



Sharif University of Technology

پردازش سیگنال‌های حیاتی مبحث ششم – تخمین طیف Spectral Estimation

محمدباقر شمس‌الهی

mbshams@sharif.edu

دانشکده برق دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مبحث نهم - تخمین طیف

- مقدمه: هدف تخمین طیف
- روش‌های کلی تخمین
 - روش‌های غیرپارامتری (بدون مدل‌سازی فرآیند)
 - روش‌های پارامتری (مبتنی بر مدل‌سازی فرآیند)
- روش‌های غیرپارامتری
 - مبتنی بر تخمین همبستگی و تبدیل فوریه از آن (روش Blackman-Tukey (BT)
 - مبتنی بر تبدیل فوریه مستقیم از تابع نمونه (روش Periodogram) و بهبود یافته آن (Welch)
- روش‌های پارامتری
 - روش‌های مبتنی بر مدل‌های AR, MA, ARMA
 - چند روش خاص (Prony, PHD, Capon)

$$x[n] \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} |X_N(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

• تجزیه و تحلیل فرآیند در حوزه فرکانس

$$p_x = E\{P_{av}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E\{|X_N(e^{j\omega})|^2\} d\omega$$

– توابع نمونه: سیگنال‌های یقینی توان

– عدم وجود تبدیل فوریه برای فرآیند

$$p_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) d\omega \Rightarrow S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E\{|X_N(e^{j\omega})|^2\}$$

– تعریف چگالی طیف توان PSD

$$S_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] e^{-j\omega m} \Leftrightarrow R_x[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) e^{j\omega m} d\omega$$

• چگالی طیف توان برای فرآیند ایستا

$$S_x(\omega) \geq 0$$

$$R_x^*[m] = R_x[-m]$$

$$R_x[0] \geq |R_x[m]|$$

$$S_{xy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[m] e^{-j\omega m}$$

• خواص چگالی طیف توان و تابع همبستگی

– چگالی طیف توان حقیقی و نامنفی است

– تابع همبستگی تقارن هرمیتی دارد

– تابع همبستگی در مبدا بیشترین مقدار را دارد

– تابع همبستگی متقابل و چگالی طیف توان متقابل برای دو فرآیند

- هدف تخمین طیف
 - تخمین چگالی طیف توان یک فرآیند (در همه فرکانس‌ها یا بعضی فرکانس‌ها)
 - تخمین با استفاده از روی یک قطعه از یک تابع نمونه
- روش‌های کلی تخمین
 - روش‌های غیرپارامتری (بدون مدل‌سازی فرآیند)
 - روش‌های پارامتری (مبتنی بر مدل‌سازی فرآیند)
- روش‌های غیرپارامتری
 - مبتنی بر تخمین همبستگی و تبدیل فوریه از آن (روش Blackman-Tukey (BT))
 - مبتنی بر تبدیل فوریه مستقیم از تابع نمونه (روش Periodogram) و بهبود یافته آن (Welch)
- روش‌های پارامتری
 - روش‌های مبتنی بر مدل‌های AR, MA, ARMA
 - چند روش خاص (Prony, PHD, Capon)

روش‌های غیرپارامتری

$$X[n], \quad x[n], 0 \leq n \leq M-1$$

• روش Blackman-Tukey (BT)

$$\hat{R}_x[m] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-m-1} X[n]X[n+m] \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad \hat{R}_x[m] = \hat{R}_x[-m] \quad -(M-1) \leq m \leq 0$$

– تخمین بایاس دار همبستگی در مقادیر ممکن

$$\hat{S}_x(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{R}_x[m] e^{-j\omega m}$$

– تبدیل فوریه از مقادیر موجود همبستگی (صفر فرض کردن سایر مقادیر)

$$\hat{R}_x[m] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} X[n]X[n+|m|] \quad 0 \leq |m| \leq M-1$$

• محاسبه بایاس

– محاسبه بایاس تخمین گر تابع همبستگی

$$E\{\hat{R}_x[m]\} = E\left\{\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} X[n]X[n+|m|]\right\} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} E\{X[n]X[n+|m|]\}$$

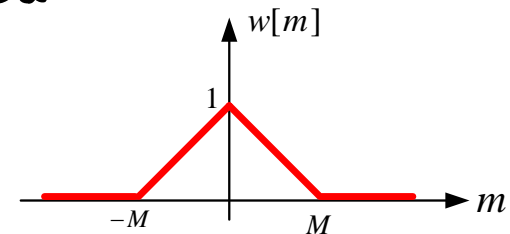
$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} R_x[|m|] = R_x[|m|] \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-|m|-1} 1 = R_x[m] \frac{M-|m|}{M} = R_x[m] \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) \quad 0 \leq |m| \leq M-1$$

– محاسبه بایاس تخمین گر چگالی طیف توان

$$E\{\hat{S}_x(\omega)\} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E\{\hat{R}_x[m]\} e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} R_x[m] \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] w[m] e^{-j\omega m}$$

$$= S_x(\omega) \circledast W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\theta) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

– کم شدن بایاس با افزایش M



روش‌های غیرپارامتری

• روش پریودوگرام Periodogram

– تخمین چگالی طیف توان با الهام از تعریف اصلی

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E \left\{ \left| X_N(e^{j\omega}) \right|^2 \right\}$$

$$X[n], \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$X_w[n] = X[n]w[n], \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$X_w(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} X_w[n]e^{-j\omega n}$$

– تبدیل فوریه از سیگنال پنجره شده (سیگنال حقیقی فرض می‌شود)

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{M} \left| X_w(e^{j\omega}) \right|^2$$

– محاسبه مربع دامنه تبدیل فوریه

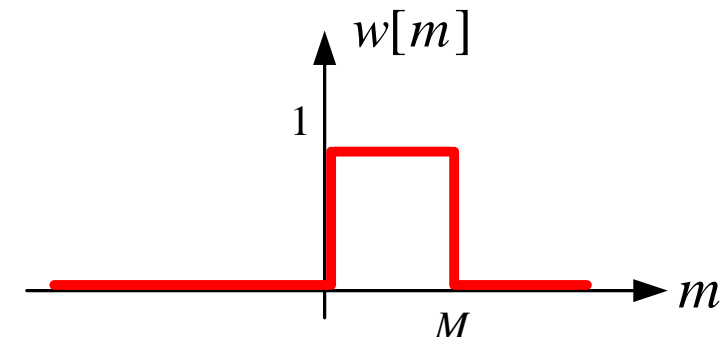
$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{M} \left| X_w(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{1}{M} X_w(e^{j\omega}) X_w^*(e^{j\omega})$$

– توجیه ارتباط با تبدیل فوریه از همبستگی

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_w[n]e^{-j\omega n} \sum_{k=0}^{M-1} X_w[k]e^{j\omega k} = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_w[n]X_w[k]e^{-j\omega(n-k)}$$

– شباهت به روش BT

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_w[k]X_w[k+m] \right) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_{x_w}[m]e^{-j\omega m}$$



روش‌های غیرپارامتری

- محاسبه بایاس روش پریودوگرام Periodogram

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{S}_x(\omega)\} &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{X_w[n]X_w[k]\} e^{-j\omega(n-k)} = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{X[n]w[n]X[k]w[k]\} e^{-j\omega(n-k)} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[n-k]w[n]w[k] e^{-j\omega(n-k)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \left(\frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k]w[k+m] \right) e^{-j\omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] R_w[m] e^{-j\omega m} = S_x(\omega) \otimes S_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\theta) S_w(\omega - \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

— کم شدن بایاس با افزایش M

— پریودوگرام با پنجره مستطیلی همان روش BT است (با تخمین همه مقادیر ممکن همبستگی)

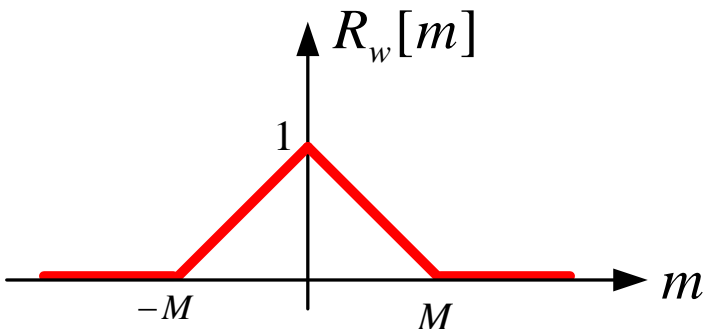
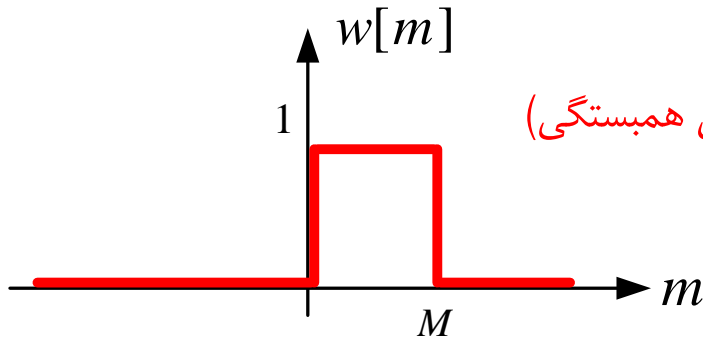
— واریانس زیاد تخمین‌گر حتی با افزایش M

- حذف متوسط آماری (امید ریاضی)

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E\{|X_N(e^{j\omega})|^2\}$$

— روش بهبود پریودوگرام (کاهش واریانس)

- متوسط‌گیری برای هر فرکانس روی چند تابع نمونه



روش‌های غیرپارامتری

• روش Welch برای بهبود روش پریودوگرام Periodogram

$$X[n], \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$X^i[n] = X[n + (i-1)(L-D)], \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$X_{w_L}^i[n] = X^i[n]w_L[n], \quad n = 0, 1, \dots, L-1$$

$$\hat{S}_x^i(\omega) = \frac{1}{L} |X_{w_L}^i(e^{j\omega})|^2 \Rightarrow \hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{S}_x^i(\omega)$$

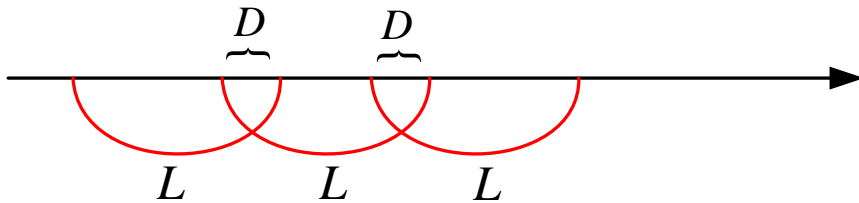
– متوسط‌گیری روی چند تابع نمونه

– قطعه‌بندی یک تابع نمونه

– متوسط‌گیری روی پریودوگرام قطعه‌ها

– نام دیگر:

Weighted Overlapped Segment Averaging (WOSA)



– محاسبه بایاس

• تفاوت با بایاس پریودوگرام در طول پنجره

$$E\{\hat{S}_x(\omega)\} = E\left\{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{S}_x^i(\omega)\right\} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E\{\hat{S}_x^i(\omega)\} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (S_x(\omega) \otimes S_{w_L}(\omega)) = S_x(\omega) \otimes S_{w_L}(\omega)$$

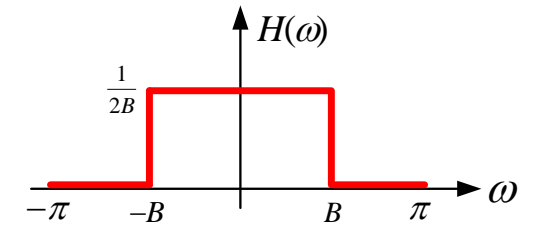
– بدتر شدن بایاس و بهتر شدن واریانس تخمین

روش‌های غیرپارامتری

• روش نرم‌سازی (Smoothing) برای بهبود روش پریودوگرام Periodogram

– نرم‌سازی در حوزه فرکانس

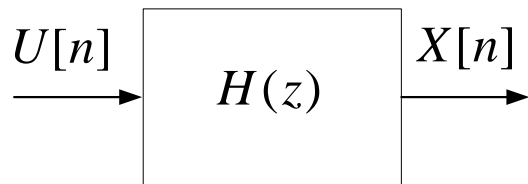
$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{M} |X_w(e^{j\omega})|^2 \Rightarrow \langle \hat{S}_x(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{S}_x(\theta) H(\omega - \theta) d\theta = \hat{S}_x(\omega) \otimes H(\omega)$$



– محاسبه بایاس

$$E \left\{ \langle \hat{S}_x(\omega) \rangle \right\} = E \left\{ \hat{S}_x(\omega) \right\} \otimes H(\omega) = S_x(\omega) \otimes S_w(\omega) \otimes H(\omega)$$

