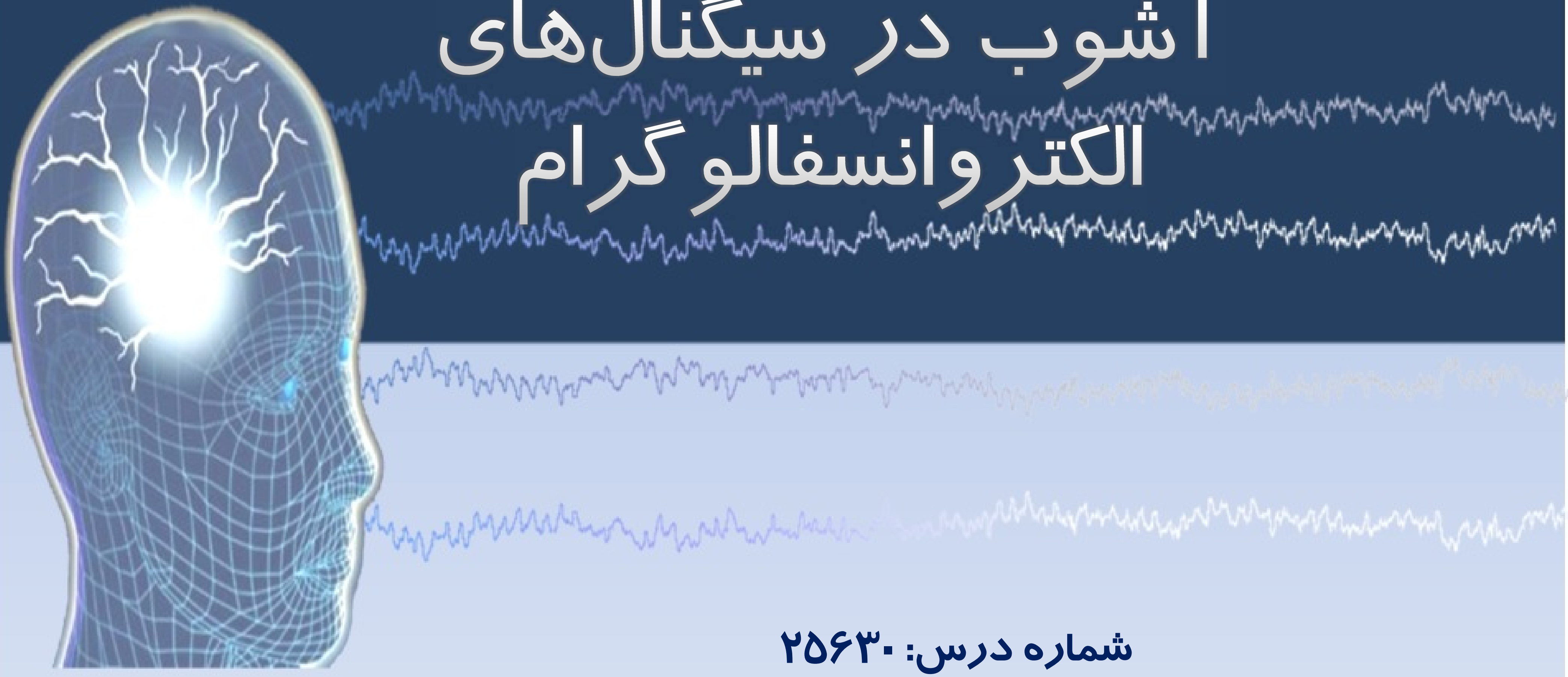
آشوب در سیگنال‌های الکتروانسفالوگرام

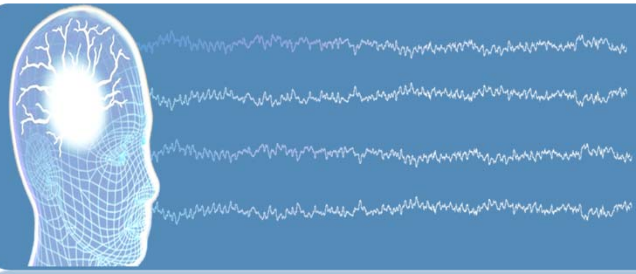


شماره درس: ۲۵۶۳۰

یکشنبه و سه‌شنبه ۱۵–۱۳:۳۰

نیم‌سال اول ۱۴۰۱–۱۴۰۰

S.Hajipour, Sharif University of Technology, 2021

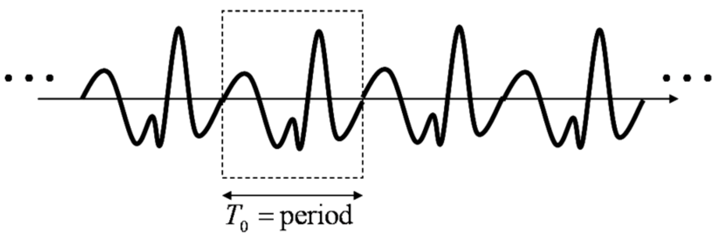


انواع سیگنال از نظر آماری

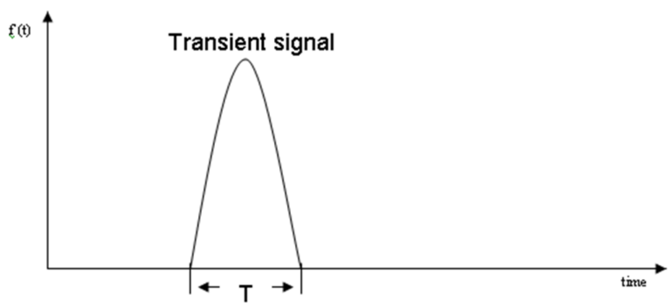
- سیگنال
  - تصادفی
    - غیرایستا
    - ایستا
      - غیر ارگادیک
      - ارگادیک
  - آشوبی
  - یقینی
    - غیرتناوبی
    - تناوبی

