Sharif University of Technology

پردازش سیگنال‌های حیاتی
مبحث هفتم- تخمین و فیلترهای وفقی

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث هفتم– تخمین و فیلترهای وفقی

- مقدمه
- تخمین یک بردار تصادفی با مشاهده بردار دیگر
  - تخمین محتمل‌ترین/تخمین کم‌خطاترین/تخمین ماکزیمم درستنمایی/تخمین خطی/تخمین آفین
- تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر
  - فیلتر وینر IIR غیرسببی (نرم‌سازی)
  - فیلتر وینر IIR سببی (فیلتر کردن)
  - فیلتر وینر FIR سببی
- رفع اشکالات فیلتر وینر FIR سببی
- فیلتر وفقی در حوزه تخمین و حذف نویز
- الگوریتم LMS
- چند مثال
- فیلتر وفقی بدون مرجع

مقدمه

- بردار تصادفی

$$\underline{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_N\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}\underline{m}_x=\underline{\bar{x}}=E\{\underline{X}\}\\R_x=E\{\underline{X}\,\underline{X}^H\}\\C_x=E\{(\underline{X}-\underline{m}_x)(\underline{X}-\underline{m}_x)^H\}\end{cases}$$

- تبدیل خطی یک بردار تصادفی

$$\underline{Z}=A\underline{X}\quad\Rightarrow\begin{cases}\underline{m}_z=A\underline{m}_x\\R_z=AR_xA^T\\C_z=AC_xA^T\end{cases}$$

- تبدیل آفین یک متغیر تصادفی

$$\underline{Z}=A\underline{X}+\underline{b}\quad\Rightarrow\begin{cases}\underline{m}_z=A\underline{m}_x+\underline{b}\\C_z=AC_xA^T\end{cases}$$

- بردار تصادفی گوسی

$$\underline{X}\sim\aleph(\underline{m}_x,C_x)\Rightarrow\begin{cases}\underline{Z}=A\underline{X}\sim\aleph(A\underline{m}_x,AC_xA^T)\\\underline{Z}=A\underline{X}+\underline{b}\sim\aleph(A\underline{m}_x+\underline{b},AC_xA^T)\end{cases}$$

- دو بردار تصادفی تواما گوسی

$$\begin{matrix}\underline{X}\sim\aleph(\underline{m}_x,C_x)\\\underline{Z}\sim\aleph(\underline{m}_z,C_z)\end{matrix}\Rightarrow f_{\underline{X}|\underline{Z}}(\underline{x}\,|\,\underline{z})\sim\aleph(\underline{m}_v,C_v)\qquad\begin{matrix}\underline{m}_v=\underline{m}_x+C_{xz}C_z^{-1}(\underline{z}-\underline{m}_z)\\C_v=C_x-C_{xz}C_z^{-1}C_{zx}\end{matrix}$$

تخمین یک بردار تصادفی با مشاهده بردار دیگر

- تخمین بردار $\underline{X}$ با مشاهده $\underline{Z}$

$$f_{\underline{X},\underline{Z}}(\underline{x},\underline{z}) = f_{\underline{X}}(\underline{x}).f_{\underline{Z}|\underline{X}}(\underline{z}\,|\,\underline{x}) = f_{\underline{Z}}(\underline{z}).f_{\underline{X}|\underline{Z}}(\underline{x}\,|\,\underline{z})$$

  - معیار محتملترین MAP

$$\hat{\underline{X}} = \arg \underset{\underline{x}}{Max}\, f_{\underline{X}|\underline{Z}}(\underline{x}|\underline{z})$$

  - معیار کم‌خطاترین (کمترین مربع متوسط خطا)
    Minimum Mean Square Error (MMSE)

$$\hat{\underline{X}} = \arg \underset{\underline{x}}{Min} E\left\{\left|\underline{X}-\hat{\underline{X}}\right|^2 \middle| \underline{Z}=\underline{z}\right\} = E(\underline{X}|\underline{z})$$

    - متوسط شرطی

  - معیار ماکزیمم درستنمایی

$$\hat{\underline{X}} = \arg \underset{\underline{x}}{Max}\, f_{\underline{Z}|\underline{x}}(\underline{z}|\underline{x})$$

- تخمین خطی بر حسب مشاهده با معیار MMSE

$$\hat{\underline{X}} = A\underline{Z}$$

  - اصل تعامد خطا بر مشاهدات

$$\underset{\underline{x}}{Min} E\left\{\left|\underline{X}-\hat{\underline{X}}\right|^2 \middle| \underline{Z}=\underline{z}\right\} \Leftrightarrow \underline{X}-\hat{\underline{X}} \perp \underline{Z} \Leftrightarrow E\left\{\left(\underline{X}-\hat{\underline{X}}\right)\underline{Z}^H\right\} = 0$$

$$\hat{\underline{X}} = A\underline{Z} \Rightarrow A = R_{xz}R_z^{-1}$$

- تخمین آفین بر حسب مشاهده با معیار MMSE

  - برای توزیع تواما گوسی
    AMMSE= MMSE

$$\hat{\underline{X}} = A\underline{Z}+\underline{b} \Rightarrow \begin{cases} A = C_{xz}C_z^{-1} \\ \underline{b} = \underline{m}_x - A\underline{m}_z \end{cases} \Rightarrow \hat{\underline{X}} = \underline{m}_x + C_{xz}C_z^{-1}(\underline{z}-\underline{m}_z)$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر

- تخمین فرآیند $X[n]$ در لحظه n برحسب مشاهدات فرآیند $Z[n]$ در تعدادی از لحظات
  - فرآیندهای ایستا و توواما ایستا
  - تخمین خطی با معیار MMSE
  - مدل کردن تخمین با یک سیستم (فیلتر وینر)

$$Z[m],\ n_0 \le m \le n-r \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow Y[n] = \hat{X}[n] = \sum_{k=n_0}^{n-r} h[n-k]Z[k]$$

- اصل تعامد خطا بر مشاهدات

$$\underset{h}{Min}\,E\left\{\left|X[n]-\hat{X}[n]\right|^2\right\} \Leftrightarrow (X[n]-\hat{X}[n]) \perp Z[m], \quad n_0 \le m \le n-r$$

$$\Rightarrow E\left\{\left(X[n]-\hat{X}[n]\right)Z^*[m]\right\} = 0, \quad n_0 \le m \le n-r$$

$$\boxed{\begin{cases} n-m=p \\ n-k=l \end{cases} \Rightarrow k-m=p-l \Rightarrow \begin{cases} r \le p \le n-n_0 \\ r \le l \le n-n_0 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow E\left\{X[n]Z^*[m]\right\} = E\left\{\sum_{k=n_0}^{n-r} h[n-k]Z[k]Z^*[m]\right\}, \quad n_0 \le m \le n-r$$

- معادله Wiener-Hopf

$$R_{xz}[n-m] = \sum_{k=n_0}^{n-r} h[n-k]R_z[k-m], \quad n_0 \le m \le n-r \quad \Rightarrow \quad R_{xz}[p] = \sum_{l=r}^{n-n_0} h[l]R_z[p-l], \quad r \le p \le n-n_0$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر

- سه حالت خاص
  - فیلتر وینر IIR غیرسببی (نرم‌سازی) $n_0 = -\infty, r = -\infty$
  - فیلتر وینر IIR سببی (فیلتر کردن) $n_0 = -\infty, r = 0$
  - فیلتر وینر FIR سببی $n_0 = n - M, r = 0$
- فیلتر وینر IIR غیرسببی $Z[m], \quad \forall m \in Z \quad \Rightarrow \quad n_0 = -\infty, \quad r = -\infty$

$$\underset{-\infty < m < -\infty}{Z[m]} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow Y[n] = \hat{X}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]Z[k]$$

$$R_{xz}[p] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]R_z[p-l] = h[p] * R_z[p], \quad -\infty < p < +\infty$$

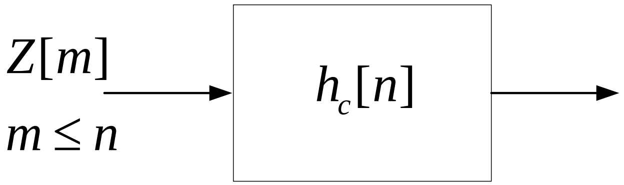
$$S_{xz}(\omega) = H(e^{j\omega}).S_z(\omega) \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{S_{xz}(\omega)}{S_z(\omega)} \qquad H(z) = \frac{S_{xz}(z)}{S_z(z)} \Rightarrow h[n]$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر

- فیلتر وینر IIR سببی

$$h[n]=h_c[n]=0,\quad n<0$$

$$Z[m],\quad m\le n \quad\Rightarrow\quad n_0=-\infty,\quad r=0$$



$$Y[n]=\hat{X}[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h_c[n-k]Z[k]=\sum_{k=0}^{+\infty}h_c[k]Z[n-k]$$

$$R_{xz}[p]=\sum_{l=o}^{+\infty}h_c[l]R_z[p-l]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h_c[l]R_z[p-l]=h_c[p]*R_z[p],\quad 0\le p<+\infty$$

$$R_{xz}[p]-h_c[p]*R_z[p]=0,\quad 0\le p<+\infty$$

$$\Rightarrow\quad R_{xz}[p]-h_c[p]*R_z[p]=q[p]=\begin{cases}g[p] & p<0\\ 0 & p\ge 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad S_{xz}(z)-H_c(z).S_z(z)=Q(z)$$

$$S_z(z)=L(z)L(z^{-1})$$

$$\Rightarrow\quad S_{xz}(z)-H_c(z).L(z)L(z^{-1})=Q(z)\quad\Rightarrow\quad \frac{S_{xz}(z)}{L(z^{-1})}=H_c(z).L(z)+\frac{Q(z)}{L(z^{-1})}$$

$$\Rightarrow\quad H_c(z)=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_{xz}(z)}{L(z^{-1})}\right\}_+=\frac{1}{L(z)}\left\{L(z)\frac{S_{xz}(z)}{S_z(z)}\right\}_+$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر

- فیلتر وینر FIR سببی $h[n]=0, \quad n<0, \quad n>M$

  $Z[m], \quad m\in Z \quad \Rightarrow \quad n_0=n-M, \quad r=0$

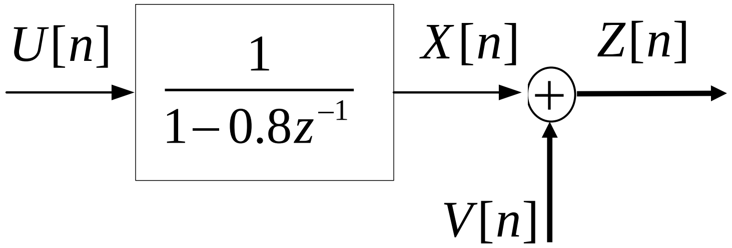
$$\begin{array}{c} Z[m] \\ n-M\le m\le n \end{array} \longrightarrow \boxed{\;h[n]\;} \longrightarrow Y[n]=\hat{X}[n]=\sum_{k=n-M}^{n} h[n-k]Z[k]=\sum_{k=0}^{M} h[k]Z[n-k]$$

– حل دستگاه به جای تبدیل z

$$R_{xz}[p]=\sum_{l=0}^{M} h[l]R_z[p-l]=h[p]*R_z[p], \quad 0\le p\le M$$

$$\begin{pmatrix} R_z[0] & R_z[-1] & \cdots & R_z[-M] \\ R_z[1] & R_z[0] & \cdots & R_z[1-M] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_z[M] & R_z[M-1] & \cdots & R_z[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz}[0] \\ R_{xz}[1] \\ \vdots \\ R_{xz}[M] \end{pmatrix} \Rightarrow \quad R.\underline{h}=\underline{r} \quad \Rightarrow \quad \underline{h}=R^{-1}\underline{r}$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر



- مثال ۱– تخمین فرآیند $X[n]$ با مشاهده $Z[n]$

$$Z[n]=X[n]+V[n]$$

$$R_u[m]=1.8\delta[m],\quad R_v[m]=5\delta[m],\quad R_{uv}[m]=0$$

الف) محاسبه اطلاعات آماری

$$R_{uv}[m]=0\Rightarrow R_{xv}[m]=0, R_{vx}[m]=0,\quad R_x[m]=\frac{1.8}{1-(0.8)^2}(0.8)^{|m|}=5(0.8)^{|m|}$$

$$R_z[m]=R_x[m]+R_v[m]+R_{xv}[m]+R_{vx}[m]=R_x[m]+R_v[m],\quad R_{xz}[m]=R_x[m]+R_{xv}[m]=R_x[m]$$

$$S_{xz}(z)=S_x(z)=H(z).H(z^{-1}).S_u(z)=\frac{1.8}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

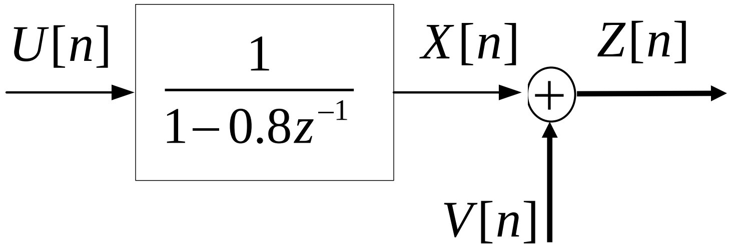
$$S_z(z)=S_x(z)+S_v(z)=\frac{1.8}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}+5=\frac{1.8+5(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}=\frac{8(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

ب) فیلتر وینر IIR غیرسببی

$$H(z)=\frac{S_{xz}(z)}{S_z(z)}=\frac{0.225}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\Rightarrow h[n]=0.3(0.5)^{|n|}\qquad \hat{X}[n]=0.3\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(0.5)^{|k|}Z[n-k]$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر

- مثال ۱– تخمین فرآیند $X[n]$



$$Z[n]=X[n]+V[n]$$

$$R_u[m]=1.8\delta[m],\quad R_v[m]=5\delta[m],\quad R_{uv}[m]=0$$

پ) فیلتر وینر IIR سببی

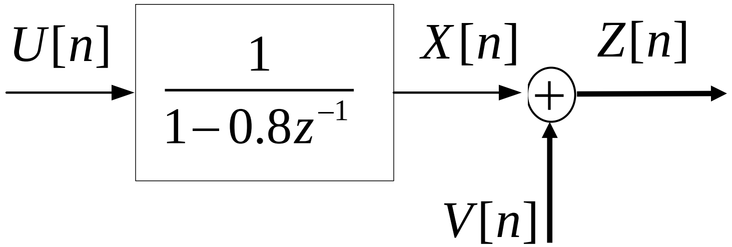
$$S_z(z)=8\frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}=L(z)L(z^{-1})\Rightarrow L(z)=\sqrt{8}\frac{(1-0.5z^{-1})}{(1-0.8z^{-1})}$$

$$H_c(z)=\frac{1}{L(z)}\left\{L(z)\frac{S_{xz}(z)}{S_z(z)}\right\}_+=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_x(z)}{L(z^{-1})}\right\}_+=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{\dfrac{1.8}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}}{\sqrt{8}\dfrac{(1-0.5z)}{(1-0.8z)}}\right\}_+$$

$$=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{1.8}{\sqrt{8}(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right\}_+=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{(-2z^{-1})1.8}{\sqrt{8}(1-0.8z^{-1})(1-2z^{-1})}\right\}_+=\frac{1}{L(z)}\left\{\frac{1.0607}{(1-0.8z^{-1})}-\frac{1.0607}{(1-2z^{-1})}\right\}_+$$

$$=\frac{1}{L(z)}\cdot\frac{1.0607}{(1-0.8z^{-1})}=\frac{0.375}{1-0.5z^{-1}}\quad\Rightarrow\quad h_c[n]=0.375(0.5)^n u[n]\qquad \hat{X}[n]=0.375\sum_{k=0}^{+\infty}(0.5)^k Z[n-k]$$