– بدتر شدن بایاس و بهتر شدن واریانس تخمین



روش‌های پارامتری

- تخمین طیف با استفاده از مدل سازی فرآیند

$$S_x(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_u(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_u^2$$

$$X[n], \quad 0 \leq n \leq M-1 \Rightarrow \{\hat{\sigma}_u^2, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q\} \Rightarrow \hat{S}_x(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \hat{\sigma}_u^2$$

– توصیف چگالی طیف توان فرآیند با پاسخ فرکانسی سیستم

$$\hat{S}_x(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j\omega k}\right|^2} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\rho_0 + 2 \sum_{k=1}^p \rho_k \cos \omega k}$$

– پیچیدگی محاسبه بایاس

- تخمین طیف با مدل AR

– غیر صفر فرض کردن مقادیر همبستگی تخمین زده نشده

$$\rho_k = \sum_{l=0}^p \hat{a}_l \hat{a}_{l+k}, k = 0, 1, \dots, p, \hat{a}_0 = 1$$

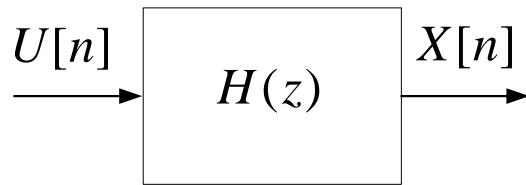
– قطب‌های نزدیک دایره واحد: **قله‌های تیز در طیف**

- تخمین طیف با مدل MA

$$\hat{S}_x(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \hat{\sigma}_u^2 = \left| \sum_{k=0}^q \hat{b}_k e^{-j\omega k} \right|^2 \hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_u^2 \sum_{k=0}^q \hat{b}_k e^{-j\omega k} \sum_{l=0}^q \hat{b}_l e^{j\omega l} = \hat{\sigma}_u^2 \sum_{m=-q}^q \left(\sum_{k=0}^{q-|m|} \hat{b}_k \hat{b}_{k+|m|} \right) e^{-j\omega m} = \hat{\sigma}_u^2 \sum_{m=-q}^q \hat{R}_x[m] e^{-j\omega m}$$

– شباهت با روش BT بدلیل صفر بودن (فرض کردن) همبستگی

– صفرهای نزدیک دایره واحد: **دره‌های تیز در طیف**



روش‌های پارامتری

• تخمین طیف با مدل ARMA

$$\hat{S}_x(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\left| \sum_{k=0}^q \hat{b}_k e^{-j\omega k} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j\omega k} \right|^2} \hat{\sigma}_u^2$$

- غیر صفر فرض کردن مقادیر همبستگی تخمین زده نشده
- قطب‌های نزدیک دایره واحد: **قله‌های تیز در طیف**
- صفرهای نزدیک دایره واحد: **دره‌های تیز در طیف**

• مدل‌سازی طیف یک فرآیند با دامنه پاسخ فرکانسی یک سیستم

- امکان تقریب هر شکلی با دامنه تابع تبدیل کسر گویا
- مفاهیم مربوط به ارتباط دامنه پاسخ فرکانسی با محل قطب‌ها و صفرها
- تقریب اولیه با پرئودوگرام برای تخمین نوع و مرتبه مدل
 - قله‌های تیز/دره‌های تیز/قله‌ها و دره‌های تیز
- شبیه‌سازی
 - ساختن تابع نمونه از فرآیندی که چگالی طیف توان آن با یک فرم بسته معلوم است
 - مقایسه روش‌های مختلف

– بررسی مثال‌های کتاب

مثال

$$X[0] = 9, X[1] = 6, X[2] = -3$$

• تابع نمونه‌ای با ۳ نقطه

– تخمین همبستگی

$$R_x[0] = \frac{9^2 + 6^2 + (-3)^2}{3} = 42, R_x[1] = R_x[-1] = \frac{(9).(6) + (6).(-3)}{3} = 12, R_x[2] = R_x[-2] = \frac{(9)(-3)}{3} = -9$$

– تخمین طیف به روش BT

$$\hat{S}_x(\omega) = \sum_{m=-2}^2 \hat{R}_x[m] e^{-j\omega m} = 42 + 12(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) - 9(e^{-j2\omega} + e^{j2\omega}) = 42 + 24 \cos \omega - 18 \cos 2\omega$$

– تخمین طیف به روش پریودوگرام با پنجره مستطیلی

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{3} |X(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{3} \left| \sum_{n=0}^2 X[n] e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{3} |9 + 6e^{-j\omega} - 3e^{-j2\omega}|^2 = 42 + 24 \cos \omega - 18 \cos 2\omega$$

– تخمین طیف به روش AR(1)

– تخمین طیف به روش AR(2)

– تخمین طیف به روش MA(1)

– تخمین طیف به روش MA(2)

– تخمین طیف به روش ARMA(1,1)

$$\hat{S}_x(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \hat{\sigma}_u^2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{S}_x(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{|1 + \hat{a}_1 e^{-j\omega}|^2} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{1 + \hat{a}_1^2 + 2\hat{a}_1 \cos \omega} \\ \hat{S}_x(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{|1 + \hat{a}_1 e^{-j\omega} + \hat{a}_2 e^{-j2\omega}|^2} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{1 + \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + 2\hat{a}_1(1 + \hat{a}_2) \cos \omega + 2\hat{a}_2 \cos 2\omega} \\ \hat{S}_x(\omega) = \hat{\sigma}_u^2 |1 + \hat{b}_1 e^{-j\omega}|^2 = \hat{\sigma}_u^2 (1 + \hat{b}_1^2 + 2\hat{b}_1 \cos \omega) \\ \hat{S}_x(\omega) = \hat{\sigma}_u^2 |1 + \hat{b}_1 e^{-j\omega} + \hat{b}_2 e^{-j2\omega}|^2 = \hat{\sigma}_u^2 (1 + \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + 2\hat{b}_1(1 + \hat{b}_2) \cos \omega + 2\hat{b}_2 \cos 2\omega) \\ \hat{S}_x(\omega) = \frac{|1 + \hat{b}_1 e^{-j\omega}|^2}{|1 + \hat{a}_1 e^{-j\omega}|^2} \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1 + \hat{b}_1^2 + 2\hat{b}_1 \cos \omega}{1 + \hat{a}_1^2 + 2\hat{a}_1 \cos \omega} \hat{\sigma}_u^2 \end{cases}$$

روش Prony برای سیگنال‌های یقینی

- مدل سیگنال: مجموع p سینوسی مختلط میرا

$$s[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k n T_s} e^{j(2\pi f_k n T_s + \varphi_k)}$$

– نمونه‌برداری شده از سیگنال پیوسته

$$4p : \{A_k, \alpha_k, f_k, \varphi_k\}, k = 1, 2, \dots, p$$

– تعداد پارامترهای مدل

$$s[n] = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n, \quad b_k = A_k e^{j\varphi_k}, \quad z_k = e^{(\alpha_k + j2\pi f_k)T_s}$$

• $4p$ پارامتر حقیقی

• $2p$ پارامتر مختلط

$$2p : \{b_k, z_k\}, k = 1, 2, \dots, p$$

- هدف: محاسبه پارامترهای مدل از روی چند مقدار سیگنال

$$s[n] = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n \Rightarrow s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] = 0 \quad p \text{ پاسخ همگن یک معادله تفاضلی همگن مرتبه } p$$

- روش محاسبه ضرایب معادله تفاضلی

$$s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] = -s[n]$$

– نیاز به p مقدار متوالی سیگنال مختلط

$$\begin{pmatrix} s[p-1] & s[p-2] & \cdots & s[0] \\ s[p] & s[p-1] & \cdots & s[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s[2p-2] & s[2p-3] & \cdots & s[p-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s[p] \\ s[p+1] \\ \vdots \\ s[2p-1] \end{pmatrix} \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_p$$

روش Prony برای سیگنال‌های یقینی

• روش محاسبه پارامترهای مدل

$$s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] = 0$$

– اول: محاسبه $\{z_k\}$ با استفاده از معادله مشخصه

$$1 + \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_p$$

• محاسبه $\{\alpha_k, f_k\}$

– دوم: محاسبه $\{b_k\}$ با معادله $s[n] = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n$

• محاسبه $\{A_k, \varphi_k\}$

$$\sum_{k=1}^p b_k z_k^n = s[n]$$

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \dots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s[0] \\ s[1] \\ \vdots \\ s[p-1] \end{pmatrix} \Rightarrow Z\underline{b} = \underline{s} \Rightarrow \underline{b} = Z^{-1}\underline{s} \Rightarrow b_1, b_2, \dots, b_p$$

• حالت‌های خاص

– ۲ نقطه از سیگنال مختلط برای تخمین پارامترهای یک سینوسی مختلط میرا با ۴ پارامتر حقیقی

– ۳ نقطه از سیگنال حقیقی برای تخمین پارامترهای یک سینوسی حقیقی خالص

– انتخاب مناسب و ساده: نقاط متوالی

روش Prony برای سیگنال‌های تصادفی

- مدل سیگنال: مجموع p سینوسی مختلط میرا و نویز سفید جمع شونده

– تعداد پارامترهای مدل

$$X[n] = s[n] + N[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k n T_s} e^{j(2\pi f_k n T_s + \phi_k)} + N[n]$$

- $4p+1$ پارامتر حقیقی (واریانس نویز اضافه شده است)

$$4p+1: \{\sigma_n^2, A_k, \alpha_k, f_k, \phi_k\}, k=1, 2, \dots, p$$

- نویز سفید با متوسط صفر و واریانس σ_n^2

• هدف: تخمین پارامترهای مدل از روی یک قطعه از تابع نمونه مشاهده

$$s[n] = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n$$

$$b_k = A_k e^{j\phi_k}, \quad z_k = e^{(\alpha_k + j2\pi f_k)T_s}$$

- مدل توصیف کننده فرآیند: معادله تفاضلی

– مدل ARMA(p,p)

$$s[n] + \sum_{m=1}^p a_m s[n-m] = 0$$

- ضرایب یکسان در سمت چپ و راست

– تفاوت با سیستم همانی

- محاسبه پاسخ با رابطه بازگشتی و شرایط اولیه

$$\left\{ \begin{array}{l} X[n] = s[n] + N[n] \Rightarrow s[n] = X[n] - N[n] \\ \Rightarrow (X[n] - N[n]) + \sum_{m=1}^p a_m (X[n-m] - N[n-m]) = 0 \\ \Rightarrow X[n] + \sum_{m=1}^p a_m X[n-m] = N[n] + \sum_{m=1}^p a_m N[n-m] \end{array} \right.$$

روش Prony برای سیگنال‌های تصادفی

- روش محاسبه ضرایب معادله تفاضلی و واریانس نویز σ_n^2

– نیاز به $p+1$ مقدار تابع همبستگی فرآیند مشاهده شده ARMA

$$X[n] + \sum_{m=1}^p a_m X[n-m] = N[n] + \sum_{m=1}^p a_m N[n-m]$$

$$X[n], \quad 0 \leq n \leq M-1 \Rightarrow R_x[0], R_x[1], \dots, R_x[p] \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma_n^2$$

$$1 + \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_p$$

- روش محاسبه پارامترهای مدل

– اول: محاسبه $\{z_k\}$ با استفاده از معادله مشخصه

- محاسبه $\{\alpha_k, f_k\}$

– دوم: محاسبه $\{b_k\}$ با حل یک مسئله بهینه‌سازی

- محاسبه $\{A_k, \varphi_k\}$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[M-1] \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^p b_k z_k^n = s[n] \Rightarrow Z \underline{b} = \underline{s}, \quad X[n] = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n + N[n]$$

$$X[n], \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$\underline{b}_{opt} = \arg \min_b \sum_{n=0}^{M-1} |X[n] - s[n]|^2 = \arg \min_b (\underline{X} - \underline{s})^{*T} (\underline{X} - \underline{s}) = \arg \min_b (\underline{X} - Z \underline{b})^{*T} (\underline{X} - Z \underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{b}_{opt} = \left[(Z^*)^T Z \right]^{-1} (Z^*)^T \underline{X} \Rightarrow b_1, b_2, \dots, b_p$$

$$Z : M \times p$$

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} s[0] \\ s[1] \\ \vdots \\ s[M-1] \end{pmatrix} \quad \bullet \quad \text{معمولا: } M > p$$

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD)

