Sharif University of Technology

پردازش سیگنال‌های حیاتی
مبحث اول- مقدمه‌ای در مورد سیگنال‌های یقینی و پردازش سیگنال

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

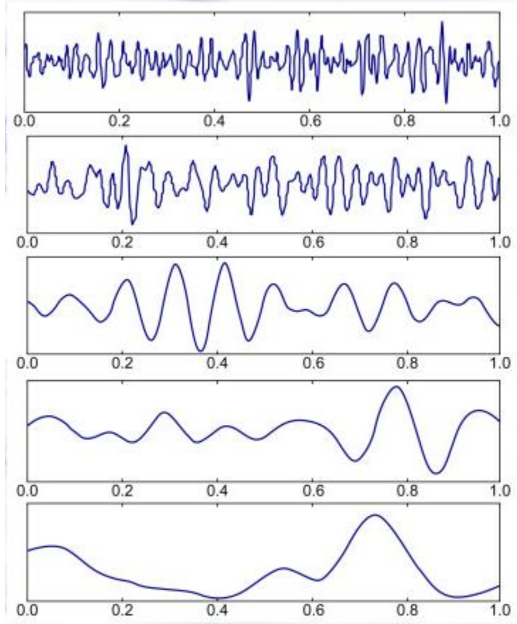
دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث اول- مقدمه‌ای در مورد سیگنال‌های یقینی و پردازش سیگنال

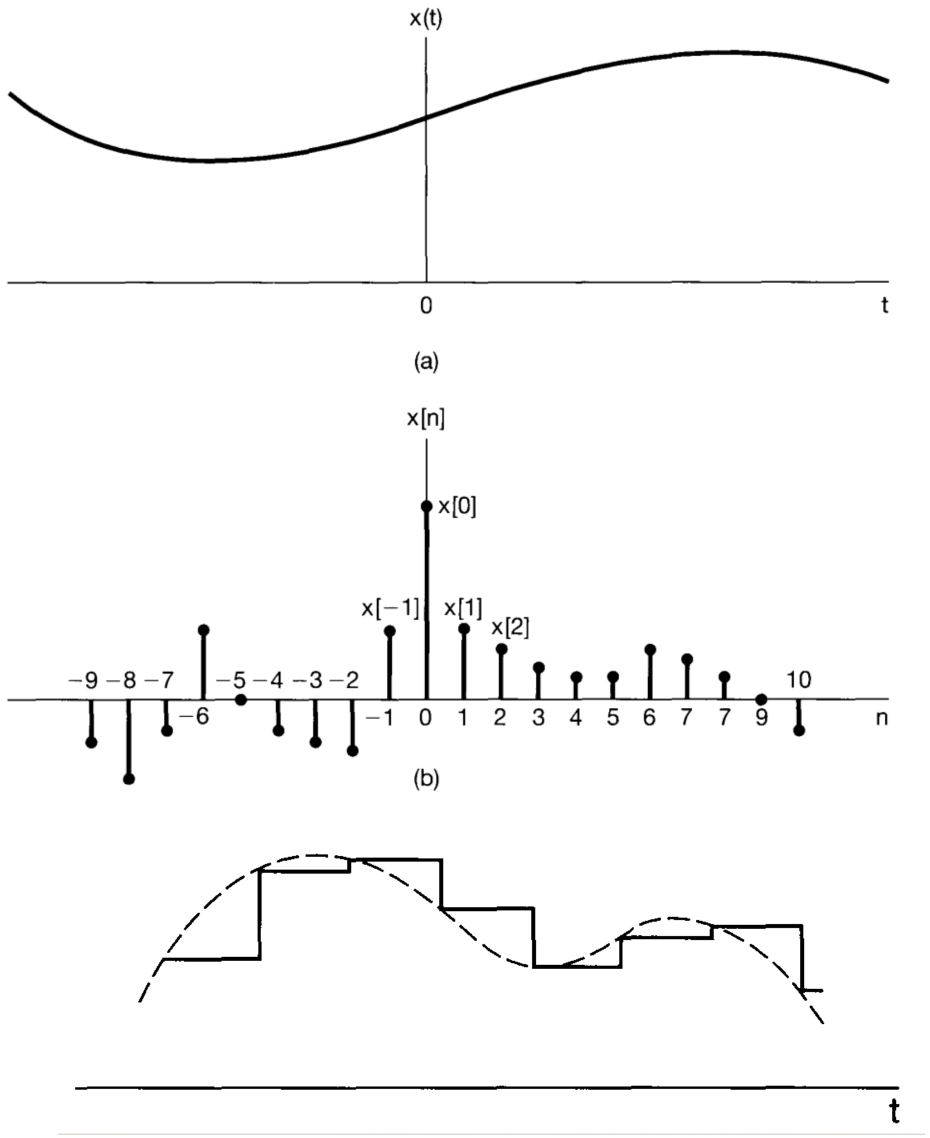
- مقدمه
- تعریف سیگنال و انواع آن
- هدف پردازش سیگنال
- تعریف انرژی، توان، ضرب داخلی و همبستگی برای سیگنال‌های یقینی
- تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته و گسسته
- قضیه پارسول برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته
- نمونه بردای
- تبدیل فوریه گسسته DFT
- ارتباط تبدیل فوریه سیگنال پیوسته و تبدیل فوریه سیگنال نمونه برداری شده و DFT یک قطعه از آن
- بررسی اثر پنجره گذاری
- تبدیل فوریه کوتاه مدت

مقدمه



- تعریف سیگنال (تابع/شکل موج)
  - نمایش تغییرات یک کمیت فیریکی بر حسب یک یا چند متغیر مستقل
  - متغیر مستقل: زمان/مکان
- انواع سیگنال از نظر تعداد متغیر مستقل
  - یک بعدی بر حسب زمان/مکان: ولتاژ، فشار، حرارت، پتانسیل ثبت شده روی بدن، میزان سود شرکت، ...
  - دوبعدی: تصویر
  - ابعاد بیشتر
- پردازش سیگنال
  - استخراج اطلاعات در مورد سیستمی که سیگنال را تولید کرده است
  - پردازش سیگنال‌های حیاتی/پزشکی/بیولوژیکی
- حوزه‌های مختلف پردازش
  - زمان/فرکانس/زمان-فرکانس/فضای ویژگی

مقدمه



- انواع سیگنال از نظر آماری
  - سیگنال یقینی/deterministic
  - سیگنال تصادفی/random/stochastic
  - سیگنال آشوبی/chaotic
- انواع سیگنال از نظر پیوسته/گسسته بودن در زمان/دامنه
  - سیگنال پیوسته/پیوسته زمان/analog/continuous
  - سیگنال گسسته/گسسته زمان/discrete
  - سیگنال کوانتیزه شده/quantized
  - سیگنال دیجیتال/digital
- سیگنال مورد نظر در این درس
  - یک‌بعدی
  - یقینی/تصادفی
  - پیوسته/گسسته

مفاهیم اولیه مربوط به سیگنال‌های یقینی

- تعریف انرژی و توان یک سیگنال
  - انرژی: مساحت مربع دامنه سیگنال روی همه محور زمان
  - توان (توان متوسط): انرژی در واحد زمان
  - وضعیت سیگنال در زمان‌های بزرگ

$$\begin{cases} E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt \\ P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt \\ P_x = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |x(t)|^2\, dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \\ P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2 \\ P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 \end{cases}$$

- انواع سیگنال از نظر انرژی و توان
  - سیگنال انرژی $E_x < \infty, P_x = 0$
  - سیگنال توان $E_x = \infty, P_x < \infty$
  - سیگنال دسته سوم $E_x = \infty, P_x = \infty$
- تعریف ضرب داخلی بین دو سیگنال

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n] \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} x[n] y^*[n] \end{cases}$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t) dt \end{cases}$$

مفاهیم اولیه مربوط به سیگنال‌های یقینی

- تعریف همبستگی بین دو سیگنال
  - شباهت بین دو سیگنال برای شیفت‌های مختلف

$$R_{xy}(\tau)=\langle x(t),y(t-\tau)\rangle=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y^*(t-\tau)dt\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y^*(t-\tau)dt=\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0}x(t)y^*(t-\tau)dt\end{cases}$$

$$R_{xy}[m]=\langle x[n],y[n-m]\rangle=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]y^*[n-m]\\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}x[n]y^*[n-m]=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]y^*[n-m]\end{cases}$$

- تعریف خودهمبستگی یک سیگنال
  - شباهت سیگنال با شیفت یافته خودش

$$R_{x}(\tau)=\langle x(t),x(t-\tau)\rangle=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)dt=\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0}x(t)x^*(t-\tau)dt\end{cases}$$

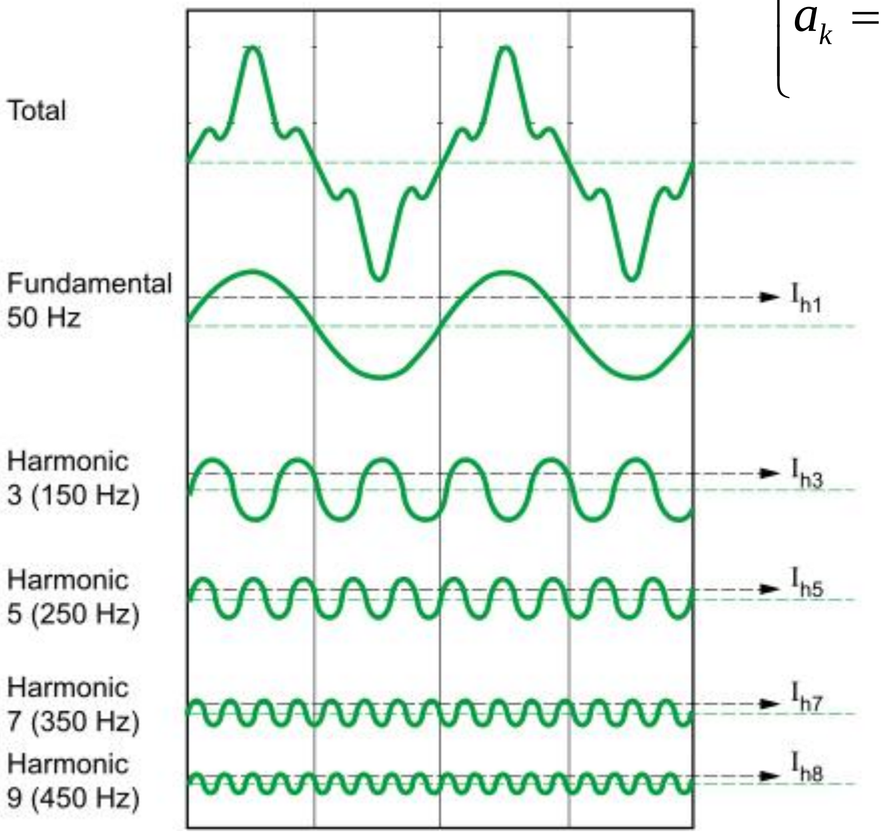
$$R_{x}[m]=\langle x[n],x[n-m]\rangle=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]x^*[n-m]\\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}x[n]x^*[n-m]=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]x^*[n-m]\end{cases}$$

- خواص تابع خودهمبستگی
  - انرژی/توان در مبدا $R_x[0]=\begin{cases}E_x\\ P_x\end{cases}$
  - تقارن هرمیتی $R_x[-m]=R_x^*[m]$
  - نزولی بودن دامنه $R_x[0]\geq|R_x[m]|$

توصیف سیگنال در حوزه فرکانس

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega_0 t \\ x(t) = e^{j\omega_0 t} \end{cases} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{cases}$$

- یک سیگنال سینوسی با فرکانس ω_0
- سیگنال متناوب با دوره تناوب T_0
- هر سیگنال متناوب را می‌توان به صورت جمع تعدادی سینوسی نوشت
  - یک سینوسی مختلط با همان دوره تناوب (همان فرکانس)
    - مولفه اصلی (هارمونیک اصلی – هارمونیک اول)
  - سینوسی مختلط با فرکانس دو برابر فرکانس اصلی (هارمونیک دوم)
  - سینوسی مختلط با فرکانس سه برابر فرکانس اصلی (هارمونیک سوم)
  - سینوسی‌های مختلطی با فرکانس مضارب صحیح و مثبت و منفی فرکانس اصلی
  - سینوسی با فرکانس صفر (مولفه dc)



- هر سیگنال غیرمتناوب را می‌توان به صورت جمع (انتگرال) تعدادی سینوسی نوشت
  - همه فرکانس‌ها در ساختن سیگنال نقش دارند
  - سیگما به انتگرال تبدیل می‌شود
  - فرمول تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\omega \\ X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{cases}$$

تعریف تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته و شرط وجود تبدیل فوریه

- فرمول تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس
  - نمایش حوزه زمان
  - نمایش حوزه فرکانس (طیف)
- دو ویژگی تبدیل فوریه
  - مختلط بودن در حالت کلی (حتی برای سیگنال حقیقی)
  - سیگنال پیوسته برحسب فرکانس
- شرط کافی: انرژی محدود
- شرط کافی دیرکله
  - مطلقا انتگرال‌پذیری
  - تعداد محدود ماکزیمم و می‌نیمم در هر بازه محدود
  - تعداد محدود ناپیوستگی در هر بازه محدود
- تبدیل لاپلاس

$$\begin{cases} X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \end{cases}$$

$$X(j\Omega) = \mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\} = |X(j\Omega)| e^{j\angle X(j\Omega)}$$