انواع سیگنال از نظر آماری

- سیگنال یقینی (Deterministic)
  - طبق یک قاعده کاملاً مشخص تولید می‌شود و قبل از وقوع می‌توان مقدارش را دقیقاً تعیین کرد.
  - هر سیگنالی که یک تابع ریاضی مشخص بدون متغیر تصادفی داشته باشد.
- انواع سیگنال‌های یقینی:
  - تناوبی: معمولاً مجموعه‌ای از مولفه‌های سینوسی است و شکل پایه‌ای با دوره تناوب T دارد: $x(t) = x(t + aT)$



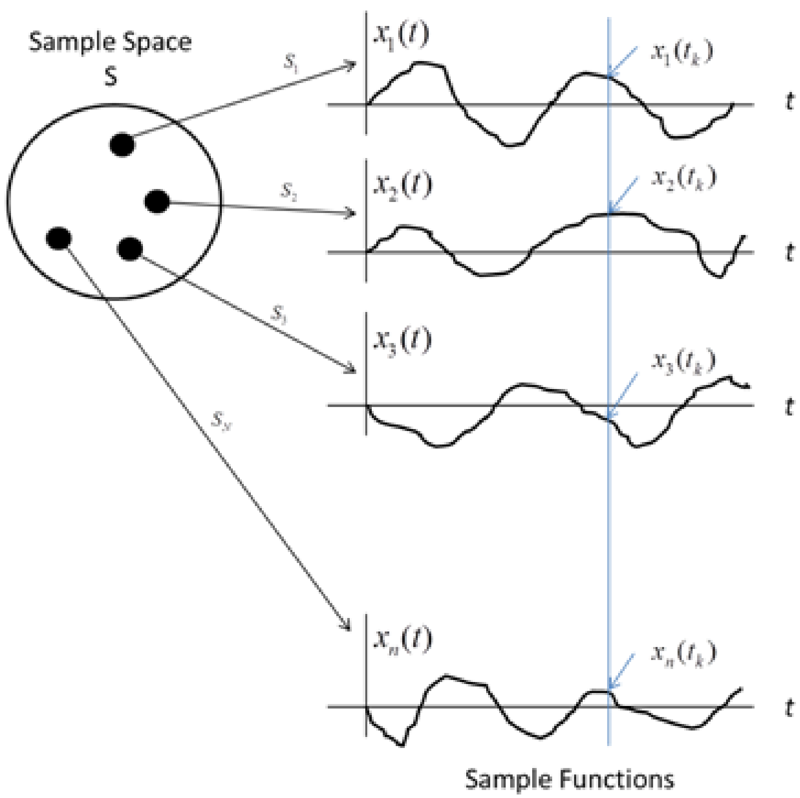
  - گذرا: سیگنال‌هایی که در دوره محدودی غیر صفر هستند و سپس در مقدار خاصی ثابت می‌مانند.