- مدل سیگنال: مجموع p سینوسی حقیقی متمایز با فاز تصادفی و نویز سفید جمع شونده
 - فازهای تصادفی مستقل از هم و مستقل از نویز $X[n] = S[n] + N[n] = \sum_{k=1}^p A_k \cos(\omega_k n + \varphi_k) + N[n]$
 - توزیع یکنواخت در بازه $(0, 2\pi)$
 - نویز سفید با متوسط صفر و واریانس σ_n^2
 - تعداد پارامترهای مدل $2p+1: \{\sigma_n^2, A_k, \omega_k\}, k = 1, 2, \dots, p$
- $2p+1$ پارامتر حقیقی
- هدف: تخمین چگالی طیف توان فرآیند $S[n]$ از روی یک قطعه از تابع نمونه مشاهده
- عبارت تحلیلی تابع همبستگی و چگالی طیف توان

$$X[n] = S[n] + N[n] \Rightarrow R_x[m] = R_s[m] + R_{sn}[m] + R_{ns}[m] + R_n[m] = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k m) + 0 + 0 + \sigma_n^2 \delta[m]$$

$$S_x(\omega) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} \pi (\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)) + \sigma_n^2 \quad |\omega| < \pi$$
- تبدیل تخمین طیف به تخمین پارامترهای مدل
- محاسبه پارامترهای مدل با داشتن $2p+1$ مقدار همبستگی مشاهده

– دستگاه به شدت غیرخطی

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD)

- یک اتحاد مثلثاتی

- مدل معادله تفاضلی مرتبه دو برای یک سیگنال سینوسی حقیقی خالص

– دو ریشه معادله مشخصه روی دایره واحد در فرکانس سینوسی و مزدوج آن

$$\cos(\omega n + \varphi) + \cos(\omega(n-2) + \varphi) = 2 \cos(\omega(n-1) + \varphi) \cdot \cos(\omega)$$

$$s[n] = A \cos(\omega n + \varphi) \Rightarrow s[n] + s[n-2] = 2s[n-1] \cdot \cos(\omega) \Rightarrow s[n] - (2 \cos(\omega))s[n-1] + s[n-2] = 0$$

$$1 - (2 \cos(\omega))z^{-1} + z^{-2} = 0 \Rightarrow z_1, z_2 = e^{\pm j\omega}$$

- مدل معادله تفاضلی مرتبه $2p$ برای p سیگنال سینوسی حقیقی خالص متمایز

– ریشه روی دایره واحد در فرکانس‌های مستقل و مزدوج آنها

$$S[n] = \sum_{k=1}^p A_k \cos(\omega_k n + \varphi_k) \Rightarrow s[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m s[n-m] = 0$$

$$1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_{2p} = e^{\pm j\omega_1}, e^{\pm j\omega_2}, \dots, e^{\pm j\omega_p}$$

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD)

- مدل توصیف کننده مجموع p سینوسی حقیقی متمایز با فاز تصادفی و نویز سفید جمع شونده

– مدل $ARMA(2p, 2p)$

- ضرایب یکسان در سمت چپ و راست

– تفاوت با سیستم همانی

$$X[n] = s[n] + N[n] \Rightarrow s[n] = X[n] - N[n]$$

- محاسبه پاسخ با رابطه بازگشتی و شرایط اولیه

$$s[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m s[n-m] = 0 \Rightarrow (X[n] - N[n]) + \sum_{m=1}^{2p} a_m (X[n-m] - N[n-m]) = 0$$

$$\Rightarrow X[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m X[n-m] = N[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m N[n-m]$$

- روش اول محاسبه ضرایب معادله تفاضلی و واریانس نویز

– نیاز به $2p+1$ مقدار تابع همبستگی فرآیند مشاهده شده $ARMA$

$$X[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m X[n-m] = N[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m N[n-m]$$

– با استفاده از روش‌های مبحث قبل

$$R_x[0], R_x[1], \dots, R_x[2p] \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{2p}, \sigma_n^2$$

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD) روش

- روش دوم محاسبه ضرایب معادله تفاضلی و واریانس نویز

– نیاز به $2p+1$ مقدار تابع همبستگی فرآیند مشاهده شده

$$X[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m X[n-m] = N[n] + \sum_{m=1}^{2p} a_m N[n-m] \Rightarrow \underline{X}^T \underline{a} = \underline{N}^T \underline{a}$$

$$\Rightarrow \left\{ \underline{X} \underline{X}^T \right\} \underline{a} = \left\{ \underline{X} \underline{N}^T \right\} \underline{a} \Rightarrow E \left\{ \underline{X} \underline{X}^T \right\} \underline{a} = E \left\{ \underline{X} \underline{N}^T \right\} \underline{a}$$

$$E \left\{ \underline{X} \underline{X}^T \right\} = \begin{pmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \cdots & R_x[2p] \\ R_x[-1] & R_x[0] & \cdots & R_x[2p-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x[-2p] & R_x[-2p+1] & \cdots & R_x[0] \end{pmatrix} = R_x$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X[n] \\ X[n-1] \\ \vdots \\ X[n-2p] \end{pmatrix}$$

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N[n] \\ N[n-1] \\ \vdots \\ N[n-2p] \end{pmatrix}$$

$$E \left\{ \underline{X} \underline{N}^T \right\} = E \left\{ (\underline{S} + \underline{N}) \underline{N}^T \right\} = E \left\{ \underline{S} \underline{N}^T \right\} + E \left\{ \underline{N} \underline{N}^T \right\} = E \left\{ \underline{S} \right\} E \left\{ \underline{N}^T \right\} + \sigma_n^2 I = 0 + \sigma_n^2 I$$

$$E \left\{ \underline{X} \underline{X}^T \right\} \underline{a} = E \left\{ \underline{X} \underline{N}^T \right\} \underline{a} \Rightarrow R_x \underline{a} = \sigma_n^2 I \underline{a} \Rightarrow \underline{R}_x \underline{a} = \sigma_n^2 \underline{a}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix}$$

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD)

- روش دوم محاسبه ضرایب معادله تفاضلی و واریانس نویز
 - نیاز به $2p+1$ مقدار تابع همبستگی فرآیند مشاهده شده
 - تبدیل مسئله به یک مسئله مقدار ویژه-بردار ویژه $R_x \underline{a} = \sigma_n^2 \underline{a}$
 - واریانس نویز برابر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس همبستگی با ابعاد $(2p+1) \times (2p+1)$
 - بردار ضرایب معادله تفاضلی برابر بردار ویژه متناظر با کوچکترین مقدار ویژه (با درایه اول برابر با یک)
 - مثبت بودن همه مقادیر ویژه ماتریس همبستگی (با ابعاد مناسب) فرآیند مورد بحث (معین مثبت بودن)
- روش تخمین طیف (محاسبه $2p+1$ پارامتر مدل)
 - ساختن ماتریس همبستگی با ابعاد $(2p+1) \times (2p+1)$ با $2p+1$ مقدار همبستگی
 - محاسبه کوچکترین مقدار ویژه این ماتریس و بردار ویژه متناظر با آن (واریانس نویز و ضرایب معادله تفاضلی)
 - محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه (فرکانس‌های مدل)
 - محاسبه ضرایب سینوسی از روی تابع همبستگی

$$1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_{2p} = e^{\pm j\omega_1}, e^{\pm j\omega_2}, \dots, e^{\pm j\omega_p}$$

$$R_x[m] = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k m) + \sigma_n^2 \delta[m]$$

روش Pisarenko's Harmonic Decomposition (PHD)

• خلاصه روش تخمین طیف (محاسبه $2p+1$ پارامتر مدل)

– ساختن ماتریس همبستگی با ابعاد $(2p+1) \times (2p+1)$ با مقدار همبستگی

– محاسبه بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس همبستگی

• کوچکترین مقدار ویژه: واریانس نویز: σ_n^2

• بردار ویژه متناظر با کوچکترین مقدار ویژه (با درایه اول برابر با یک): ضرایب معادله مشخصه a

– محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه (فرکانس‌های مدل)

$$1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_{2p} = e^{\pm j\omega_1}, e^{\pm j\omega_2}, \dots, e^{\pm j\omega_p}$$

$$R_x[m] = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k m) + \sigma_n^2 \delta[m]$$

– محاسبه ضرایب سینوسی از روی تابع همبستگی

– امکان تخمین مرتبه مدل

$$R_x[0] = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} + \sigma_n^2, \quad R_x[m] = \sum_{k=1}^p \frac{A_k^2}{2} \cos(\omega_k m), \quad m \neq 0$$

• تکرار ک.م.و با افزایش p

– مشکلات روش

• تخمین همبستگی

• تضمین معین مثبت بودن

• وارون کردن

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1.1) & \cos(\omega_2.1) & \cdots & \cos(\omega_p.1) \\ \cos(\omega_1.2) & \cos(\omega_2.2) & \cdots & \cos(\omega_p.2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\omega_1.p) & \cos(\omega_2.p) & \cdots & \cos(\omega_p.p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ \vdots \\ A_p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R_x[1] \\ 2R_x[2] \\ \vdots \\ 2R_x[p] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ \vdots \\ A_p^2 \end{pmatrix}$$

• روش PHD

– روش اول

$$R_x[0] = 5, R_x[1] = 1, R_x[2] = -1 \quad R_x[m] = \frac{A_1^2}{2} \cos(\omega_1 m) + \sigma_n^2 \delta[m]$$

$$\begin{cases} 5 = \frac{A_1^2}{2} + \sigma_n^2 \\ 1 = \frac{A_1^2}{2} \cos(\omega_1) \\ -1 = \frac{A_1^2}{2} \cos(2\omega_1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\omega_1) = -\cos(2\omega_1) \Rightarrow \cos(\omega_1) = -2\cos^2(\omega_1) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega_1) = 0.5 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{3} \\ \cos(\omega_1) = -1 \Rightarrow \omega_1 = \pi \end{cases}$$

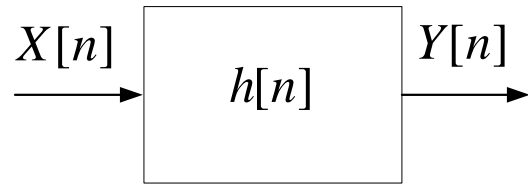
$$\Rightarrow A_1^2 = 4 \Rightarrow \sigma_n^2 = 3$$

– روش دوم

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_n^2 = 3, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - z^{-1} + z^{-2} = 0 \Rightarrow z_1, z_2 = e^{\pm j\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1^2 \cos(\omega_1) = 2R_x[1] = 2 \Rightarrow A_1^2 = 4$$

روش Capon (روش می نیمم واریانس)



$$X[n] = A_p e^{j(\omega_p n + \phi_p)} + N[n]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}$$

هدف: پیدا کردن ضرایب یک فیلتر

– فیلتر میان گذر FIR

– عبور یک سینوسی با فرکانس معلوم و تضعیف نویز

• روش کار

– ورودی مجموع یک سینوسی خالص مختلط با فرکانس معلوم و فاز تصادفی و نویز سفید

– طراحی ضرایب فیلتر با حل یک مسئله بهینه سازی

– تعریف یک تابع هدف مقید که باید می نیمم شود

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) d\omega$$

$$\rho = \sigma_y^2 = C_y[0] = R_y[0]$$

• توان سیگنال خروجی

• واریانس سیگنال خروجی

– قید

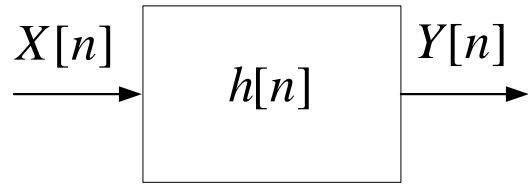
$$X[n] = A_p e^{j(\omega_p n + \phi_p)} \rightarrow Y[n] = A_p e^{j(\omega_p n + \phi_p)}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega_p}) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^M h_k e^{-j\omega_p k} = 1 \Rightarrow \left(\underline{e}_p^T \right)^* \underline{h} = 1$$

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{pmatrix} \quad \underline{e}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j\omega_p} \\ \vdots \\ e^{j\omega_p M} \end{pmatrix}$$

روش Capon (روش می نیمم واریانس)

• روش کار



$$X[n] = A_p e^{j(\omega_p n + \varphi_p)} + N[n]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}$$

– طراحی ضرایب فیلتر با حل یک مسئله بهینه سازی

– تعریف یک تابع هدف مقید که باید می نیمم شود

• توان سیگنال خروجی

• واریانس سیگنال خروجی

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^M h_k e^{-j\omega k} \right) \left(\sum_{l=0}^M h_l e^{-j\omega l} \right)^* S_x(\omega) d\omega \\ &= \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M h_k h_l^* \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-k)} S_x(\omega) d\omega = \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M h_k h_l^* R_x[l-k] = \left(\underline{h}^T \right)^* \underline{R}_x \underline{h} \end{aligned} \right. \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \sigma_y^2 = C_y[0] = R_y[0] = E \{ Y[n] Y^*[n] \} = E \left\{ \left(\sum_{k=0}^M h_k X[n-k] \right) \left(\sum_{l=0}^M h_l X[n-l] \right)^* \right\} \\ &= \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M h_k h_l^* E \{ X[n-k] X^*[n-l] \} = \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M h_k h_l^* R_x[l-k] = \left(\underline{h}^T \right)^* \underline{R}_x \underline{h} \end{aligned} \right. \quad \underline{e}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j\omega_p} \\ \vdots \\ e^{j\omega_p M} \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}_x : (M+1) \times (M+1)$$

