۹۸.۱۰.۱۶.۷   به نام خدا   امیدرضا حاتمی پور

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \qquad , \quad \varphi(x) = \frac{|x|}{c-|x|}$$

$$\text{s.t} \quad Ax = b$$

Lagrangian:

$$L(x_i, v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) + v^T(Ax-b)$$

Lagrangian Dual function:

$$g(v) = \inf_x L(x,v)$$

$$= \inf_x \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(|x_i|) + v^T(Ax-b) \right)$$

$$= \inf_x \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{c-|x_i|} \right) + v^T(Ax-b)$$

$$= \inf_x \left(\left[\frac{|x_1|}{c-|x_1|}, \text{———}, \frac{|x_n|}{c-|x_n|} \right] + v^T A x \right) - v^T b$$

$$= \inf_x \left(\frac{|x_1|}{c-|x_1|} + v^T a_1 x_1, \text{———}, \frac{|x_n|}{c-|x_n|} + v^T a_n x_n \right) - v^T b$$

$$\frac{d}{dx_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x_i}{|x_i|}(c-|x_i|) - |x_i|\left(-\frac{x_i}{|x_i|}\right)}{(c-|x_i|)^2} + v^T a_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_i}{|x_i|} \quad \frac{c}{(c-|x_i|)^2} + v^T a_i = 0 \Rightarrow \dots x_i^* \checkmark$$

$\Rightarrow \quad g(v) = [x_1^*, \_\_\_\_, x_n^*] + v^T b$

$\Rightarrow$ dual : maximize $g(v)$

$x_{k+1} = x_k - \alpha g \quad , g \in \partial f(x)$

$\alpha < 2(f(x) - f^*)/\|g\|_2^2$ $\quad$ (I) $f(x^*) \geq f(x_k) + g(x^* - x_k)$

$\quad$ (II) $\alpha\|g\|_2^2 - 2(f(x) - f^*) < 0$

$\Rightarrow \quad \|x_{k+1} - x^*\|_2 < \|x_k - x^*\|_2$.

$\Rightarrow \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|x_k - \alpha g - x^*\|^2$

$= \|x_k - x^*\|_2^2 - 2\alpha g(x_k - x^*) + \alpha^2 \|g\|_2^2$

$\overset{\text{I}}{\leq} \|x_k - x^*\|_2^2 - 2\alpha(f(x_k) - f^*) + \alpha^2\|g\|_2^2$

$= \|x_k - x^*\|_2^2 + \alpha\underbrace{(-2(f(x_k) - f^*) + \alpha\|g\|_2^2)}_{<0}$

$\overset{\text{II}}{\leq} \|x_k - x^*\|_2^2$

$\Rightarrow \quad \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq \|x_k - x^*\|_2^2$

$\Rightarrow \|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \|x_k - x^*\|_2$

3

بعد از حل با cvx به مقادیر زیر خواهیم رسید

$$p^* = 8,2222 \quad , \quad \lambda_1^* = 1,8994 \quad , \quad x_1^* = -2,3333$$

$$\lambda_2^* = 3,4684 \qquad x_2^* = 0,1667$$

$$\lambda_3^* = 0,0991$$

primal:

$$x_1^* + 2x_2^* \leq -2 \checkmark$$

$$x_1^* - 4x_2^* \leq -3 \checkmark$$

$$5x_1^* + 76x_2^* \leq 1 \checkmark$$

$$h_i \to \times$$

dual:

$$\lambda_i \geq 0 \checkmark$$

$$\to \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \checkmark$$

complementry:

$$\lambda_1^* (x_1^* + 2x_2^* + 2) = 10^{-8}(-0,6751) \simeq 0 \checkmark$$

$$\lambda_2^* (x_1^* - 4x_2^* + 3) = 10^{-8}(-0,4733) \simeq 0 \checkmark$$

$$\lambda_3^* (5x_1^* + 76x_2^* + 1) = 10^{-8}(-0,3897) \simeq 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - u_1)$$
$$+ \lambda_2(x_1 - 4x_2 - u_2) + \lambda_3(5x_1 + 76x_2 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = -1,827 \times 10^{-5} \simeq 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - x_1 + 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 76\lambda_3 = 1,8317 \times 10^{-6} \simeq 0 \checkmark$$

که شرایط KKT برقرار می‌باشد.

ب ـ

جدول مورد نظر را بررسی کنید - در گزارش مقادیر بدست آمده مشخص می باشد.

به اثبات رابطه : $P^*_{pred} \le P^*_{exact}$ می پردازیم.

جدول strong duality برقرار است پس :

$$P^*_{pred} = p^* - [\lambda_1^* \ \ \lambda_2^* \ \ \lambda_3^*] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

که در اینجا به ترتیب به محاسبه P^*_{pred} و P^*_{exact} می پردازیم

با توجه به جدول ، مشاهده می کنیم که همواره $P^*_{pred} \le P^*_{exact}$ برقرار می باشد :

d) strong duality برقرار $\begin{matrix}\delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0\end{matrix} \Rightarrow p^*(0,0) = g(\lambda^*)$

از طرفی :

$$g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda)$$

پس

$$g(\lambda^*) \le L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* f_i(x)$$

از طرفی

$$f_0(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* f_i(x)}_{=0} \le f_0(x) + \lambda_1^* \delta_1 + \lambda_2^* \delta_2$$

