac{E\{\hat{m}_x\}}{Var\{\hat{m}_x\}} = \frac{m_x}{\frac{1}{T}\int_{\tau=-T}^{T} R_n(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau}$$

$$\Rightarrow Figure\ of\ merit = \frac{SNR|_o}{SNR|_i} = \frac{\sigma_n^2}{\frac{1}{T}\int_{\tau=-T}^{T} R_n(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau}$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته

- تخمین واریانس

$$X(t),\quad \sigma_x^2 = E\left\{\left(X(t)-m_x\right)^2\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(x(t)-m_x\right)^2 dt$$

– تخمین/تخمین‌گر

$$X(t),\quad x(t), 0<t<T : \hat{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt,\quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T\left(X(t)-\hat{m}_x\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T X^2(t)dt - \left(\hat{m}_x\right)^2 \quad RV$$

– بایاس تخمین‌گر واریانس (محاسبه واریانس تخمین‌گر دشوار است)

$$E\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\} = E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T X^2(t)dt - \left(\hat{m}_x\right)^2\right\} = \frac{1}{T}\int_0^T E\left\{X^2(t)\right\}dt - E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\sigma_x^2 + \left(m_x\right)^2\right)dt - E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\} = \sigma_x^2 + \left(m_x\right)^2 - \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_x(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau$$

$$= \sigma_x^2 - \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(R_x(\tau)-\left(m_x\right)^2\right)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau = \sigma_x^2 - \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_n(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau = \sigma_x^2 - \sigma_{\hat{m}_x}^2$$

$$B\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\} = E\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\} - \sigma_x^2 = -\sigma_{\hat{m}_x}^2 = -\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_n(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau$$

– مشاهدات بلند مدت

– مشاهدات کوتاه مدت

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند پیوسته

- تخمین تابع همبستگی

$$X(t),\quad R_x(\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$$

– تخمین/تخمین‌گر

$$X(t),\quad x(t),0<t<T:\hat{R}_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}X(t)X(t+\tau)dt\quad 0<\tau<T\qquad RV\quad \hat{R}_x(\tau)=\hat{R}_x(-\tau)\quad -T<\tau<0$$

– بایاس تخمین‌گر همبستگی

$$E\{\hat{R}_x(\tau)\}=E\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}X(t)X(t+\tau)dt\right\}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}E\{X(t)X(t+\tau)\}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}R_x(\tau)dt=R_x(\tau)\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}dt=R_x(\tau)\frac{T-\tau}{T}=R_x(\tau)(1-\frac{\tau}{T})$$

$$B\{\hat{R}_x(\tau)\}=E\{\hat{R}_x(\tau)\}-R_x(\tau)=-R_x(\tau)\frac{\tau}{T}$$

– بدون بایاس کردن تخمین‌گر

$$\hat{R}_x(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau}X(t)X(t+\tau)dt\quad 0<\tau<T\Rightarrow E\{\hat{R}_x(\tau)\}=R_x(\tau)$$

– تخمین با بازه یکسان

$$\hat{R}_x(\tau)=\frac{1}{T-\tau_m}\int_{0}^{T-\tau_m}X(t)X(t+\tau)dt\quad 0<\tau<\tau_m<T\Rightarrow E\{\hat{R}_x(\tau)\}=R_x(\tau)$$

– مقایسه (با توجه به واریانس تخمین‌گر (بدون محاسبه))

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- پارامترهای آماری مرتبه اول و دوم یک فرآیند حقیقی WSS

$$m_x = E\{X[n]\} = \overline{x[n]}$$

$$\sigma_x^2 = E\left\{\left(X[n]-m_x\right)^2\right\} \qquad R_x[m] = E\{X[n]X[n-m]\} = E\{X[n]X[n+m]\}$$

- محاسبه پارامترهای آماری با متوسط زمانی برای فرآیند ارگادیک با یک تابع نمونه $x[n], \forall n$

$$m_x = \langle x[n] \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x[n] \qquad \sigma_x^2 = \left\langle \left(x[n]-m_x\right)^2 \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} \left(x[n]-m_x\right)^2$$

$$R_x[m] = \langle x[n]x[n+m] \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} x[n]x[n+m]$$

- تخمین پارامترهای آماری با متوسط زمانی برای فرآیند ارگادیک با یک تکه از یک تابع نمونه
  - تخمین‌گر
  - وابستگی تخمین به تابع نمونه
  - متغیرتصادفی بودن تخمین

$$x[n], 0 \le n \le M-1$$

$$\hat{m}_x \to \hat{m}_x(x, M)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 \to \hat{\sigma}_x^2(x, M)$$

$$\hat{R}_x[m] \to \hat{R}_x(m; x, M)$$

- مدل کردن سیگنال

$$X[n] : m_x, \sigma_x^2, R_x[m] \Rightarrow X[n] = m_x + N[n]$$

$$N[n] : m_n = 0, \sigma_n^2 = \sigma_x^2, R_n[m] = E\{N[n]N[n-m]\} = R_x[m] - \left(m_x\right)^2$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- تخمین متوسط

$$X[n],\quad m_x=E\{X[n]\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}x[n]$$

  – تخمین/تخمین‌گر

$$x[n],0\le n\le M-1\Rightarrow \hat{m}_x=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}x[n]\quad\Rightarrow\quad X[n]:\hat{m}_x=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}X[n]\quad \color{red}{RV}$$