روش Capon (روش می نیمم واریانس)

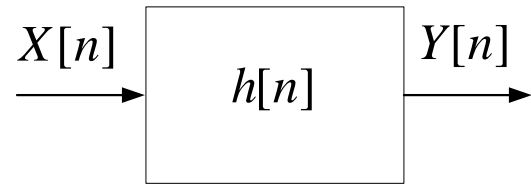
• روش کار

– طراحی ضرایب فیلتر با حل یک مسئله بهینه سازی

– تعریف یک تابع هدف مقید که باید می نیمم شود

• توان سیگنال خروجی

• واریانس سیگنال خروجی



$$X[n] = A_p e^{j(\omega_p n + \varphi_p)} + N[n]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h_k z^{-k}$$

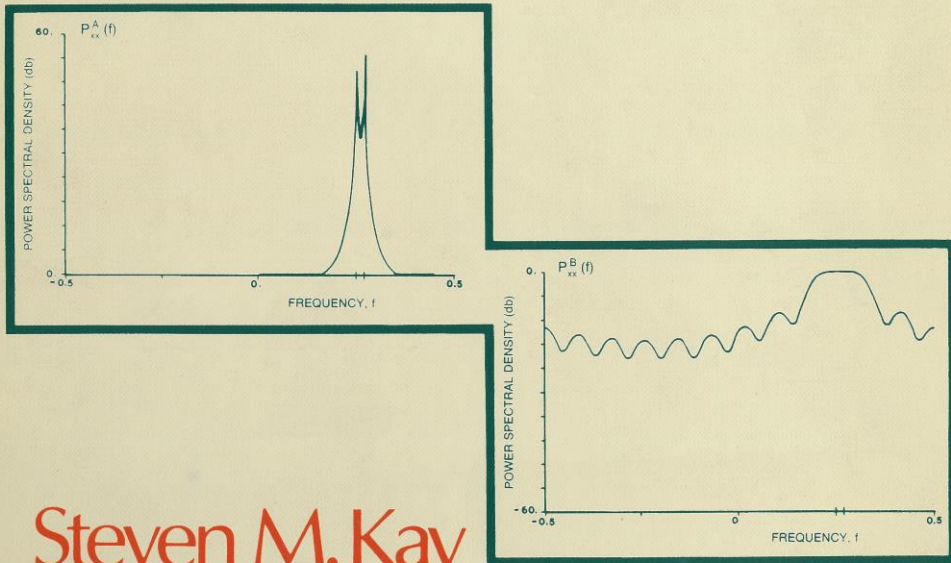
$$\begin{cases} \underline{h}_{opt} = \arg \min_{\underline{h}} \rho = \arg \min_{\underline{h}} \left(\underline{h}^T \right)^* R_x \underline{h} \\ \left(\underline{e}_p^T \right)^* \underline{h} = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{h}_{opt} = \frac{R_x^{-1} \underline{e}_p}{\left(\underline{e}_p^T \right)^* R_x^{-1} \underline{e}_p}, S_y(\omega_p) = \frac{1}{\left(\underline{e}_p^T \right)^* R_x^{-1} \underline{e}_p}$$

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{pmatrix} \quad \underline{e}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j\omega_p} \\ \vdots \\ e^{j\omega_p M} \end{pmatrix}$$

MODERN SPECTRAL ESTIMATION

DISK INCLUDED

THEORY & APPLICATION



Steven M. Kay

PRENTICE-HALL SIGNAL PROCESSING SERIES
ALAN V. OPPENHEIM, SERIES EDITOR



کاربرد

• یک کتاب معروف

$$x[n] = 2 \cos(2\pi f_1 n) + 2 \cos(2\pi f_2 n) + 2 \cos(2\pi f_3 n) + z[n] \quad n = 0, 1, \dots, 31$$

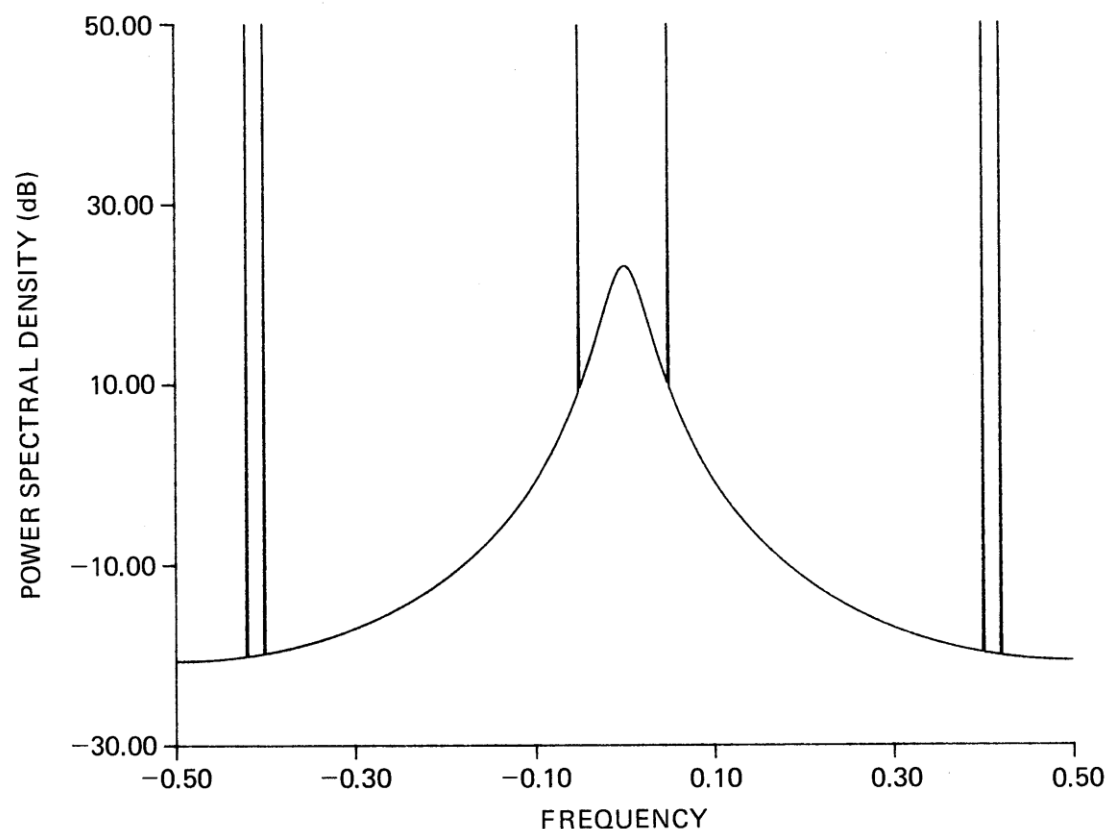
$$f_1 = 0.05, f_2 = 0.40, f_3 = 0.42$$

$$z[n] = -a[1]z[n-1] + u[n]$$

$$a[1] = -0.850848$$

$$\sigma^2 = 0.1010$$

- سیگنال تست شبیه سازی شده
- محور فرکانس نرمالیزه شده



$$P_{zz}(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + a[1] \exp(-j2\pi f)|^2}$$

Figure 1.3 True power spectral density of test case data.

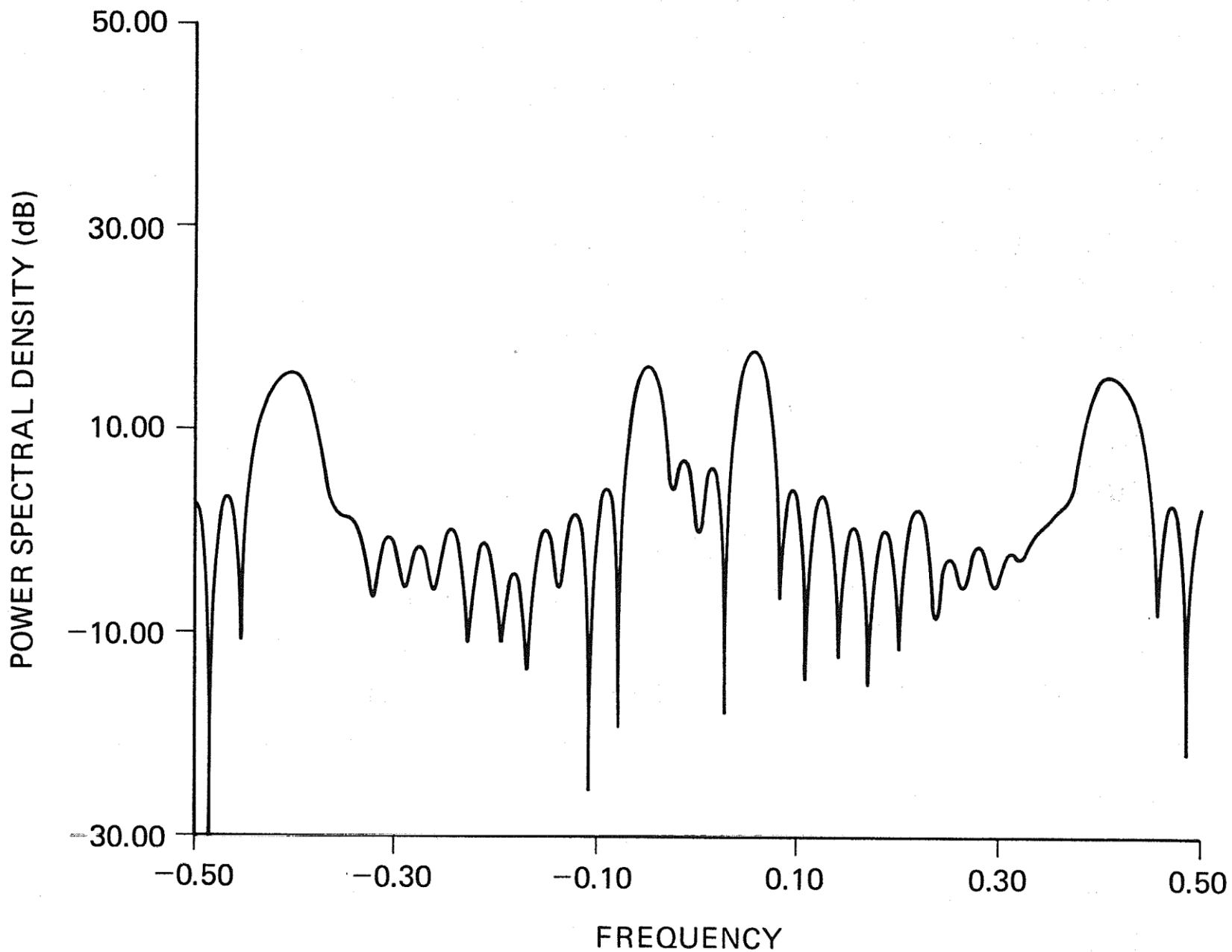


Figure 4.1 Periodogram spectral estimate for complex test case data.