تخمین خطی یک فرآیند بر حسب مشاهدات فرآیند دیگر



- مثال ۱– تخمین فرآیند $X[n]$

$$Z[n]=X[n]+V[n]$$

$$R_u[m]=1.8\delta[m],\quad R_v[m]=5\delta[m],\quad R_{uv}[m]=0$$

ت) فیلتر وینر FIR سببی

$$\begin{cases} R_{xz}[m]=5(0.8)^{|m|} \\ R_z[m]=5(0.8)^{|m|}+5\delta[m] \end{cases}$$

$$M=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4048\\ 0.2381\end{pmatrix}$$

$$M=2 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}10 & 4 & 3.2\\ 4 & 10 & 4\\ 3.2 & 4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\\ h[2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 3.2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\\ h[2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3824\\ 0.2\\ 0.1176\end{pmatrix}$$

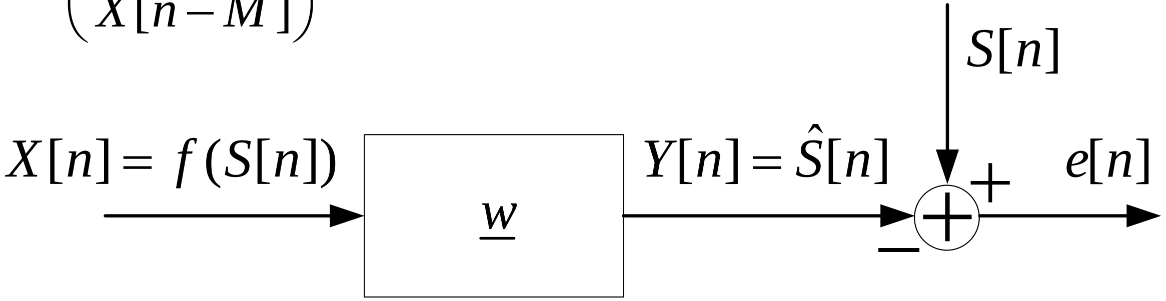
$$M=3 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}10 & 4 & 3.2 & 2.56\\ 4 & 10 & 4 & 3.2\\ 3.2 & 4 & 10 & 4\\ 2.56 & 3.2 & 4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\\ h[2]\\ h[3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 3.2\\ 2.56\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}h[0]\\ h[1]\\ h[2]\\ h[3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3768\\ 0.1906\\ 0.0997\\ 0.0587\end{pmatrix}$$

$$M\to\infty \quad\Rightarrow\quad h[n]=h_c[n]=0.375(0.5)^n u[n] \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}0.375 & 0.1875 & 0.0938 & 0.0469 & 0.0234 & \cdots\end{pmatrix}^T$$

فیلتر وینر FIR سببی برای ورود به فیلتر وفقی

- تغییر نمادها و تعاریف اولیه
  - تخمین خطی فرآیند $S[n]$ از روی مشاهده $X[n]$ در لحظه جاری و M نمونه قبل
  - فیلتر $w[n]$ سببی FIR دارای $M+1$ نقطه

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$



$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[M] \end{pmatrix}$$

$$Y[n] = \hat{S}[n] = w[0]X[n] + w[1]X[n-1] + \cdots + w[M]X[n-M]$$

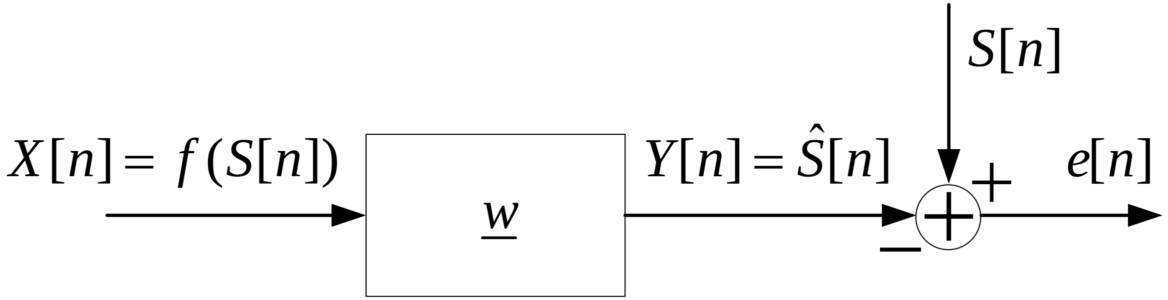
$$= \sum_{k=0}^{M} w[k]X[n-k] = \underline{w}^T \underline{X} = \underline{X}^T \underline{w}$$

  - فرآیندها و فیلتر حقیقی
  - معیار MMSE
  - ایستایی و تواما ایستایی فرآیندها
  - هدف: پیدا کردن ضرایب فیلتر
  - می‌نیمم کردن تابع هزینه/هدف (متوسط مربع خطا)

$$\varepsilon(\underline{w}) = E\left\{(e[n])^2\right\} = \overline{(e[n])^2} = E\left\{\left(S[n] - \hat{S}[n]\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left(S[n] - \sum_{k=0}^{M} w[k]X[n-k]\right)^2\right\}$$

فیلتر وینر FIR سببی



- روش اول: مشتق‌گیری
  - می‌نیمم کردن تابع هزینه/هدف (متوسط مربع خطا)
  - مشتق‌گیری نسبت به تک تک ضرایب
  - مشتق برداری نسبت به بردار ضرایب

$$\underline{X}=\begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix} \qquad \underline{w}=\begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[M] \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\underline{w})=E\left\{(e[n])^2\right\}=\overline{(e[n])^2}=E\left\{\left(S[n]-\hat{S}[n]\right)^2\right\}=E\left\{\left(S[n]-\sum_{k=0}^{M}w[k]X[n-k]\right)^2\right\}$$

$$=E\left\{\left(S[n]-\underline{w}^T\underline{X}\right)^2\right\}=E\left\{\left(S[n]-\underline{X}^T\underline{w}\right)^2\right\}=E\left\{\left(S[n]-\underline{w}^T\underline{X}\right)\left(S[n]-\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}$$

$$=E\left\{S[n]S[n]\right\}-E\left\{S[n].\left(\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}-E\left\{\left(\underline{w}^T.\underline{X}\right)S[n]\right\}+E\left\{\left(\underline{w}^T\underline{X}\right)\left(\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}$$

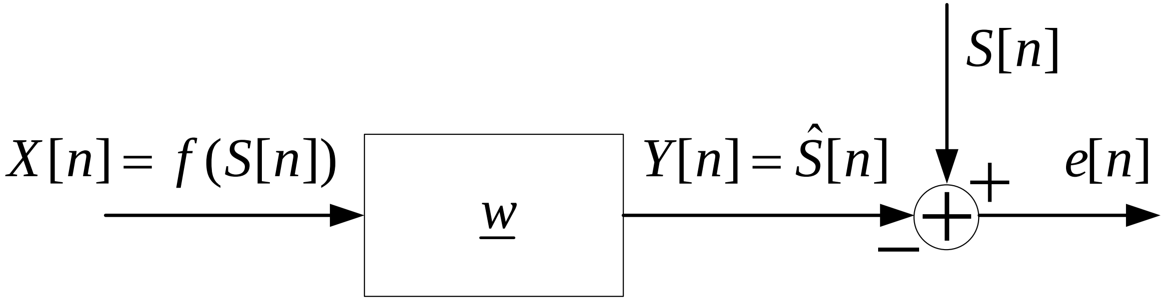
$$=\sigma_s^2-E\left\{S[n]\underline{X}^T\right\}\underline{w}-\underline{w}^T E\left\{S[n]\underline{X}\right\}+\underline{w}^T E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\}\underline{w}$$

$$=\sigma_s^2-\underline{P}^T\underline{w}-\underline{w}^T\underline{P}-\underline{w}^T R\underline{w}=\sigma_s^2-2\underline{P}^T\underline{w}+\underline{w}^T R\underline{w}$$

$$\underline{P}=E\left\{S[n]\underline{X}\right\}$$

$$R=E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\}$$

فیلتر وینر FIR سببی



- روش اول: مشتق‌گیری
  - می‌نیمم کردن تابع هزینه/هدف (متوسط مربع خطا)
  - مشتق‌گیری نسبت به تک تک ضرایب
  - مشتق برداری نسبت به بردار ضرایب

$$\varepsilon(\underline{w}) = \sigma_s^2 - \underline{P}^T \underline{w} - \underline{w}^T \underline{P} - \underline{w}^T R \underline{w} = \sigma_s^2 - 2\underline{P}^T \underline{w} + \underline{w}^T R \underline{w}$$

$$\underset{\underline{w}}{Min}\, \varepsilon(\underline{w}) \equiv \frac{d\varepsilon}{d\underline{w}} = 0 \Rightarrow -2\underline{P} + 2R\underline{w} = 0 \Rightarrow R\underline{w} = \underline{P} \Rightarrow \underline{w}_{opt} = R^{-1}\underline{P}$$

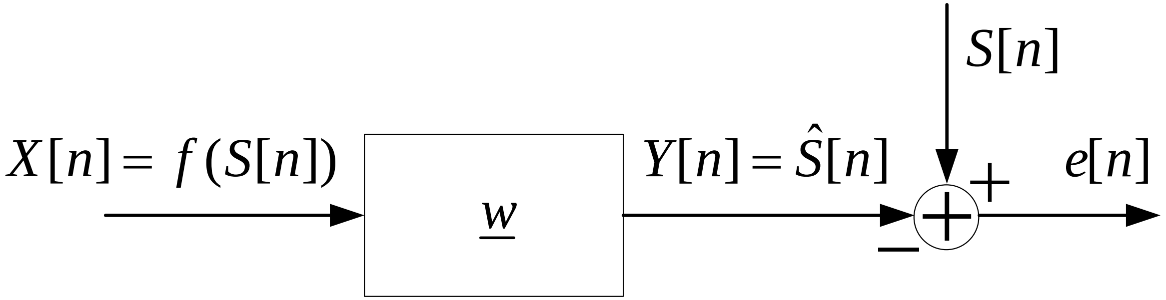
  - تعریف بردار $\underline{P}$ و ماتریس R

$$\underline{P} = E\{S[n]\underline{X}\} = E\left\{ S[n] \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} R_{sx}[0] \\ R_{sx}[1] \\ \vdots \\ R_{sx}[M] \end{pmatrix} = \underline{r}$$

$$R = E\{\underline{X}\,\underline{X}^T\}$$

$$= E\left\{ \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[n] & X[n-1] & \cdots & X[n-M] \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \cdots & R_x[M] \\ R_x[-1] & R_x[0] & \cdots & R_x[M-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x[-M] & R_x[1-M] & \cdots & R_x[0] \end{pmatrix}$$

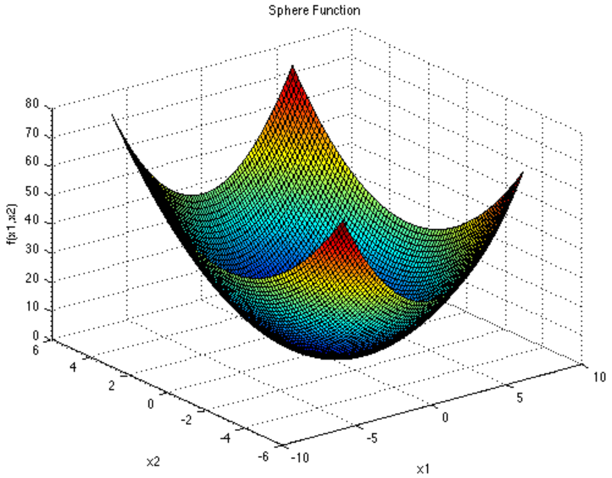
فیلتر وینر FIR سببی



- روش دوم: فرم کانونیک

$$\varepsilon(\underline{w}) = \sigma_s^2 - \underline{P}^T \underline{w} - \underline{w}^T \underline{P} - \underline{w}^T R \underline{w} = \left(\sigma_s^2 - \underline{P}^T R^{-1} \underline{P}\right) + (\underline{w} - R^{-1}\underline{P})^T R(\underline{w} - R^{-1}\underline{P})$$

$$\underset{\underline{w}}{Min}\, \varepsilon(\underline{w}) \equiv \underset{\underline{w}}{Min}\left((\underline{w} - R^{-1}\underline{P})^T R(\underline{w} - R^{-1}\underline{P})\right) \Rightarrow \underline{w}_{opt} = R^{-1}\underline{P}$$



– محدب بودن تابع هزینه (تابع هدف)

– مینیمم گلوبال

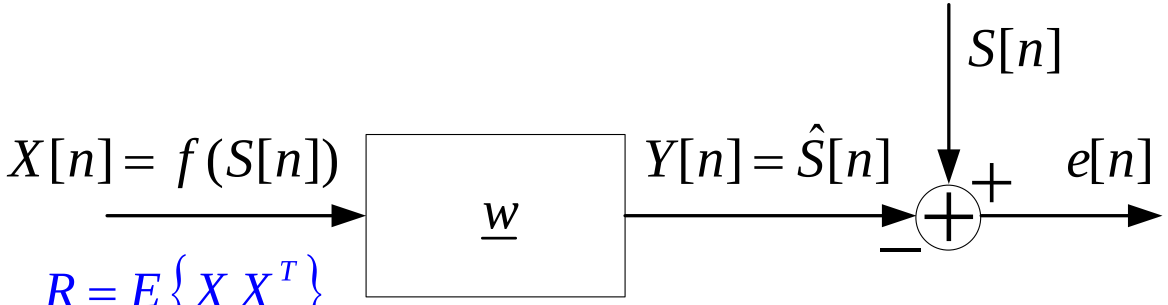
– خطای می‌نیمم $\varepsilon_{Min} = \varepsilon(\underline{w}_{opt}) = \left(\sigma_s^2 - \underline{P}^T R^{-1} \underline{P}\right)$

- روش سوم: تعامد خطا بر مشاهدات

$$\underset{\underline{w}}{Min}\, \varepsilon(\underline{w}) \equiv e[n] \perp \underline{X} \Rightarrow E\left\{e[n]\underline{X}^T\right\} = 0 \Rightarrow E\left\{\left(S[n] - \hat{S}[n]\right)\underline{X}^T\right\} = 0 \Rightarrow E\left\{\left(S[n] - \underline{w}^T \underline{X}\right)\underline{X}^T\right\} = 0$$

$$\Rightarrow E\left\{S[n]\underline{X}^T\right\} = \underline{w}^T E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\} \Rightarrow \underline{P}^T = \underline{w}^T R \Rightarrow R^T \underline{w} = \underline{P} \Rightarrow R\underline{w} = \underline{P} \Rightarrow \underline{w}_{opt} = R^{-1}\underline{P}$$