  – بایاس تخمین‌گر متوسط

$$E\{\hat{m}_x\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}X[n]\right\}=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}E\{X[n]\}=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}m_x=m_x\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}1=m_x$$

$$\Rightarrow B_{\hat{m}_x}=E\{\hat{m}_x\}-m_x=0$$

- تخمین‌گر بدون بایاس unbiased

  – واریانس تخمین‌گر متوسط

$$\sigma^2_{\hat{m}_x}=E\left\{\left(\hat{m}_x-E\{\hat{m}_x\}\right)^2\right\}=E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\}-\left(E\{\hat{m}_x\}\right)^2=E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\}-(m_x)^2$$

$$E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\}=E\{\hat{m}_x\hat{m}_x\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X[k]\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}X[l]\right\}=E\left\{\frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}X[k]X[l]\right\}$$

$$=\frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}E\{X[k]X[l]\}=\frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}R_x[k-l]=\frac{1}{M^2}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{m=-l}^{M-1-l}R_x[m]$$

$$\color{red}{m=k-l,}\,0\le k\le M-1\Rightarrow \color{red}{-l\le k-l\le M-1-l}\Rightarrow \color{red}{-l\le m\le M-1-l}$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- تخمین متوسط
  - واریانس تخمین‌گر متوسط

$$E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\}=\frac{1}{M^2}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{m=-l}^{M-1-l}R_x[m]$$

$$=\frac{1}{M^2}\left(\sum_{m=0}^{M-1}R_x[m]+\sum_{m=-1}^{M-2}R_x[m]+\sum_{m=-2}^{M-3}R_x[m]+\ldots+\sum_{m=-(M-1)}^{0}R_x[m]\right)$$

$$=\frac{1}{M^2}\left(MR_x[0]+(M-1)R_x[1]+(M-2)R_x[2]+\ldots+(M-(M-1))R_x[M-1]\right)$$

$$+\frac{1}{M^2}\left(\qquad+(M-1)R_x[-1]+(M-2)R_x[-2]+\ldots+(M-(M-1))R_x[-M+1]\right)$$

$$=\frac{1}{M^2}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(M-|m|)R_x[m]=\frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_x[m]\qquad\frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})=1$$

$$\sigma_{\hat{m}_x}^2=E\left\{(\hat{m}_x)^2\right\}-(m_x)^2=\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_x[m]-(m_x)^2\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})\left(R_x[m]-(m_x)^2\right)=\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]=\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})C_x[m]$$

  - وابستگی واریانس تخمین‌گر متوسط به مساحت تابع همبستگی نویز

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- تخمین متوسط
  - حالت خاص اول (مشاهدات بلند مدت)

$$\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]$$

$$M \to +\infty \quad \Rightarrow 1-\frac{|m|}{M} \to 1 \Rightarrow \sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{1}{M}\sum_{-\infty}^{+\infty} R_n[m] \to 0 \quad if \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} R_n[m] < \infty$$

- شرط ارگادیک بودن

  - حالت خاص دوم (مشاهدات کوتاه مدت)

$$M \to 0 \quad \Rightarrow R_n[m] \approx R_n[0]$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{m}_x}^2 \approx \frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m] = R_n(0)\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M}) = R_n[0] = \sigma_n^2 = \sigma_x^2$$

- نسبت سیگنال به نویز

$$\underset{[0, M-1]}{X[n]} \longrightarrow \boxed{\text{تخمین‌گر}} \xrightarrow{\hat{m}_x(M)}$$

$$SNR|_i = \frac{E\{X[n]\}}{Var\{X[n]\}} = \frac{m_x}{\sigma_x^2} = \frac{m_x}{\sigma_n^2}$$

$$SNR|_o = \frac{E\{\hat{m}_x\}}{Var\{\hat{m}_x\}} = \frac{m_x}{\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]}$$

$$\Rightarrow Figure\ of\ merit = \frac{SNR|_o}{SNR|_i} = \frac{\sigma_n^2}{\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]}$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- تخمین واریانس

$$X[n],\quad \sigma_x^2 = E\left\{\left(X[n]-m_x\right)^2\right\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\left(x[n]-m_x\right)^2$$

– تخمین/تخمین‌گر

$$X[n],\quad x[n],0\le n\le M-1:\hat{m}_x=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}X[n],\quad \hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(X[n]-\hat{m}_x\right)^2=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(X[n]\right)^2-\left(\hat{m}_x\right)^2\quad RV$$

– بایاس تخمین‌گر واریانس

$$E\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(X[n]\right)^2-\left(\hat{m}_x\right)^2\right\}=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}E\left\{\left(X[n]\right)^2\right\}-E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(\sigma_x^2+\left(m_x\right)^2\right)-E\left\{\left(\hat{m}_x\right)^2\right\}=\sigma_x^2+\left(m_x\right)^2-\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_x[m]$$

$$=\sigma_x^2-\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})\left(R_x[m]-\left(m_x\right)^2\right)=\sigma_x^2-\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]=\sigma_x^2-\sigma_{\hat{m}_x}^2$$

$$B\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\}=E\left\{\hat{\sigma}_x^2\right\}-\sigma_x^2=-\sigma_{\hat{m}_x}^2=-\frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_n[m]$$

– مشاهدات بلند مدت

– مشاهدات کوتاه مدت

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- تخمین تابع همبستگی

$$X[n],\quad R_x[m]=E\left\{X[n]X[n+m]\right\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}x[n]x[n+m]$$

– تخمین/تخمین گر

$$X[n],\quad x[n],0\le n\le M-1:\hat{R}_x[m]=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-m-1}X[n]X[n+m]\quad 0\le m\le M-1\qquad RV\quad \hat{R}_x[m]=\hat{R}_x[-m]\quad -(M-1)\le m\le 0$$