تبدیل‌های مختلف برای سیگنال گسسته

- سه تبدیل فرکانسی برای سیگنال‌های گسسته
  - سری فوریه گسسته Discrete Fourier Series (DFS)
    - برای یک سیگنال گسسته متناوب در حوزه زمان تعریف می‌شود
    - و به یک سیگنال گسسته متناوب در حوزه فرکانس می‌رسد

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \end{cases}$$

  - تبدیل فوریه زمان گسسته Discrete Time Fourier Transform (DTFT)
    - برای یک سیگنال گسسته در حالت کلی در حوزه زمان تعریف می‌شود
    - و به یک سیگنال پیوسته متناوب در حوزه فرکانس می‌رسد

$$\begin{cases} x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

  - تبدیل فوریه گسسته Discrete Fourier Transform (DFT)
    - برای یک سیگنال گسسته با طول محدود در حوزه زمان تعریف می‌شود
    - و به یک سیگنال گسسته با طول محدود در حوزه فرکانس می‌رسد
    - مناسب برای پردازش نرم افزاری و سخت افزاری سیگنال
  - تبدیل فوریه سریع Fast Fourier Transform (FFT)
- تبدیل z

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته و شرط وجود تبدیل فوریه

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ X(e^{j\omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \end{cases}$$

- فرمول تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس
  - نمایش حوزه زمان (انتگرال روی یک دوره تناوب)
  - نمایش حوزه فرکانس (طیف)
  - مفهوم فرکانس پایین $(0-\pi)$ و فرکانس بالا $(\pi-2\pi)$

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

- دو ویژگی تبدیل فوریه
  - سیگنال پیوسته برحسب فرکانس
  - تابعی متناوب با دوره تناوب 2π
- شرط وجود تبدیل فوریه
  - همگرایی انتگرال و سیگما در دو تعریف
- شرط کافی وجود تبدیل فوریه: انرژی محدود $\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 < \infty$
- شرط کافی دیرکله: وجود تبدیل فوریه پیوسته و مشتق‌پذیر (همگرایی یکنواخت سری)
  - مطلقا جمع‌پذیری $\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]| < \infty$

رابطه پارسوال برای سیگنال‌های انرژی و توان گسسته

- رابطه پارسوال برای سیگنال‌های انرژی
  - چگالی طیف انرژی
  - تبدیل فوریه خودهمبستگی برای سیگنال انرژی

$$S_x(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]e^{-jm\omega}$$

$$E_x=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \Rightarrow S_x(\omega)=\left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

$$R_x[m]=\langle x[n],x[n-m]\rangle=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n-m]=x[m]*x^*[-m]$$

$$\Rightarrow \Im\{R_x[m]\}=X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|^2=S_x(\omega)$$

- رابطه پارسوال برای سیگنال‌های توان
  - چگالی طیف توان
  - تبدیل فوریه خودهمبستگی برای سیگنال توان

$$S_x(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]e^{-jm\omega}$$

$$P_x=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{+N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{+N}|x_N[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-\infty}^{+\infty}|x_N[n]|^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

$$\Rightarrow S_x(\omega)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2$$

$$R_x[m]=\langle x[n],x[n-m]\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} x[n]x^*[n-m]\Rightarrow \Im\{R_x[m]\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2=S_x(\omega)$$

- مثال ۱– محاسبه توان، همبستگی و چگالی طیف توان

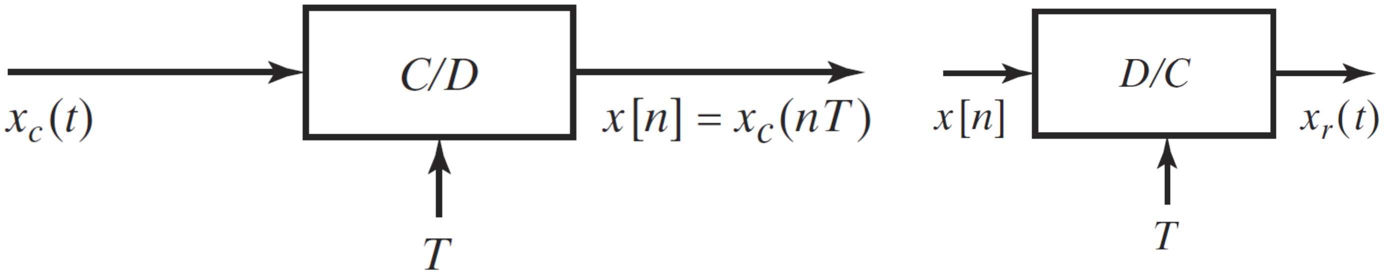
$$x[n]=6u[n-1]\Rightarrow P_x=18,\quad R_x[m]=18\Rightarrow S_x(\omega)=36\pi\sum_{k=-\infty}^{+\omega}\delta(\omega-2k\pi)$$

رابطه پارسوال برای سیگنال‌های انرژی و توان پیوسته

- رابطه پارسوال برای سیگنال‌های انرژی
  - چگالی طیف انرژی
  - تبدیل فوریه خودهمبستگی برای سیگنال انرژی

- رابطه پارسوال برای سیگنال‌های توان
  - چگالی طیف توان
  - تبدیل فوریه خودهمبستگی برای سیگنال توان

- مثال ۲– محاسبه توان، همبستگی و چگالی طیف توان $x(t) = 2\,\mathrm{sgn}(t)$



نمونه‌برداری ایده‌آل

- مبدل C/D
  - سیستم غیر LTI
  - سه مرحله نمونه‌برداری
    - متناوب کردن طیف/ضرب در عکس پریود نمونه‌برداری/تغییر مقیاس فرکانس

$$\begin{cases} x[n]=x_c(nT_s) \\ x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s)\, sinc\dfrac{(t-nT_s)}{T_s}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, sinc\dfrac{(t-nT_s)}{T_s} \end{cases}$$

- مبدل D/C
  - سیستم غیر LTI
  - سه مرحله بازسازی
    - تغییر مقیاس فرکانس/ضرب در پریود نمونه‌برداری/حذف مولفه‌های اضافی (حذف تناوب‌ها)

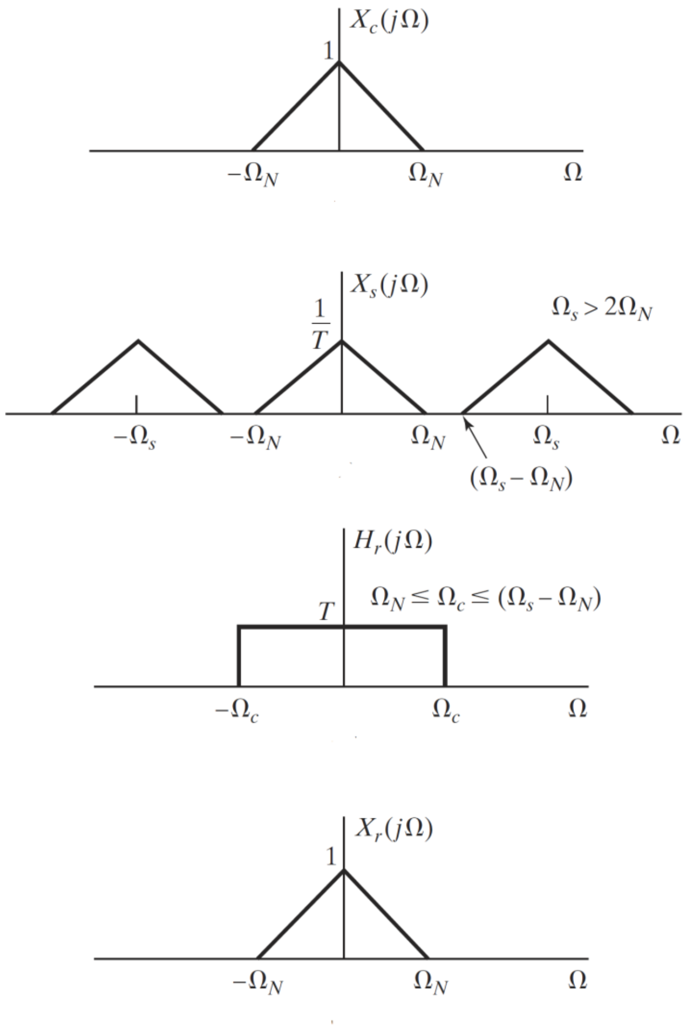
$$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X_s(j\Omega)\big|_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}} \\ X_s(j\Omega)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T_s} \end{cases}$$

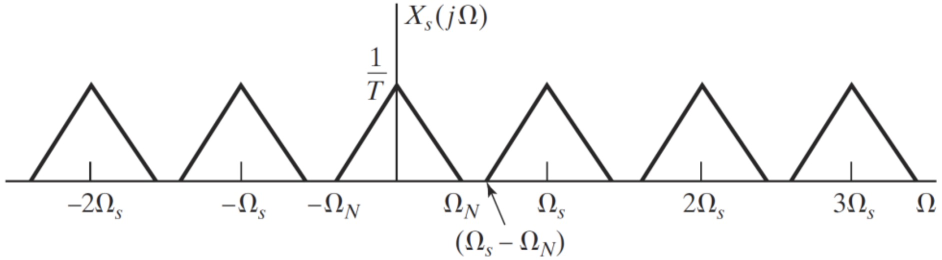
- دو سیستم وارون یکدیگر؟
  - پریود نمونه‌بردای متفاوت دو سیستم

$$\begin{cases} X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left[j\left(\dfrac{\omega}{T_s}-k\dfrac{2\pi}{T_s}\right)\right]=\begin{cases} \dfrac{1}{T_s}X_c(j\Omega)\big|_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}} & |\omega|<\pi \\ periodic & \end{cases} \\ X_c(j\Omega)=\begin{cases} T_s X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T_s} & |\Omega|<\dfrac{\Omega_s}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{cases}$$

نمونه‌برداری ایده‌آل

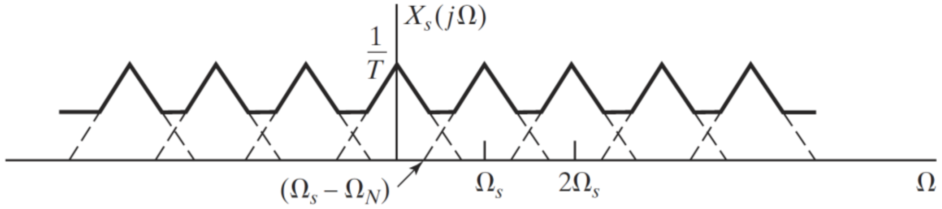
- قضیه نمونه‌برداری: یک سیگنال باند محدود که مولفه‌ای در باند فرکانسی $|\Omega| > \Omega_M$ ندارد، با نمونه‌هایی که با نرخ یکنواخت بزرگتر از دو برابر ماکزیمم فرکانس موجود در آن گرفته می‌شود، به طور کامل مشخص می‌شود.
  - نرخ نایکویست–شنن $2\Omega_M$
  - مقدار دو برابر ماکزیمم فرکانس



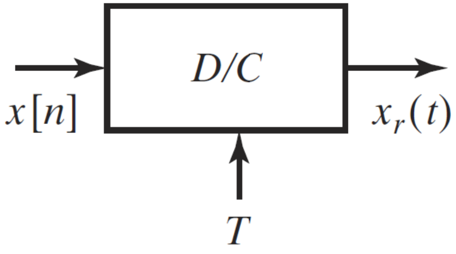


(c)

  - تداخل فرکانسی (هم‌پوشانی– اورلپ– aliasing)



- روش بازسازی



- تعریف DFT و معکوس DFT

$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} & k=0,1,\dots,N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn} & k=0,1,\dots,N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}X(e^{j\omega})\big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}=\tilde{X}[k] & 0\le k\le N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n} & n=0,1,\dots,N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn} & n=0,1,\dots,N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$X[k]=\mathrm{Re}\{X[k]\}+j\,\mathrm{Im}\{X[k]\}=\left|X[k]\right|e^{j\angle X[k]}$$

