[illegible] ۹۸۱۰۱۶۰۷

امیدرضا حاتمی پور

21

Processor → label $1, 2, \dots, T$

speed in period t is s_t between s^{min}, s^{max}

$$|s_{t+1} - s_t| \le R \quad \text{for} \quad t = 1, \dots, T-1$$

energy: $\varphi(s_t)$, $\varphi : R \to R$, increasing, convex

total energy: $E = \sum_{t=1}^{T} \varphi(s_t)$

Availability time: $A_i \in \{1, \dots, T\}$

deadline: $D_i \in \{1, \dots, T\}$ $\quad D_i \geq A_i$

$1^T \theta = 1$, $\theta_t \geq 0$, $\theta_{t,i} \to \theta_{t,i} = 0$ for $t < A_t$, $t > D_t$

a)

متغیر $x_{t,i}$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$x_{t,i} = s_t \cdot \theta_{t,i}$$

$\Rightarrow$ minimize E

s.t. $\quad s^{min} \le s \le s^{max}$

سرعت ← $s = X \cdot 1$

$X^T 1 \geq W$ → شرط تکمیل کارها

$X \geq 0$

$|s_{t+1} - s_t| \le R$, $t = 1, \dots, T-1$

خارج محدوده بودن کارها ← $X_{ti} = 0$, $t = 1, \dots, A_i - 1$, $i = 1, \dots, n$

← $X_{ti} = 0$, $t = D_i + 1, \dots, T$, $i = 1, \dots, n$

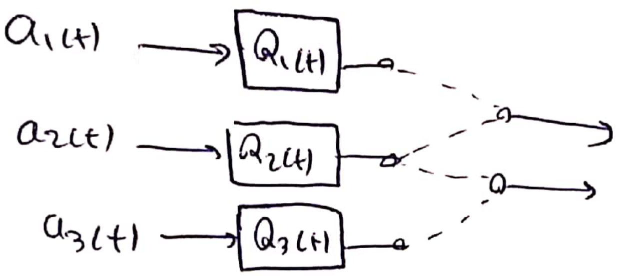
حال با حل مسئله بهینه‌سازی قسمت قبل که داریم:

$$a_{t,i} = S_t\,\theta_{t,i} \Rightarrow a^*_{t,i} = S^*_t \cdot \theta^*_{t,i}$$

$$\Rightarrow \theta^*_{t,i} = \left(\frac{1}{S^*_t}\right) a^*_{t,i} \qquad t = 1, \dots, T \quad s = 1, \dots, n$$

b) → کد در فایل موجود می‌باشد

2)



$(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$

$E\{a_i(t)\} = \lambda_i$

a) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.2, 0.9, 0.6)$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow P_1 \overset{b_1}{(0,1,1)} + P_2 \overset{b_2}{(1,0,1)} + P_3 \overset{b_3}{(1,1,0)} \geq (0.2, 0.9, 0.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2 + P_3 \geq 0.2 \\ P_1 + P_3 \geq 0.9 \\ P_1 + P_2 \geq 0.6 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_2 \leq 0.1 \\ P_1 \leq 0.8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 0.8 \\ P_2 = 0.1 \\ P_3 = 0.1 \end{cases}$$

پس با احتمال $P_1 \in [0, 0.8]$ ، b_1 انتخاب می‌شود

〃 〃 $P_2 \in (0.8, 0.9]$ ، b_2 〃 〃

〃 〃 $P_3 \in (0.9, 1]$ ، b_3 〃 〃

b) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3/4, 3/4, 1/2)$

$P_1(0,1,1) + P_2(1,0,1) + P_3(1,1,0) \geq (3/4, 3/4, 1/2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2 + P_3 \geq \frac{3}{4} & \rightarrow P_1 \leq \frac{1}{4} \\ P_1 + P_3 \geq 3/4 & \rightarrow P_2 \leq \frac{1}{4} \\ P_1 + P_2 \geq 1/2 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{4} \\ P_2 = \frac{1}{4} \\ P_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس با احتمال P_1 ، $[0, 1/4]$ ، b_1 انتخاب می‌شود

" " P_2 ، $(1/4, \frac{1}{2}]$ ، b_2 " "

