In The Name of God

Sharif University of Technology

Dr. shahmansouri

Amirreza Hatamipour

97101507

9710167

امیررضا حاتمی پور

II

$\mathcal{G} = (U, V, \mathcal{E})$

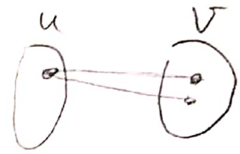
U, V , $u_i \in U$

$v_j \in V$ $\quad (u_i, v_j) \in \mathcal{E}$

w_{ij} : weight

M : subset of $\mathcal{E}$ that no two edges in M share a cammon verted.

MWBM: minimu cost



a)

$$\text{minimize} \sum_{(u_i, v_j) \in \mathcal{E}} w_{ij} x_{ij}$$

x_{ij} را یک متغیر باینری تعریف می‌کنیم. معادل حضور یا عدم حضور یال ij در زیرمجموعه مورد نظر ما می‌باشد.

subject to

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $(u_i, v_j) \in \mathcal{E}$
- $\sum_{v_j \in V} x_{ij} \leq 1$, $\forall u_i \in U$
- $\sum_{u_i \in U} x_{ij} \leq 1$, $\forall v_j \in V$

که دو شرط آخر، این را نشان می‌دهد که به ازای هر راس در U ها، حداکثر درجه آن راس در حضور در زیرمجموعه می‌تواند یک باشد. لذا این شرط مشترک نبودن یک راس را در زیرمجموعه بیان می‌کند.

به همین ترتیب برای v_j ها.

b) standard LP

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

مشابه قسمت قبل، صرفا x_{ij} ها به جای مقدار باینری، می‌توانند مقادیر بین صفر و یک را بگیرند

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i,j$$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

شعاع توپ را r در نظر بگیرید، باید:

maximize $\quad r$

با این شرط که با ضرب هر سطر A در x، r در محدوده b_i قرار بگیرد:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad a_i \in \mathbb{R}^n \quad , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ maximize $\quad r$

subject to $\quad \dfrac{b_i - a_i x}{\|a_i\|} \geq r \quad \forall i = 1, \dots, m$

$$Ax \le b$$

n tasks

S_i: set of jobs that employee i can work on 3

P_j J-th working hours

m employees

x_{ij} را متغیری در نظر می‌گیریم که نشانگر آن می‌باشد که کارگر i ام چند ساعت روی تسک j ام وقت گذاشته است.

minimize $\max\limits_{i=1:m} \{ \sum\limits_{j \in S_i} x_{ij} \}$

برای هر کارگر، مجموع ساعت‌های که روی تسک‌های معلوم شده در S_i می‌گذارد را حساب می‌کنیم

subject to $\sum\limits_{i: j \in S_i} x_{ij} \geq P_j$ for $j = 1:n$

به ازای هر تسک، مجموع ساعت کارگرها از P_j آن تسک بیشتر شود

$\Leftarrow$

minimize $\max\limits_{i=1:m} \{ \sum\limits_{j \in S_i} x_{ij} \}$

subject to

$\sum\limits_{i: j \in S_i} x_{ij} \geq P_j$ for $j = 1:n$

$x_{ij} \geq 0$ for $i = 1:m,\ j = 1:n$

$\Leftarrow$

minimize t

subject to

$t \geq \sum\limits_{j \in S_i} x_{ij}$ for $i = 1:m$

$\sum\limits_{i: j \in S_i} x_{ij} \geq P_j$ for $j = 1:n$

$x_{ij} \geq 0$ for $i = 1:m,\ j = 1:n$

w_j : weights , P_j : hours , n job

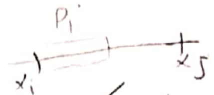
متغیر x_j را برابر زمان شروع کار j ام توسط پردازنده در نظر بگیر

هدف :

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

حالا باید بررسی کنیم که دو تسک i و j بصورت همزمان با هم اجرا نشود یعنی :

$$x_i + p_i \le x_j$$



تسک j بعد از اتمام i شروع کار می‌کند

یا

$$x_j + p_j \le x_i$$

تسک i 〃 〃 j 〃 〃

$y_{ij}=1$ ← کار x_i قبل x_j که

یک متغیر باینری y_{ij} را اضافه کنیم :

$$\begin{cases} x_i - x_j + p_i \le 0 \\ x_j - x_i + p_j \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_i - x_j + p_i \le y_{ij} M_1 \\ x_j - x_i + p_j \le (1-y_{ij}) M_2 \end{cases}$$

where :

$$M_1 = \max\{0, x_i - x_j + p_i\}$$
$$M_2 = \max\{0, x_j - x_i + p_j\}$$

پس داریم :

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

subject to

$$x_i - x_j + p_i \le y_{ij} M_1$$
$$x_j - x_i + p_j \le (1-y_{ij}) M_2$$
$$y_{ij} \in \{0,1\}$$

where

$$M_1 = \max\{0, x_i - x_j + p_i\}$$
$$M_2 = \max\{0, x_j - x_i + p_j\}$$

1 unit product 1 : 1 unit raw materiel A
+ 1 " " " B

capacity: 1200

" 2 : 1 " " " B
+ 2 " " " C

preprocess: B : 1 min , max : 20 hr

A → 4
B → 3
C → 2

product 1 : < 130 → 6 $
" 2 : < 100 → 9 $

product 1 : X , product 2 : Y , raw matrial A : a
B : b
C : c

maximize $6X + 9Y$

subject.