– بایاس تخمین گر همبستگی

$$E\left\{\hat{R}_x[m]\right\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-m-1}X[n]X[n+m]\right\}=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-m-1}E\left\{X[n]X[n+m]\right\}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-m-1}R_x[m]=R_x[m]\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-m-1}1=R_x[m]\frac{M-m}{M}=R_x[m](1-\frac{m}{M})$$

$$B\left\{\hat{R}_x[m]\right\}=E\left\{\hat{R}_x[m]\right\}-R_x[m]=-R_x[m]\frac{m}{M}$$

– بدون بایاس کردن تخمین گر

$$\hat{R}_x[m]=\frac{1}{M-m}\sum_{0}^{M-m-1}X[n]X[n+m]\quad 0\le m\le M-1\Rightarrow E\left\{\hat{R}_x[m]\right\}=R_x[m]$$

– تخمین با بازه یکسان

$$\hat{R}_x[m]=\frac{1}{M-m_M}\sum_{0}^{M-m_M-1}X[n]X[n+m]\quad 0\le m\le m_M<M\Rightarrow E\left\{\hat{R}_x[m]\right\}=R_x[m]$$

– مقایسه (با توجه به واریانس تخمین گر بدون محاسبه)

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- مثال۱– تخمین پارامترهای آماری فرآیند ارگادیک $S[n]$ از روی یک قطعه از یک تابع نمونه مشاهده $Z[n]$ ($V[n]$ نویز سفید مستقل از $S[n]$) $S[n], m_s, \sigma_s^2, R_s[m]$

$$Z[n] = S[n] + V[n] \quad 0 \le n \le M-1, \quad V[n], m_v = 0, \sigma_v^2, R_v[m] = \sigma_v^2 \delta[m]$$

الف) تخمین متوسط فرآیند $S[n]$ و محاسبه بایاس و واریانس آن

$$\hat{m}_s = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} Z[n]$$

$$E\{\hat{m}_s\} = E\left\{\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} Z[n]\right\} = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} E\{(S[n]+V[n])\} = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}(m_s+0) = m_s\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}1 = m_s$$

$$\Rightarrow B_{\hat{m}_x} = E\{\hat{m}_s\} - m_s = 0$$

$$E\left\{(\hat{m}_s)^2\right\} = E\left\{\frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}(S[k]+V[k])(S[l]+V[l])\right\} = \frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}(R_s[k-l]+0+0+R_v[k-l])$$

$$= \frac{1}{M^2}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{m=-l}^{M-1-l} R_s[m] + \frac{1}{M^2}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{m=-l}^{M-1-l}\sigma_v^2\delta[m] = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_s[m] + \frac{\sigma_v^2}{M^2}\sum_{l=0}^{M-1}1$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})R_s[m] + \frac{\sigma_v^2}{M} \Rightarrow \sigma_{\hat{m}_s}^2 = E\left\{(\hat{m}_s)^2\right\} - (m_s)^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1-\frac{|m|}{M})\left(R_s[m]-(m_s)^2\right) + \frac{\sigma_v^2}{M}$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

ب) تخمین واریانس فرآیند $S[n]$ و محاسبه بایاس آن

$$\hat{m}_S = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} Z[n], \quad \hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(Z[n]-\hat{m}_s\right)^2 = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(Z[n]\right)^2 - \left(\hat{m}_s\right)^2$$

$$E\left\{\hat{\sigma}_s^2\right\} = E\left\{\frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left(Z[n]\right)^2 - \left(\hat{m}_s\right)^2\right\} = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} E\left\{\left(S[n]+V[n]\right)^2\right\} - E\left\{\left(\hat{m}_s\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1}\left[\left(\sigma_s^2 + \left(m_s\right)^2\right) + 0 + \sigma_v^2\right] - E\left\{\left(\hat{m}_s\right)^2\right\} = \sigma_s^2 + \left(m_s\right)^2 + \sigma_v^2 - \frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)R_s[m] - \frac{\sigma_v^2}{M}$$

$$= \sigma_s^2 + \left(1-\frac{1}{M}\right)\sigma_v^2 - \frac{1}{M}\sum_{-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\left(R_s[m]-\left(m_s\right)^2\right) = \sigma_s^2 + \sigma_v^2 - \sigma_{\hat{m}s}^2$$

$$B\left\{\hat{\sigma}_s^2\right\} = E\left\{\hat{\sigma}_s^2\right\} - \sigma_s^2 = \sigma_v^2 - \sigma_{\hat{m}_s}^2$$

پ) تخمین همبستگی فرآیند $S[n]$ و محاسبه بایاس آن

$$\hat{R}_s[m] = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-m-1} Z[n]Z[n+m] \quad 0 \le m \le M-1$$

$$E\left\{\hat{R}_s[m]\right\} = E\left\{\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-m-1}(S[n]+V[n])(S[n+m]+V[n+m])\right\} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-m-1}\left(R_s[m]+0+0+R_v[m]\right)$$

$$= R_s[m]\frac{M-m}{M} + \frac{M-m}{M}\sigma_v^2\delta[m] \Rightarrow B\left\{\hat{R}_s[m]\right\} = E\left\{\hat{R}_s[m]\right\} - R_s[m] = \frac{M-m}{M}\sigma_v^2\delta[m] - R_s[m]\frac{m}{M}$$

تخمین پارامترهای آماری یک فرآیند گسسته

- مثال۲– چند نقطه از سری RR یک بیمار (برحسب ثانیه) به صورت زیر اندازه‌گیری شده است:

$$0.68, 0.70, 0.69, 0.72, 0.71, 0.70, 0.67, 0.69, 0.71, 0.70$$

الف) نرخ ضربان قلب را بدست آورید. (میانگین سری RR)

$$\hat{m}_s = \frac{1}{M}\sum_{0}^{M-1} S[n] = \frac{0.68+0.70+0.69+0.72+0.71+0.70+0.67+0.69+0.71+0.70}{10} = 0.697$$