فیلتر وینر FIR سببی



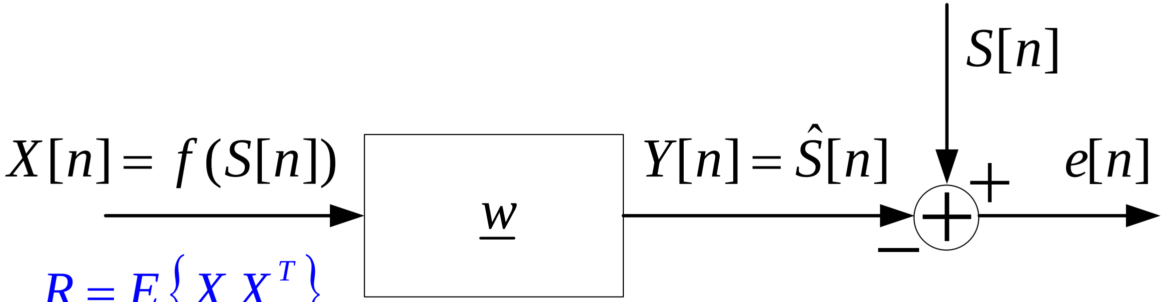
$$R = E\{\underline{X}\,\underline{X}^T\}$$

$$\underline{P} = E\{S[n]\underline{X}\}$$

$$\underline{w}_{opt} = R^{-1}\underline{P}$$

- مشکلات سه روش
  - ۱- نیاز به اطلاعات آماری
    - اطلاعات آماری مرتبه دوم فرآیند مشاهده
      - قابل محاسبه از روی مشاهدات
    - نیاز به اطلاعات آماری توام مشاهدات با فرآیندی که می‌خواهیم تخمین بزنیم
  - ۲- در دسترس نبودن تابع نمونه از فرآیندی که می‌خواهیم تخمین بزنیم
  - ۳- وارون کردن ماتریس
- روش حل مشکلات
  - حل مشکل سوم: روش تکراری
  - حل مشکل دوم: استفاده از مشاهده دوم
  - حل مشکل اول: فیلتر وفقی

فیلتر وینر FIR سببی

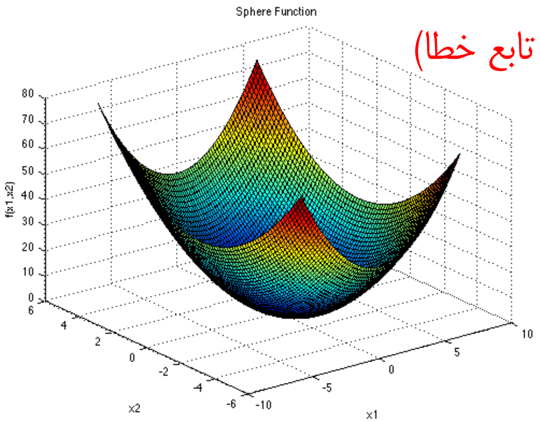


$$R=E\{\underline{X}\,\underline{X}^T\}$$

$$\underline{P}=E\{S[n]\underline{X}\}$$

$$\underline{w}_{opt}=R^{-1}\underline{P}$$

- روش چهارم: استفاده از یک الگوریتم بازگشتی برای حل مشکل سوم
  - الگوریتم‌های بازگشتی (تکراری) برای یافتن جواب یک مسئله بهینه‌سازی
  - روش Gradient descent/Steepest descent
  - شروع از یک نقطه اولیه و حرکت در راستای گرادیان در نقطه فعلی (بیشترین نرخ تغییرات تابع خطا)
  - حرکت به سمت می‌نیمم $\mu : step\ \ size$
    - کم کردن ضریبی از گرادیان از مقدار قبلی (شکل غیرنزولی تابع خطا)
  - بحث همگرایی: همگرایی روش/سرعت همگرایی

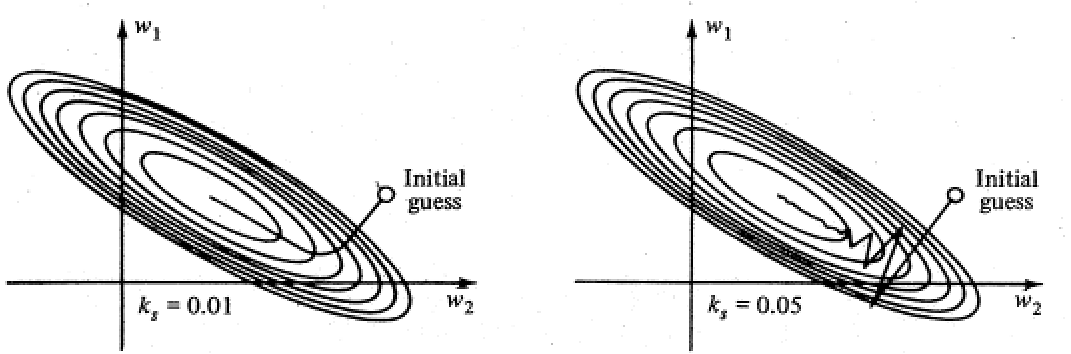


$$\varepsilon_i=\varepsilon(\underline{w}_i)=\sigma_s^2-2\underline{P}^T\underline{w}_i+\underline{w}_i^T R\underline{w}_i$$

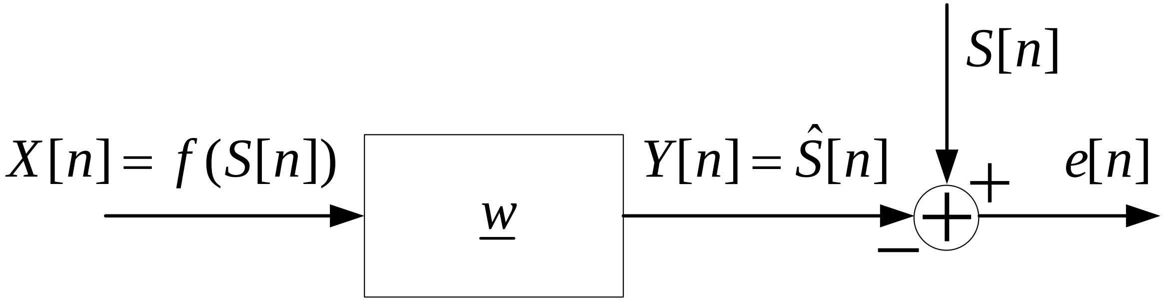
$$\underline{w}_{i+1}=\underline{w}_i-\mu\underline{\nabla}_i$$

$$\underline{\nabla}_i=\frac{d\varepsilon_i}{d\underline{w}_i}=-2\underline{P}+2R\underline{w}_i$$

$$\Rightarrow \underline{w}_{i+1}=\underline{w}_i+2\mu\left(\underline{P}-R\underline{w}_i\right)$$



فیلتر وینر FIR سببی



- روش چهارم
  - روش Gradient descent/Steepest descent
  - همگرایی روش/سرعت همگرایی

$$\varepsilon_i=\varepsilon(\underline{w}_i)=\sigma_s^2-2\underline{P}^T\underline{w}_i+\underline{w}_i^T R\underline{w}$$

$$=\left(\sigma_s^2-\underline{P}^T R^{-1}\underline{P}\right)+(\underline{w}_i-R^{-1}\underline{P})^T R(\underline{w}_i-R^{-1}\underline{P})=\varepsilon_{Min}+(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})^T R(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})$$

$$R=U\Lambda U^T,\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}\underline{u}_0 & \underline{u}_1 & \cdots & \underline{u}_M\end{pmatrix},UU^T=U^TU=I$$

  - ماتریس همبستگی: معین مثبت

$$\varepsilon_i=\varepsilon(\underline{w}_i)=\varepsilon_{Min}+(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})^T R(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})=\varepsilon_{Min}+(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})^T U\Lambda U^T(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})$$

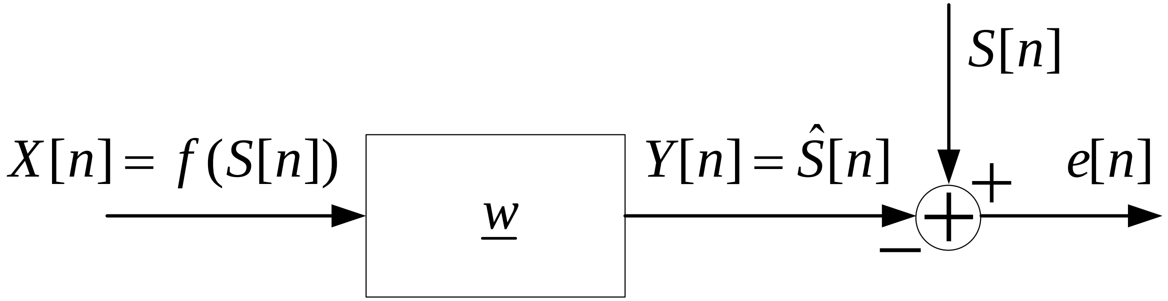
$$\underline{V}_i=U^T(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})\Rightarrow\varepsilon_i=\varepsilon(\underline{w}_i)=\varepsilon_{Min}+\underline{V}_i^T\Lambda\underline{V}_i$$

$$\underline{V}_i=U^T(\underline{w}_i-\underline{w}_{opt})\Rightarrow\underline{w}_i-\underline{w}_{opt}=U\underline{V}_i\Rightarrow\underline{w}_i=\underline{w}_{opt}+U\underline{V}_i$$

$$\underline{w}_{i+1}=\underline{w}_i+2\mu\left(\underline{P}-R\underline{w}_i\right)\Rightarrow\underline{w}_{opt}+U\underline{V}_{i+1}=\underline{w}_{opt}+U\underline{V}_i+2\mu\left(\underline{P}-R\left(\underline{w}_{opt}+U\underline{V}_i\right)\right)\Rightarrow$$

$$\underline{V}_{i+1}=\underline{V}_i-2\mu U^T RU\underline{V}_i\Rightarrow\underline{V}_{i+1}=\underline{V}_i-2\mu\Lambda\underline{V}_i=\left(I-2\mu\Lambda\right)\underline{V}_i\Rightarrow\underline{V}_{i+1}=\left(I-2\mu\Lambda\right)\underline{V}_i$$

فیلتر وینر FIR سببی



- روش چهارم
  - روش Gradient descent/Steepest descent

$$\underline{V}_{i+1}=(I-2\mu\Lambda)\underline{V}_i$$

$$\underline{w}=\begin{pmatrix} w[0]\\ w[1]\\ \vdots \\ w[M]\end{pmatrix} \qquad \underline{v}=\begin{pmatrix} v[0]\\ v[1]\\ \vdots \\ v[M]\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_{i+1}[0]\\ v_{i+1}[1]\\ \vdots \\ v_{i+1}[M]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2\mu\lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-2\mu\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\mu\lambda_M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_i[0]\\ v_i[1]\\ \vdots \\ v_i[M]\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_{i+1}[k]=(1-2\mu\lambda_k)v_i[k]=(1-2\mu\lambda_k)^i v_0[k]$$

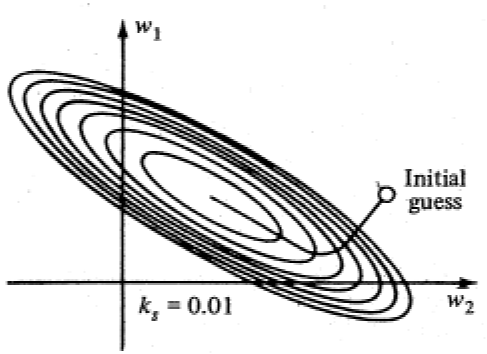
  - همگرایی روش/سرعت همگرایی
    - سرعت کمتر با مقادیر کوچکتر

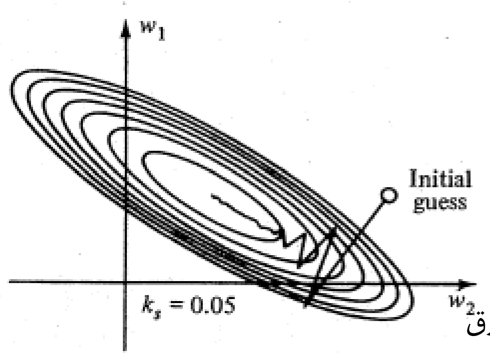
$$\Rightarrow |1-2\mu\lambda_k|<1 \Rightarrow -1<1-2\mu\lambda_k<1 \Rightarrow 0<\mu<\frac{1}{\lambda_k} \Rightarrow 0<\mu<\frac{1}{\lambda_{Max}}$$

$$\lim_{i\to\infty}\underline{w}_i=\underline{w}_{opt}$$

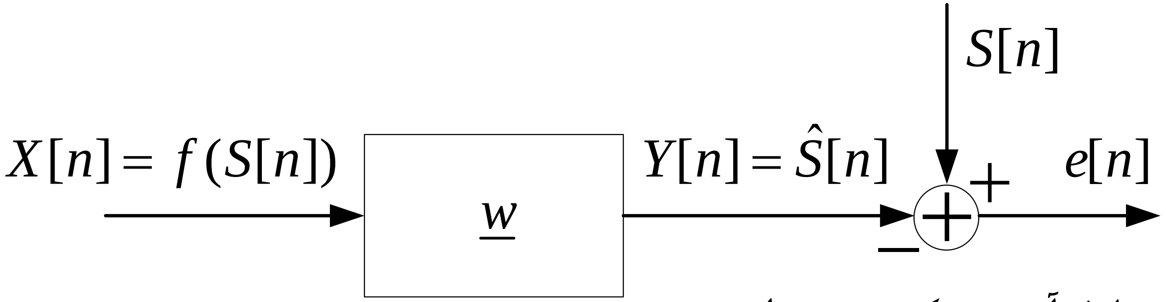
$\mu: step\ \ size$

  - همگرایی بدون نوسان $0<\mu<\dfrac{1}{2\lambda_{Max}}$
  - همگرایی با نوسان $\dfrac{1}{2\lambda_{Max}}<\mu<\dfrac{1}{\lambda_{Max}}$
  - واگرایی $\mu>\dfrac{1}{\lambda_{Max}}$





فیلتر وینر FIR سببی

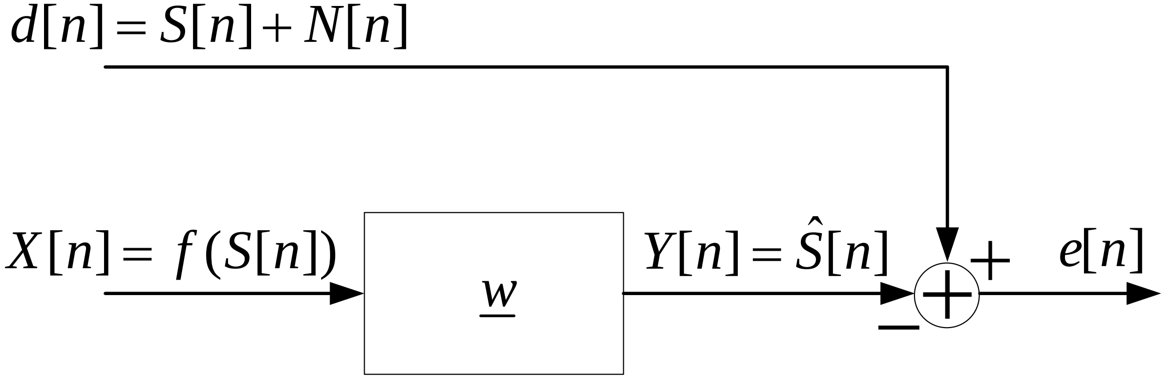


- حل مشکل دوم
  - نیاز به اطلاعات آماری توام مشاهدات با فرآیندی که می‌خواهیم تخمین بزنیم

$$\underline{R}=E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\}$$

$$\underline{P}=E\left\{S[n]\underline{X}\right\}$$

$$\underline{w}_{opt}=R^{-1}\underline{P}$$



  - استفاده از یک مشاهده دیگر (نسخه نویزی آغشته به نویز جمع شونده)