$Y \le 100$
$X \le 130$ } حجم فروش

$4a + 3b + 2c < 1200$ → ظرفیت

$X \le a$ } برای تولید x ، x تا a و x تا واحد b نیاز داریم

$X + Y \le b$

$2Y \le c$ } " " y ، " " " b و دو واحد c نیاز داریم

$b \le 20 \times 60$

$X, Y, Z, a, b \ge 0$

حالا برای کاهش متغیرها ، داریم:

$$\begin{cases} X \le a \\ X + Y \le b \\ 2Y \le c \end{cases} \to \begin{array}{l} X = a \\ X + Y = b \\ 2Y = c \end{array}$$

maximize $6x + 9y$

subject to

$y \leq 100$

$x \leq 130$

$4(x) + 3(x+y) + 2(2y) < 1200$

$x + y \leq 6.x 20$

$x, y \geq$

$\Rightarrow$ maximize $6x + 9y$

subject to $y \leq 100$

$x \leq 130$

$7x + 7y \leq 1200$

$x, y \geq 0$

minimize $2x+3|y-10|$

subject to $|x+2|+y\leq 5$

$\Rightarrow$ consider $s = \max\{y-10, -(y-10)\}$

minimize $2x+3s$

subject to

$$|x+2|+y\leq 5$$
$$y-10\leq s$$
$$y-10\geq -s$$

$\Rightarrow$ consider $t = \max\{x+2, -(x+2)\}$

minimize $2x+3s$

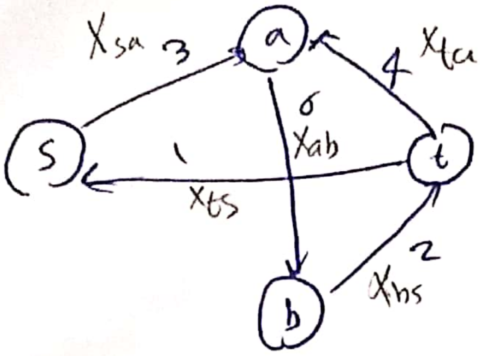
subject to

$$t+y\leq 5$$
$$y-10\leq s$$
$$-(y-10)\leq s$$
$$x+2\leq t$$
$$-(x+2)\leq t$$

همچنین میتوانیم به جای ($|x+2|+y\leq 5$) از عبارت زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} (x+2)+y\leq 5 \\ -(x+2)+y\leq 5 \end{cases}$$

Max flow
from s to t



maximize $\quad X_{sa}$

subject to

(flow capacity) $\quad X_{sa} \le 3$

$X_{ta} \le 4$

$X_{ab} \le 6$

$X_{ts} \le 1$

$X_{bs} \le 2$

(flow conservation)

$$\begin{cases} X_{sa} + X_{ta} = X_{ab} \\ X_{ab} = X_{bs} \end{cases}$$

$s \rightarrow \; X_{sa} = X_{ts}$

$t \rightarrow \; X_{bs} = X_{ts} + X_{ta}$

برای این حالت، مقادیر حل مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر می‌باشد:

~~max~~ $X_{sa} = 1$

با توجه به اینکه باید $X_{ts} = X_{sa}$ برقرار باشد پس حداکثر flow ای که میتواند جریان داشته باشد برابر این مقدار است

Scanned by CamScanner

Question 8:

a) After running code with n=200 and K=15, we reach the results:

```
LP:                 Optimal objective value is 64.000000.


Optimal solution found.
```

And the time for finding the solution is:

```
Elapsed time is 0.008165 seconds.
```

with n=2000, K=150, we have:

```
LP:                 Optimal objective value is 5700.000000.


Optimal solution found.
```

And the time is equal to:

```
Elapsed time is 0.071443 seconds.
>>
```

b) if we solve with relaxing integer programming with n=200 and K=15, we have:

```
fval =

    64

Elapsed time is 0.064926 seconds.
```

And with n=2000 and K=150, we have:

```
fval =

        5700

Elapsed time is 0.178342 seconds.
>>
```

As we see, the optimal value in the two cases is equal together.

But in the first part, we have a shorter time than the second part.