ب) همبستگی این سری زمانی را با دو روش بایاس‌دار و بدون بایاس بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{10-m-1} S[n]S[n+m] = \begin{cases} 4.86 & m=0 \\ 4.38 & m=1 \\ 3.88 & m=2 \\ 3.41 & m=3 \\ 2.93 & m=4 \\ 2.43 & m=5 \\ 1.93 & m=6 \\ 1.45 & m=7 \\ 0.97 & m=8 \\ 0.48 & m=9 \end{cases} \Rightarrow \hat{R}_s[m] = \frac{1}{10}\sum = \begin{cases} 0.486 & m=0 \\ 0.438 & m=1 \\ 0.388 & m=2 \\ 0.341 & m=3 \\ 0.293 & m=4 \\ 0.243 & m=5 \\ 0.193 & m=6 \\ 0.145 & m=7 \\ 0.097 & m=8 \\ 0.048 & m=9 \end{cases} \quad \hat{R}_s[m] = \frac{1}{10-m}\sum = \begin{cases} 0.486 & m=0 \\ 0.487 & m=1 \\ 0.486 & m=2 \\ 0.487 & m=3 \\ 0.488 & m=4 \\ 0.486 & m=5 \\ 0.483 & m=6 \\ 0.483 & m=7 \\ 0.486 & m=8 \\ 0.476 & m=9 \end{cases}$$

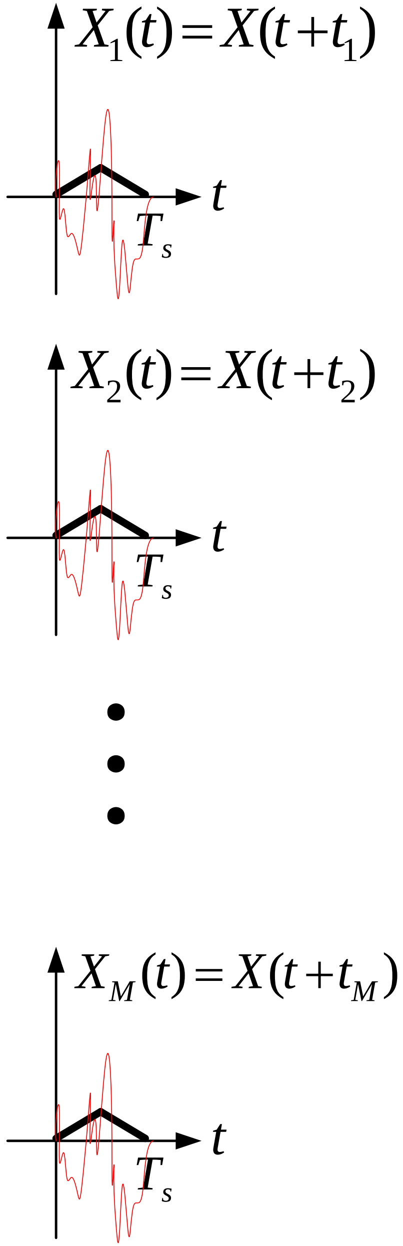
متوسط‌گیری سنکرون

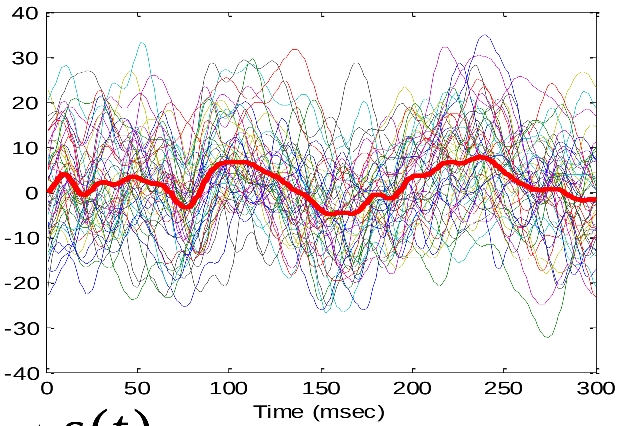
- هدف: بازیابی (استخراج) یک پترن تکرار شونده در اندازه‌گیری آغشته به نویز قوی
  - ضعیف بودن پترن نسبت به نویر (سیگنال به نویز ضعیف)
  - مثال۱: استخراج پتانسیل برانگیخته
    - زمان شروع پترن همان زمان تحریک فرض می‌شود
    - متوسط EEG پس‌زمینه صفر فرض می‌شود
  - مثال۲: استخراج یک ضربان قلبی
    - سنکرون نسبت به قله R