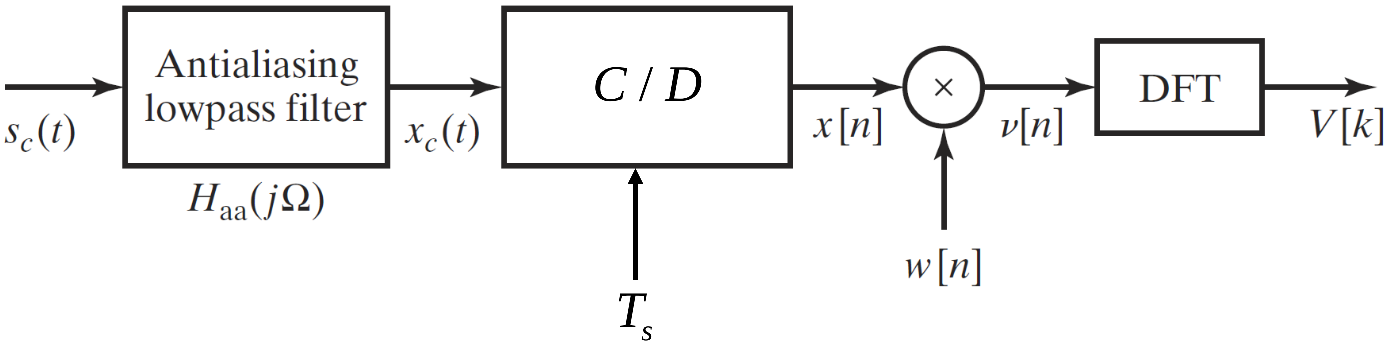
$$\begin{cases}\tilde{x}[n] & N\Rightarrow \tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+pN]\\ x[n] & N\Rightarrow x[n]=0 \quad n<0,n\ge N\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-rN]=x[n \mod N]=x[((n))_N]\\ x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n] & 0\le n\le N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{X}[k] & N\Rightarrow \tilde{X}[k]=\tilde{X}[k+pN]\\ X[k] & N\Rightarrow X[k]=0 \quad k<0,k\ge N\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{X}[k]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} X[k-rN]=X[k \mod N]=X[((k))_N]\\ X[k]=\begin{cases}\tilde{X}[k] & 0\le k\le N-1\\ 0 & otherwise\end{cases}\end{cases}$$

آنالیز فرکانسی سیگنال با استفاده از DFT

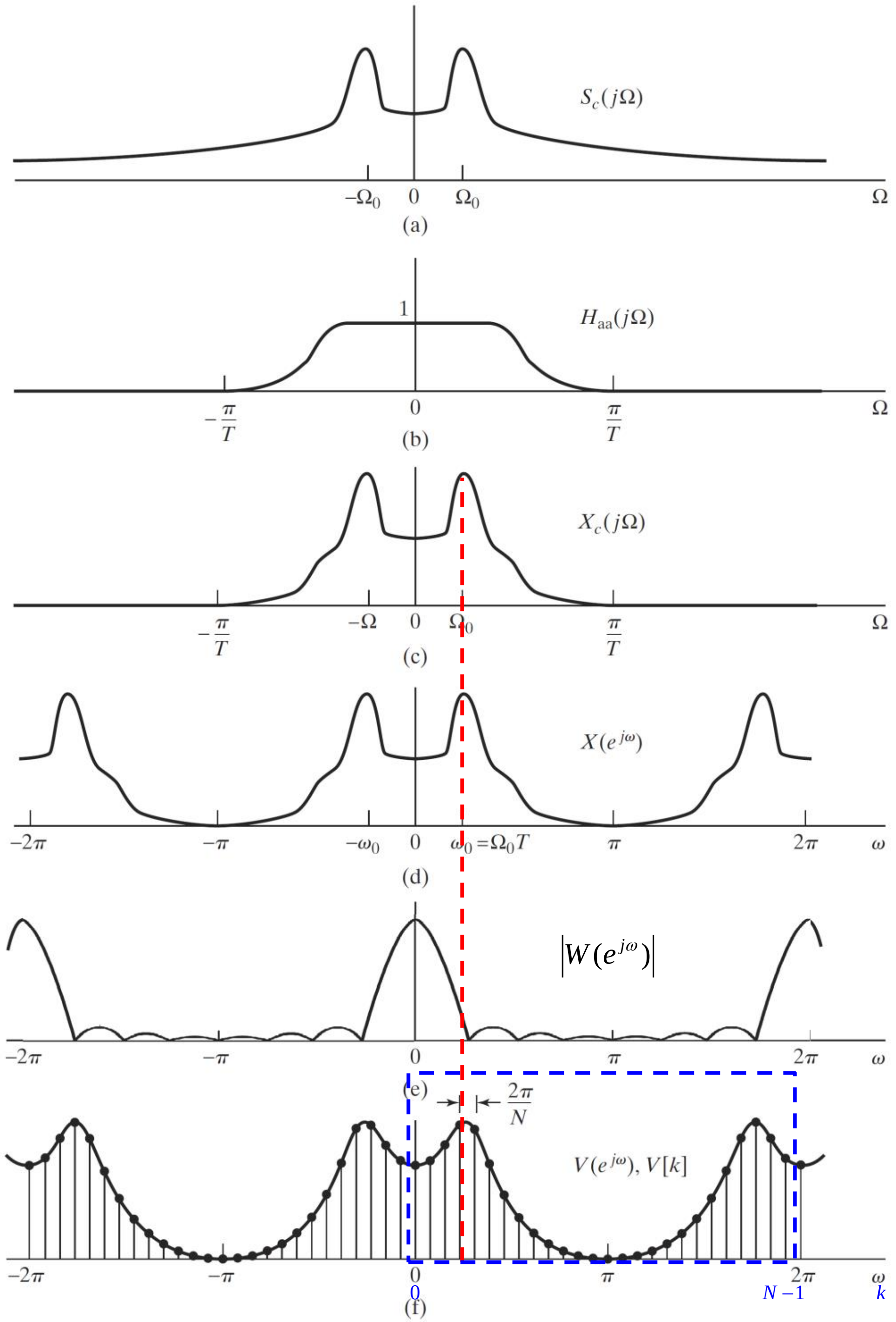


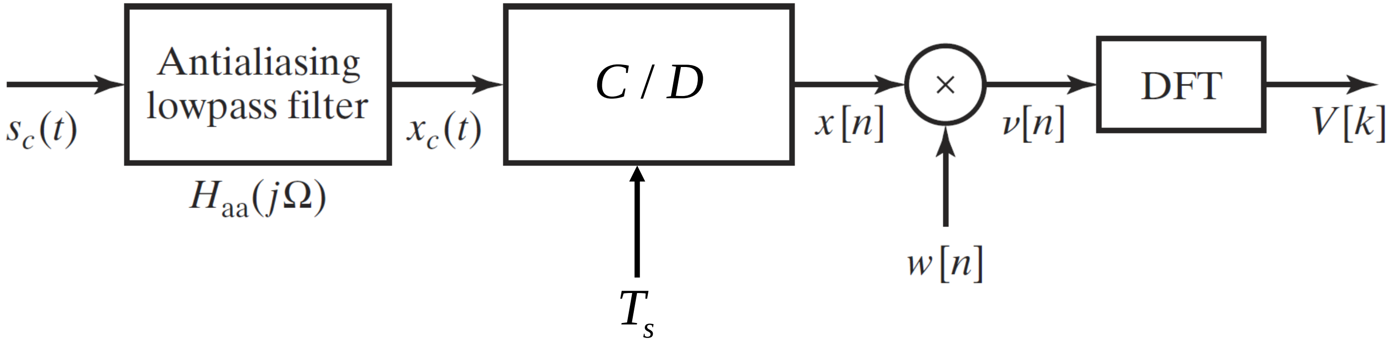
- پردازش سیگنال پیوسته
  - فیلتر کردن برای باند محدود کردن سیگنال
  - نمونه برداری از یک قطعه از سیگنال
    - بدست آوردن سیگنال با طول محدود
  - استفاده از DFT برای آنالیز فرکانسی
- یک مدل مناسب
  - فیلتر کردن برای باند محدود کردن سیگنال
  - نمونه برداری از کل سیگنال
  - ضرب در یک پنجره برای بدست آوردن سیگنال با طول محدود
  - استفاده از DFT برای آنالیز فرکانسی
- بررسی سه سیگنال در حوزه فرکانس و ارتباط متغیرهای فرکانسی آنها با هم

$$X_c(j\Omega) \qquad \begin{cases} X(e^{j\omega}) \\ V(e^{j\omega}) \end{cases} \qquad V[k]$$

$$\Omega = 2\pi f \qquad \omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{f_s} \qquad k$$

ارتباط طیف سیگنال‌ها با هم





- روابط در حوزه فرکانس

$$X_c(j\Omega)=H_{aa}(j\Omega)S_c(j\Omega)$$

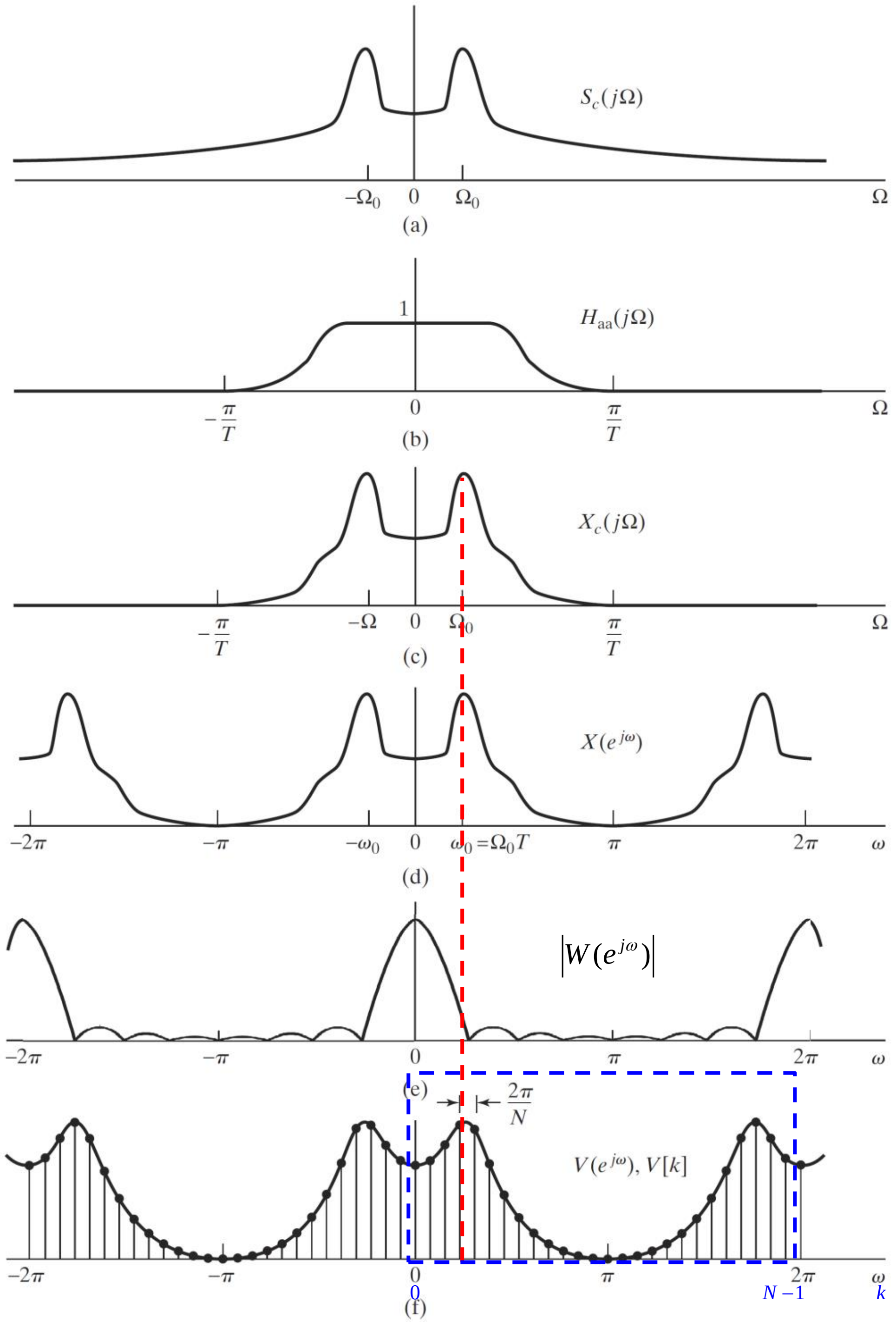
$$x[n]=x_c(nT_s)\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_c\left[j\left(\Omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)\right]\Bigg|_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}}$$

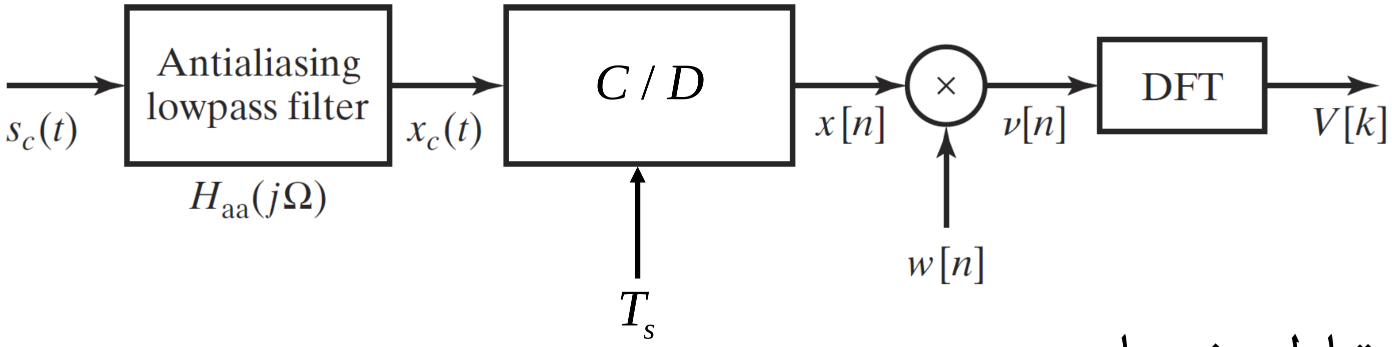
$$v[n]=x[n]\cdot w[n]\Rightarrow V(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\circledast W(e^{j\omega})$$

$$V[k]=V(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$$

$$\Omega=\frac{\omega}{T_s}\Leftrightarrow\omega=\Omega T_s$$

ارتباط طیف سیگنال‌ها با هم





- ارتباط متغیرها

$$\begin{cases} \Omega_k = \dfrac{\omega_k}{T_s} = \omega_k f_s \\ \Omega_k = 2\pi f_k \\ \omega_k = k\dfrac{2\pi}{N} \end{cases} \Rightarrow 2\pi f_k = k\frac{2\pi}{N} f_s \Rightarrow \begin{cases} f_k = k\dfrac{f_s}{N} & 0 \le k < \dfrac{N}{2} \\ f_k = k\dfrac{f_s}{N} - f_s & \dfrac{N}{2} \le k < N-1 \end{cases}$$