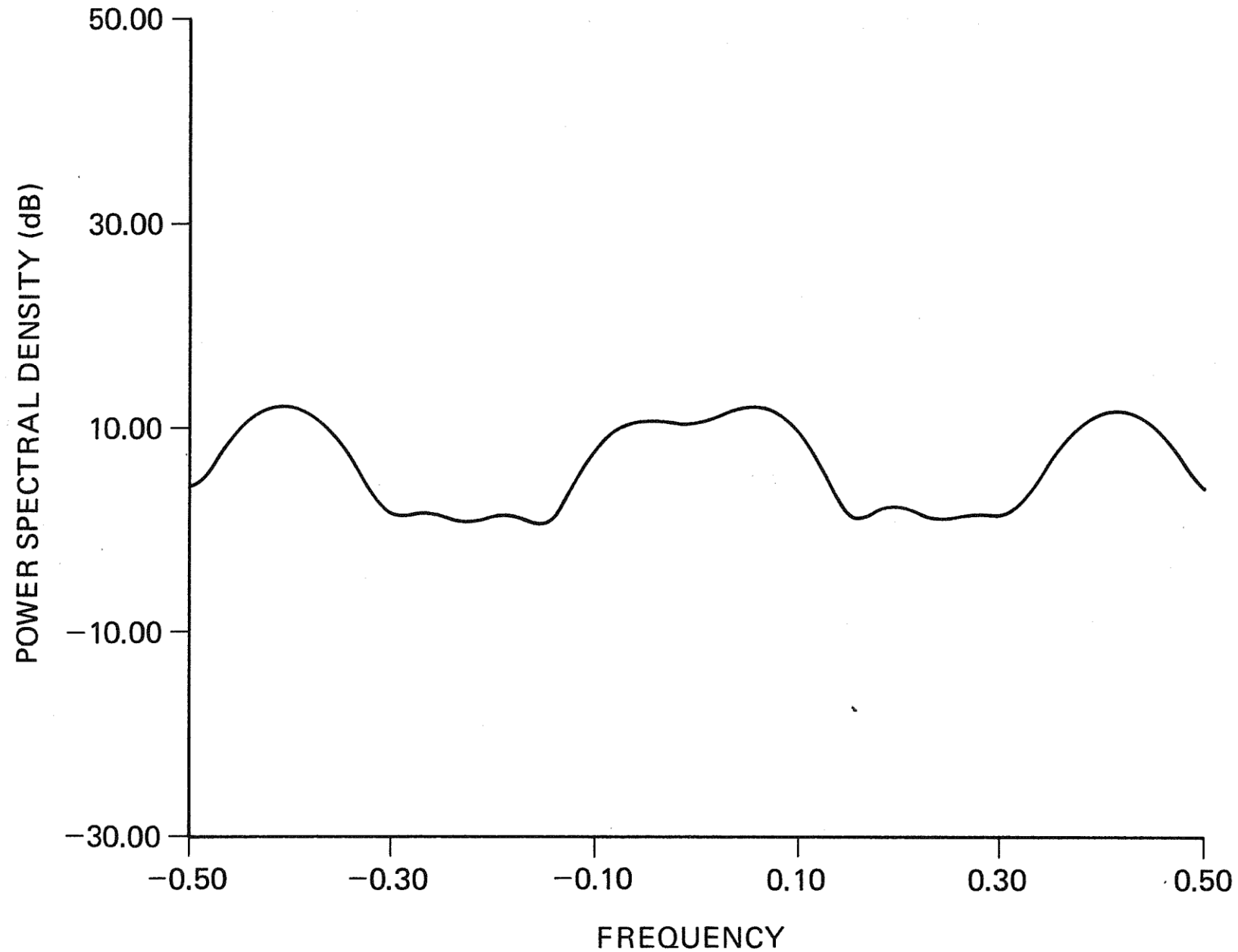


Figure 4.2 Blackman–Tukey spectral estimate using Bartlett window ($M = 10$) for complex test case data.

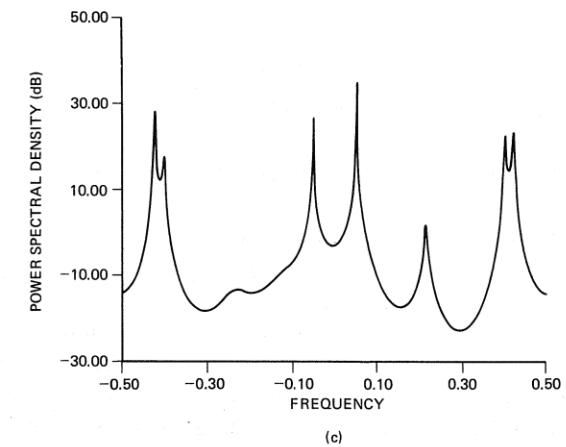
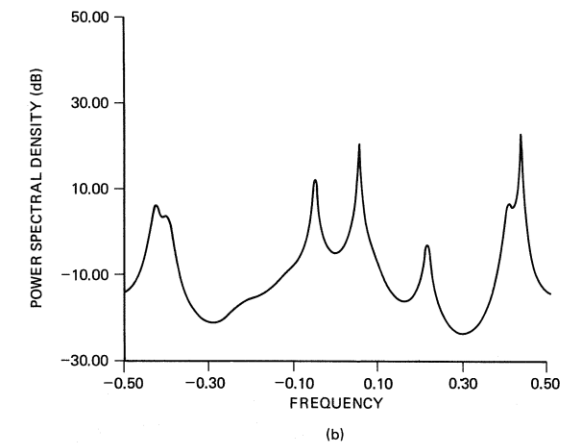
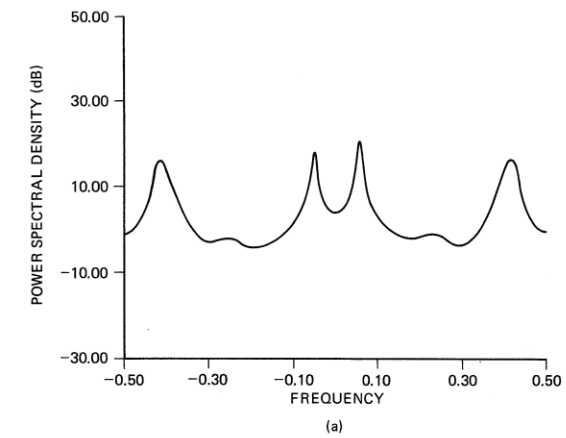
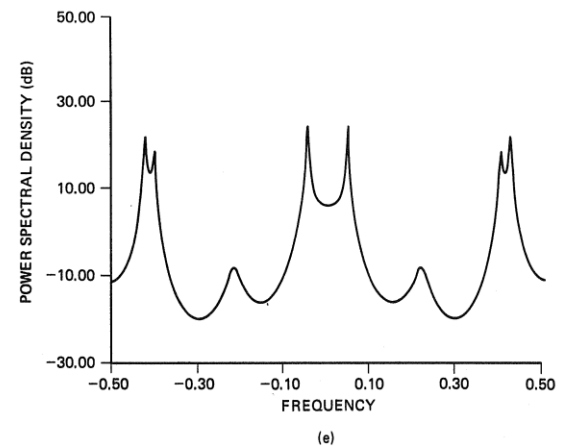
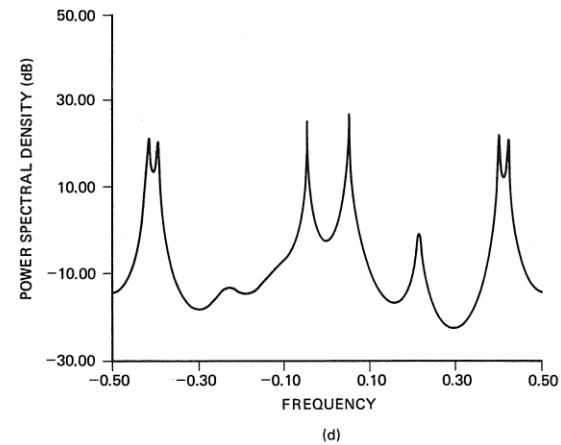


Figure 7.1 Autoregressive spectral estimates for test case data ($p = 10$). (a) Autocorrelation method. (b) Covariance method. (c) Modified covariance method. (d) Burg method. (e) Recursive MLE.



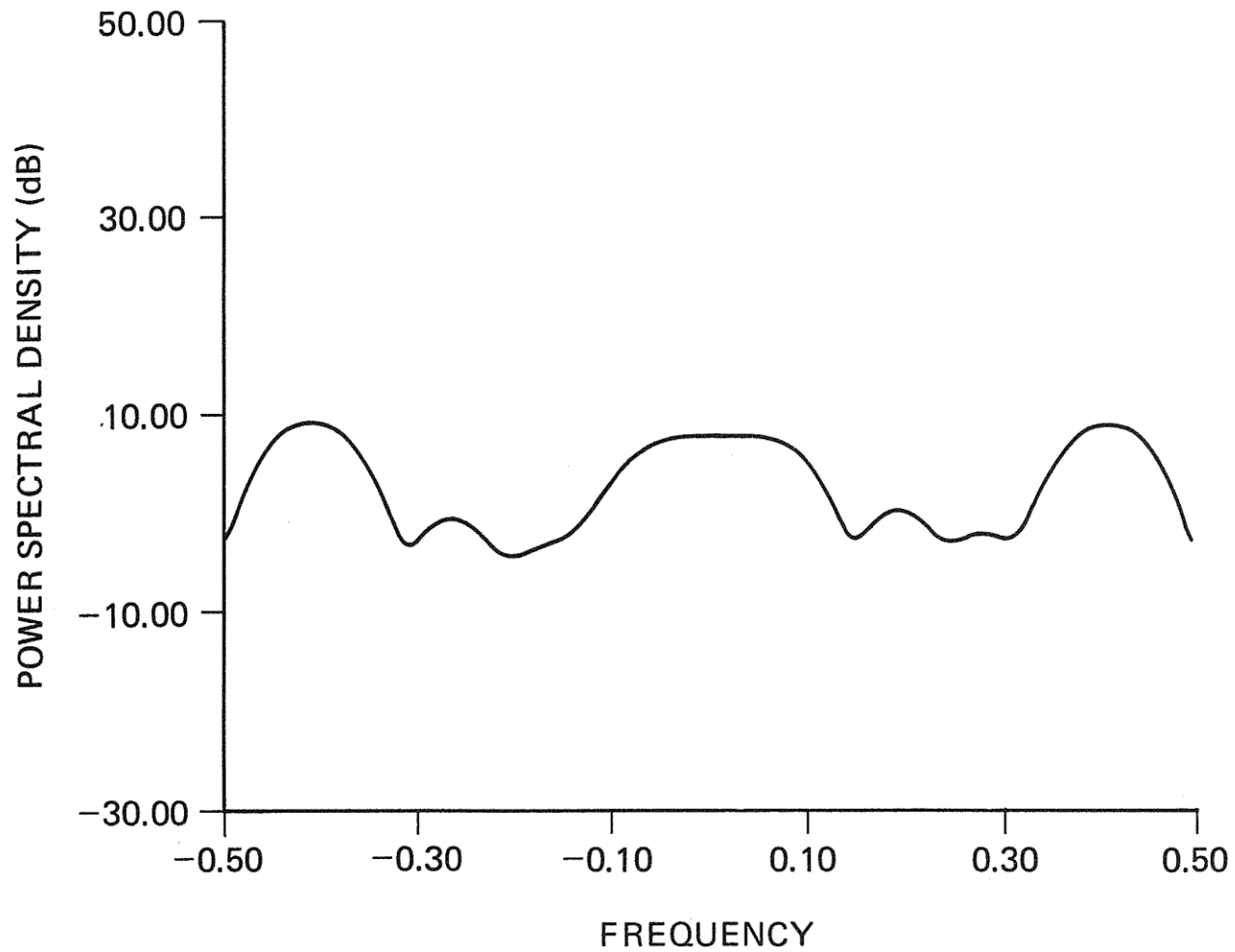
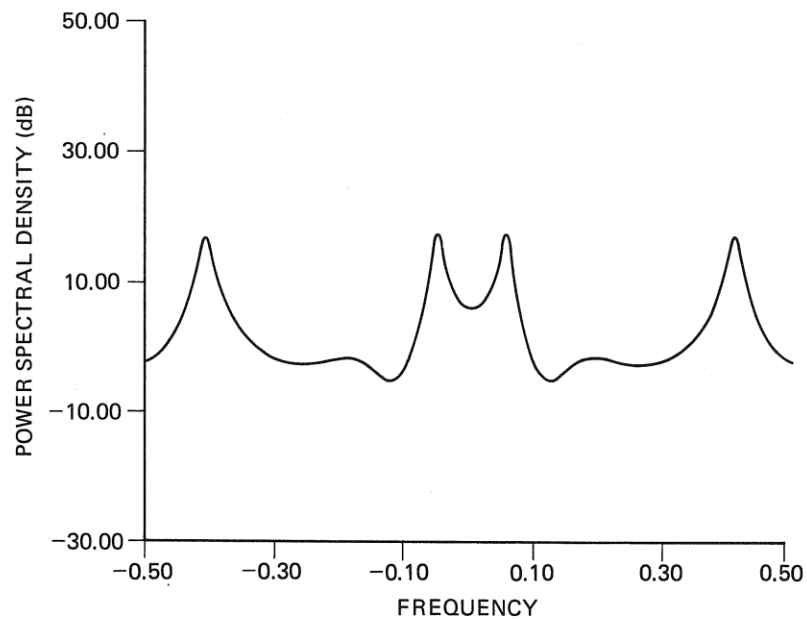
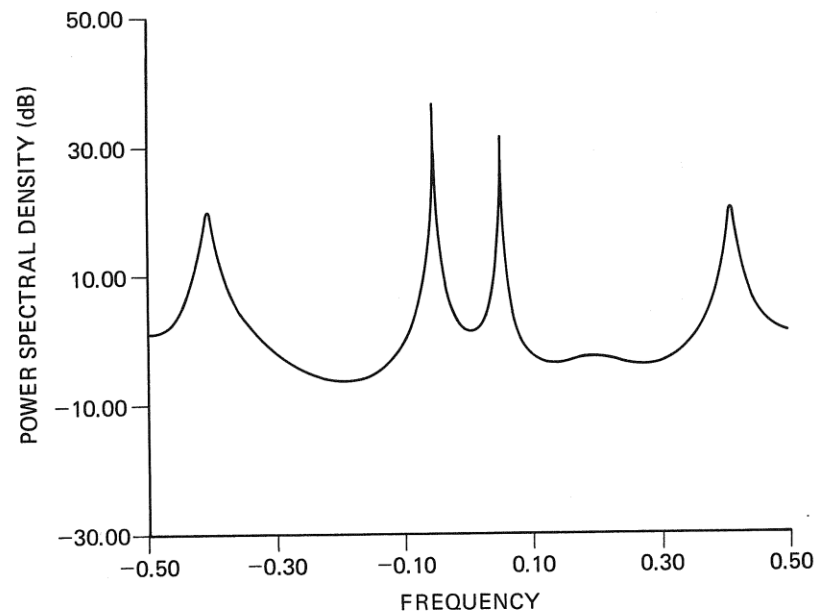