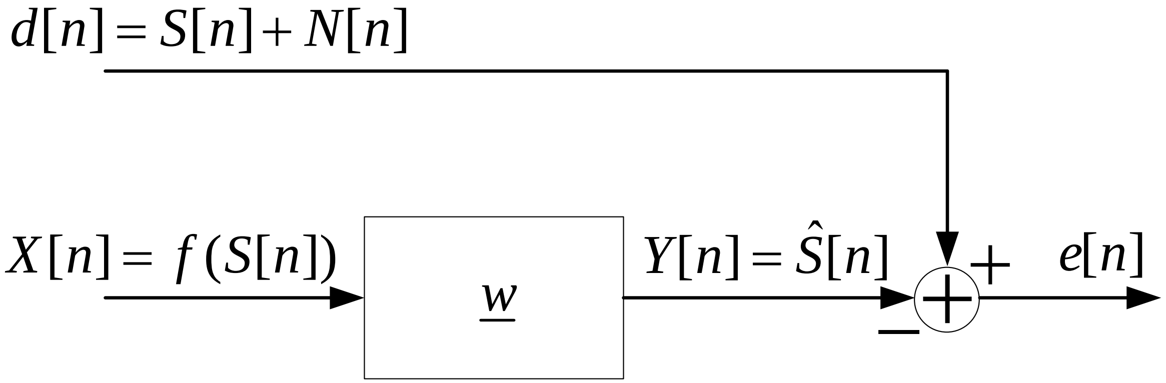
$$\varepsilon(\underline{w})=E\left\{(e[n])^2\right\}=\overline{(e[n])^2}=E\left\{\left(d[n]-\hat{S}[n]\right)^2\right\}=E\left\{\left(d[n]-\sum_{k=0}^{M}w[k]X[n-k]\right)^2\right\}$$

$$=E\left\{\left(d[n]-\underline{w}^T\underline{X}\right)^2\right\}=E\left\{\left(d[n]-\underline{X}^T\underline{w}\right)^2\right\}=E\left\{\left(d[n]-\underline{w}^T\underline{X}\right)\left(d[n]-\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}$$

$$=E\left\{d[n]d[n]\right\}-E\left\{d[n].\left(\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}-E\left\{\left(\underline{w}^T.\underline{X}\right)d[n]\right\}+E\left\{\left(\underline{w}^T\underline{X}\right)\left(\underline{X}^T\underline{w}\right)\right\}$$

$$=\sigma_d^2-E\left\{d[n]\underline{X}^T\right\}\underline{w}-\underline{w}^TE\left\{d[n]\underline{X}\right\}+\underline{w}^TE\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\}\underline{w}$$

فیلتر وینر FIR سببی



- حل مشکل دوم
  - شرط رسیدن به جواب اپتیمم

$$E\{d[n]\underline{X}\}=E\{(S[n]+N[n])\underline{X}\}=E\{S[n]\underline{X}\}+E\{N[n]\underline{X}\}=\underline{P}+E\{N[n]\underline{X}\}=\underline{P}+\underline{0}$$

$$\underline{R}=E\{\underline{X}\,\underline{X}^T\}$$

$$\underline{P}=E\{d[n]\underline{X}\}$$

$$\underline{w}_{opt}=R^{-1}\underline{P}$$

  - ناهمبسته بودن نویز جمع شونده در مشاهده دوم با همه اجزای مشاهده اول

$$\varepsilon(\underline{w})=\sigma_d^2-E\{d[n]\underline{X}^T\}\underline{w}-\underline{w}^T E\{d[n]\underline{X}\}+\underline{w}^T E\{\underline{X}\,\underline{X}^T\}\underline{w}$$

$$=\sigma_d^2-\underline{P}^T\underline{w}-\underline{w}^T\underline{P}-\underline{w}^T R\underline{w}=\sigma_d^2-2\underline{P}^T\underline{w}+\underline{w}^T R\underline{w}$$

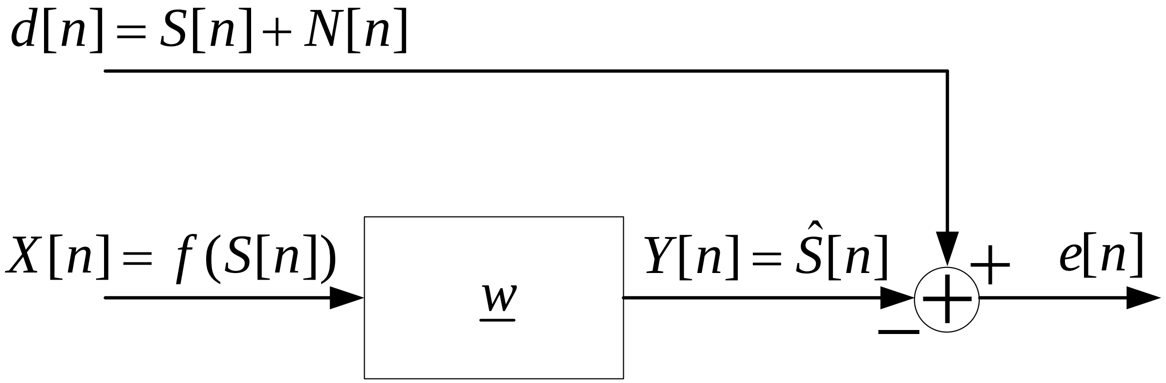
  - تفاوت تابع هزینه جدید با تابع هزینه اولیه
    - جایگزینی واریانس فرآیند مورد تخمین با واریانس مشاهده دوم
  - رسیدن به جواب اپتیمم با هر یک از چهار روش گفته شده
  - خطای می‌نیمم $\varepsilon_{Min}=\varepsilon(\underline{w}_{opt})=\left(\sigma_d^2-\underline{P}^T R^{-1}\underline{P}\right)$

فیلتر وفقی

- حل مشکل اول و رسیدن به فیلتر وفقی
  - نیاز به اطلاعات آماری
    - حذف امید ریاضی در تابع هزینه مسئله بهینه‌سازی
- پیشنهاد تابع هزینه جدید بدون امید ریاضی
  - ویژگی‌های تابع هزینه
  - چند پیشنهاد برای تابع هزینه
- تابع هزینه پیشنهادی Widrow
  - تابع هزینه: مربع خطای لحظه‌ای
  - الگوریتم گرادیان تصادفی
    - عدم دسترسی به گرادیان واقعی
    - قرار دادن تخمین گرادیان
  - اندیس تکرار: زمان $\mu : step\ \ size$

$$\underline{w}_n = \begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}[n] = \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \varepsilon = f(e[n]) \\ f(e[n]) \geq 0 \\ f(0) = 0 \\ e_2 > e_1 \Rightarrow f(e_2) \geq f(e_1) \end{cases}$$

$$\varepsilon(\underline{w}) = E\left\{(e[n])^2\right\} \rightarrow (e[n])^2 \ , \quad \sum_{k=0}^{n} (e[k])^2$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon(\underline{w}_n) = (e[n])^2 = \left(d[n] - \hat{S}[n]\right)^2 = \left(d[n] - \underline{w}_n^T \underline{X}[n]\right)^2$$

$$\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n - \mu \underline{\nabla}_n$$

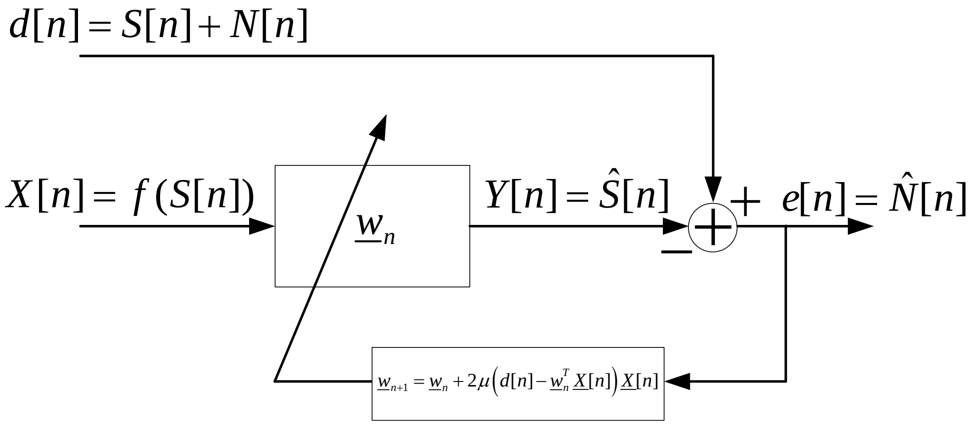
$$\underline{\nabla}_n = \frac{d\varepsilon_n}{d\underline{w}_n} = -2\left(d[n] - \underline{w}_n^T \underline{X}[n]\right)\underline{X}[n] = -2e[n]\underline{X}[n]$$

$$\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + 2\mu e[n]\underline{X}[n]$$

$$\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + 2\mu\left(d[n] - \underline{w}_n^T \underline{X}[n]\right)\underline{X}[n]$$

فیلتر وفقی

- فیلتر وفقی برای مسئله تخمین فرآیند
  – حذف نویز
  – اندیس تکرار زمان
  – الگوریتم Least Mean Square (LMS)
  – فیلتر FIR
  – دو مشاهده
    - سیگنال مرجع Reference: ورودی فیلتر
    - سیگنال اولیه Primary
  – کاسه مانند نبودن تابع هزینه جدید
  – همگرایی الگوریتم
  – جواب نهایی در صورت ایستایی



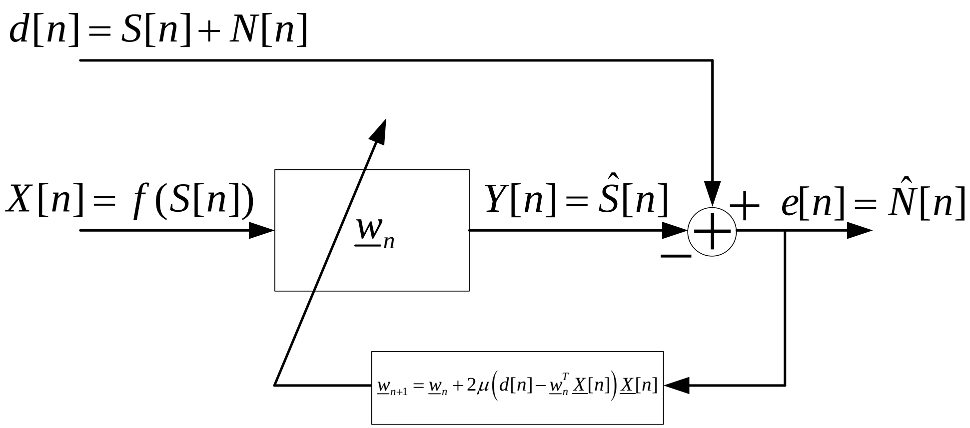
$$\begin{cases} \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu e[n]\underline{X}[n] \\ \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\left(d[n]-\underline{w}_n^T\underline{X}[n]\right)\underline{X}[n] \end{cases}$$

$$\underline{w}_n=\begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix} \qquad \underline{X}[n]=\begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$

$$E\{\varepsilon_n\}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\underline{w}_n=\underline{w}_{opt}+\Delta\underline{w}$$

$$E\left\{\lim_{n\to\infty}\underline{w}_n\right\}=\underline{w}_{opt}\equiv E\{\Delta\underline{w}\}=0$$

فیلتر وفقی



- فیلتر وفقی برای مسئله تخمین فرآیند
  - الگوریتم Least Mean Square (LMS)
  - فیلتر FIR
  - دو مشاهده

$$\underline{w}_n=\begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix}$$

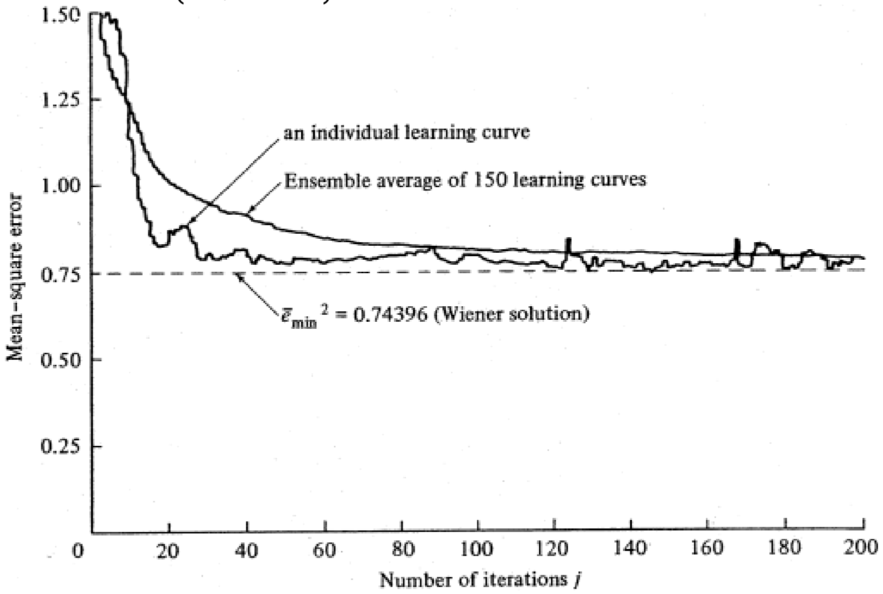
- عملکرد فیلتر وفقی (بدون نیاز به اطلاعات آماری)
  - خروجی فیلتر (تخمین بخشی از سیگنال اولیه که با سیگنال مرجع همبستگی دارد)
  - خروجی نهایی: خطا (تخمین بخش دیگر سیگنال اولیه)
  - خطای نهایی: به سمت $\varepsilon_{Min}=\left(\sigma_d^2-\underline{P}^T R^{-1}\underline{P}\right)$
  - شرط اصلی
    - سیگنال اولیه جمع حداقل دو بخش
    - فقط بخشی از سیگنال اولیه با سیگنال مرجع همبستگی داشته باشد
  - منحنی خطا بر حسب زمان
    - متوسطگیری روی چند بار تکرار

$$\underline{X}[n]=\begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$

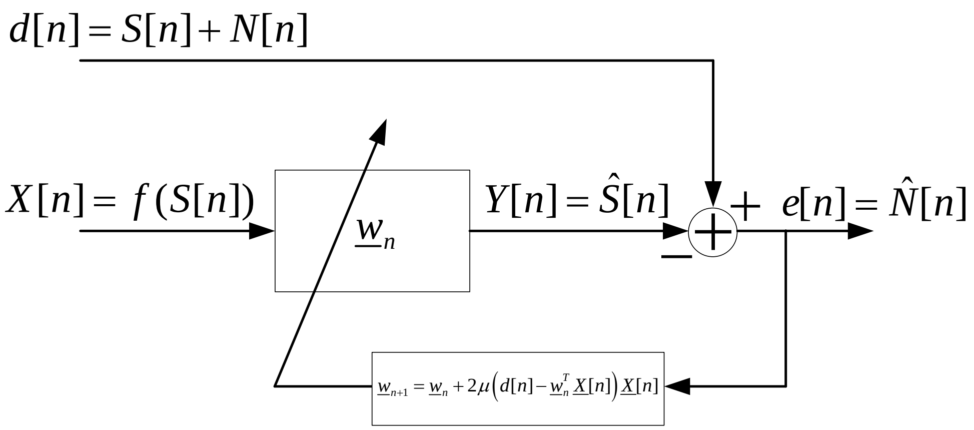
$$\begin{cases} \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu e[n]\underline{X}[n] \\ \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\left(d[n]-\underline{w}_n^T\underline{X}[n]\right)\underline{X}[n] \end{cases}$$

$$E\{\varepsilon_n\}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\underline{w}_n=\underline{w}_{opt}+\Delta\underline{w}$$

$$E\left\{\lim_{n\to\infty}\underline{w}_n\right\}=\underline{w}_{opt}\equiv E\{\Delta\underline{w}\}=0$$