" " P_3 ، $(1/2, 1]$ ، b_3 " "

e) deterministic algorithm

از هر 4 انتخاب، 2 انتخاب b_3 و یک انتخاب b_1 و b_2 می‌باشد. پس

به ازای هر 4 انتخاب:

While true
- select $b_3 = (1,1,0)$
- " $b_3 = (1,1,0)$
- " $b_2 = (1,0,1)$
- " $b_1 = (0,1,1)$

f) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.6, 0.5, 0.9)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2 + P_3 \geq 0.6 \\ P_1 + P_3 \geq 0.5 \\ P_1 + P_2 \geq 0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_1 \leq 0.4 \\ P_2 \leq 0.5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} P_1 = 0.4 \\ P_2 = 0.5 \\ P_3 = 0.1 \end{matrix}$$

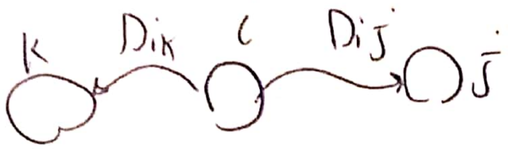
پس در هر دور ۱۰ تایی:

4 بار b_1 انتخاب می‌شود ← $b_1 = (0,1,1)$

5 بار b_2 " " ← $b_2 = (1,0,1)$

1 بار b_3 " " ← $b_3 = (1,1,0)$

n D_{ij} S_i capacity $i = 1 \to n$



first stage: maximize $\sum c_{ij} x_{ij} + E[Q(x, D)]$

s.t. $\sum_j x_{ij} - \sum_i x_{ij} \le S_j \leftarrow$ ظرفیت

خروج ورودی

, $x_{ij} \ge 0$

second stage:

maximize $\sum_i \sum_j y_{ij} q_{ij}$

s.t. $y_{ij} \ge 0$

$y_{ij} \le d_{ij}$

$y_{ij} - \left(\sum_j x_{ij} - \sum_i x_{ij}\right) \le S_i$

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad c^T x$$
$$\text{s.t} \quad Ax \le b$$

cost vector, $c \in \mathbb{R}^n$, random, $E[c] = c_0$

$$\Sigma = E[(c-c_0)(c-c_0)^T]$$

a)

$$\text{minimize} \quad E[c^T x] \qquad \Rightarrow \qquad \text{minimize} \quad E[c^T] x$$
$$\text{s.t} \quad Ax \le b \qquad\qquad\qquad \text{s.t} \quad Ax \le b$$

$$\Rightarrow \quad \text{minimize} \quad c_0^T x$$
$$\text{s.t} \quad Ax \le b$$

b) $var[c^T x] = E[(c^T x)^2] - (E[c^T x])^2$

$$E[c^T x] + \lambda\, var[c^T x]$$

$$\text{minimize} \quad E[c^T x] + var(c^T x)$$
$$\text{s.t} \quad Ax \le b$$

$$\Rightarrow var(c^T x) = E[(c^T x)^2] - (E[c^T x])^2$$
$$= E[(c^T x - \underbrace{E[c^T x]}_{c_0^T x})^2]$$
$$= E[((c-c_0)^T x)^2]$$
$$= E[x^T (c-c_0)(c-c_0)^T x]$$
$$= x^T E[(c-c_0)(c-c_0)^T] x$$
$$= x^T \Sigma x$$

$$\Rightarrow \underset{s.t}{\text{minimize}} \quad c^T x + \lambda\, x^T \Sigma x$$
$$Ax \le b$$

که اگر مشتق دوم را بررسی کنیم داریم:

$$\Sigma \succeq 0 \quad \rightsquigarrow \text{if } \lambda \ge 0 \rightsquigarrow \text{is convex}$$
$$\rightsquigarrow \text{if } \lambda < 0 \rightsquigarrow \text{is non-convex}$$

1C

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n,\, \beta}{\text{minimize}} \quad \beta$$
$$\text{s.t} \quad \text{prob}(c^T x \ge \beta) \le \alpha$$
$$Ax \le b$$

مسئله convex می‌باشد.