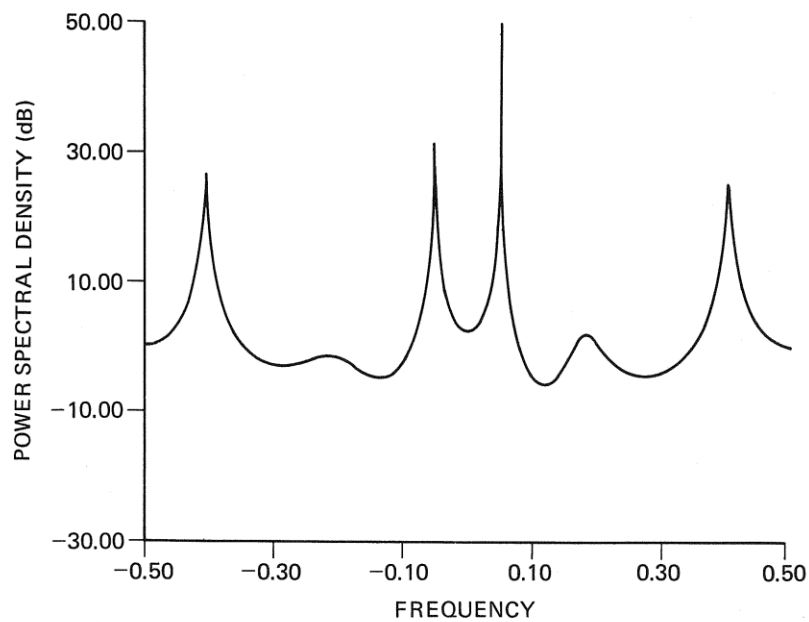
Figure 8.1 MA spectral estimate of complex test case data ($L = 15$, $q = 10$).



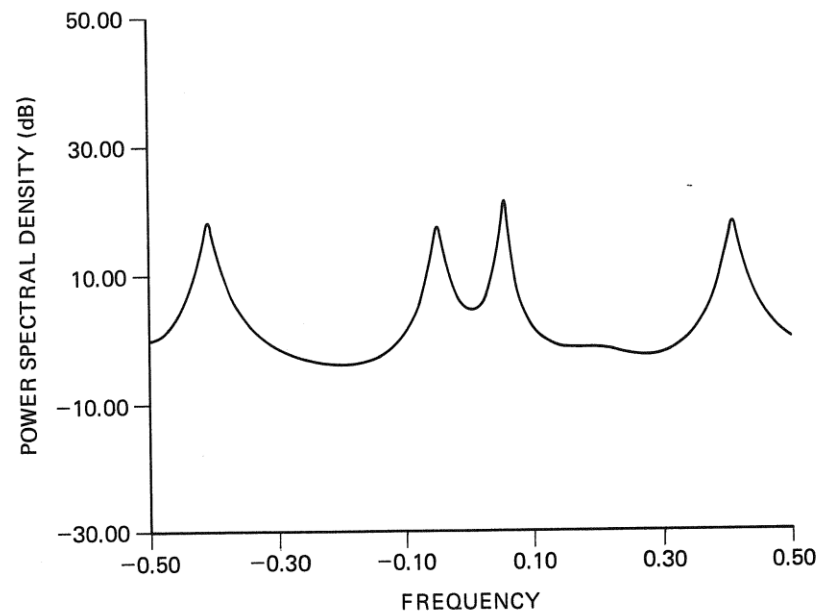
(a)



(c)



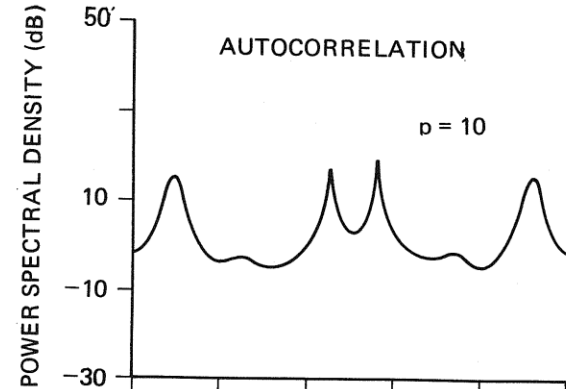
(b)



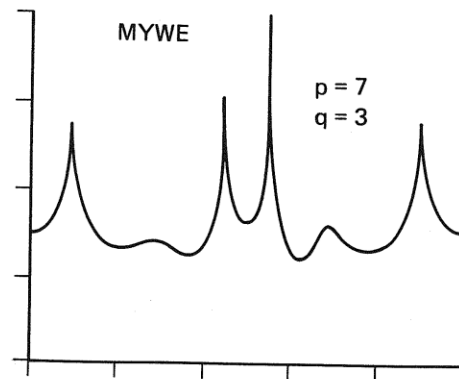
(d)

Figure 10.1 ARMA spectral estimates for test case data. (a) Akaike MLE. (b) MYWE ($L = 6$). (c) LSMYWE ($M = 15$, $L = 6$). (d) Mayne-Firoozan ($L = 21$).

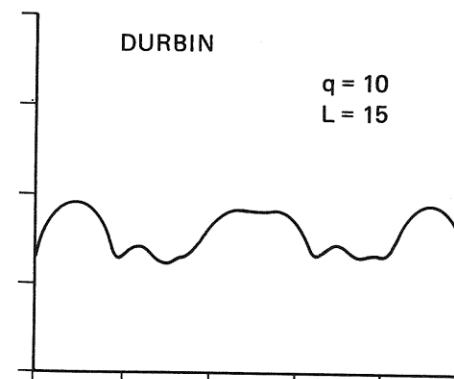
Figure 10.1 (Continued)



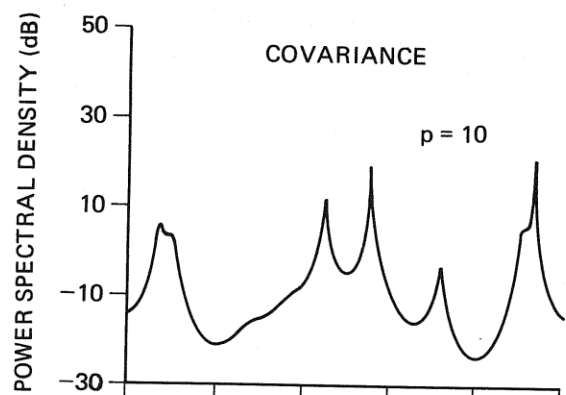
(a)



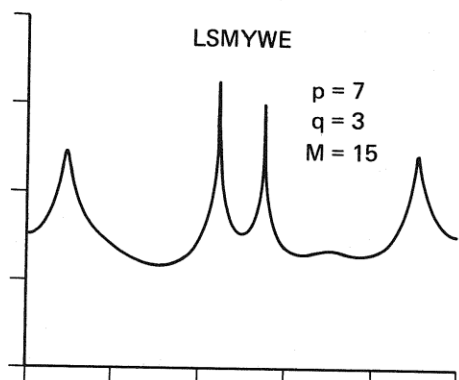
(f)



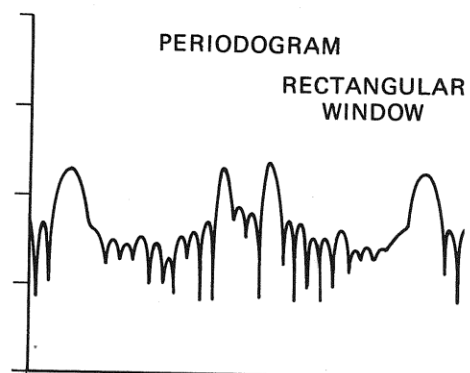
(k)



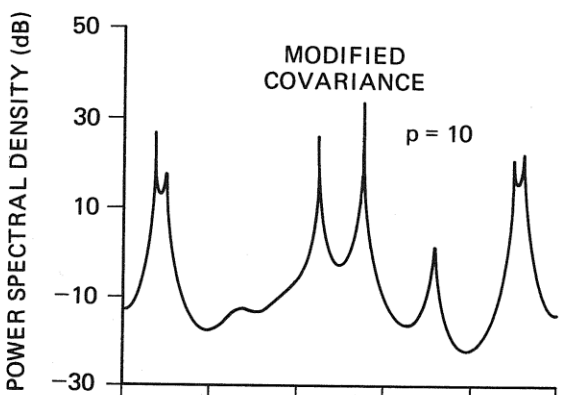
(b)



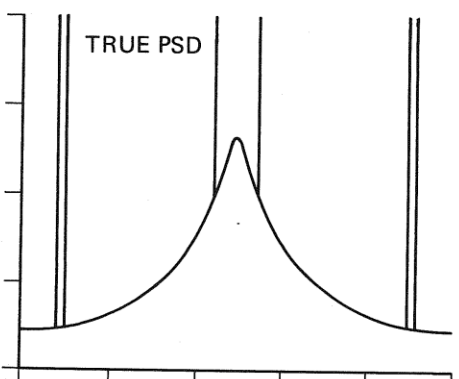
(g)



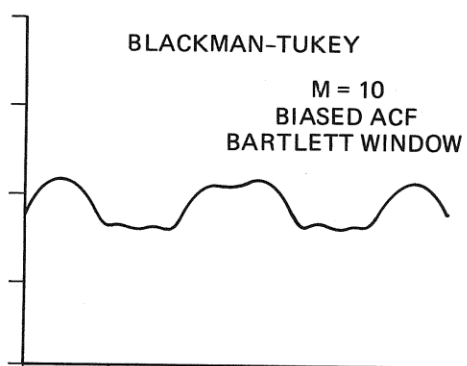
(l)



(c)



(h)



(m)