فیلتر وفقی



- فیلتر وفقی برای مسئله تخمین فرآیند
  - حذف امید ریاضی به روش دیگر
  - الگوریتم Least Mean Square (LMS)
  - اندیس تکرار زمان

$$R=E\left\{\underline{X}\,\underline{X}^T\right\}=E\left\{\underline{X}[n]\underline{X}[n]^T\right\}\Rightarrow R[n]=\underline{X}[n]\underline{X}[n]^T$$

$$\underline{P}=E\left\{d[n]\underline{X}\right\}=E\left\{d[n]\underline{X}[n]\right\}\Rightarrow \underline{P}[n]=d[n]\underline{X}[n]$$

$$\underline{w}_{i+1}=\underline{w}_i+2\mu\left(\underline{P}-R\underline{w}_i\right)\Rightarrow \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\left(\underline{P}[n]-R[n]\underline{w}_n\right)$$

$$\Rightarrow \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\left(d[n]\underline{X}[n]-\underline{X}[n]\underline{X}[n]^T\underline{w}_n\right)$$

$$\Rightarrow \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\underline{X}[n]\left(d[n]-\underline{X}[n]^T\underline{w}_n\right)$$

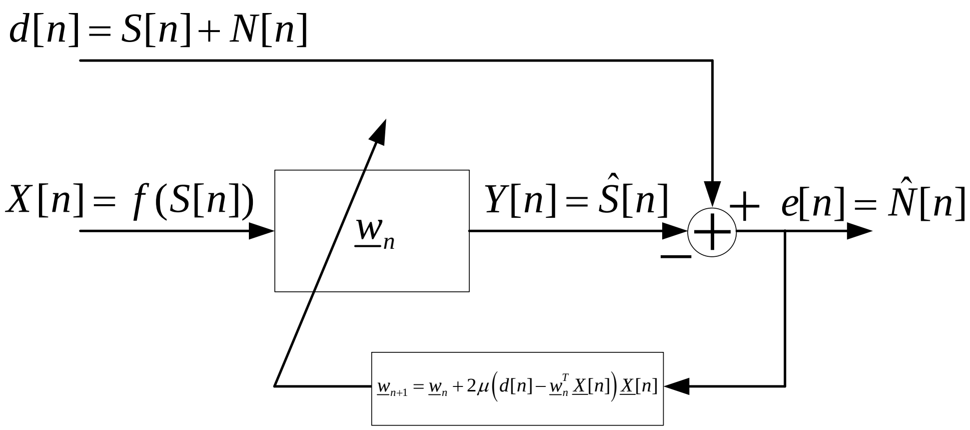
$$\underline{w}_n=\begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix}\qquad \underline{X}[n]=\begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$

- شرط روی فاکتور همگرایی
  - مقادیر ویژه ماتریس همبستگی مشاهدات
  - تخمین حد بالا بدون نیاز به اطلاعات آماری

$$0<\mu<\frac{1}{\lambda_{Max}}$$

$$trace(R)=\sum_k \lambda_k>\lambda_{Max}\Rightarrow 0<\mu<\frac{1}{trace(R)}$$

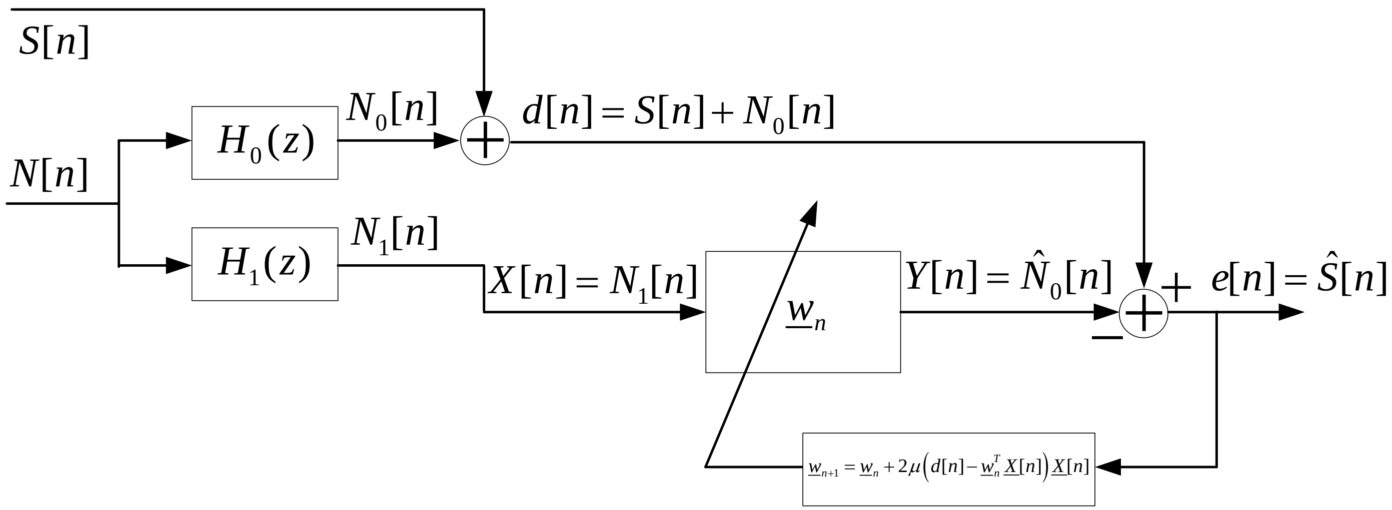
$$trace(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_x(\omega)d\omega$$



فیلتر وفقی

- حوزه‌های کاربردی
  - تخمین (حذف نویز)/شناسایی سیستم/....
- فیلتر وفقی برای کاربرد تخمین (حذف نویز)
  - تخمین یک فرآیند از روی مشاهدات یک فرآیند دیگر با فرض ایستایی توام آنها
  - عدم نیاز به داشتن اطلاعات آماری فرآیندها و یا تخمین آنها/عدم نیاز به وارون کردن ماتریس
  - فیلتر بازگشتی با زمان به عنوان اندیس تکرار و تنظیم ضرایب فیلتر در طول زمان (یادگیری/آموزش/تطبیق)
  - نیاز به دو مشاهده (سیگنال مرجع/سیگنال اولیه)
  - فیلتر خطی تغییر پذیر با زمان که در حالت حدی به فیلتر وینر FIR سببی میل می‌کند
  - امکان تعقیب در صورت ایجاد غیرایستایی‌های ضعیف (با فرض ورود به بازه ایستای جدید)
- سه بخش هر فیلتر وفقی
  - ساختار FIR (Transversal)/IIR
  - تابع هزینه/تابع هدف Cost function/Performance Index
    - می‌نیمم کردن
  - الگوریتم بازگشتی LMS/RLS

- ساختار Adaptive Noise Cancelling (ANC)
  - استقلال $S[n], N[n]$
  - همبستگی $N_0[n], N_1[n]$
  - استقلال $S[n], N_1[n]$



$$\begin{cases} d[n] = S[n] + N_0[n] \\ X[n] = N_1[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = \hat{N}_0[n] \\ e[n] = \hat{S}[n] \end{cases}$$

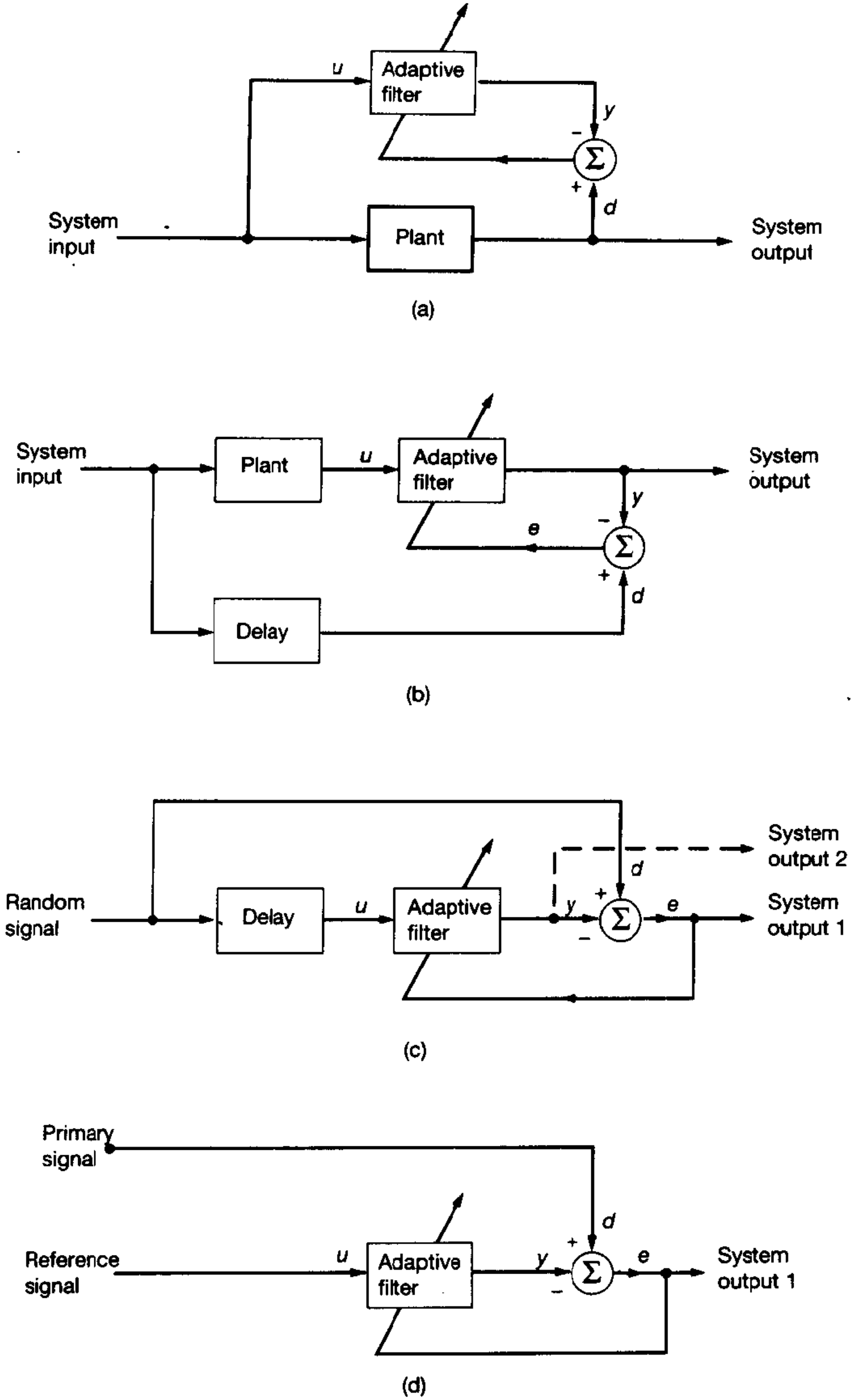
فیلتر وفقی

- تاریخچه فیلتر وفقی

Adaptive Filter Development

Year	Application	Developer(s)
1959	Adaptive pattern recognition system	Widrow *et al*
1960	Adaptive waveform recognition	Jacowatz
1965	Adaptive equalizer for telephone channel	Lucky
1967	Adaptive antenna system	Widrow *et al*
1970	Linear prediction for speech analysis	Atal
Present	numerous applications, structures, algorithms	

فیلتر وفقی

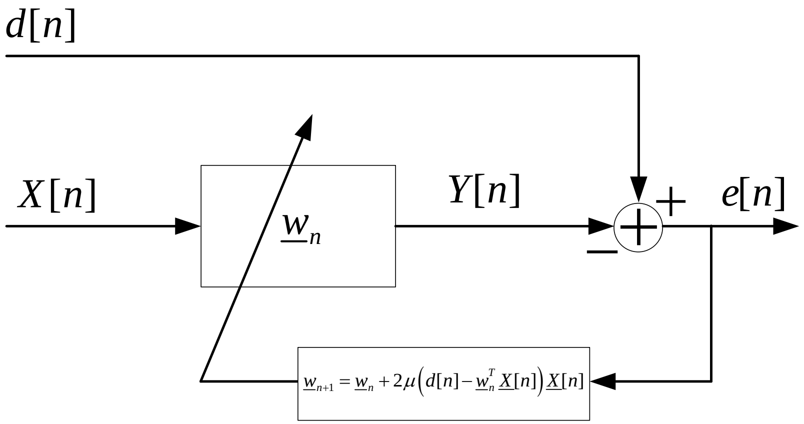


- حوزه‌های مختلف کاربرد فیلتر وفقی
  - شناسایی سیستم
  - مدل وارون (محاسبه وارون سیستم در حالت خطی بودن)
  - پیشگویی
  - تخمین/حذف نویز (تداخل)