انواع سیگنال از نظر آماری

○ سیگنال تصادفی (Random)

- یک تابع نمونه از یک فرآیند تصادفی است. این نمونه‌ها از نظر توصیف زمانی مشابه نیستند اما دارای خواص آماری یکسانی هستند.
- با توابع ریاضی قابل بیان نیست و معمولاً از روش‌های آماری برای تجزیه و تحلیل این سیگنال‌ها استفاده می‌شود.
- مقدارش در یک نقطه مهم نیست، اطلاعات دیگرش مهم است. می‌توان به هر لحظه زمانی از آن یک تابع چگالی احتمال نسبت داد.



انواع سیگنال از نظر آماری

○ سیگنال آشوبی یا آشوب‌گونه (Chaotic)

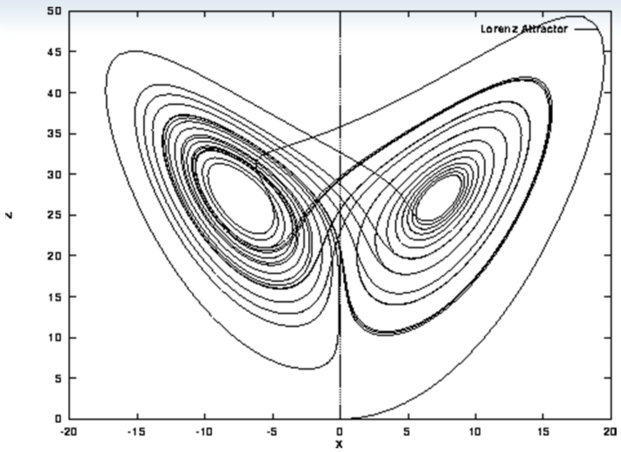
- ○ سیگنالی که توسط یک سیستم آشوبی تولید می‌شود.
- ○ سیستم آشوبی: یک سیستم یقینی که به شرایط اولیه بسیار حساس است. یعنی با تغییر کوچک در شرایط اولیه، مسیر حالت قابل پیش‌بینی نیست (البته از روی معادلات حالت می‌توان آن را تعیین کرد).

The Lorenz equation

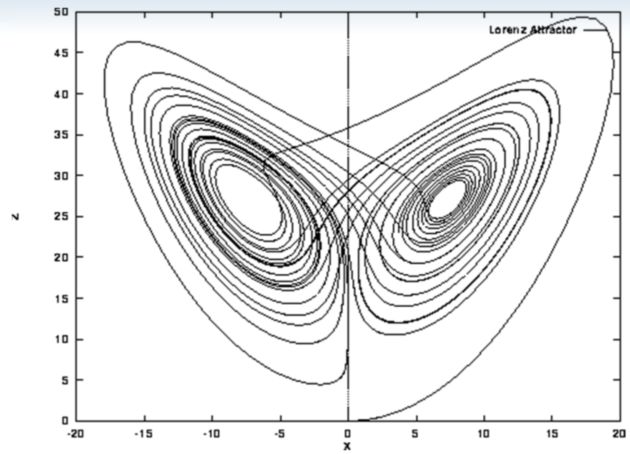
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10(x-y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + 28x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - 8z/3 \end{aligned}}$$