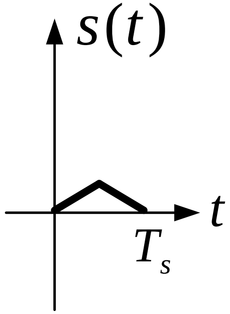
$X_1(t)=X(t+t_1)$

$X_2(t)=X(t+t_2)$

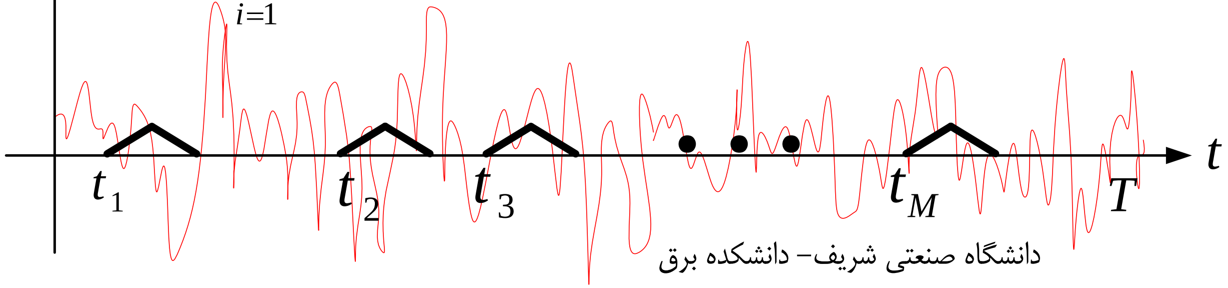
$X_M(t)=X(t+t_M)$

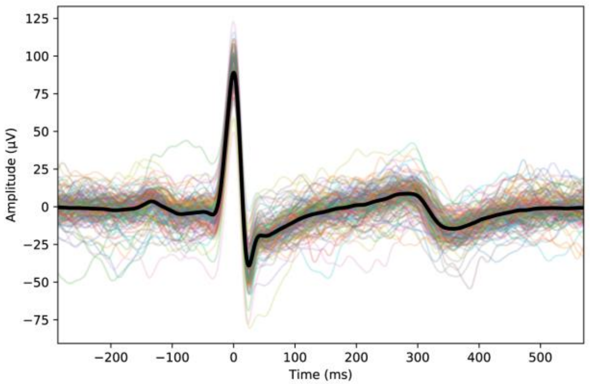




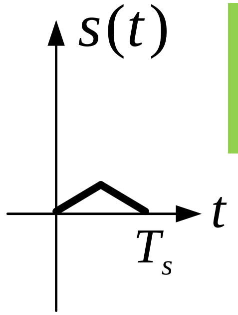


$$X(t)=\sum_{i=1}^{M} s(t-t_i)+N(t)$$



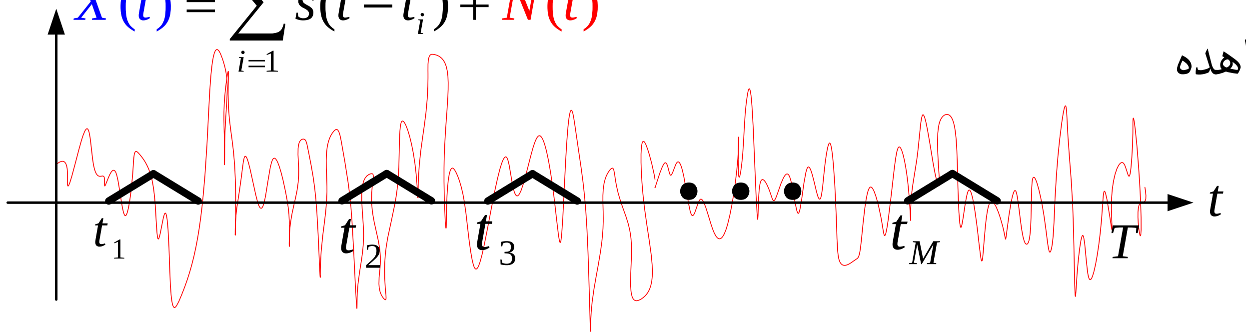


متوسط‌گیری سنکرون



- هدف: بازیابی یک پترن تکرار شونده در اندازه‌گیری آغشته به نویز قوی
- حالت اول: پترن یقینی ولی مجهول
  - بازه T و زمان‌های t_i معلوم در سیگنال مشاهده
  - پترن $s(t)$ یقینی و مجهول
  - نویز $N(t)$ با متوسط صفر
  - تفسیر نویز در دو مثال
    - پتانسیل برانگیخته
    - سیگنال قلبی
  - تعریف تخمین‌گر پترن
  - محاسبه بایاس تخمین‌گر

$$X(t)=\sum_{i=1}^{M}s(t-t_i)+N(t)$$



$$s(t), 0<t<T_s$$

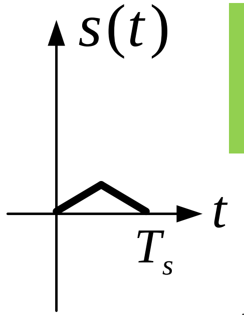
$$X(t)=\sum_{i=1}^{M}s(t-t_i)+N(t), 0<t<T \quad T>MT_s$$

$$X_i(t)=X(t+t_i), 0<t<T_s \Rightarrow \hat{s}(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i(t) \quad 0<t<T_s$$

$$E\{\hat{s}(t)\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i(t)\right\}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}E\{X(t+t_i)\}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}E\{s(t)+N(t+t_i)\}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(s(t)+E\{N(t+t_i)\}\right)=s(t)\Rightarrow B\{\hat{s}(t)\}=E\{\hat{s}(t)\}-s(t)=0$$