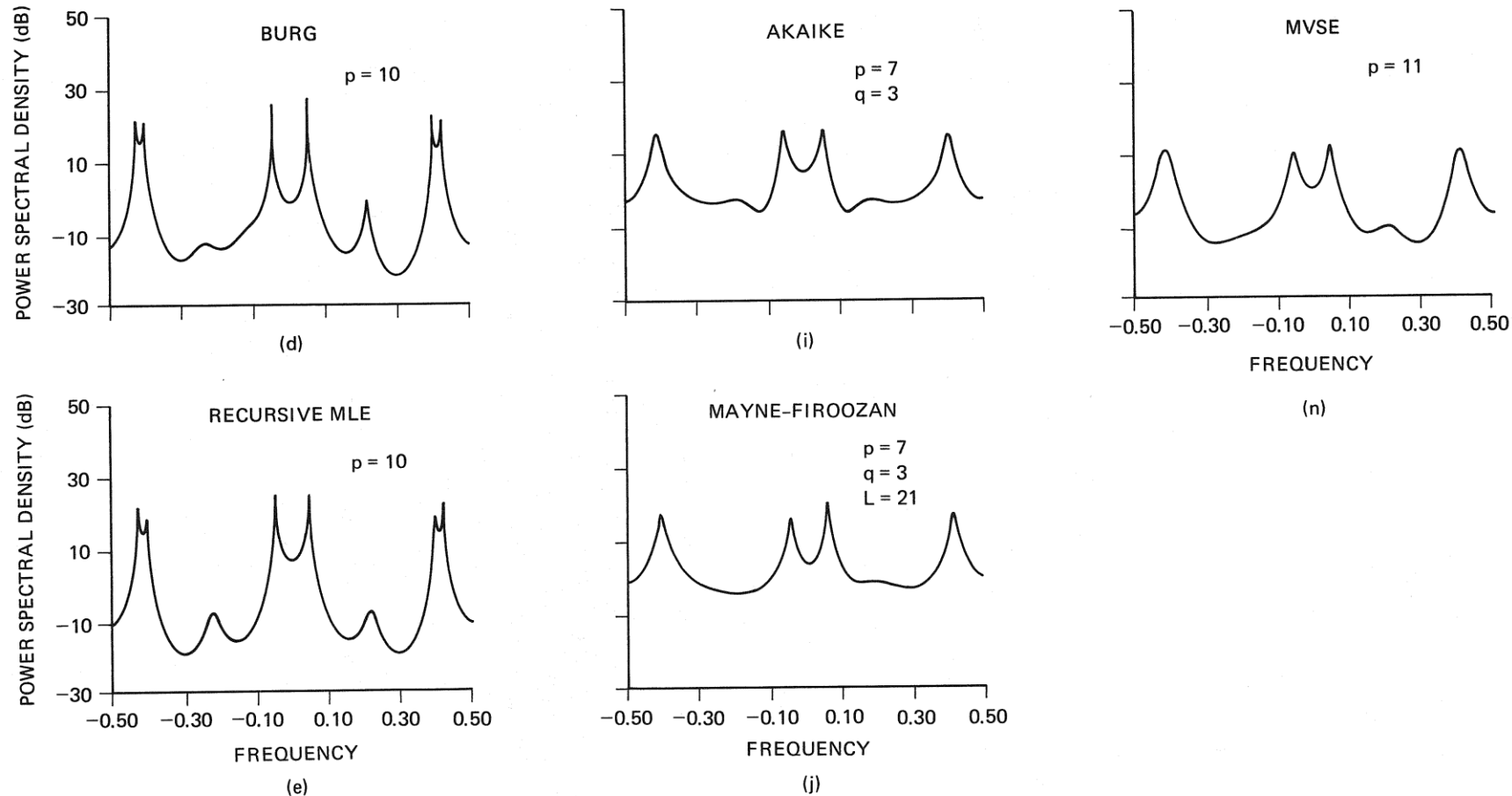


Figure 12.1 Summary of test case results. (a) Autocorrelation. (b) Covariance. (c) Modified covariance. (d) Burg. (e) Recursive MLE. (f) MYWE. (g) LSMYWE. (h) True PSD. (i) Akaike. (j) Mayne-Firoozan. (k) Durbin. (l) Periodogram. (m) Blackman-Tukey. (n) MVSE.

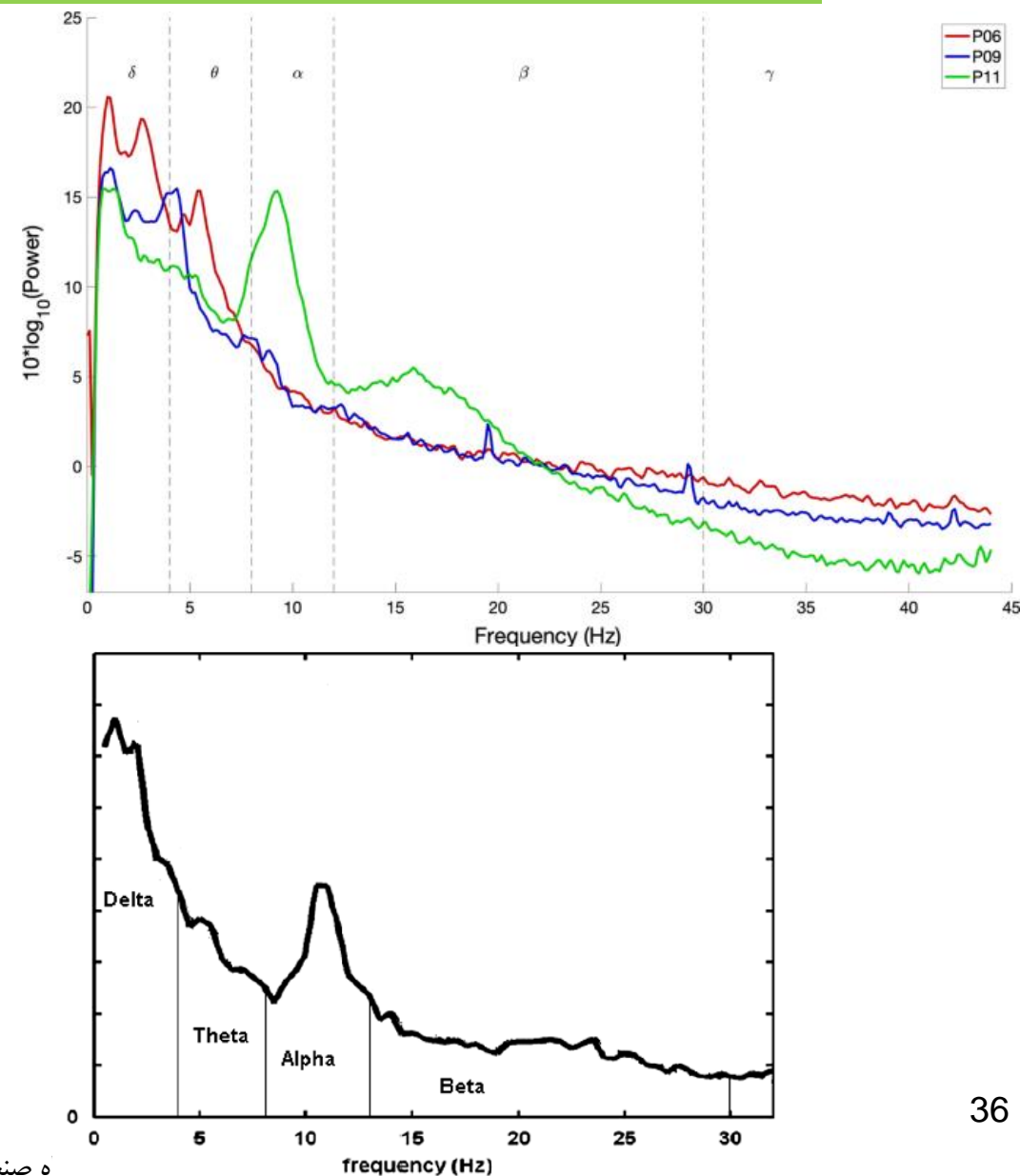
Analysis of EEG Spectrum Bands Using Power Spectral Density for Pleasure and Displeasure State

Anis Ameera¹, A.Saidatul¹ and Z Ibrahim²

¹ Biosignal Processing Research Group (BioSIM), School of Mechatronic Engineering, Universiti Malaysia Perlis, Arau, Perlis, Malaysia

² Faculty of Technology, University of Sunderland, St Peter's Campus, Sunderland, SR6 0DD, United Kingdom

Abstract. The technology of reading human mental states is a leading innovation in the biomedical engineering field. EEG signal processing is going to help us to explore the uniqueness of brain signal that carries thousands of information in human being. The aim of this study is to analyze brain signal features between pleasure and displeasure mental state. Brainwaves is divided into 5 sub frequency bands namely alpha (8 – 13 Hz), beta (13 – 30 Hz), gamma (30 – 100 Hz), theta (4 – 8 Hz) and delta (1 – 4 Hz). However, in this study, alpha and beta waves were analyzed to investigate the mental states. Twenty subjects were recruited from undergraduate



OPEN

Difference in spectral power density of sleep EEG between patients with simple snoring and those with obstructive sleep apnoea


Jae Myeong Kang^{1,6}, Seon Tae Kim^{2,6}, Sara Mariani³, Seo-Eun Cho¹, John W. Winkelman⁵, Kee Hyung Park^{4,7*} & Seung-Gul Kang^{1,7*}

Patients with simple snoring (SS) often complain of poor sleep quality despite a normal apnoea-hypopnoea index (AHI). We aimed to identify the difference in power spectral density of electroencephalography (EEG) between patients with SS and those with obstructive sleep apnoea (OSA). We compared the absolute power spectral density values of standard EEG frequency bands between the SS ($n = 42$) and OSA ($n = 129$) groups during the non-rapid eye movement (NREM) sleep period, after controlling for age and sex. We also analysed partial correlation between AHI and the absolute values of the EEG frequency bands. The absolute power spectral density values in the beta

RESEARCH ARTICLE



EEG power spectral density in locked-in and completely locked-in state patients: a longitudinal study

Arianna Secco¹ · Alessandro Tonin² · Aygul Rana³ · Andres Jaramillo-Gonzalez³ · Majid Khalili-Ardali³ · Niels Birbaumer³ · Ujwal Chaudhary^{2,3} 

Received: 1 March 2020 / Revised: 14 August 2020 / Accepted: 30 September 2020


© The Author(s) 2020

Abstract

Persons with their eye closed and without any means of communication is said to be in a completely locked-in state (CLIS) while when they could still open their eyes actively or passively and have some means of communication are said to be in locked-in state (LIS). Two patients in CLIS without any means of communication, and one patient in the transition from LIS to CLIS with means of communication, who have Amyotrophic Lateral Sclerosis were followed at a regular interval

RESEARCH ARTICLE

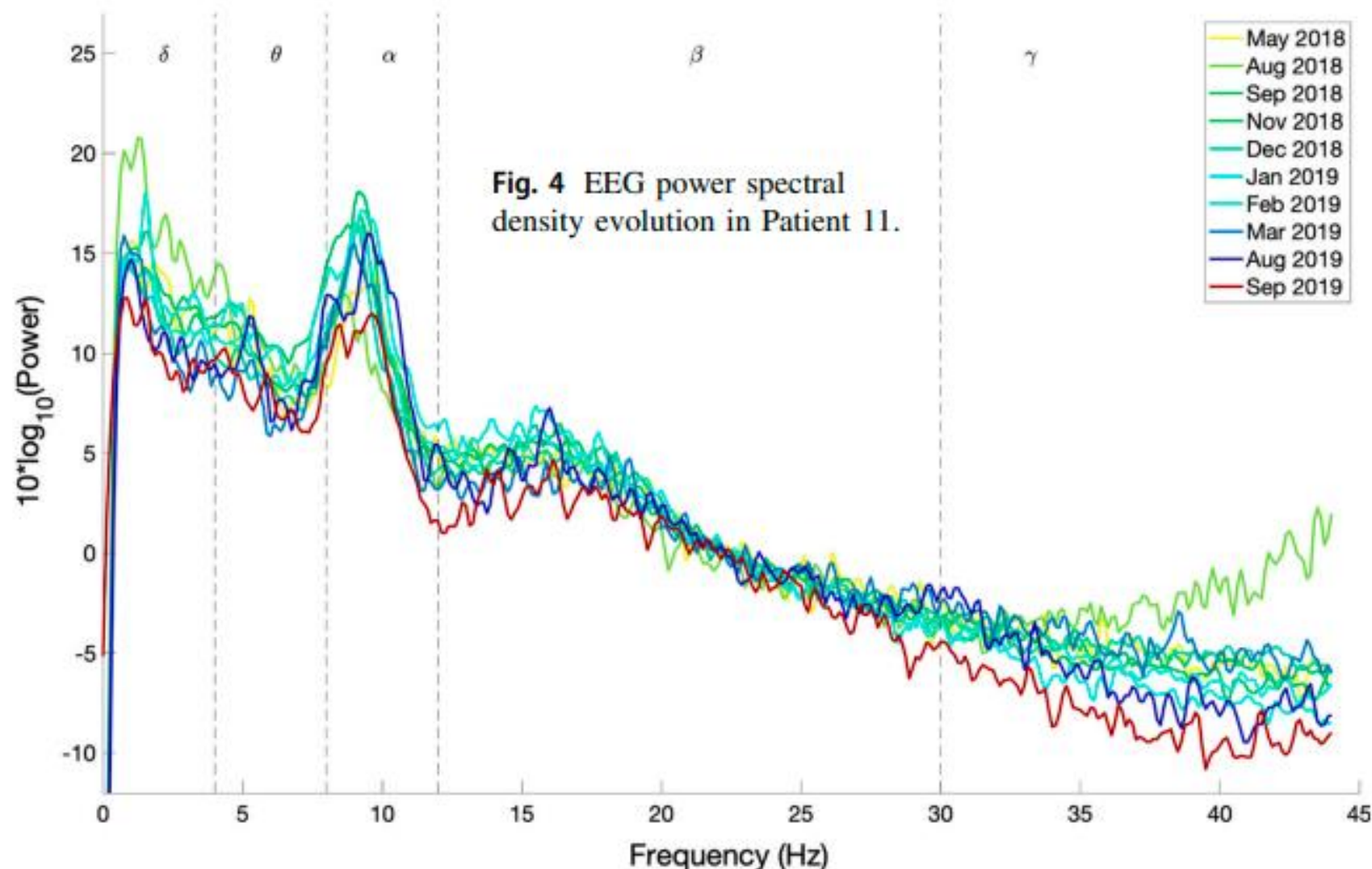
EEG power spectral density in locked-in patients: a longitudinal study