- تقارن هرمیتی: تقارن حول $N/2$

$$\begin{cases} 0 \le \Omega < \Omega_s \\ 0 \le f < f_s \\ 0 \le \omega < 2\pi \\ 0 \le f < 1 \\ 0 \le k < N \end{cases}$$

$$V[k] = V^*[N-k]$$
$$1 \le k \le N-1$$

بررسی اثر پنجره کردن

- مثال ۳– جمع دو سینوسی حقیقی

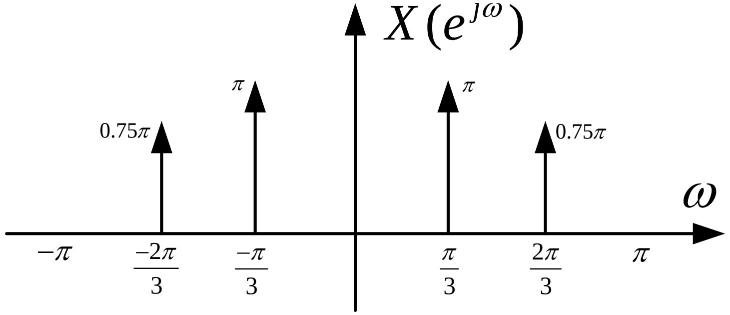
$$\begin{cases} A_0 = 1, A_1 = 0.75 \qquad f_s = 10kHz \\ \Omega_0 = \dfrac{\pi}{3} f_s, \Omega_1 = \dfrac{2\pi}{3} f_s \\ \omega_0 = \dfrac{\pi}{3}, \omega_1 = \dfrac{2\pi}{3} \\ w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 = 63 \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{cases}$$

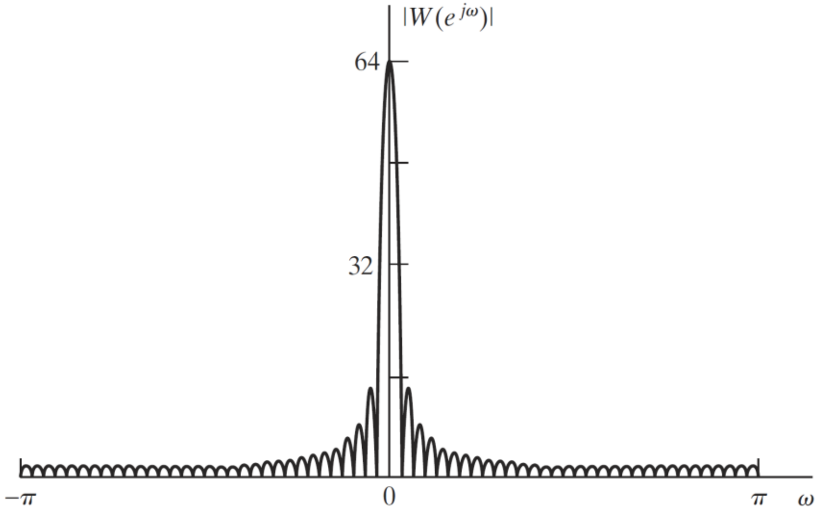
$$\begin{cases} x_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t) + A_1 \cos(\Omega_1 t) \qquad -\infty < t < +\infty \\ X_c(j\Omega) = A_0\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right) + A_1\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_1)+\delta(\Omega+\Omega_1)\right) \end{cases}$$

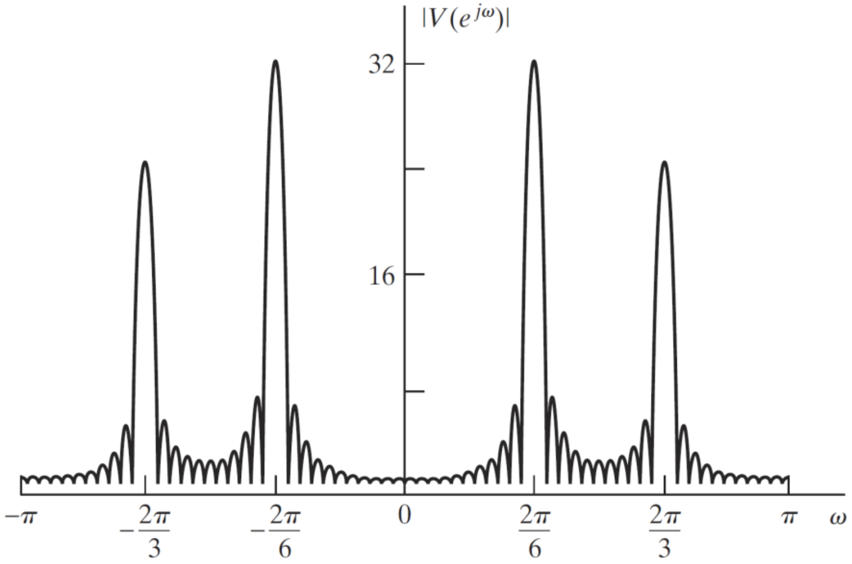
$$\begin{cases} x[n] = x_c(nT_s) = A_0 \cos(\Omega_0 T_s n) + A_1 \cos(\Omega_1 T_s n) \\ \qquad = A_0 \cos(\omega_0 n) + A_1 \cos(\omega_1 n) \qquad 0 < \omega_0, \omega_1 < \pi \qquad n \in \mathbb{Z} \\ X(e^{j\omega}) = A_0\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) + A_1\pi\left(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right) \qquad |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$v[n] = x[n]\cdot w[n] \Rightarrow V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast W(e^{j\omega})$$

$$v[n] = x[n]\cdot w[n] = \frac{A_0}{2} w[n] e^{-j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2} w[n] e^{j\omega_0 n} + \frac{A_1}{2} w[n] e^{-j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2} w[n] e^{j\omega_1 n}$$

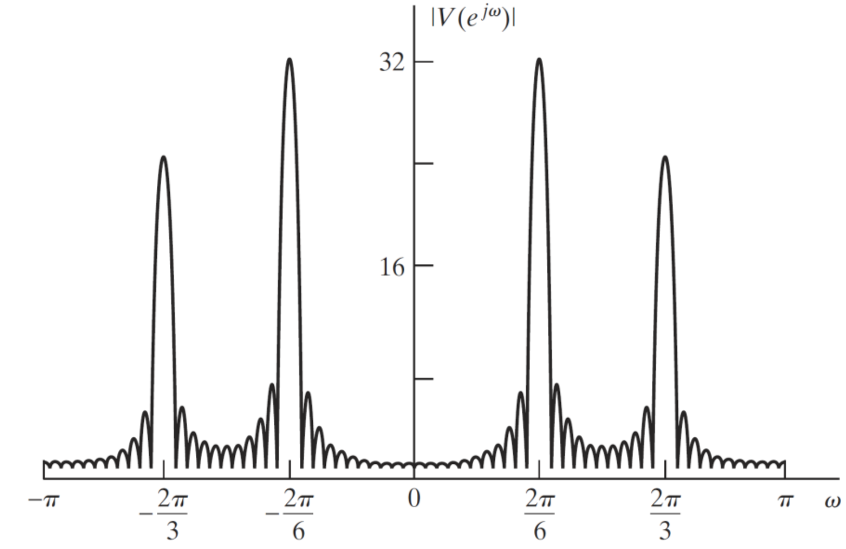


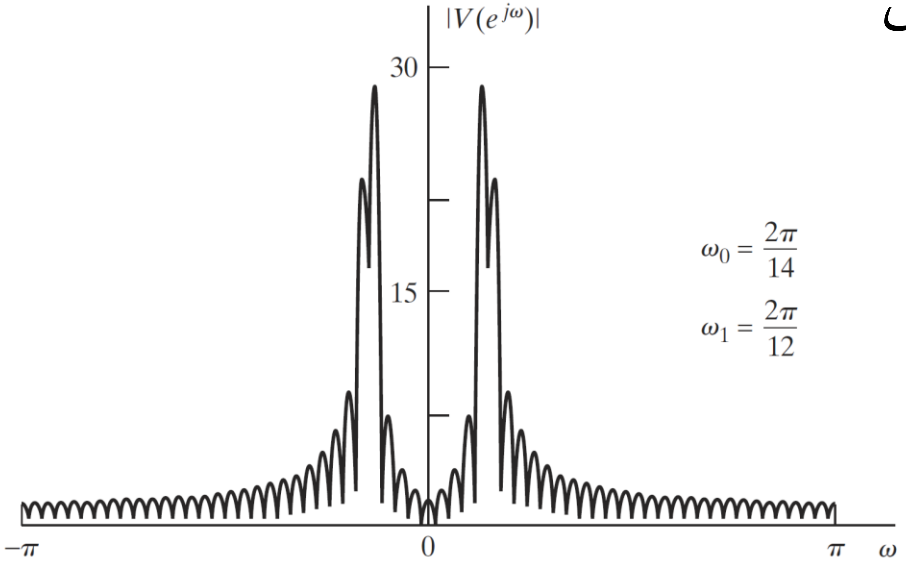


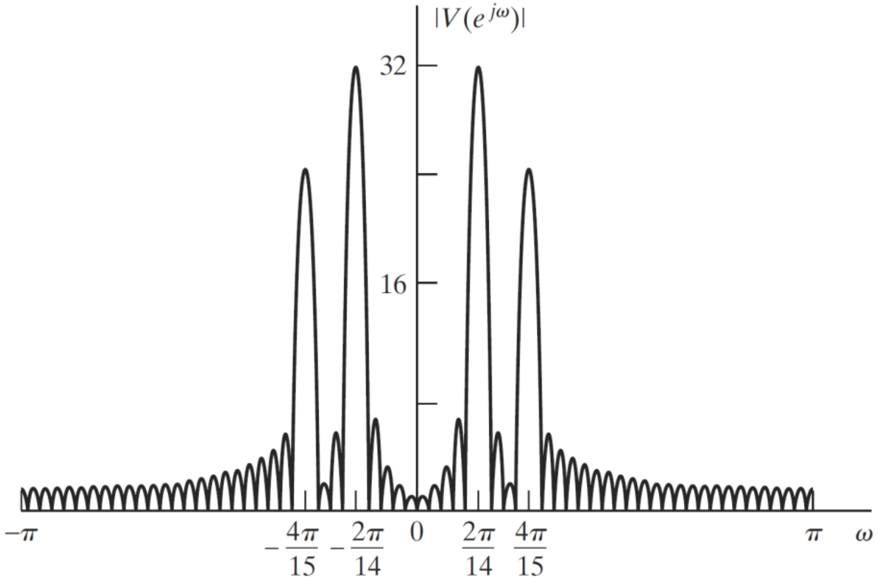


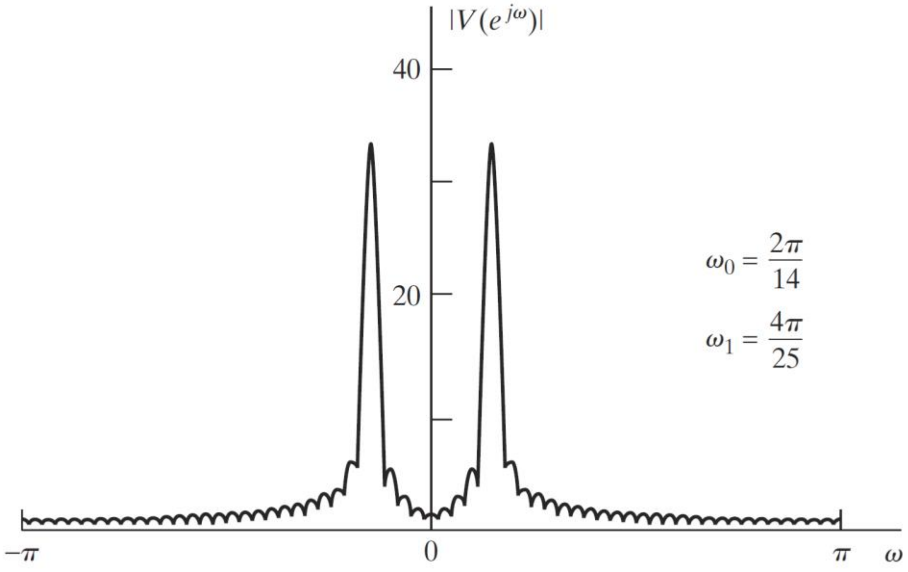
بررسی اثر پنجره کردن

- مثال ۳– جمع دو سینوسی حقیقی
  - نزدیکی دو فرکانس
  - فرکانس نمونه برداری
  - طول پنجره