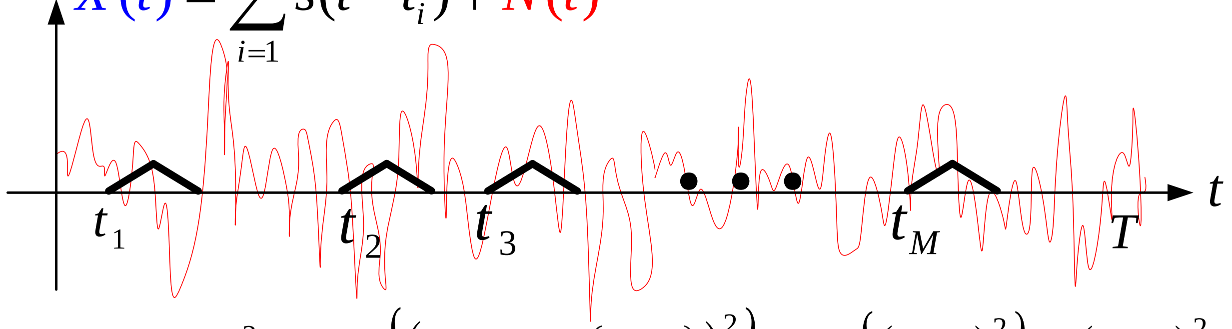
متوسط‌گیری سنکرون



- هدف: بازیابی یک پترن تکرار شونده در اندازه‌گیری آغشته به نویز قوی
- حالت اول: پترن یقینی ولی مجهول
  - محاسبه واریانس تخمین‌گر
    - نویز سفید

$$R_n(t_i - t_j) = \sigma_n^2 \delta[i-j]$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{M} s(t-t_i) + N(t)$$



$$\sigma_{\hat{s}(t)}^2 = E\left\{\left(\hat{s}(t) - E\{\hat{s}(t)\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\hat{s}(t)\right)^2\right\} - \left(s(t)\right)^2 = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} E\{X_i(t)X_j(t)\} - \left(s(t)\right)^2$$

$$= \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} E\left\{\left(s(t)+N(t+t_i)\right)\left(s(t)+N(t+t_j)\right)\right\} - \left(s(t)\right)^2 = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left(s(t)\right)^2$$

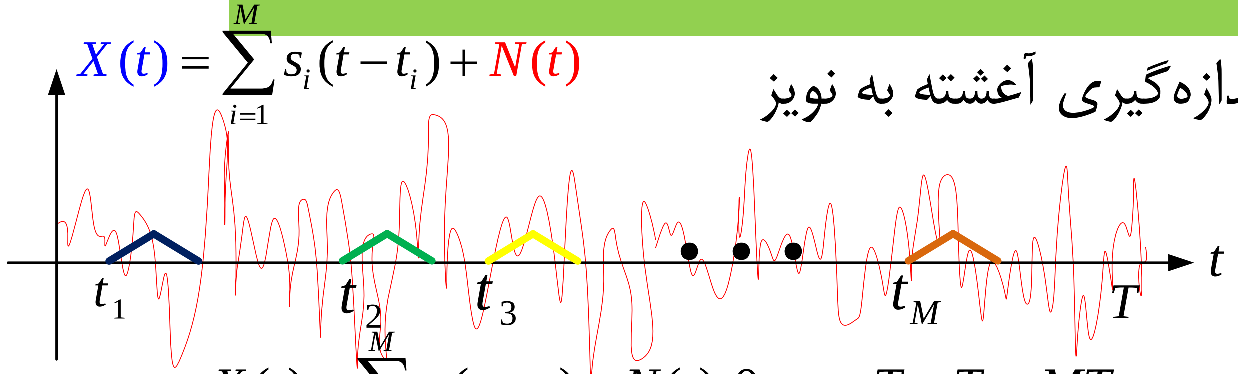
$$+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} s(t)E\{N(t+t_j)\} + \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} E\{N(t+t_i)\}s(t) + \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} E\{N(t+t_i)N(t+t_j)\} - \left(s(t)\right)^2$$

$$= \left(s(t)\right)^2 + 0 + 0 + \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} R_n(t_i - t_j) - \left(s(t)\right)^2 = \frac{\sigma_n^2}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{M}\delta[i-j]\right) = \frac{\sigma_n^2}{M^2}\sum_{i=1}^{M} 1 = \frac{\sigma_n^2}{M}$$

- کاهش واریانس تخمین‌گر با افزایش تعداد پاسخ‌ها و با کاهش واریانس نویز پس زمینه

متوسط‌گیری سنکرون

- هدف: بازیابی یک پترن تکرار شونده در اندازه‌گیری آغشته به نویز
- حالت دوم: پترن تصادفی ولی مجهول



  - پترن $s_i(t)$ تصادفی با تغییرات کم
  - بازه T و زمان‌های t_i معلوم در سیگنال مشاهده
  - نویز $N(t)$ با متوسط صفر و مستقل از $s_i(t)$
  - تعریف پترن متوسط
  - تعریف تخمین‌گر پترن متوسط
  - محاسبه بایاس تخمین‌گر

$$X(t)=\sum_{i=1}^{M} s_i(t-t_i)+N(t), 0<t<T \quad T>MT_s$$

$$s_i(t), 0<t<T_i$$

$$m_s(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E\{s_i(t)\}, 0<t<T_s \quad T_s=Max\{T_1,T_2,\ldots,T_M\}$$