فیلتر وفقی

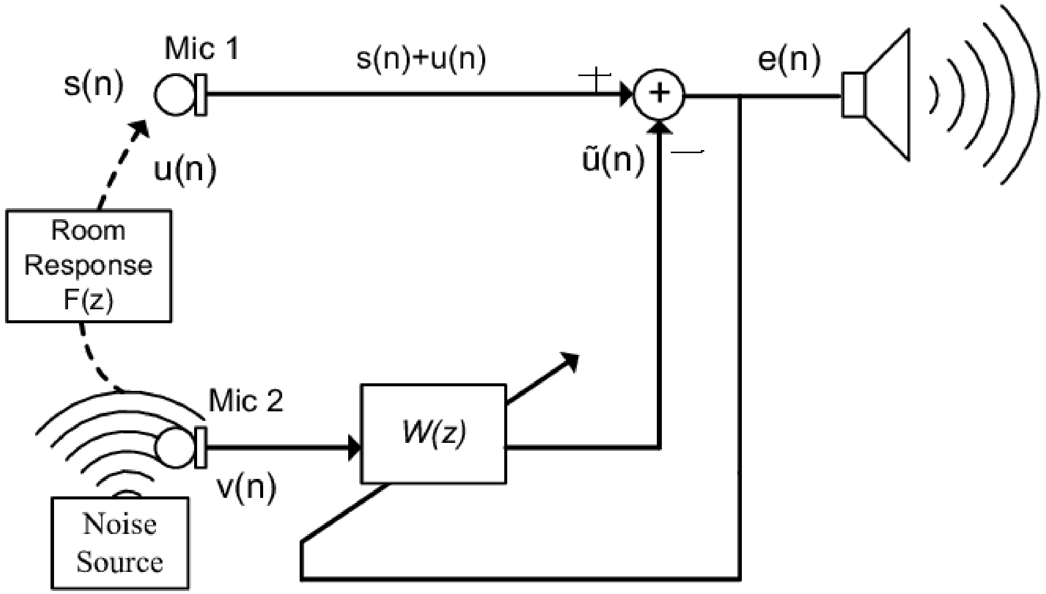
- نسخه‌های متعدد الگوریتم LMS

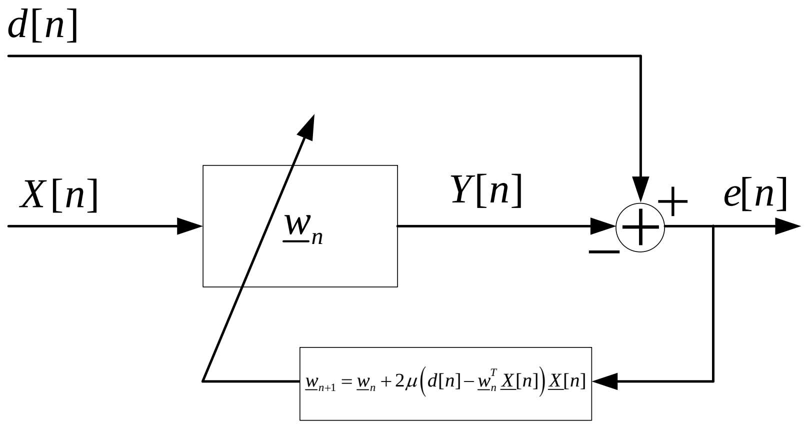
چند مثال از فیلتر وفقی



- حذف نویز از سیگنال صوتی با دو میکروفون
  - جداسازی علیرغم همپوشانی زمانی و فرکانسی
  - یک میکروفون شامل صوت و نویز محیط
  - یک میکروفون فقط شامل نویز محیط
  - استقلال نویز محیط و صوت
  - همبستگی نویز محیط ضبط شده روی دو میکروفون و عدم تساوی نقطه به نقطه
  - عملکرد در صورت جابجایی

$$\begin{cases} d[n] = S[n] + N_1[n] \\ X[n] = N_2[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = \hat{N}_1[n] \\ e[n] = \hat{S}[n] \end{cases}$$

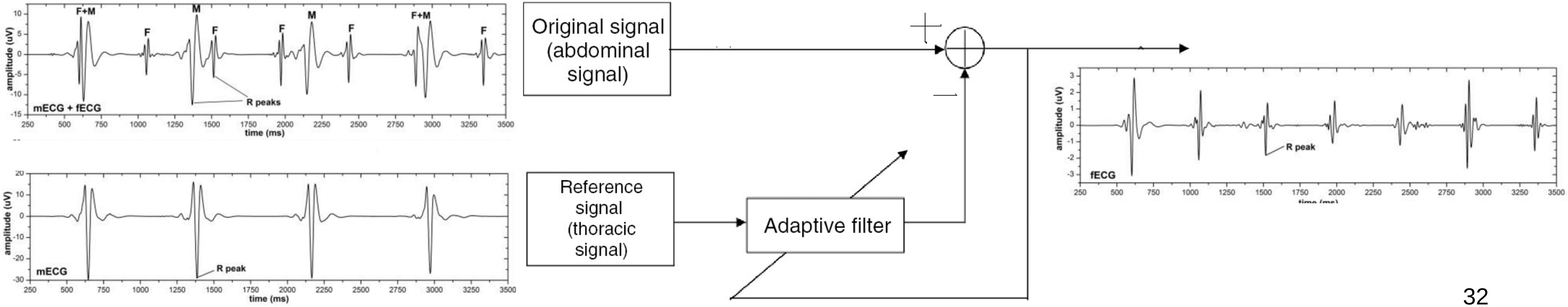




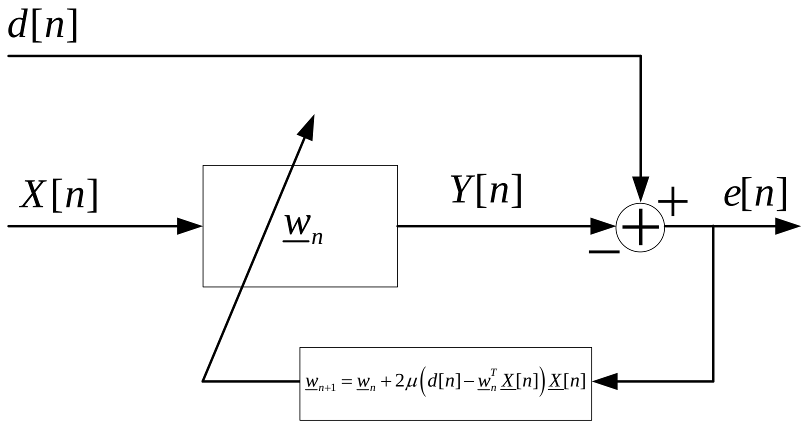
چند مثال از فیلتر وفقی

- جداسازی سیگنال قلبی جنین با دو الکترود
  - یک الکترود شکمی شامل سیگنال قلبی مادر و جنین و نویز
  - یک الکترود سینه شامل سیگنال قلبی مادر و نویز
  - دو سیگنال قلبی مادر نقطه به نقطه مثل هم نیستند ولی همبستگی دارند
  - استقلال سیگنال قلب مادر و جنین
  - اثر نویزها
  - عمکرد در صورت جابجایی

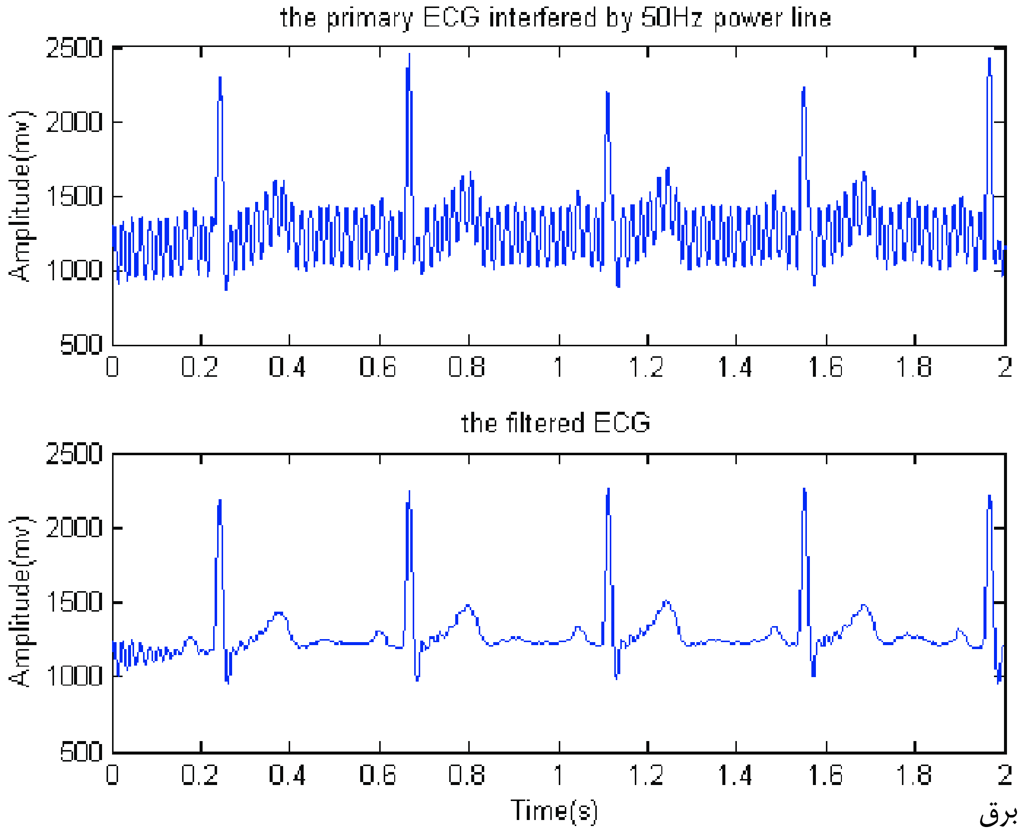
$$\begin{cases} d[n] = ECG_{m1}[n] + ECG_f[n] + N_1[n] \\ X[n] = ECG_{m2}[n] + N_2[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = E\hat{C}G_{m1}[n] \\ e[n] = E\hat{C}G_f[n] + \hat{N}_1[n] \end{cases}$$



چند مثال از فیلتر وفقی

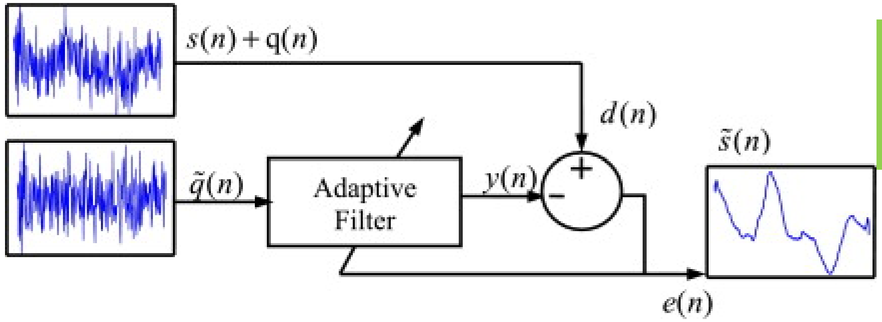


- حذف نویز برق شهر در ثبت سیگنال‌های حیاتی
  - یک ثبت شامل سیگنال حیاتی و نویز برق شهر
  - یک ثبت فقط شامل نویز برق شهر
  - تفاوت دامنه و فاز دو سینوسی دردو ثبت
  - تعقیب تغییرات کم فرکانس
    - استفاده از سینوس ساختگی با همان فرکانس



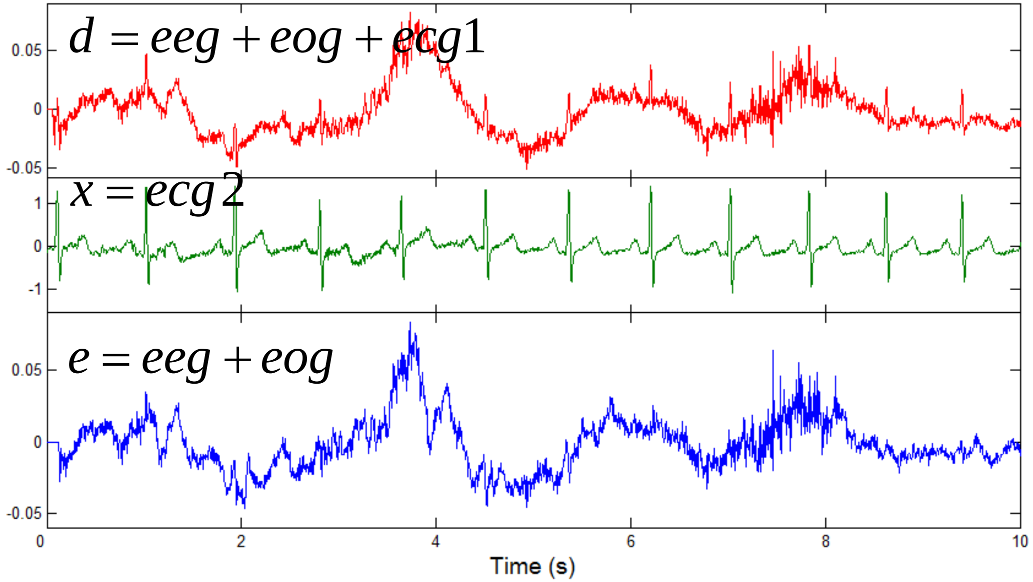
$$\begin{cases} d[n] = S[n] + A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ X[n] = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = A_1\hat{\cos}(\omega_0 t + \varphi_1) \\ e[n] = \hat{S}[n] \end{cases}$$

چند مثال از فیلتر وفقی

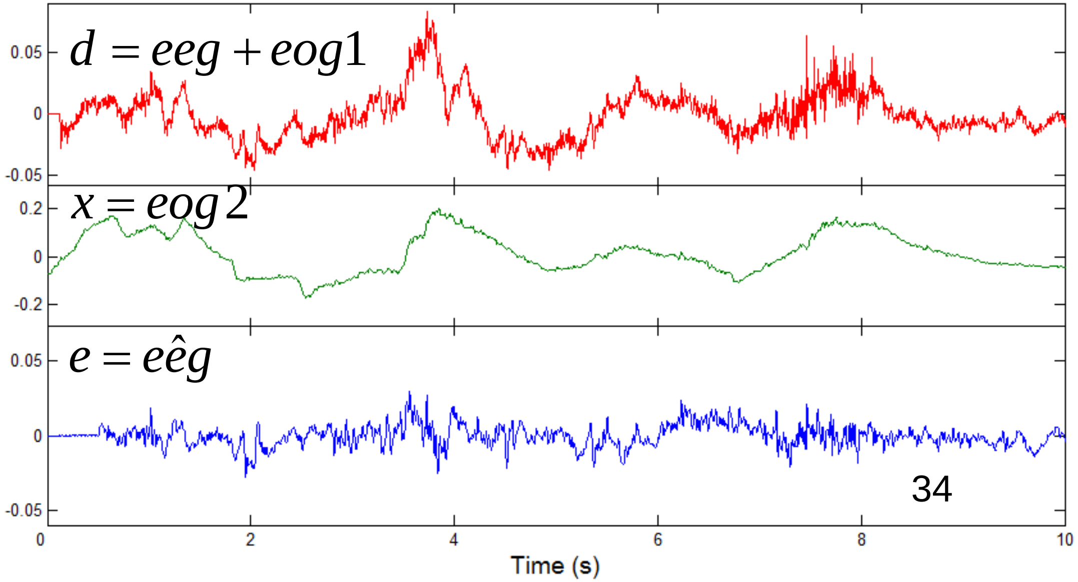


- حذف نویز از سیگنال حیاتی
  - یک ثبت شامل سیگنال حیاتی و یک نویز (سیگنال حیاتی دیگر)
  - یک ثبت فقط شامل نویز (سیگنال حیاتی دیگر)
  - جداسازی علیرغم همپوشانی زمانی و فرکانسی
  - استقلال نویز و سیگنال حیاتی
  - همبستگی نویز ثبت شده در دو نقطه متمایز و عدم تساوی نقطه به نقطه

$$\begin{cases} d[n]=S[n]+V_1[n] \\ X[n]=V_2[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n]=\hat{V}_1[n] \\ e[n]=\hat{S}[n] \end{cases}$$



$\Rightarrow$



MAG Correa, EL Leber , "Noise removal from EEG signals in polysomnographic records applying adaptive filters in cascade", - Adaptive filtering applications, chapter 8, 2011.