انواع سیگنال از نظر آماری

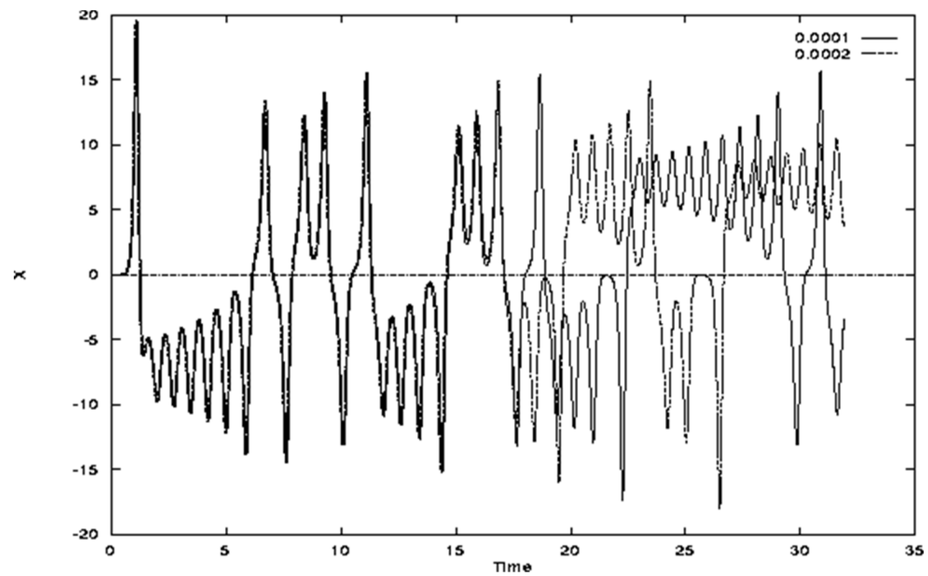


The Lorenz Attractor from the X-Z plane



The Lorenz Attractor with slightly different initial conditions

Lorenz Attractor X vs. Time comparison



سیگنال حیاتی

- سیگنال حیاتی، سیگنال یقینی نیست:
  - حتی برای یک انسان سالم و در حالت استراحت هم، دو پالس متوالی از سیگنال قلبی کاملاً شبیه هم نیستند. سیگنال قلبی کاملاً پریودیک نیز نیست.
  - سیگنال EEG برآیندی از فرآیندهای الکتروشیمیایی تعداد زیادی نورون است. به هیچ وجه به صورت یک سیگنال یقینی نیست.

- سیگنال‌های حیاتی را تصادفی یا آشوبی در نظر می‌گیرند.

- سیگنال الکتروانسفالوگرام (EEG) را نیز تصادفی یا آشوبی در نظر می‌گیرند.

مفهوم آشوب

- سیستم‌های دینامیکی را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد: خطی و غیرخطی.
- به طور کلی تمام سیستم‌های واقعی غیرخطی هستند ولی اکثر اوقات به عنوان اولین تخمین برای این دینامیک‌ها سعی بر این است که از مدل های خطی برای آنها استفاده شود. تنها سیستم‌های غیرخطی قادرند رفتارهای غیر قابل پیش‌بینی از خود نشان دهند.
- در سال ۱۹۶۳ ادوارد لورنز نتایج تحقیقاتش را تحت عنوان "جریان‌های یقینی غیرمتناوب" منتشر کرد که رفتار یک مدل ریاضی ساده شده از آب و هوا را نشان می‌داد. او نشان داد که چه‌طور یک مدل نسبتا ساده ریاضی می‌تواند رفتارهای غیر قابل پیش‌بینی از خود نشان دهد. خروجی‌های مدل حتی بعد از گذشت زمان‌های طولانی هیچ الگوی تکرارشونده‌ای نداشتند.
- همین رفتار غیرپریودیک و غیرقابل پیش‌بینی امروزه تحت عنوان آشوب (Chaos) شناخته می‌شود.
- آشوب یک خاصیت ریاضی از پاسخ زمانی مجموعه‌ای از معادلات و پارامترهاست که تنها در سیستم‌های با دینامیک غیرخطی یافت می‌شود.
- مطالعه آشوب زیرمجموعه‌ای از مطالعه دینامیک‌های غیرخطی است.

مفهوم آشوب: مطالعات ادوارد لورنز

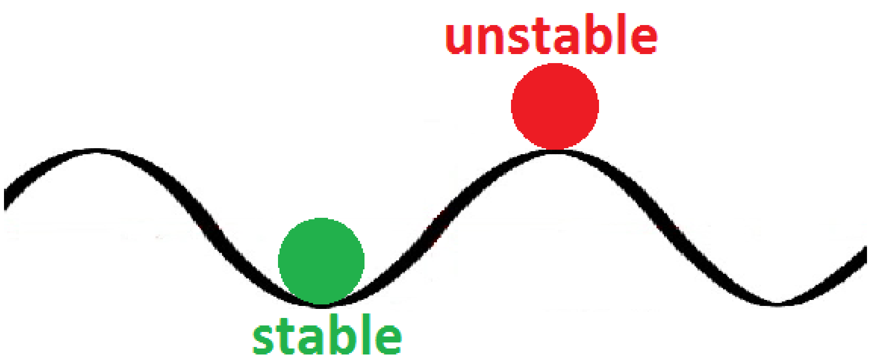
- برنامه شبیه‌سازی کامپیوتری که وضعیت جوی را با استفاده از ۱۲ معادله پیش‌بینی می‌کرد.
- برای صرفه‌جویی در وقت به جای شروع شبیه‌سازی از نقطه اولیه از نقطه‌ای در وسط کار شروع کرد و دستگاه را تا پایان شبیه‌سازی به حال خود رها نمود.
- او مشاهده کرد که نتیجه کاملاً متفاوت با دفعه پیش به‌دست آمد.
- با گذشت زمان الگوی حاصل با نتیجه بار قبل واگرایی بیشتری نشان می‌داد.
- علت: کامپیوتر اعداد را تا شش رقم اعشار در حافظه‌اش ذخیره می‌کرد اما او تا سه رقم اعشار پرینت می‌گرفت.
- مطابق همه اصول علمی آن زمان یعنی فلسفه خطی نیوتن، نتیجه باید تنها تفاوت بسیار کمی می‌کرد.
- اما لورنز اشتباه بودن این باور را اثبات کرد: تغییری بسیار کوچک در شرایط اولیه نیز می‌تواند نتیجه را کاملا دگرگون کند.
- این اثر که به اثر پروانه‌ای مشهور شد در حقیقت جوهره نظریه آشوب را بیان می‌کند.