بررسی اثر پنجره کردن

- تاثیر پنجره در حوزه فرکانس
  - مشاهده اثر پنجره گذاری سیگنال برای جمع سینوسی‌های خالص (ضربه در حوزه فرکانس)
    - نزدیکی مولفه‌های سیگنال اصلی
  - مشاهده اثر پنجره گذاری سیگنال در حالت کلی
  - پهن شدن مولفه‌های تیز (کم شدن رزولوشن فرکانسی resolution)
    - ناشی از پهنای لوب اصلی (وابسته به طول و شکل پنجره)
  - نشت فرکانسی leakage (انتقال اثر مولفه‌های فرکانسی از یک فرکانس به فرکانس دیگر)
    - ناشی از تضعیف لوب فرعی (عمدتا وابسته به شکل پنجره و مستقل از طول پنجره)
- شباهت با طراحی فیلترها با روش پنجره گذاری
  - پنجره مستطیلی و ضرورت استفاده از پنجره‌های دیگر
  - پنجره Kaiser و امکان کنترل همزمان دو پارامتر طول وشکل پنجره
    - دو پارامتر طول و شکل پنجره به عنوان تابعی از پهنای لوب اصلی و مقدار تضعیف لوب فرعی

$$L = M + 1$$

$$\begin{cases} \Delta_{ml} \\ A_{sl} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \\ \beta \end{cases}$$

بررسی اثر پنجره کردن

$$L = M + 1$$

$$\begin{cases}\Delta_{ml} \\ A_{sl}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \\ \beta \end{cases}$$

$$w_K[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)} & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha = (L-1)/2$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} \le 13.26 \\ 0.76609(A_{sl}-13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl}-13.26) & 13.26 < A_{sl} \le 60 \\ 0.12438(A_{sl}+6.3) & 60 < A_{sl} \le 120 \end{cases}$$

$$L \simeq \frac{24\pi(A_{sl}+12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

- پنجره Kaiser
  - تعیین پهنای لوب اصلی و تضعیف لوب فرعی مطلوب
  - تعیین پارامتر شکل و طول پنجره
- مفهوم رزولوشن (قدرت تفکیک) فرکانسی
  - حداقل فاصله بین دو قله فرکانسی سیگنال پیوسته که با دو اندیس متوالی (با یک فاصله) در N DFT نقطه‌ای قابل تشخیص است
    - N تعداد نقاط اصلی سیگنال

$$\begin{cases} f_1 \sim k \\ f_2 \sim k+2 \end{cases} \Rightarrow \Delta f = f_2 - f_1 = (k+2)\frac{f_s}{N} - k\frac{f_s}{N} = \frac{2f_s}{N}$$

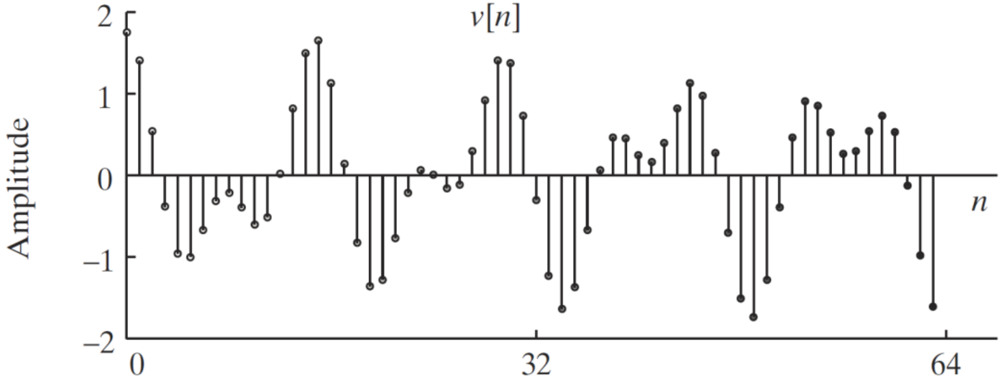
- ارتباط اضافه کردن صفر به انتهای سیگنال (zero padding) با رزولوشن فرکانسی
  - پنجره L نقطه‌ای
  - سیگنال L نقطه‌ای
  - N DFT نقطه‌ای

بررسی اث

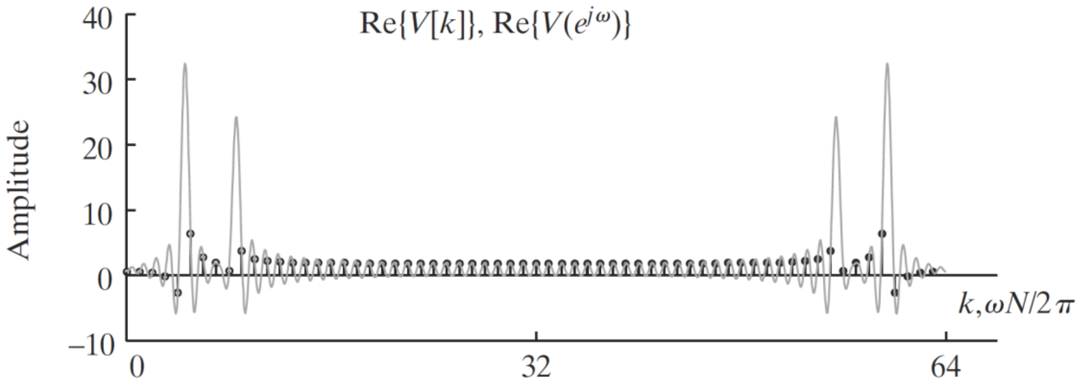
- مثال ۴–

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

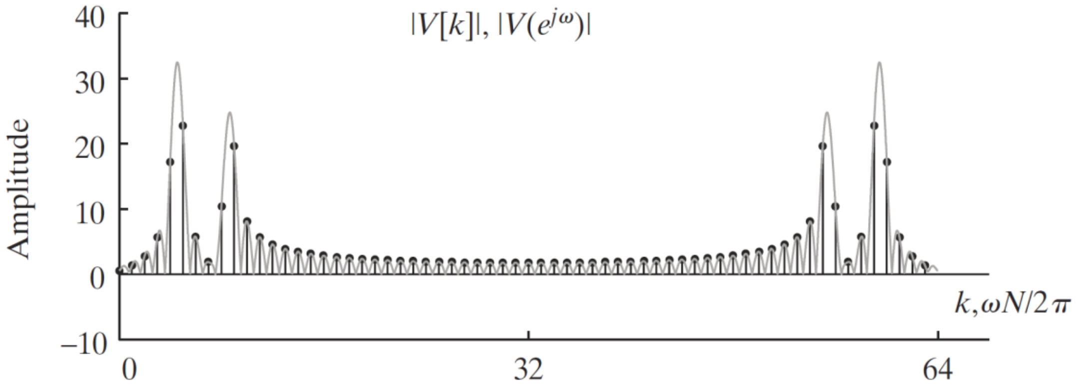
$$N = L = 64$$



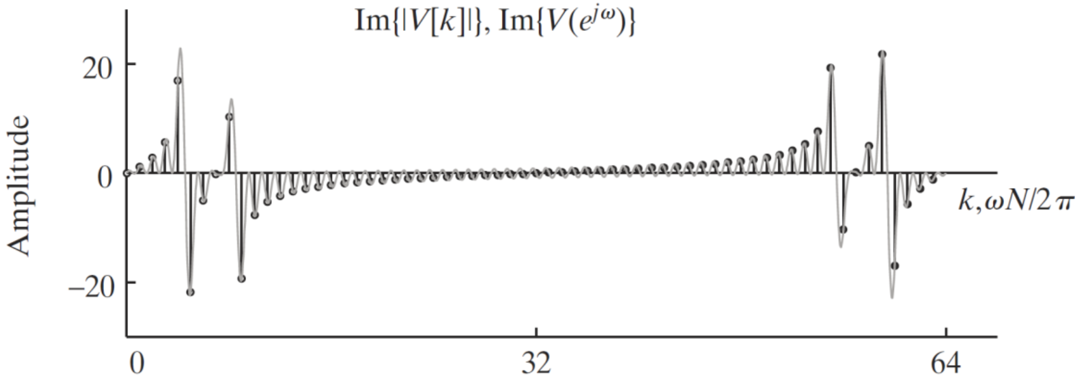
(a)



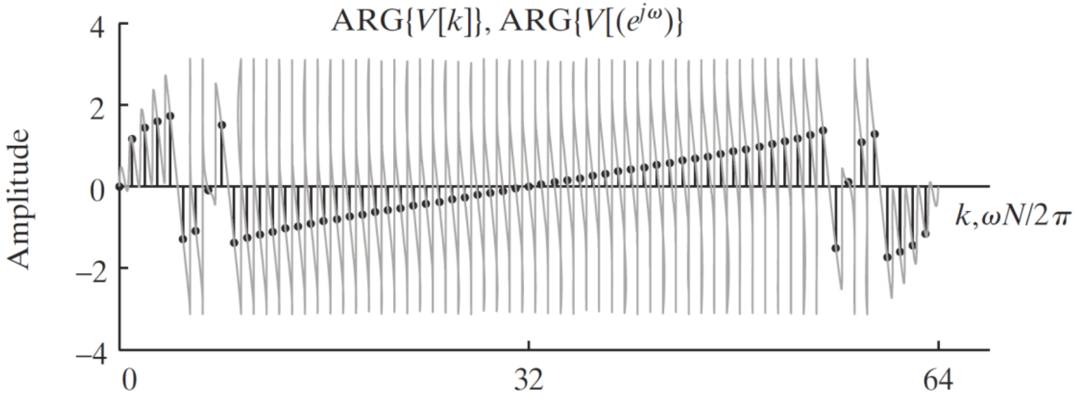
(b)



(d)



(c)



(e)

بررسی اثر پنجره کردن

- مثال ۵–

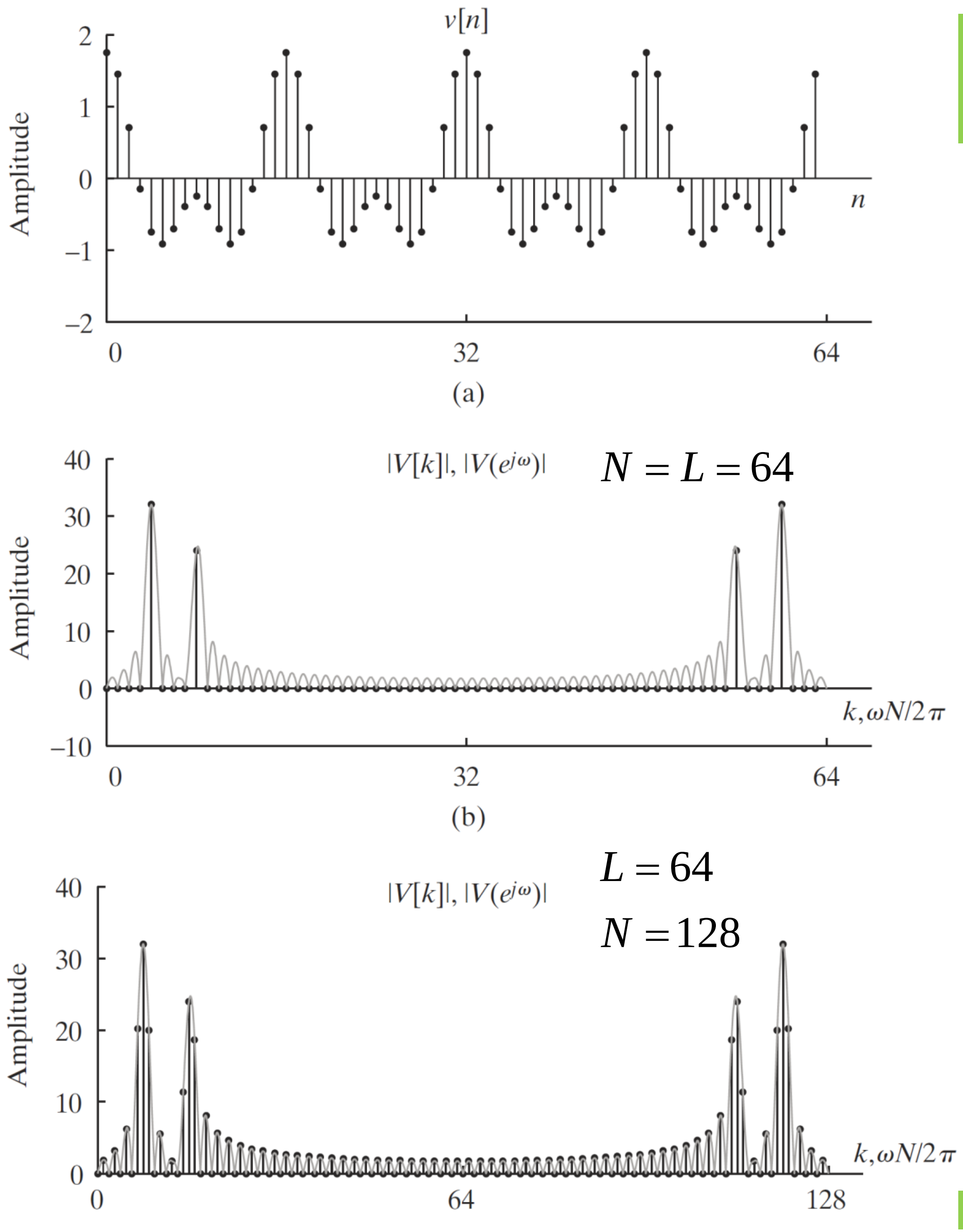
$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