حل مثال ۱ با فیلتر وفقی

- مثال ۲– تخمین فرآیند $X[n]$

الف) ساختار فیلتر وفقی دونقطه‌ای و تعیین خروجی

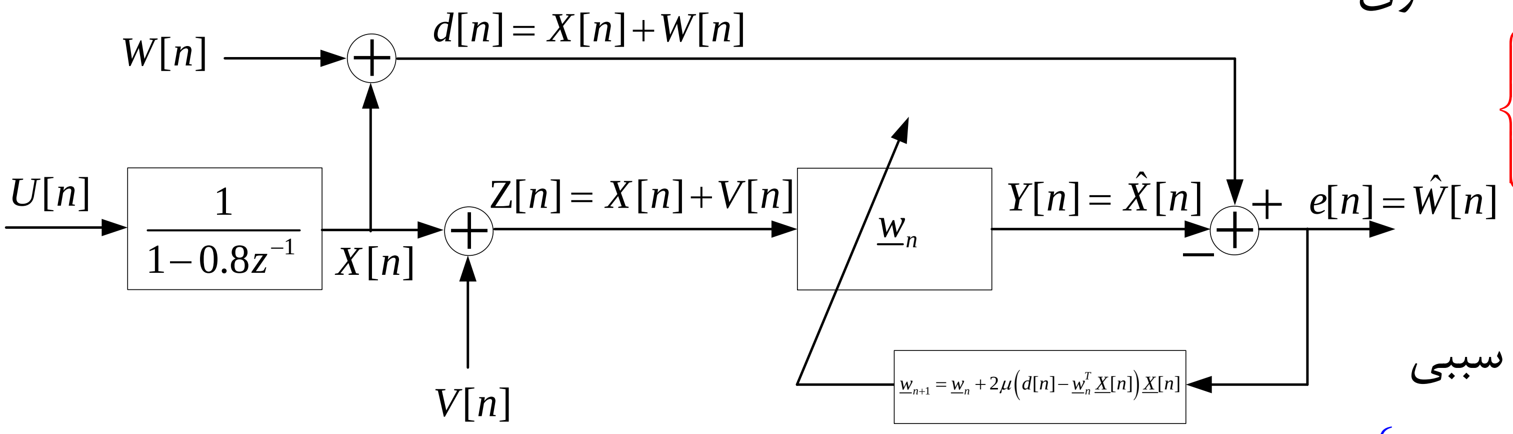
ب) محاسبه اطلاعات آماری

$$Z[n]=X[n]+V[n]$$

$$R_u[m]=1.8\delta[m],\quad R_v[m]=5\delta[m],\quad R_{uv}[m]=0$$

$$R_{wv}[m]=0,\quad R_{wu}[m]=0$$

$$\begin{cases} R_{dz}[m]=5(0.8)^{|m|} \\ R_z[m]=5(0.8)^{|m|}+5\delta[m] \end{cases}$$



پ) فیلتر وینر FIR سببی

$$\begin{cases} \underline{R}=E\{\underline{Z}\,\underline{Z}^T\} \\ \underline{P}=E\{d[n]\underline{Z}\} \end{cases} \Rightarrow \underline{w}_{opt}=\underline{R}^{-1}\underline{P}$$

$$\begin{pmatrix} R_z[0] & R_z[1] \\ R_z[1] & R_z[0] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{dz}[0] \\ R_{dz}[1] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.4048 \\ 0.2381 \end{pmatrix}$$

ت) معادله بازگشتی

$$\underline{w}_n=\begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \end{pmatrix},\quad \underline{Z}[n]=\begin{pmatrix} Z[n] \\ Z[n-1] \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{w}_{n+1}=\underline{w}_n+2\mu\underline{Z}[n]\left(d[n]-\underline{Z}[n]^T\underline{w}_n\right)$$

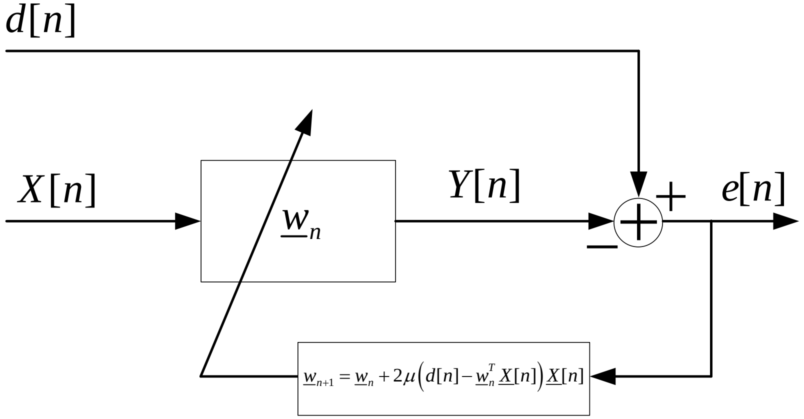
ث) حدود ضریب همگرایی

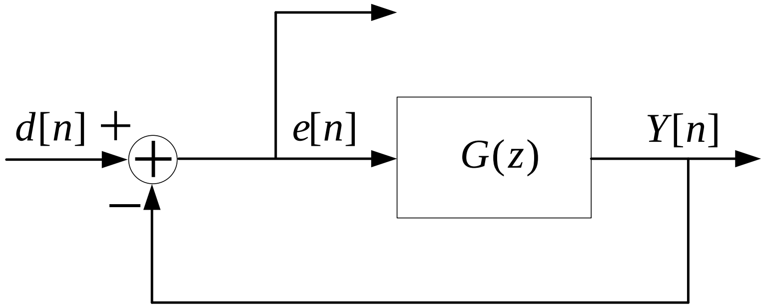
$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=14 \\ \lambda_1=6 \end{cases} \Rightarrow 0<\mu<\frac{1}{14}$$

ت) تحلیل مسئله در صورت جابجایی دو مشاهده

مثال

- مثال ۳– حذف نویز برق شهر
  - رفتار یک فیلتر میان‌نگذر (notch filter)
  - یک ثبت فقط شامل نویز برق شهر
  - تفاوت دامنه و فاز دو سینوسی دردو ثبت





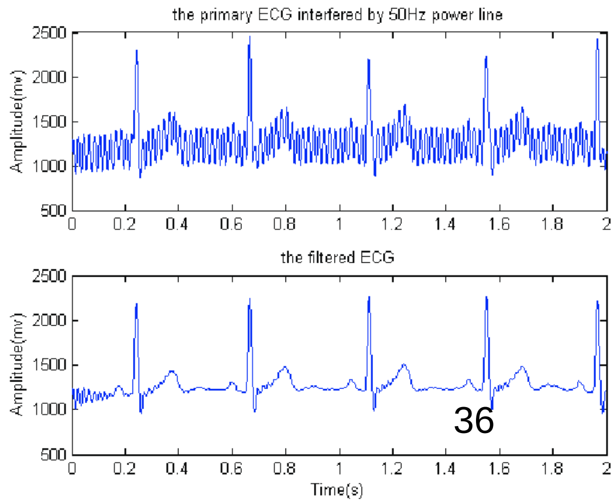
$$\begin{cases} d[n] = S[n] + A_2 \cos(\omega_0 n + \varphi_2) \\ X[n] = A_1 \cos(\omega_0 n + \varphi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = A_2 \hat{\cos}(\omega_0 n + \varphi_2) \\ e[n] = \hat{S}[n] \end{cases}$$

$$\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + 2\mu \underline{Z}[n]\left(d[n] - \underline{Z}[n]^T \underline{w}_n\right)$$

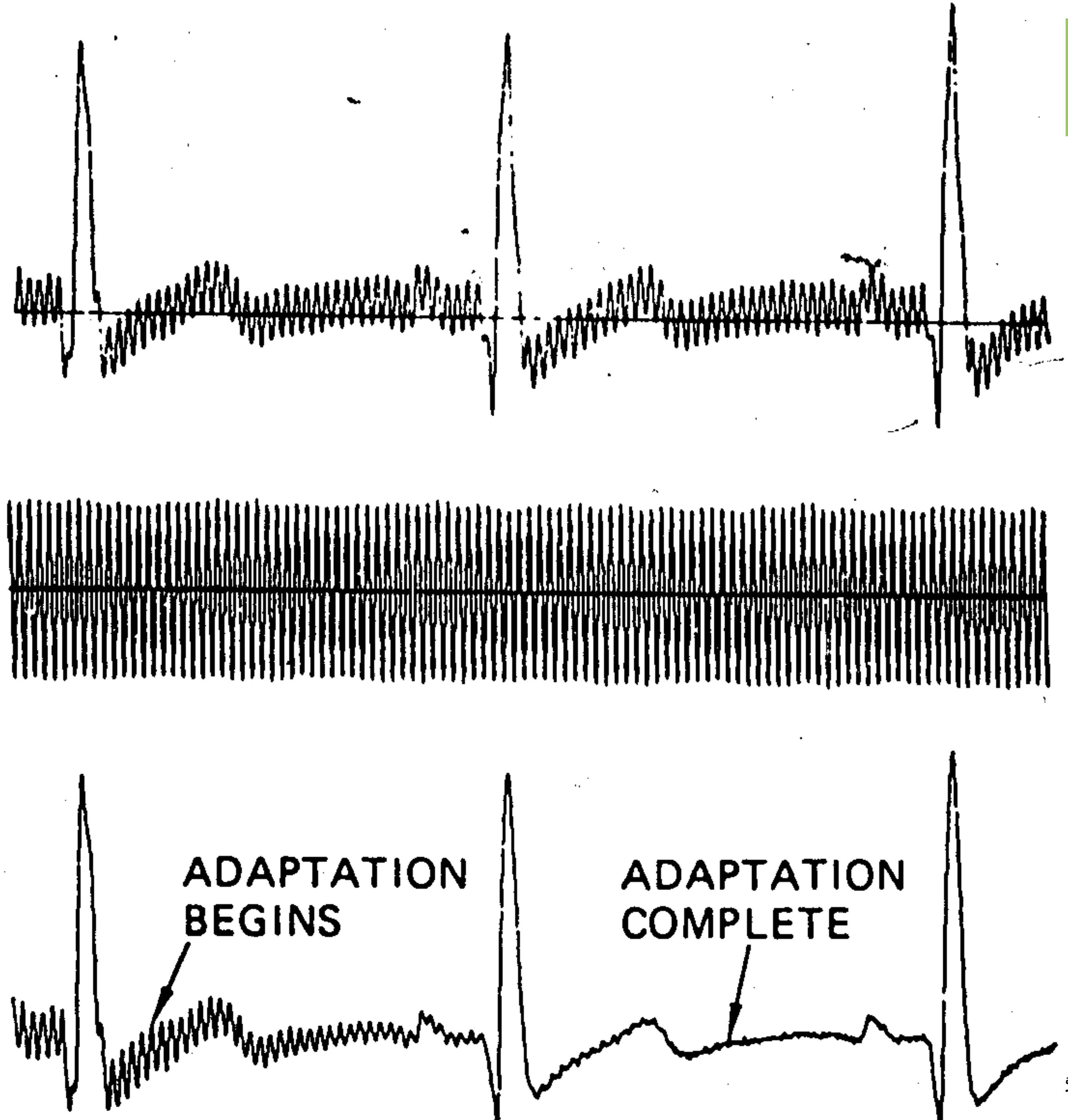
$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} \cong \frac{\mu(M+1)A_1^2}{2} \frac{1 - \cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}} \qquad \frac{\mu(M+1)A_1^2}{2} << 1$$

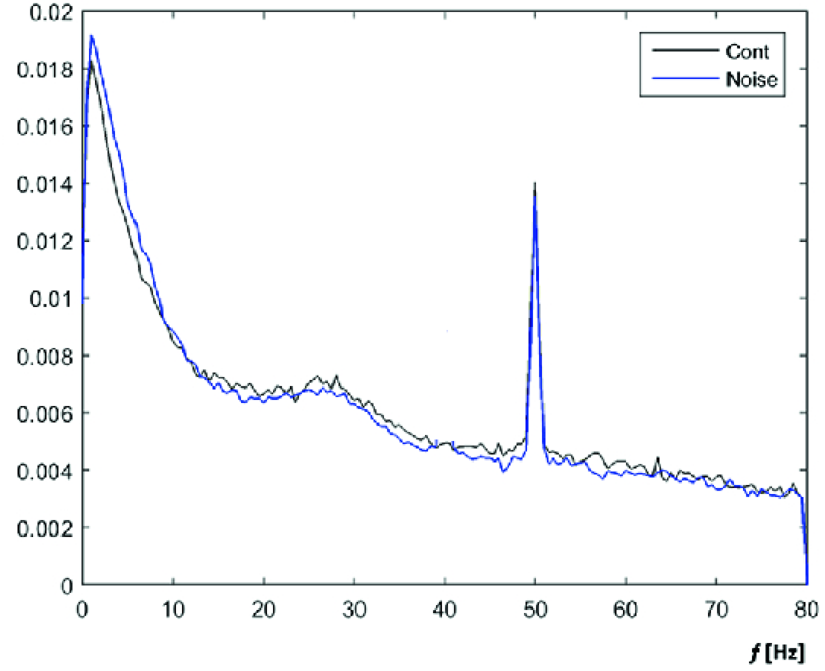
$$H(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{1}{1 + G(z)} \cong \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\left(1 - \frac{\mu(M+1)A_1^2}{4}\right)\cos\omega_0 z^{-1} + \left(1 - \mu(M+1)A_1^2\right) z^{-2}}$$

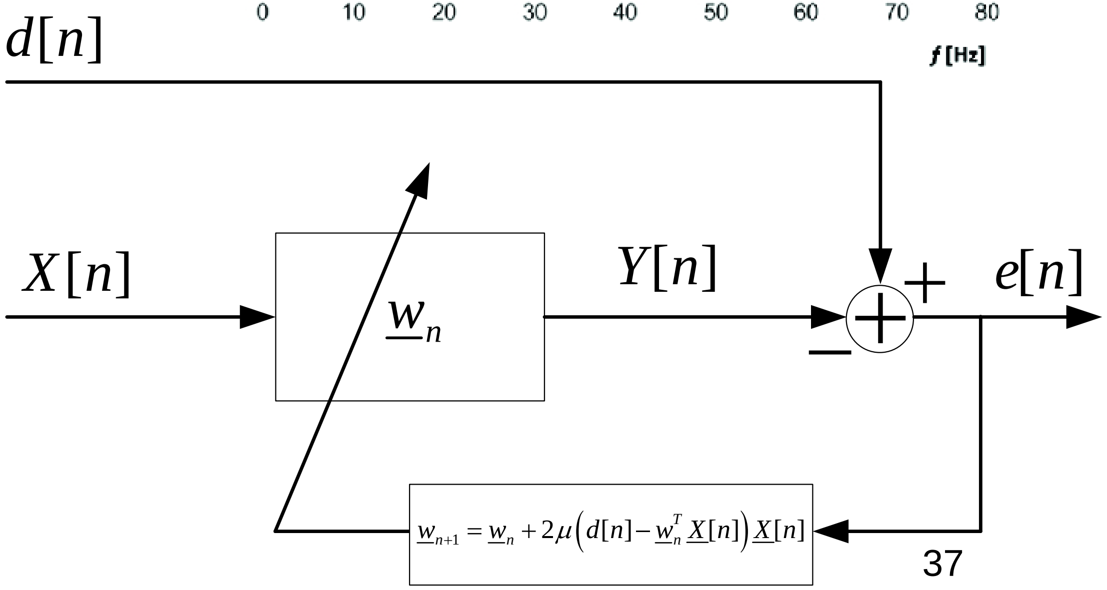
$$zeros: 1e^{\pm j\omega_0} \qquad poles: \left(1 - \frac{\mu(M+1)A_1^2}{2}\right) e^{\pm j\omega_0} \qquad \Delta\omega \cong \mu(M+1)A_1^2 \qquad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \cong \frac{\omega_0}{\mu(M+1)A_1^2}$$