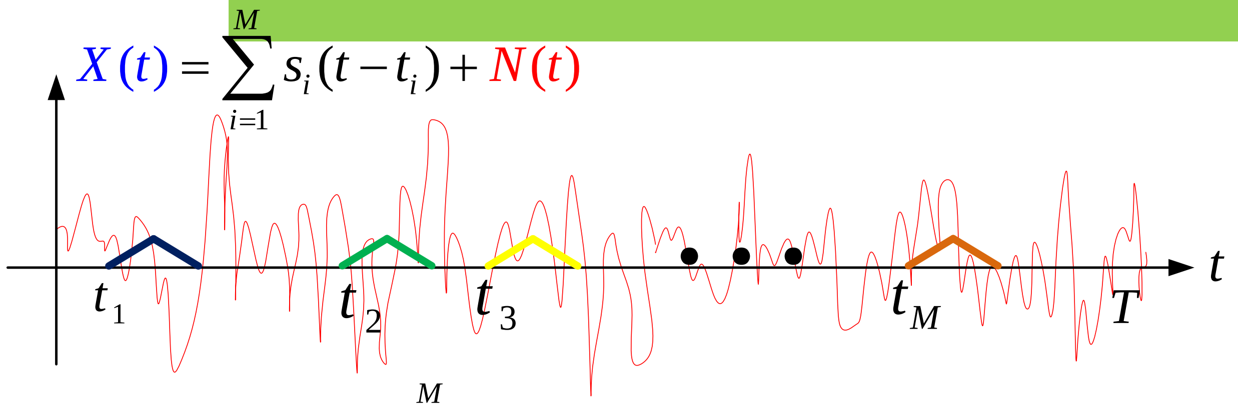
$$X_i(t)=X(t+t_i), 0<t<T_s \Rightarrow \hat{m}_s(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i(t) \quad 0<t<T_s$$

$$E\{\hat{m}_s(t)\}=E\left\{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i(t)\right\}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E\{X(t+t_i)\}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E\{s_i(t)+N(t+t_i)\}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(E\{s_i(t)\}+E\{N(t+t_i)\}\right)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(E\{s_i(t)\}+0\right)=m_s(t)\Rightarrow B\{\hat{m}_s(t)\}=E\{\hat{m}_s(t)\}-m_s(t)=0$$

متوسط‌گیری سنکرون

- حالت دوم: پترن تصادفی ولی مجهول
  - محاسبه واریانس تخمین‌گر



$$X(t)=\sum_{i=1}^{M}s_i(t-t_i)+N(t), 0<t<T \quad T>MT_s$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s(t)}=E\left\{\left(\hat{m}_s(t)-E\{\hat{m}_s(t)\}\right)^2\right\}=E\left\{\left(\hat{m}_s(t)\right)^2\right\}-\left(E\{\hat{m}_s(t)\}\right)^2=E\left\{\left(\hat{m}_s(t)\right)^2\right\}-\left(m_s(t)\right)^2$$

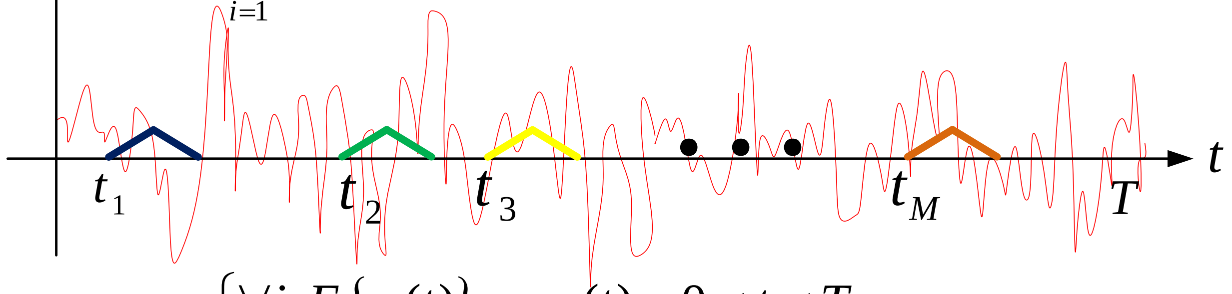
$$E\left\{\left(\hat{m}_s(t)\right)^2\right\}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{X_i(t)X_j(t)\}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\left\{\left(s_i(t)+N(t+t_i)\right)\left(s_j(t)+N(t+t_j)\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{s_i(t)s_j(t)\}+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{s_i(t)\}E\{N(t+t_j)\}+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{N(t+t_i)\}E\{s_j(t)\}$$

$$+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{N(t+t_i)N(t+t_j)\}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\{s_i(t)s_j(t)\}+0+0+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}R_n(t_i-t_j)$$

متوسط‌گیری سنکرون

$$X(t)=\sum_{i=1}^{M} s_i(t-t_i)+N(t)$$



- حالت دوم: پترن تصادفی ولی مجهول
  - محاسبه واریانس تخمین‌گر
  - چند فرض ساده‌کننده

$$\begin{cases} \forall i, E\left\{s_i(t)\right\}=m_s(t) \quad 0<t<T_s \\ \forall i, \sigma_s^2(t)=E\left\{\left(s_i(t)-m_s(t)\right)^2\right\}=E\left\{\left(s_i(t)\right)^2\right\}-\left(m_s(t)\right)^2 \\ \forall i, \forall j, R_s[i-j,t]=E\left\{s_i(t)s_j(t)\right\} \Rightarrow R_s[0,t]=E\left\{\left(s_i(t)\right)^2\right\}=\sigma_s^2(t)+\left(m_s(t)\right)^2 \\ R_n(t_i-t_j)=\sigma_n^2\delta[i-j] \end{cases}$$

$$E\left\{\left(\hat{m}_s(t)\right)^2\right\}=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}E\left\{s_i(t)s_j(t)\right\}+0+0+\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}R_n(t_i-t_j)$$

$$=\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}R_s[i-j,t]+\frac{\sigma_n^2}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{M}\delta[i-j]\right)$$

$$=\frac{1}{M^2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{m=-j+1}^{M-j}R_s[m,t]+\frac{\sigma_n^2}{M^2}\sum_{i=1}^{M}1=\frac{1}{M}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)R_s[m,t]+\frac{\sigma_n^2}{M}$$