– پنجره مستطیلی

– اضافه کردن صفر به انتهای سیگنال و محاسبه DFT با طول بیشتر

  - رزولوشن واقعی به طول سیگنال اصلی وابسته است

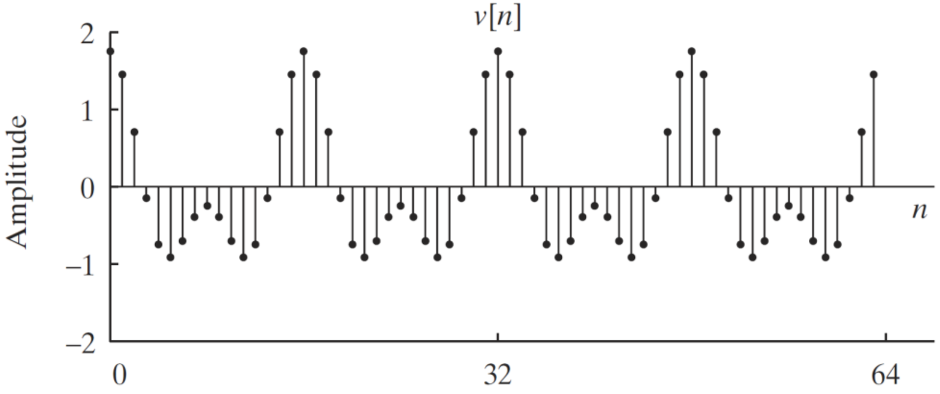
– نمایش تبدیل فوریه سیگنال DTFT



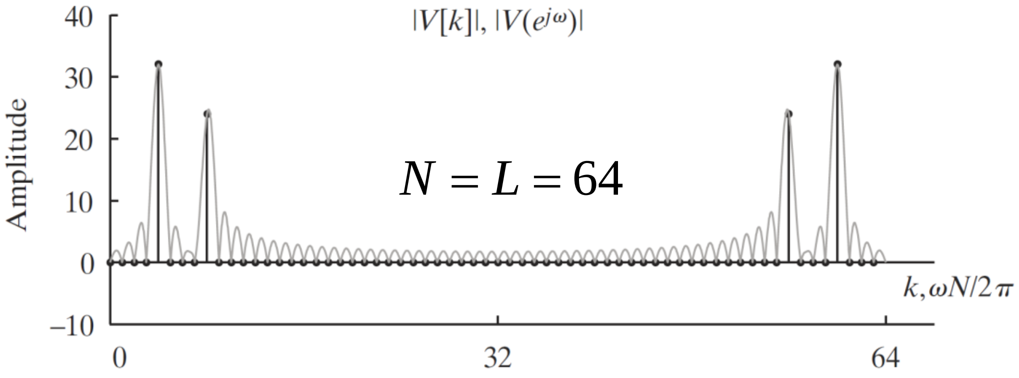
بررسی اثر پنجره کردن

- سوال: تفاوت دو سیگنال ۶۴ نقطه‌ای دو مثال ۲ و ۳ چیست که DFT یکی فقط ۴ نمونه غیرصفر دارد؟

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

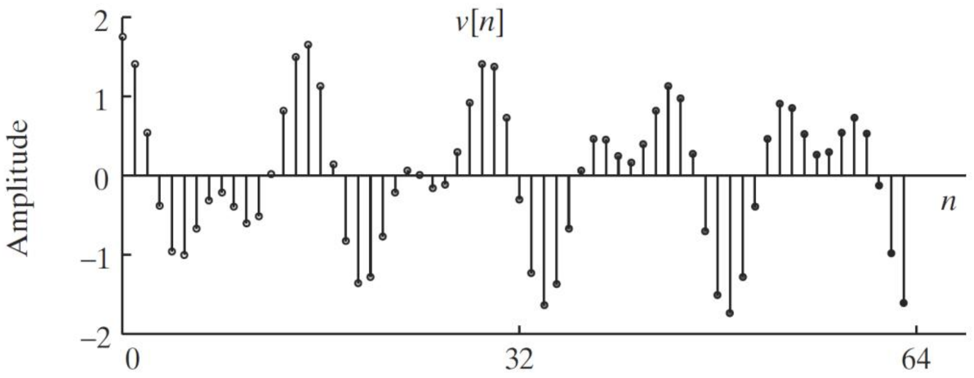


(a)

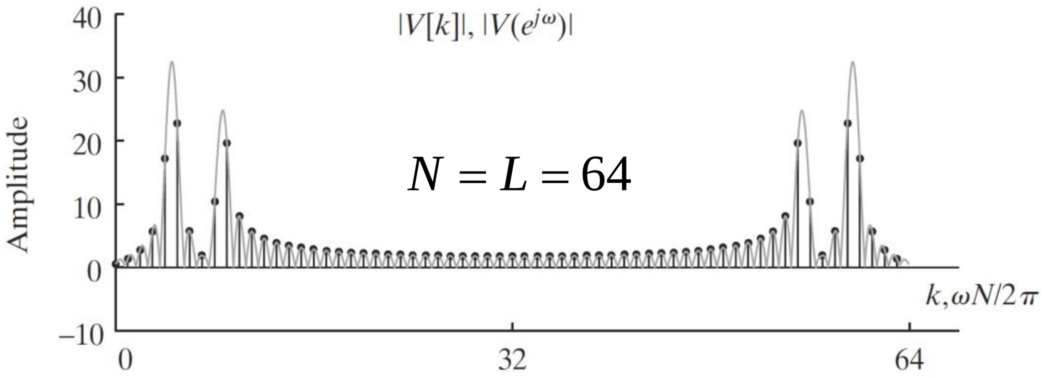


(b)

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) & 0 \le n \le 63 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



(a)

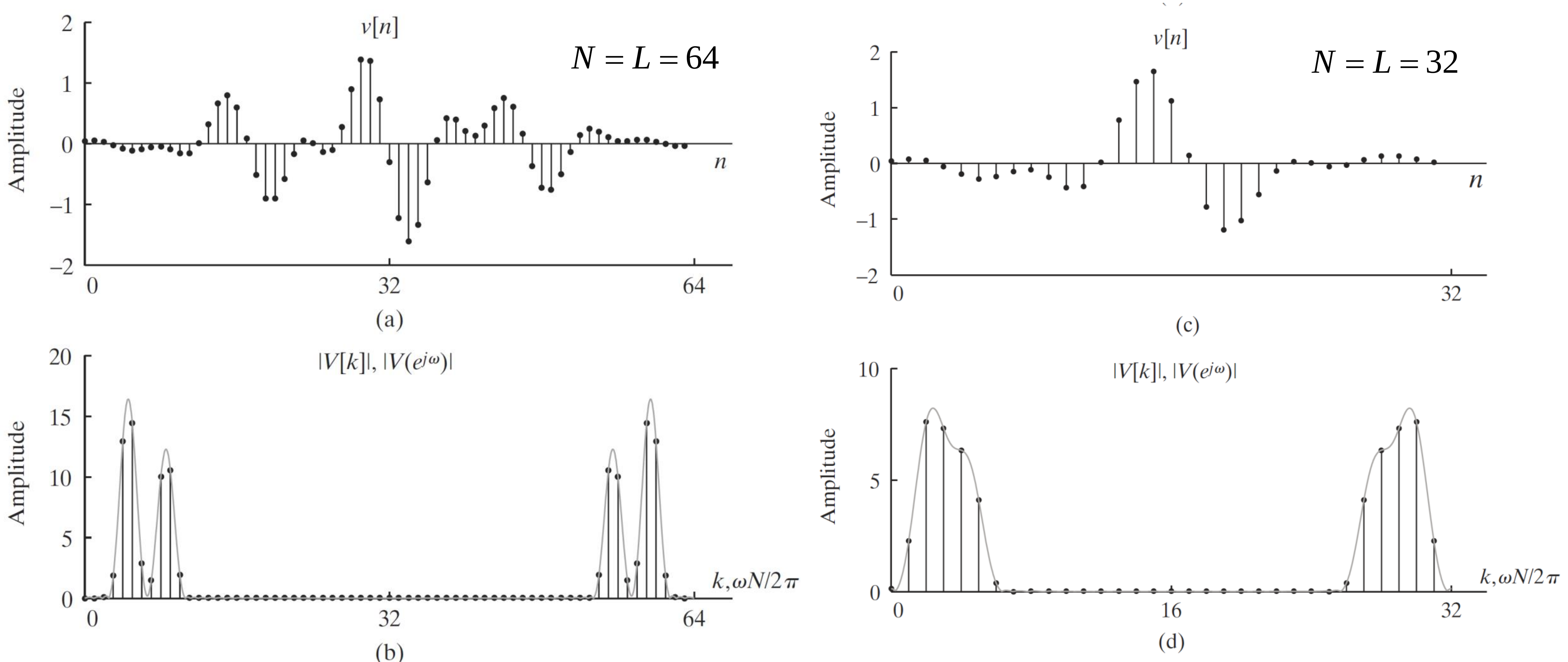


(d)

بررسی اثر پنجره کردن

- مثال ۶–

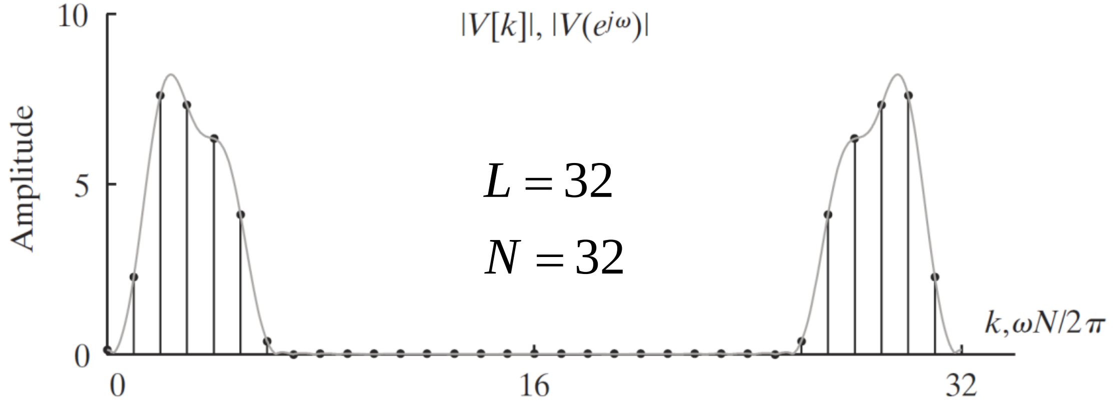
$$v[n] = w_K[n]\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75w_K[n]\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right)$$



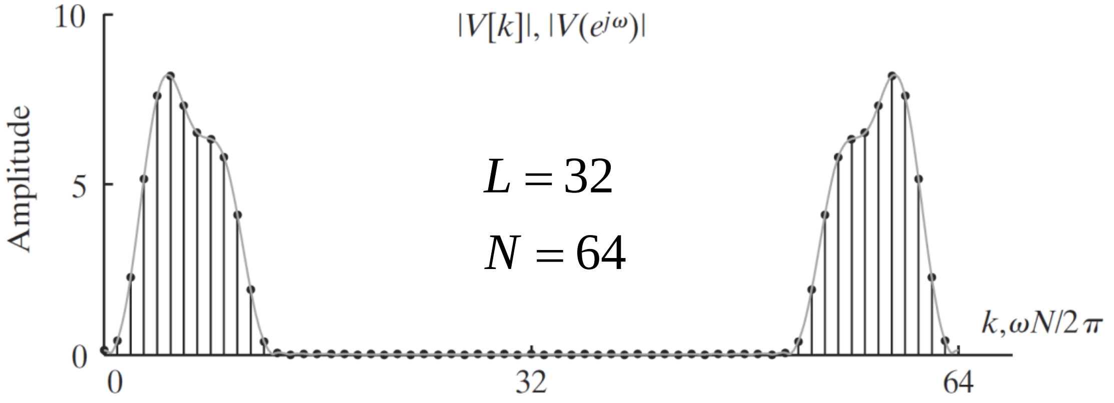
بررسی

- مثال ۶-

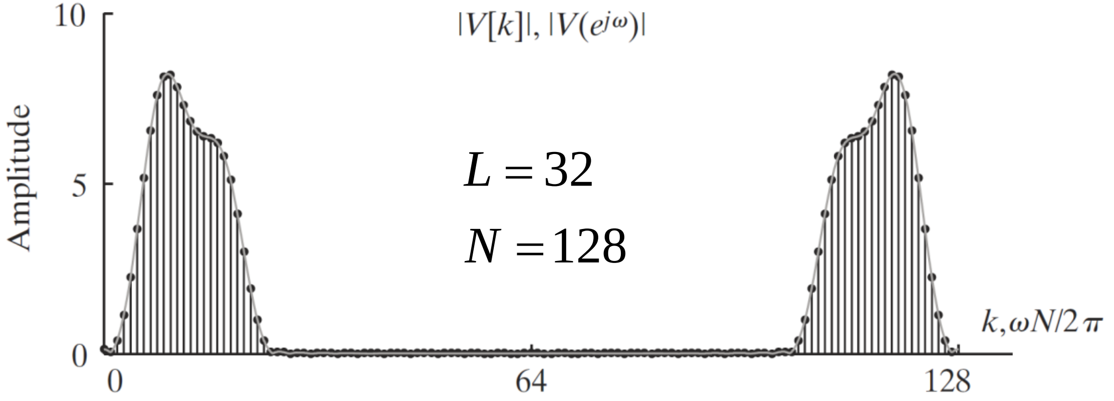
$$v[n] = w_K[n]\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75 w_K[n]\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right)$$