مثال

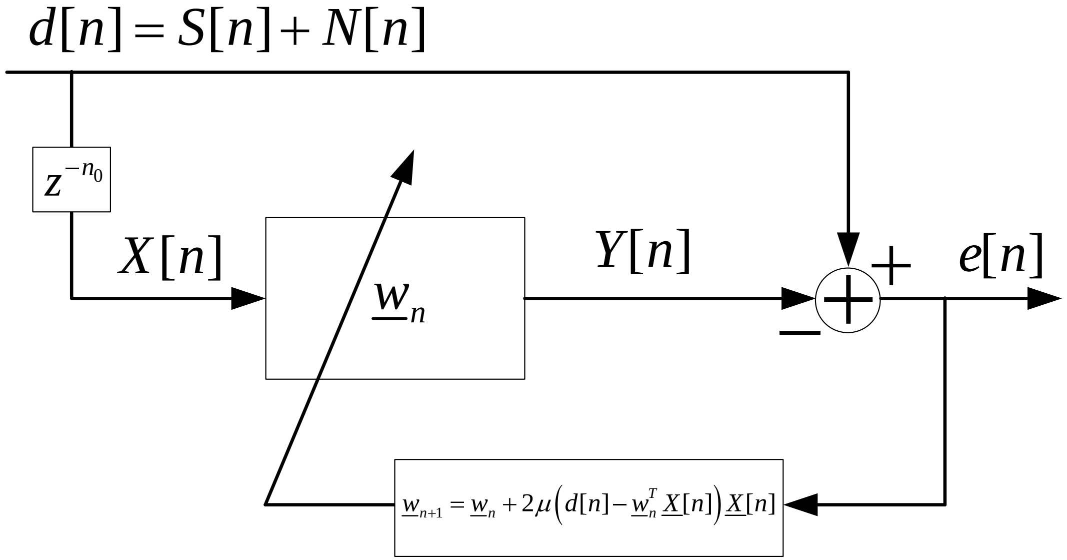

ADAPTATION BEGINS
ADAPTATION COMPLETE


Cont
Noise
f [Hz]


$d[n]$
$X[n]$
$\underline{w}_n$
$Y[n]$
+
−
$e[n]$
$\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + 2\mu\left(d[n] - \underline{w}_n^T \underline{X}[n]\right)\underline{X}[n]$

فیلتر وفقی با یک مشاهده

- فیلتر وفقی ANC بدون مرجع یا Adaptive Line Enhancer (ALE)
  - ساختن مرجع با تاخیر سیگنال اولیه



- حالت اول: نویز متناوب

$$\begin{cases} d[n] = S[n] + N[n] \\ X[n] = d[n-n_0] = S[n-n_0] + N[n-n_0] \\ n_0 >> 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = \hat{N}[n] \\ e[n] = \hat{S}[n] \end{cases}$$

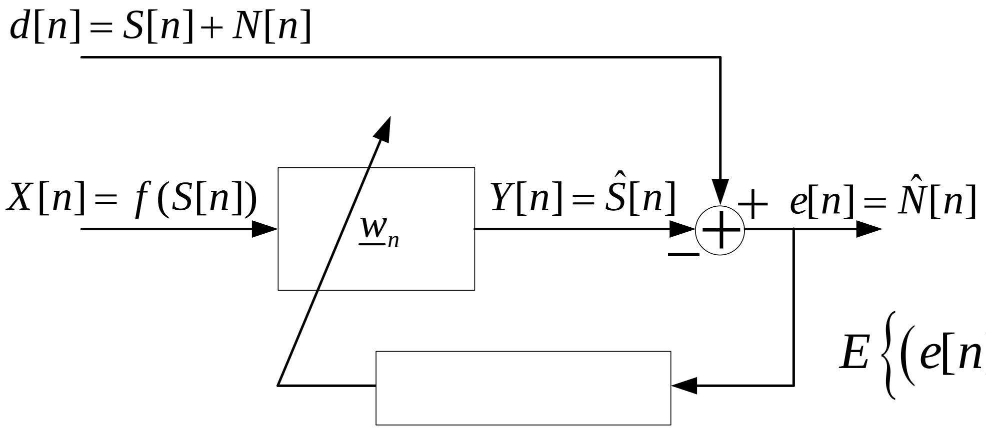
- حالت دوم: نویز سفید

$$\begin{cases} d[n] = S[n] + N[n] \\ X[n] = d[n-n_0] = S[n-n_0] + N[n-n_0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y[n] = \hat{S}[n] \\ e[n] = \hat{N}[n] \end{cases}$$

تخمین پارامترهای مدل AR با فیلتر وفقی

- تمرین

فیلتر وفقی با الگوریتم RLS



- تابع هزینه الگوریتم LMS
  - مربع خطای لحظه‌ای
- تابع هزینه الگوریتم RLS
  - مجموع مربعات خطای لحظه‌ای
  - ضریب فراموشی برای اهمیت بیشتر به خطای لحظه جاری $0<\lambda<1$
  - استفاده از آخرین ضریب برای خطای همه لحظات

$$E\left\{(e[n])^2\right\} \rightarrow \begin{cases} (e[n])^2 \\ \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} (e[k])^2 \end{cases}$$

$$\underline{w}_n = \begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix} \qquad \underline{X}[n] = \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon(\underline{w}_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} (e[k])^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \left(d[k]-\hat{S}[k]\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \left(d[k]-\underline{w}_k^T \underline{X}[k]\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \left(d[k]-\underline{w}_n^T \underline{X}[k]\right)^2$$

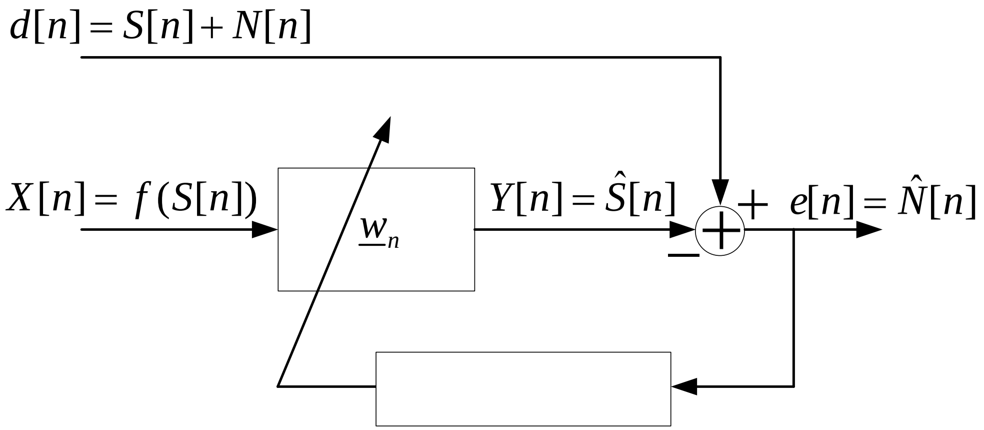
$$\begin{cases} R[n] = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k]\underline{X}^T[k] \\ \underline{P}[n] = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k] d[k] \end{cases}$$

$$\underline{\nabla}_n = \frac{d\varepsilon_n}{d\underline{w}_n} = -2\sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k]\left(d[k]-\underline{w}_n^T \underline{X}[k]\right) = -2\sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k]\left(d[k]-\underline{X}^T[k]\underline{w}_n\right)$$

$$Min\,\varepsilon(\underline{w}_n) \Rightarrow \underline{\nabla}_n = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k]\left(d[k]-\underline{X}^T[k]\underline{w}_n\right) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k]\underline{X}^T[k]\right)\underline{w}_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \underline{X}[k] d[k]\right)$$

$$\Rightarrow R[n]\underline{w}_n = \underline{P}[n] \Rightarrow \underline{w}_n = R^{-1}[n].\underline{P}[n]$$

فیلتر وفقی با الگوریتم RLS



- محاسبه ماتریس و بردار همبستگی
  - روش بازگشتی

$$\underline{w}_n=\begin{pmatrix} w_n[0] \\ w_n[1] \\ \vdots \\ w_n[M] \end{pmatrix} \qquad \underline{X}[n]=\begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-M] \end{pmatrix}$$

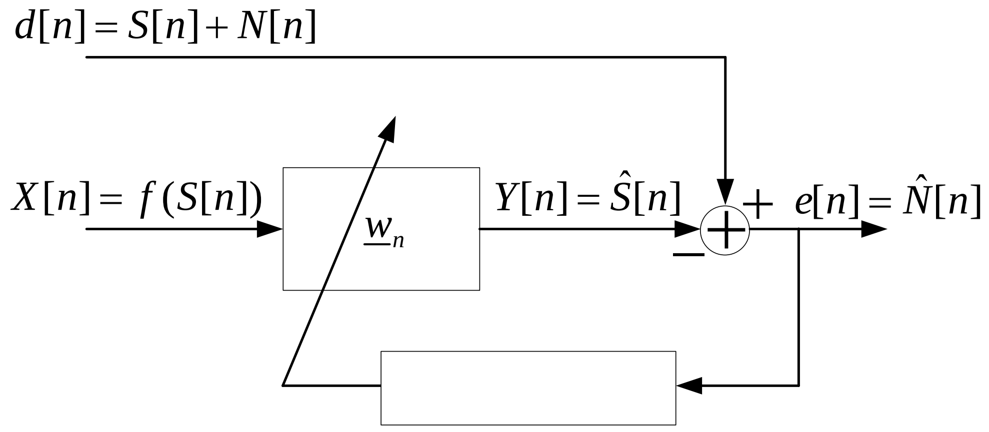
$$Min\,\varepsilon(\underline{w}_n) \Rightarrow R[n]\underline{w}_n=\underline{P}[n] \Rightarrow \underline{w}_n=R^{-1}[n].\underline{P}[n]$$

$$\begin{cases} R[n]=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}\,\underline{X}[k]\underline{X}^T[k]=\lambda R[n-1]+\underline{X}[n]\underline{X}^T[n] \\ \underline{P}[n]=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}\,\underline{X}[k]d[k]=\lambda \underline{P}[n-1]+\underline{X}[n]d[n] \end{cases}$$

- محاسبه بردار وزن به روش بازگشتی

$$\begin{aligned} \underline{w}_n &= R^{-1}[n].\underline{P}[n]=R^{-1}[n]\left(\lambda \underline{P}[n-1]+\underline{X}[n]d[n]\right) \\ &= R^{-1}[n]\left(\lambda R[n-1]\underline{w}_{n-1}+\underline{X}[n]d[n]\right) \\ &= R^{-1}[n]\left(\left(R[n]-\underline{X}[n]\underline{X}^T[n]\right)\underline{w}_{n-1}+\underline{X}[n]d[n]\right) \\ &= \underline{w}_{n-1}-R^{-1}[n]\underline{X}[n]\underline{X}^T[n]\underline{w}_{n-1}+R^{-1}[n]\underline{X}[n]d[n] \\ &= \underline{w}_{n-1}-R^{-1}[n]\underline{X}[n]\underline{w}_{n-1}^T\underline{X}[n]+R^{-1}[n]\underline{X}[n]d[n]=\underline{w}_{n-1}+R^{-1}[n]\underline{X}[n]\left(d[n]-\underline{w}_{n-1}^T\underline{X}[n]\right) \end{aligned}$$

فیلتر وفقی با الگوریتم RLS



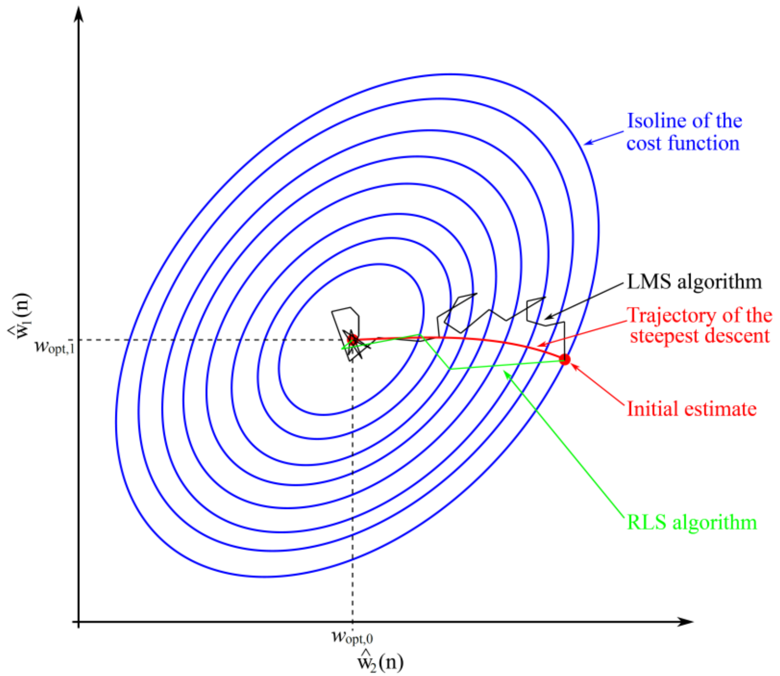
- محاسبه بازگشتی بردار وزن

$$\underline{w}_n=\underline{w}_{n-1}+R^{-1}[n]\underline{X}[n]\left(d[n]-\underline{w}_{n-1}^T\underline{X}[n]\right)$$

- محاسبه بازگشتی وارون ماتریس همبستگی

$$R[n]=\lambda R[n-1]+\underline{X}[n]\underline{X}^T[n]\Rightarrow R^{-1}[n]=\left(\lambda R[n-1]+\underline{X}[n]\underline{X}^T[n]\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(R^{-1}[n-1]-\frac{R^{-1}[n-1]\underline{X}[n]\underline{X}^T[n]R^{-1}[n-1]}{\lambda+\underline{X}[n]R^{-1}[n-1]\underline{X}^T[n]}\right)$$



- بحث همگرایی و مقایسه با الگوریتم LMS
  - همگرایی سریعتر — μ: *step size*
  - محاسبات بیشتر — λ: *forgetting factor*
  - خطای کمتر نسبت به جواب اپتیمم در بی‌نهایت

فیلتر وفقی با الگوریتم LMS و RLS

- تعمیم‌های و نسخه‌های متعدد برای الگوریتم LMS و RLS
- مقایسه دو الگوریتم

LMS Algorithm	RLS Algorithm
Simple and can be easily applied.	Increased complexity and computational cost.
Takes longer to converge.	Faster convergence.
Adaptation is based on the gradient-based approach that updates filter weights to converge to the optimum filter weights.	Adaptation is based on the recursive approach that finds the filter coefficients that minimize a weighted linear least squares cost function relating to the input signals.
Larger steady state error with respect to the unknown system.	Smaller steady state error with respect to unknown system.
Does not account for past data.	Accounts for past data from the beginning to the current data point.
Objective is to minimize the current mean square error between the desired signal and the output.	Objective is to minimize the total weighted squared error between the desired signal and the output.
No memory involved. Older error values play no role in the total error considered.	Has infinite memory. All error data is considered in the total error. Using the forgetting factor, the older data can be de-emphasized compared to the newer data. Since $0 \leq \lambda < 1$, applying the factor is equivalent to weighting the older error.
LMS based FIR adaptive filters in DSP System Toolbox™: •dsp.LMSFilter •dsp.FilteredXLMSFilter •dsp.BlockLMSFilter	RLS based FIR adaptive filters in DSP System Toolbox: •dsp.RLSFilter •dsp.FastTransversalFilter