Arianna Secco¹ · Alessandro Tonin² · Aygul Rana
Niels Birbaumer³ · Ujwal Chaudhary^{2,3} 

Received: 1 March 2020 / Revised: 14 August 2020 / Accepted: 3
© The Author(s) 2020

Abstract

Persons with their eye closed and without any means while when they could still open their eyes actively c
locked-in state (LIS). Two patients in CLIS without
LIS to CLIS with means of communication, who ha



SPECTRAL ESTIMATION OF SHORT SEGMENTS OF EEG SIGNALS USING LEAST SQUARES WAVESHAPING FILTERS

Rajamma Mathew and D. Narayana Dutt
Department of Electrical Communication Engg.
Indian Institute of Science
Bangalore-560 012, INDIA

Abstract

Electroencephalogram (EEG), the manifestations of brain's electrical activity as recorded on the scalp, has become an indispensable tool in clinical neurophysiology and related fields. The main objective of EEG signal analysis is to extract valid information from EEG records and for this purpose many analysis techniques have been used. As far as background activity is concerned, spectral analysis is important to determine the rhythms

EEG signal is of crucial importance in its assessment. The rhythmic activity corresponding to frequency centered around 10 Hz and ranging from 8 to 13 Hz is called the alpha activity and the high frequency rhythmic activity from 14 to 30 Hz is called the beta activity. The low frequency activities in the range 0.5 to 3 Hz and 4 to 7 Hz are called the delta and theta activities respectively. The appearance of these activities depends on the location on the scalp, the state of the subject and various other factors. Electroen-





Clinical Neurophysiology
Volume 127, Issue 2, February 2016, Pages 1108-1112



A comparison of the power spectral density of scalp EEG and subjacent electrocorticograms

Ognen A. Petroff^a  , Dennis D. Spencer^b, Irina I. Goncharova^a, Hitten P. Zaveri^a

Show more 

+ Add to Mendeley  Share  Cite

<https://doi.org/10.1016/j.clinph.2015.08.004>

[Get rights and content](#)

Abstract

Objective

Our study investigated the effects of the intact skull on background EEG rhythms recorded simultaneously by subdural electrocorticography (ECoG) and scalp EEG.

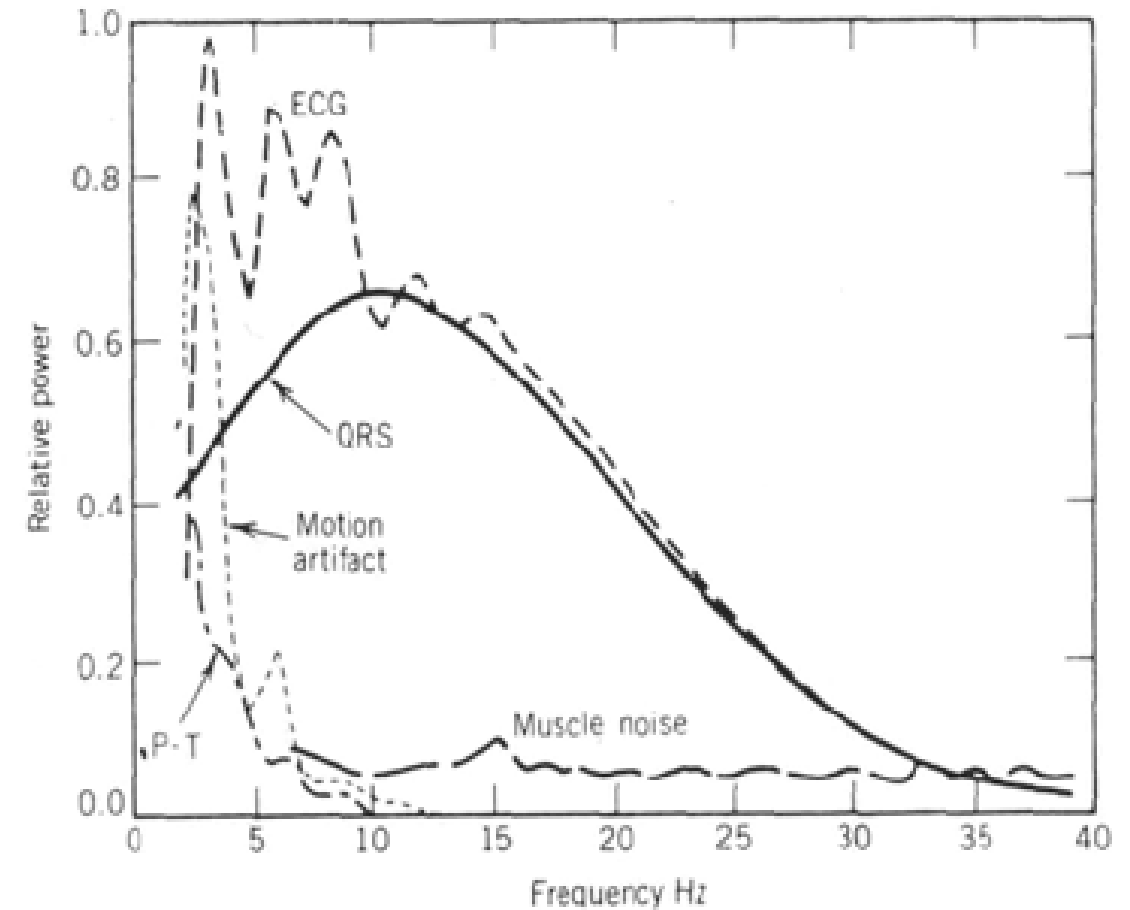
Analysis of Power Spectral Densities of Electrocardiograms

VRUDHULA K. MURTHY, L. JULIAN HAYWOOD, JOHN RICHARDSON,
ROBERT KALABA, STEVEN SALTZBERG, GEORGE HARVEY, AND
DAVID VEREEKE

*Los Angeles County-University of Southern California Medical Center
Los Angeles, California*

ABSTRACT

The power spectral densities of the electrocardiograms (ECGs) of seven patients in a coronary care unit were examined. It was discovered that the underlying periodic phenomenon is characterized by only one frequency, the heart rate, and that invariably by the fifteenth multiple of this fundamental frequency almost all the power is accounted for. Periodic approximations to the ECG based on 7, 10, and 15 harmonics were re-constructed: the fifteenth multiple of the fundamental frequency gave an excellent fit



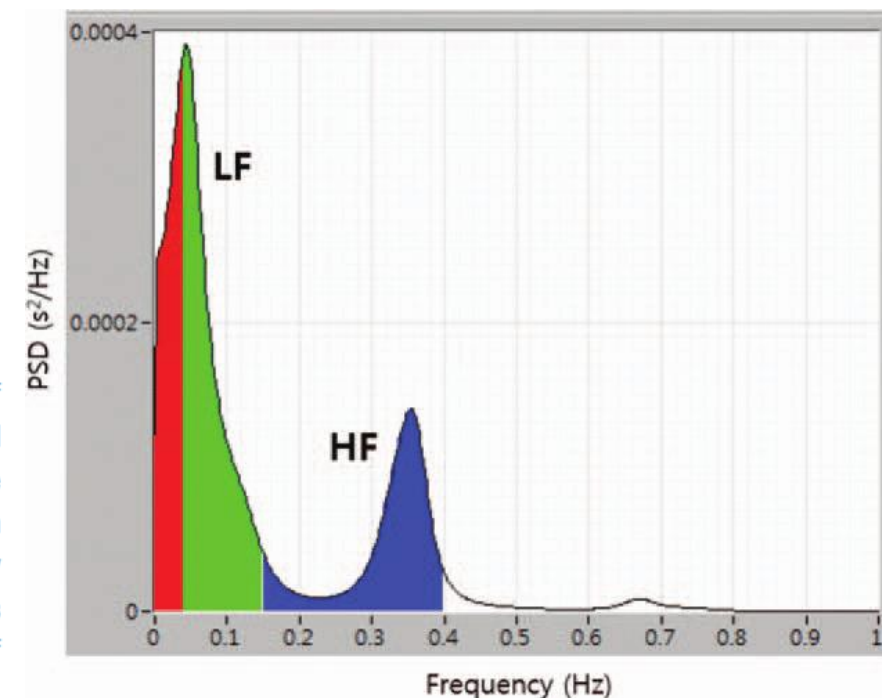


Spectral Analysis of Heart Rate Variability: Time Window Matters

Kai Li^{1,2}, Heinz Rüdiger¹ and Tjalf Ziemssen^{1,3*}

¹ Autonomic and Neuroendocrinological Lab, Center of Clinical Neuroscience, University Hospital Carl Gustav Carus, Dresden University of Technology, Dresden, Germany, ² Department of Neurology, Beijing Hospital, National Center of Gerontology, Beijing, China, ³ Department of Neurology, University Hospital Carl Gustav Carus, Dresden University of Technology, Dresden, Germany

Spectral analysis of heart rate variability (HRV) is a valuable tool for the assessment of cardiovascular autonomic function. Fast Fourier transform and autoregressive based spectral analysis are two most commonly used approaches for HRV analysis, while new techniques such as trigonometric regressive spectral (TRS) and wavelet transform have been developed. Short-term (on ECG of several minutes) and long-term (typically on ECG of 1–24 h) HRV analyses have different advantages and disadvantages. This article reviews the characteristics of spectral HRV studies using different lengths of



Power Spectral Analysis of Heart Rate and Arterial Pressure Variabilities as a Marker of Sympatho-Vagal Interaction in Man and Conscious Dog

MASSIMO PAGANI, FEDERICO LOMBARDI, STEFANO GUZZETTI, ORNELLA RIMOLDI, RAFFAELLO FURLAN, PAOLO PIZZINELLI, GIULIA SANDRONE, GABRIELLA MALFATTO, SIMONETTA DELL'ORTO, EMANUELA PICCALUGA, MAURIZIO TURIEL, GIUSEPPE BASELLI, SERGIO CERUTTI, AND ALBERTO MALLIANI

In 57 normal subjects (age 20–60 years), we analyzed the spontaneous beat-to-beat oscillation in R–R interval during control recumbent position, 90° upright tilt, controlled respiration ($n = 16$) and acute ($n = 10$) and chronic ($n = 12$) β -adrenergic receptor blockade. Automatic computer analysis provided the autoregressive power spectral density, as well as the number and relative power of the individual components. The power spectral density of R–R interval variability contained two major components in power, a high frequency at ~ 0.25 Hz and a low frequency at ~ 0.1 Hz, with a normalized low frequency:high frequency ratio of 3.6 ± 0.7 . With tilt, the low-frequency component became largely predominant ($90 \pm 1\%$) with a low frequency:high frequency ratio of 21 ± 4 . Acute β -adrenergic receptor blockade (0.2 mg/kg IV propranolol) increased variance at rest and markedly blunted the increase in low frequency and low frequency:high frequency ratio induced by tilt.

Power Spectral Density Estimation of EMG Signals Using Parametric and Non-Parametric Approach

Akankshya Shradhanjali, Subhra Chowdhury and Neelesh Kumar*

Biomedical Instrumentation Unit, CSIO -CSIR, Sector 30-C, Chandigarh, India 160030.

Abstract 05 April 2013

EMG is classified on the basis of RMS amplitude values and frequency analysis by using non-parametric and parametric approach. The variation of EMG spectra is used to compare the estimation methods in terms of frequency resolution as well as in determining the spectral components. Spectral analysis of EMG signals are done on four major lower limb muscles during isometric contraction using three methods i.e. Welch, Yule walker and Burg. Yule walker showed superior performance among the three methods as it performs well for long continuous signals.

Keywords: Spectral Estimation, Power Spectral Density, Parametric Approach, Non- Parametric Approach, Frequency Resolution, RMS value, Amplitude.

Clinical Neurophysiology 125 (2014) 988–994



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Clinical Neurophysiology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/clinph

Power spectral analysis of surface electromyography (EMG) at matched contraction levels of the first dorsal interosseous muscle in stroke survivors

Xiaoyan Li ^{a,*}, Henry Shin ^b, Ping Zhou ^{a,c,d}, Xun Niu ^a, Jie Liu ^a, William Zev Rymer ^{a,b,c}

^a Sensory Motor Performance Program, Rehabilitation Institute of Chicago, Chicago, IL, USA

^b Department of Biomedical Engineering, Northwestern University, Chicago, IL, USA

^c Department of Physical Medicine and Rehabilitation, Northwestern University, Chicago, IL, USA

^d Institute of Biomedical Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei, China