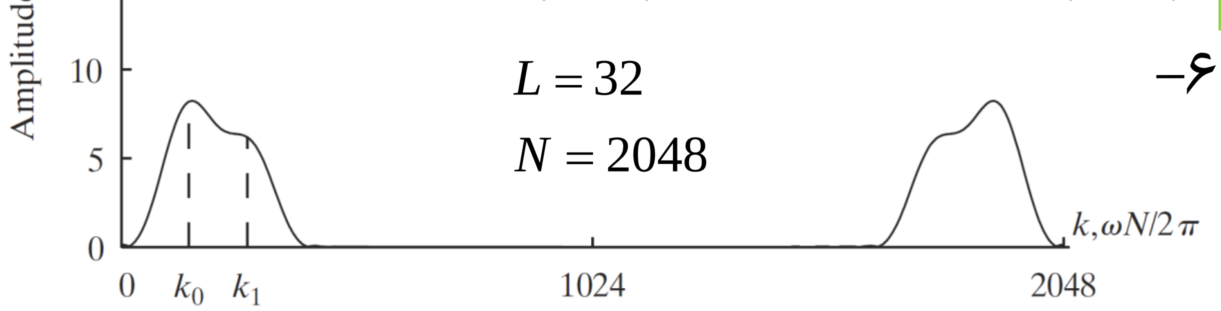
(a)



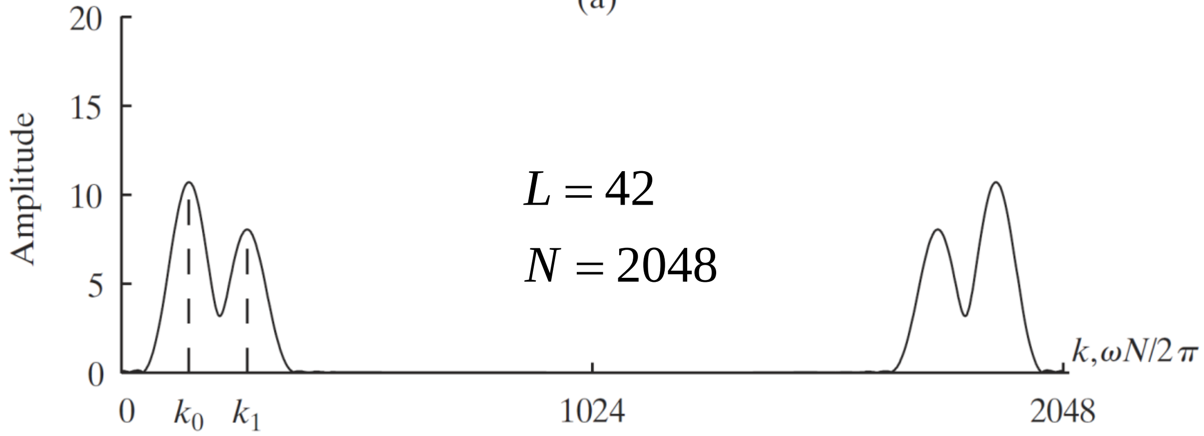
(b)



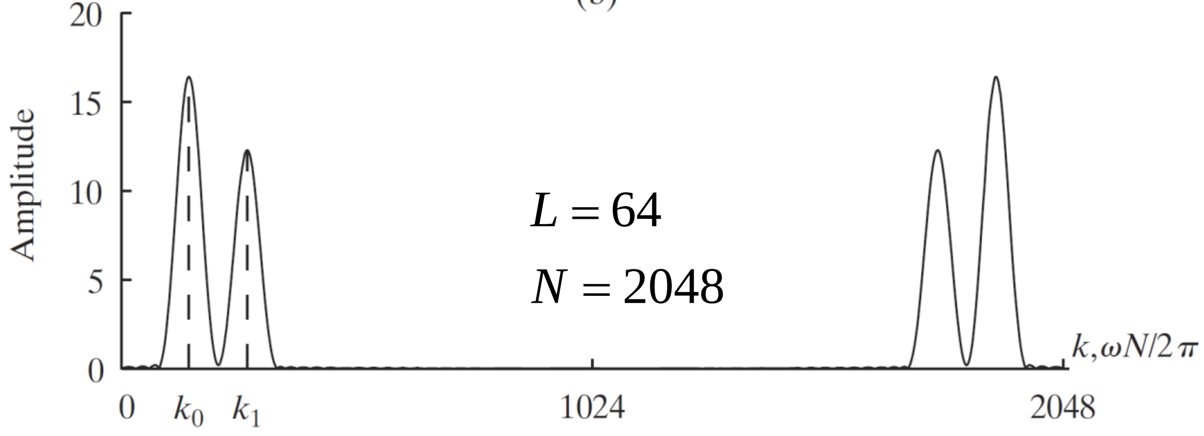
(c)



(a)



(b)



(c)

بررسی اثر پنجره کردن

- مثال ۷– یک سیگنال صوتی از یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع ۶۰۰۰ هرتز عبور کرده و سپس یک قطعه از آن با فرکانس ۱۴۰۰۰ هرتز نمونه‌برداری می‌شود تا سیگنال N نقطه‌ای ساخته شود.

الف) حداقل تعداد نمونه‌ها چقدر باشد تا پس از N DFT نقطه‌ای گرفتن از آن، قدرت تفکیک فرکانسی (رزولوشن) آن ۴ هرتز باشد؟

ب) فرض کنید $N=8000$ و در N DFT نقطه‌ای داریم: $X[6400]=2+4j$ مقدار DFT در چه مقادیر دیگری از k معلوم است؟ مقادیر طیف سیگنال پیوسته صوت در چه فرکانس‌هایی معلوم است؟ مقادیر طیف را نیز ذکر کنید.

پ) در قسمت ب، چه اندیسی از DFT متناظر با آستانه شنوایی است؟

تبدیل فوریه وابسته به سیگنال (تبدیل فوریه کوتاه مدت Time Dependent FT/Short Time FT (SFFT)

- بررسی تبدیل فوریه یک سیگنال
  - مفهوم ایستایی برای سیگنال‌های یقینی
  - تغییر محتوای فرکانسی در طول زمان
  - حذف زمان در تبدیل فوریه
  - ضرورت تعریف یک تبدیل فرکانسی وابسته به زمان
  - تبدیل زمان-فرکانس
  - سیگنال chirp به عنوان مدولاسیون فرکانسی برای بررسی رفتار زمان فرکانس
    - مفهوم فرکانس لحظه‌ای

$$x[n]=a[n]\cos(\theta_x[n]) \Rightarrow \omega_x[n]=\frac{d\theta_x[n]}{dn}$$

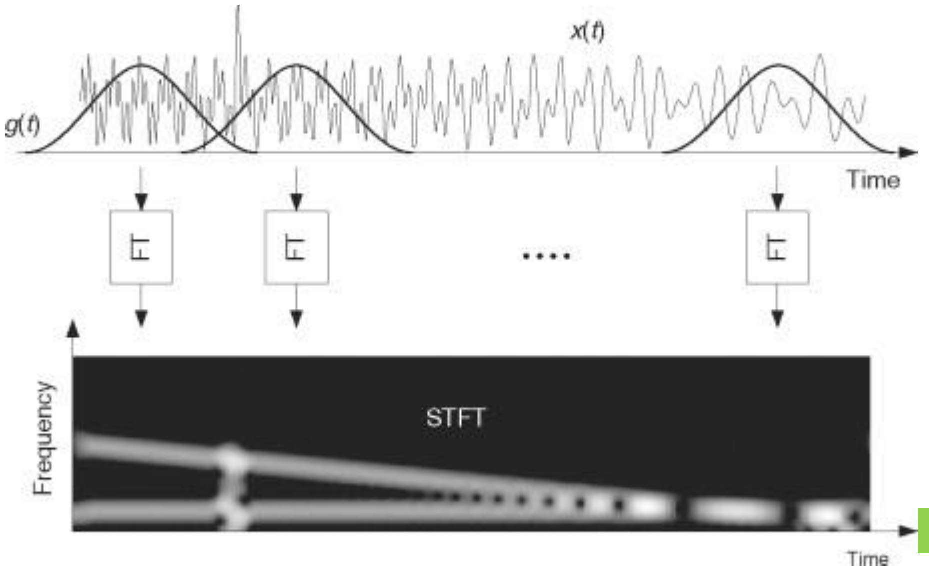
$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\varphi) \Rightarrow \omega_x[n]=\omega_0$$

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\omega_1 n^2+\varphi) \Rightarrow \omega_x[n]=\omega_0+2n\omega_1$$

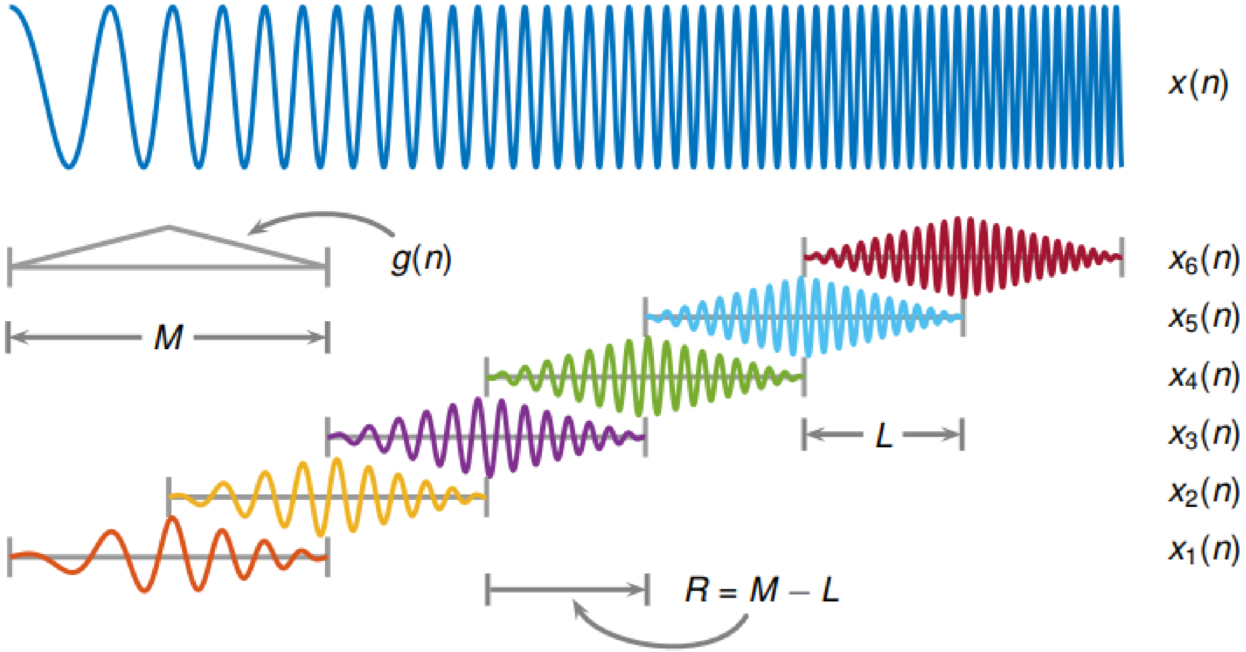
- وابسته به زمان کردن تبدیل فوریه با پنجره گذاری
  - تبدیل فوریه محتوای متمرکز حول وسط پنجره و نسبت دادن آن به نقطه وسط پنجره
  - لغزاندن پنجره
  - استفاده از برای پنجره با طول محدود

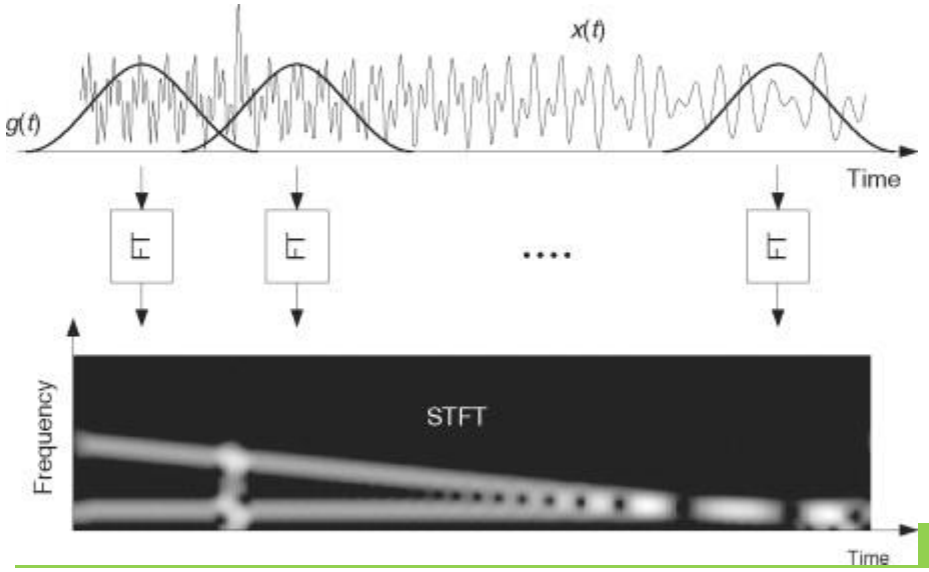
$$STFT_x[n,\omega)=\sum_m x[m]w[n-m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n]:0,1,2,\cdots,L-1 \Rightarrow STFT_x[n,k]=\sum_{m=n-\frac{L}{2}}^{n+\frac{L}{2}-1} x[m]w[n-m]e^{-jk\frac{2\pi}{L}m}$$