$c^T x$: میانگین

برای یک x ثابت ← $c^T x$ یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال با

$x^T \Sigma x$: واریانس

می‌باشد. داریم:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

$$\Rightarrow \text{prob}(c^T x \ge \beta) = \varphi\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right)$$

لذا جایی که قسمتی یکنواخت است داریم:

$$\text{prob}(c^T x \ge \beta) \le \alpha$$
$$\Leftrightarrow (\beta - c_0^T x) / \|\Sigma^{1/2} x\| \ge \varphi^{-1}(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\alpha) \|\Sigma^{1/2} x\| + c_0^T x \le \beta$$

که اگر $\alpha \le 0.5$:

$$\varphi^{-1}(\alpha) \ge 0 \longrightarrow \text{convex constraint.}$$

درحالت :

$$\Rightarrow \quad \text{minimize} \quad \beta$$
$$\text{s.t} \quad \varphi^{-1}(\alpha) \| \Sigma^{1/2} x \| + c_0^T x \le \beta$$
$$Ax \le b$$

15

$$\text{minimize} \quad f_0(x)$$
$$\text{s.t} \quad f_i(x) \le 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

f_i convex , differentiable

$$\varphi(x) = f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{0, f_i(x)\}^2 , \alpha > 0$$

a)

f_i ها convex اند

عملگر max ← convexity را حفظ میکند

جمع ← convexity را حفظ میکند

پس جمع دو max دو عبارت در نهایت convex میباشد

b)

$$\varphi(x) = f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{0, f_i(x)\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \begin{cases} 2 f_i(x) \cdot \nabla f_i(x) & \text{oth} \\ 0 & f_i(x) \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} 2 \max\{0, f_i(x)\} \nabla f_i(x)$$

حال مسئله dual را می‌نویسیم:

$$L = f_0(x) + \alpha \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right)$$

dual prob $\Rightarrow$ $g(\lambda_i) = \inf(L)$

$$= \inf\left(f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right)$$

$$\Rightarrow \partial g / \partial x = \nabla f_0(\tilde{x}) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(\tilde{x})$$

$$\tilde{\lambda}_i = 2\max\{0, f_i(x)\}$$

از آنجایی $\lambda_i \geq 0$ پس $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}_i)$ یک نقطه قابل قبول برای مسئله دوگان ما می‌باشد

$$f_0(\tilde{x}) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) \leq \max\{f_0(\tilde{x}) + \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x})}_{<0}\}$$

$$\leq f_0(\tilde{x}) = p^*$$

$$\Rightarrow \inf\left(f_0(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(x) \right) \leq p^*$$

$$\Rightarrow f_0(\tilde{x}) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) \leq p^*$$

minimize $f_0(x)$

s.t $f_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m$

slater's condition ✓, strong duality ✓, λ^* unique dual optimal ~~so~~ solution

5

$$f_i(x)^+ = \max\{0, f_i(x)\}$$

$t > 0$

$$\Rightarrow \text{minimize } f_0(x) + t \max_{i=1,\dots,m} f_i(x)^+$$

a

مشابه به مسئله قبل :

همه f_i ها ← ✓ convex

عملگر max ← ✓ convex

جمع هم convexity را حفظ می‌کند

$f_0(x) + t \max_{i=1,\dots,m} f_i(x)^+$ ، convex می‌باشد

b

$$\text{minimize } f_0(x) + ty$$
$$\text{s.t } f_i(x) \leq y \quad i=1, \dots, m$$
$$0 \leq y$$

Lagrange:

$$L(x, \lambda, v) = f_0(x) + ty + \sum_i \lambda_i (f_i(x) - y) - vy$$

Dual prob.

$$\text{maximize } g(\lambda, v)$$

$$g(\lambda, v) = \inf_x L(x, \lambda, v)$$
$$= \inf_x \left(f_0(x) + ty + \sum_i \lambda_i (f_i(x) - y) - vy \right)$$

$$= \inf\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right) + \inf\left((t-v)y - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y\right)$$

$$\begin{cases} 0 & t - v - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \\ -\infty & \text{o.th} \end{cases}$$

dual prob $\Rightarrow$ maximize $g(\lambda, v) = \inf\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right)$

s.t. $t - v - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$

$\lambda_i \geq 0$

$v \geq 0$

LC

$t - v - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow t = v + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}_{1^T \lambda^*}$ $\Leftarrow$: از قسمت قبل

$\Rightarrow t > 1^T \lambda^* \Rightarrow v > 0 \xrightarrow{(3)\ \text{شرط}} y = 0$

اولیه $\Rightarrow$ minimize $f_0(x)$

s.t. $f_i(x) \leq 0$