پس :

$$p^*(0,0) \le f_0(x^*) + \lambda_1^* \delta_1 + \lambda_2^* \delta_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_0(x^*)}_{P^*_{exact}} \ge \underbrace{p^*(0,0) - \lambda_1^* \delta_1 - \lambda_2^* \delta_2}_{P^*_{pred}}$$

$$\text{minimize} \quad e^{-x}$$
$$\text{s.t} \quad \frac{x^2}{y} \le 0$$
$$y > 0$$

a)

$e^{-x} \rightarrow$ convex $\rightarrow$ ✓

$\frac{x^2}{y} \rightarrow$ convex $\rightarrow$ ✓

$\Big\}$ convex ✓

با توجه به قید $\frac{x^2}{y} \le 0$ از آنجایی که همواره $y > 0$ و $x^2 \ge 0$ است پس تنها در صورتی برقرار است که:

$$x = 0 \rightarrow \boxed{p = e^{-0} = 1}$$

محاسبه با مثال هم در گزارش آمده است.

b) Lagrangian

$$L(x, y, \lambda) = e^{-x} + \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = \inf_{x,y} L(x, y, \lambda)$$

$$= \inf_{x,y} e^{-x} + \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right) \underset{\substack{\lambda \ge 0, \\ \lim_{y \to \infty} y = \infty}}{=} \inf_{x,y} e^{-x} = 0$$

$$\text{So} \Rightarrow \text{maximize } g(\lambda) \qquad \Rightarrow \text{maximize } 0$$
$$\text{s.t} \quad \lambda \ge 0 \qquad\qquad \text{s.t} \quad \lambda \ge 0$$

که مقدار بهینه: $d^* = 0$

$\Rightarrow$ duality gap $= p^* - d^* = 1 - 0 = 1$

λ^* را هر مقدار می‌توان تعیین کرد!

نتایج شبیه‌سازی:

$$\boxed{\lambda^* = 1\ 85, 8, 1}$$

c)

همانطور که دیدیم strong duality برقرار نباشد. پس نتیجه می‌گیریم که slater condition
نمی‌تواند برقرار باشد

d)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && e^{-x} \\ &\text{s.t} && \frac{x^2}{y} \leq u \\ & && y > 0 \end{aligned}$$

به ازای مقادیر مختلف u داریم:

$u = 0 \rightsquigarrow p^*(0) = 1$

$u < 0 \rightsquigarrow p^*(u) = \infty \leftarrow$ not feasible space

$u > 0 \rightsquigarrow p^*(u) = 0 \rightarrow$ چون برای y محدودیت نداریم
می‌توانیم تا حد امکان و دلخواه آن را بزرگ کنیم.

$$\underbrace{p^*(u)}_{0} \geq \underbrace{p^*(0)}_{1} - \lambda^* u$$

$$\Rightarrow 0 \geq \underbrace{1 - \underbrace{\lambda^* u}_{<1}}_{>0} \rightarrow \lambda^* < \frac{1}{u}$$

پس به ازای $\lambda^* < \frac{1}{u}$، برقرار نمی‌باشد.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & j \text{ enters node } i \\ -1 & j \text{ leaves node } j \\ 0 & \text{oth} \end{cases}$$

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, y_i)$$

$$\text{s.t} \quad Ax + s = 0$$

$$Ay + t = 0$$

$\Rightarrow$ Lagrangian:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, y_i) + \lambda_1^T(Ax + s) + \lambda_2^T(Ay + t).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, y_i) + \underbrace{\lambda_1^T A x}_{\sum_{i=1}^{n} a_i^T \lambda_1 x_i} + \lambda_1^T s + \underbrace{\lambda_2^T A y}_{\sum_{i=1}^{n} a_i^T \lambda_2 y_i} + \lambda_2^T t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x_i, y_i) + (a_i^T \lambda_1) x_i + (a_i^T \lambda_2) y_i \right) + \lambda_1^T s + \lambda_2^T t$$

$\Rightarrow$ Dual:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \inf_{y, x \geq 0} L(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$= \inf_{x, y \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x_i, y_i) + (a_i^T \lambda_1) x_i + (a_i^T \lambda_2) y_i) \right.$$

$$\left. + \lambda_1^T s + \lambda_2^T t \right)$$

$$= \lambda_1^T s + \lambda_2^T t + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(a_i^T \lambda_1, a_i^T \lambda_2)$$

$$\tilde{\varphi}_i(a_i^T \lambda_1, a_i^T \lambda_2) = \inf_{x, y} \left((a_i^T \lambda_1) x_i + (a_i^T \lambda_2) y_i + \varphi_i(x_i, y_i) \right)$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow$ maximize $g(\lambda_1, \lambda_2)$

$$= \lambda_1^T s + \lambda_2^T t + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i (a_i^T \lambda_1, a_i^T \lambda_2)$$

برای حل آن هم از روش subgradical استفاده می‌کنیم

- for i in ite

  $(q_j, y_j) \in$ find min$\left((a_j^T \lambda_1) q_j + (a_j^T \lambda_2) y_j + \varphi_j (q_j, y_j) \right)$ $\quad j = 1, \ldots, n$

  $S_i = a_i^T q + s_i \qquad i = 1, \ldots, p$

  $T_i = a_i^T y + t_i \qquad i = 1, \ldots, p$

  $\mu_i = \mu_i + \alpha S_i \qquad i = 1, \ldots, p$

  $v_i = v_i + \alpha T_i \qquad i = 1, \ldots, p$

- end

Scanned by CamScanner