متوسط‌گیری سنکرون

- حالت دوم: پترن تصادفی ولی مجهول: محاسبه واریانس تخمین‌گر

$$\sigma^2_{\hat{m}_s(t)} = E\left\{\left(\hat{m}_s(t)\right)^2\right\} - \left(m_s(t)\right)^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)R_s[m,t) + \frac{\sigma_n^2}{M} - \left(m_s(t)\right)^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\left(R_s[m,t) - \left(m_s(t)\right)^2\right) + \frac{\sigma_n^2}{M}$$

  – حالت خاص اول: پاسخ‌های مستقل از هم

$$R_s[i-j,t) = E\left\{s_i(t)s_j(t)\right\} = \begin{cases} E\left\{\left(s_i(t)\right)^2\right\} = \sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2 & i=j \\ E\left\{s_i(t)\right\}E\left\{s_j(t)\right\} = \left(m_s(t)\right)^2 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow R_s[m,t) = \begin{cases} \sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2 & m=0 \\ \left(m_s(t)\right)^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s(t)} = \frac{1}{M}\sum_{\substack{m=-M+1 \\ m\neq 0}}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\left(\left(m_s(t)\right)^2 - \left(m_s(t)\right)^2\right) + \frac{1}{M}\left(\sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2 - \left(m_s(t)\right)^2\right) + \frac{\sigma_n^2}{M} = \frac{\sigma_s^2(t)+\sigma_n^2}{M}$$

  - کاهش واریانس تخمین‌گر با افزایش تعداد پاسخ‌ها

  – حالت خاص دوم: پاسخ‌های کاملا وابسته

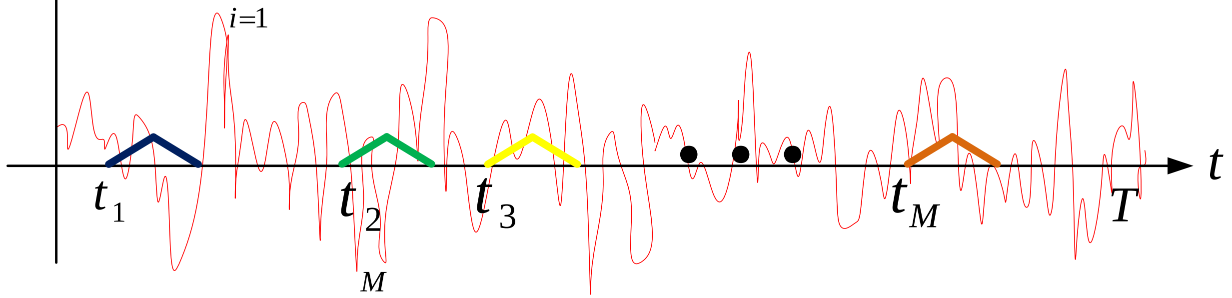
$$\forall i, s_i(t) = s(t) \Rightarrow R_s[i-j,t) = E\left\{s_i(t)s_j(t)\right\} = E\left\{\left(s(t)\right)^2\right\} = \sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2 \Rightarrow R_s[m,t) = \sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s(t)} = \frac{1}{M}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\left(\sigma_s^2(t) + \left(m_s(t)\right)^2 - \left(m_s(t)\right)^2\right) + \frac{\sigma_n^2}{M} = \sigma_s^2(t) + \frac{\sigma_n^2}{M}$$

  - حذف نویز پس‌زمینه با افزایش تعداد پاسخ‌ها/وابستگی واریانس تخمین‌گر به واریانس پترن تصادفی

متوسط‌گیری سنکرون

$$X(t)=\sum_{i=1}^{M} s_i(t-t_i)+N(t)$$



$$X(t)=\sum_{i=1}^{M} s_i(t-t_i-\tau_i)+N(t), 0<t<T \quad T>MT_s$$

- پترن تصادفی ولی مجهول با پاسخ غیرسنکرون با تحریک
  - زمان‌های t_i شروع تحریک (معلوم)
  - زمان‌های $t_i+\tau_i$ شروع پاسخ
  - زمان‌های τ_i مجهول
  - تخمین زمان‌های τ_i به روش بازگشتی

$$\tau_{i0}=0, \forall i, \hat{m}_{s0}(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X(t+t_i), 0<t<T_s \Rightarrow R_{i0}(\lambda)=\int_0^{T_s} \hat{m}_{s0}(t-\lambda)X(t+t_i)dt \Rightarrow \tau_{i1}=\arg\underset{\lambda}{Max}\, R_{i0}(\lambda)$$

$$\hat{m}_{s1}(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X(t+t_i+\tau_{i1}), 0<t<T_s \Rightarrow R_{i1}(\lambda)=\int_0^{T_s} \hat{m}_{s1}(t-\lambda)X(t+t_i)dt \Rightarrow \tau_{i2}=\arg\underset{\lambda}{Max}\, R_{i1}(\lambda)$$

$$\hat{m}_{s2}(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X(t+t_i+\tau_{i2}), 0<t<T_s \Rightarrow R_{i2}(\lambda)=\int_0^{T_s} \hat{m}_{s2}(t-\lambda)X(t+t_i)dt \Rightarrow \tau_{i3}=\arg\underset{\lambda}{Max}\, R_{i2}(\lambda)$$

  - شرط توقف $\sum_{i=1}^{M}\left|\tau_{i(k+1)}-\tau_{ik}\right|\le\varepsilon$ یا $\forall i, \int\left|R_{i(k+1)}(\lambda)-R_{ik}(\lambda)\right|d\lambda\le\varepsilon$
  - تخمین‌گر نهایی $\hat{\tau}_i=\tau_{i\infty} \Rightarrow \hat{m}_s(t)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X(t+t_i+\hat{\tau}_i), 0<t<T_s$