Time Dependent FT/Short Time FT (SFFT) تبدیل فوریه وابسته به سیگنال (تبدیل فوریه کوتاه مدت)





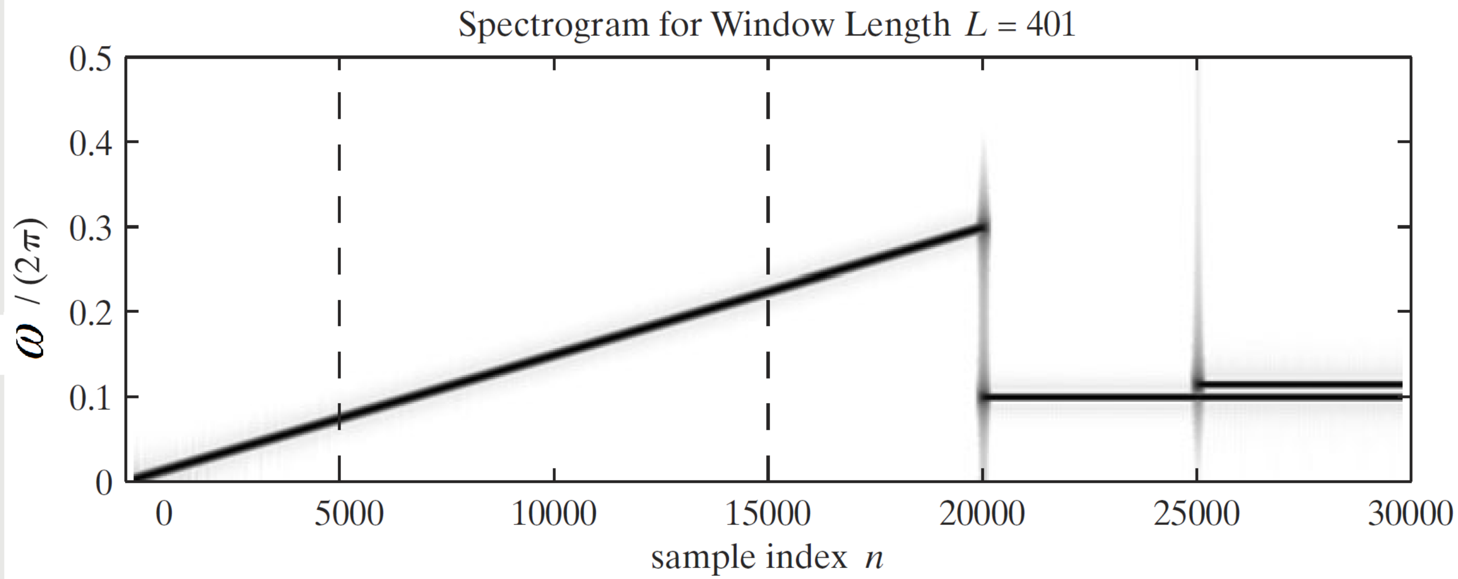
- نمایش زمان–فرکانس با STFT
  - تبدیل مختلط
  - اسپکتروگرام spectrogram

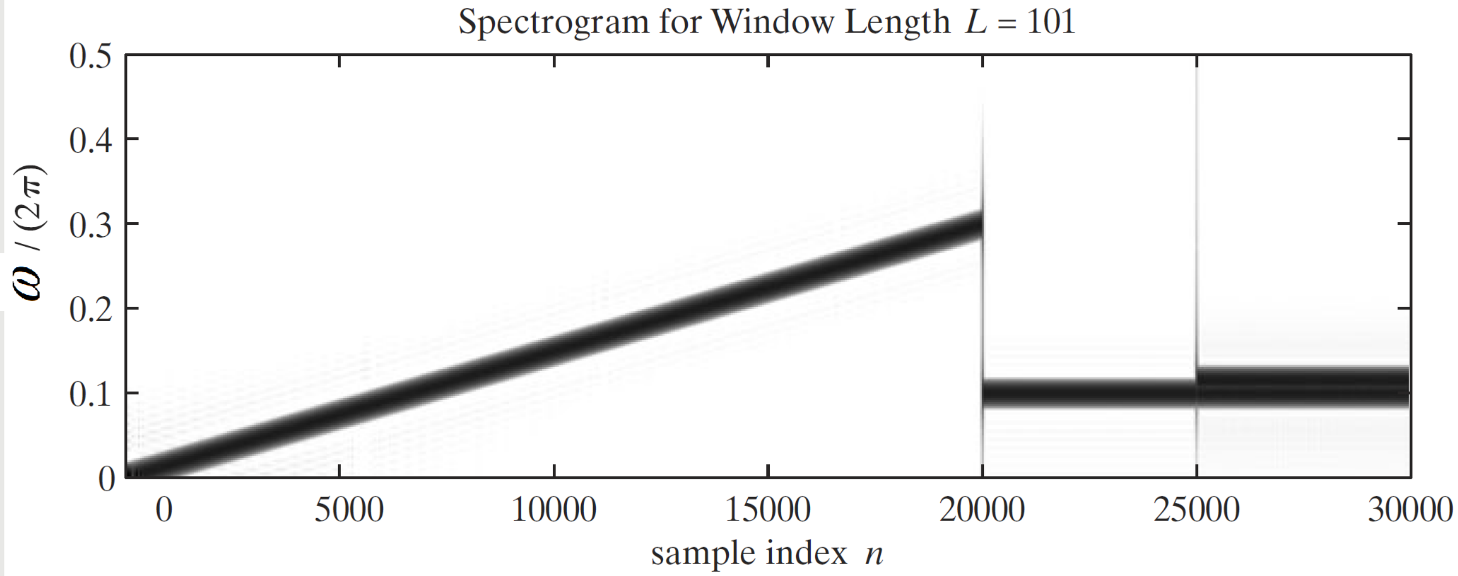
$$Spect_x[n,\omega) = \left|STFT_x[n,\omega)\right|^2$$

- رزولوشن زمانی و فرکانسی یک سیگنال
  - وابسته به طول پنجره
  - پنجره باریک زمانی (پهن فرکانسی)
    - رز.لوشن خوب زمانی و بد فرکانسی
  - پنجره پهن زمانی (باریک فرکانسی)
    - رزولوشن خوب فرکانسی و بد زمانی

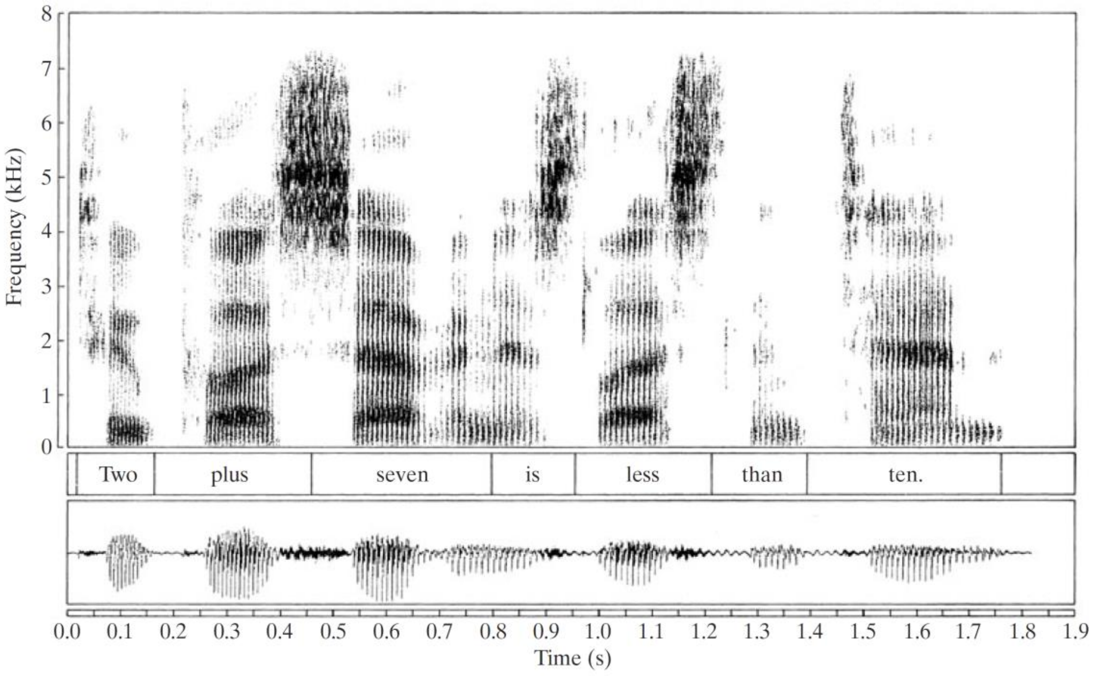
تبدیل فوریه وابسته به سیگنال (تبدیل فوری

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \cos(\alpha_0 n^2) & 0 \le n \le 20{,}000 \\ \cos(0.2\pi n) & 20{,}000 < n \le 25{,}000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n) & 25{,}000 < n. \end{cases}$$

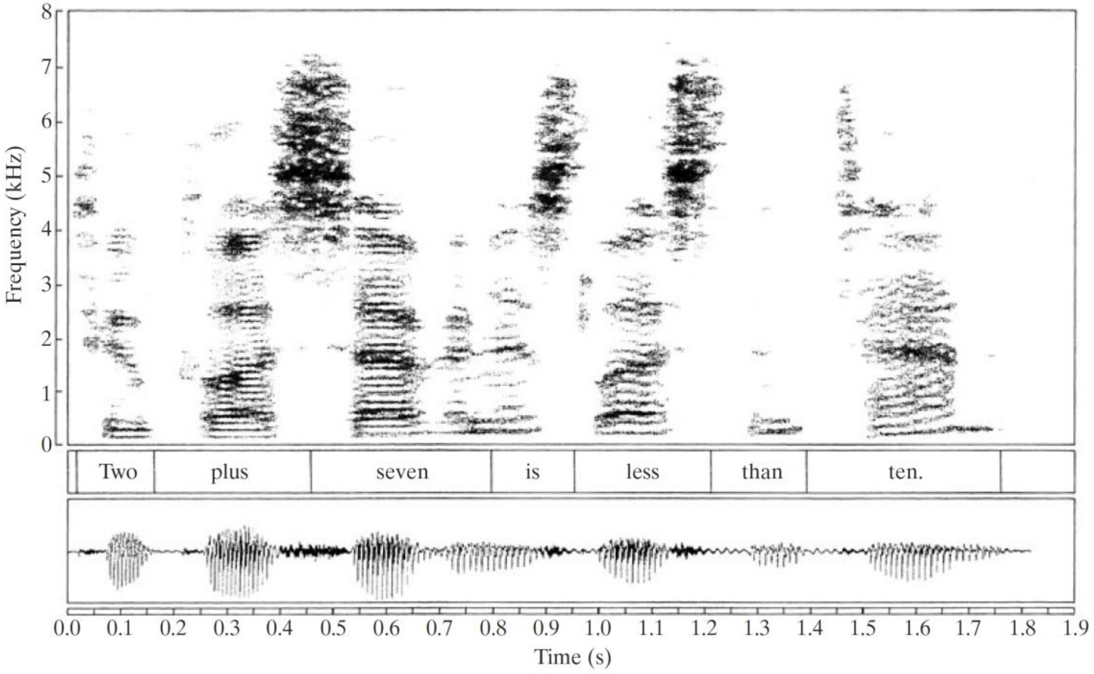




- نمایش زمان–فرکانس با STFT
  - تبدیل مختلط
  - اسپکتروگرام spectrogram
- رزولوشن زمانی و فرکانسی یک سیگنال
  - وابسته به طول پنجره
  - پنجره باریک زمانی (پهن فرکانسی)
    - رز.لوشن خوب زمانی و بد فرکانسی
  - پنجره پهن زمانی (باریک فرکانسی)
    - رزولوشن خوب فرکانسی و بد زمانی



(a)



(b)

تبدیل فوریه وابسته به سیگنال (تبدیل فوریه کوتاه مدت)

- نمایش زمان–فرکانس با STFT
  - تبدیل مختلط
  - اسپکتروگرام spectrogram
- رزولوشن زمانی و فرکانسی یک سیگنال
  - وابسته به طول پنجره
  - پنجره باریک زمانی (پهن فرکانسی)
    - رز.لوشن خوب زمانی و بد فرکانسی
  - پنجره پهن زمانی (باریک فرکانسی)
    - رزولوشن خوب فرکانسی و بد زمانی