آشوب در مدل‌های ریاضی

- توصیف دنباله در فضای گسسته:
  - جمله عمومی: $f(n) = \frac{1}{n^2}$
  - بازگشتی: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (باید به تعداد کافی شرایط اولیه داده شود.)
- برای دنباله‌هایی که جمله عمومی دارند، همواره می‌توان فرم بازگشتی هم به دست آورد.
- برای برخی دنباله‌هایی که بازگشتی‌اند، می‌توان جمله عمومی پیدا کرد.
- دنباله‌هایی وجود دارند که فرم بازگشتی دارند ولی فرم جمله عمومی ندارند.
  - دنباله‌های آشوبی از این دسته‌اند.
- **حد دنباله:** دنباله به یک عدد مشخص همگرا شود.
- مثال: $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$
- $a_{n+1} = a_n = k \rightarrow k^2 = 6 + k \rightarrow k = \begin{cases} -2 & \text{غ ق ق} \\ 3 & \end{cases}$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- **تعادل:** متغیر مورد بررسی ساکن شود و ساکن بماند.
- تعادل:
  - پایدار
  - ناپایدار



- معادله لاجیستیک (logistic):
  - یک معادله دیفرنس است.

$$x_{n+1} = A\, x_n(1 - x_n)$$

A: پارامتر

x: حالت (state)

n: ترتیب زمانی وقوع xها

آشوب در مدل‌های ریاضی

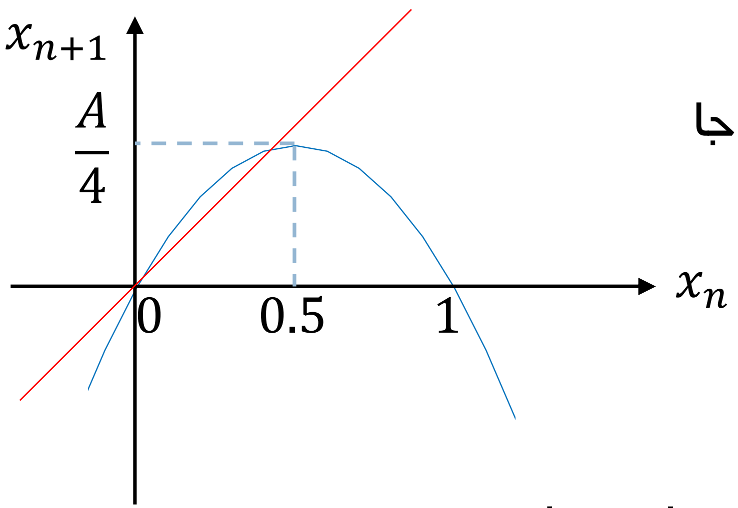
- حد دنباله لاجیستیک:

- $x_{n+1} = A\,x_n(1 - x_n)$
- $x_{n+1} = x_n = k \rightarrow k = Ak(1-k)$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = A(1-k) \rightarrow 1 - k = \frac{1}{A} \rightarrow k = 1 - \frac{1}{A} \\ k = 0 \end{cases}$$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- رویکرد هندسی: (فرض: $A > 0$)
  - معادله لاجیستیک را به صورت $x_{n+1} = f(x_n)$ می‌بینیم.
  - از آنجایی که معادله درجه ۲ است و $A > 0$، تابع حالت سهمی وارون دارد.



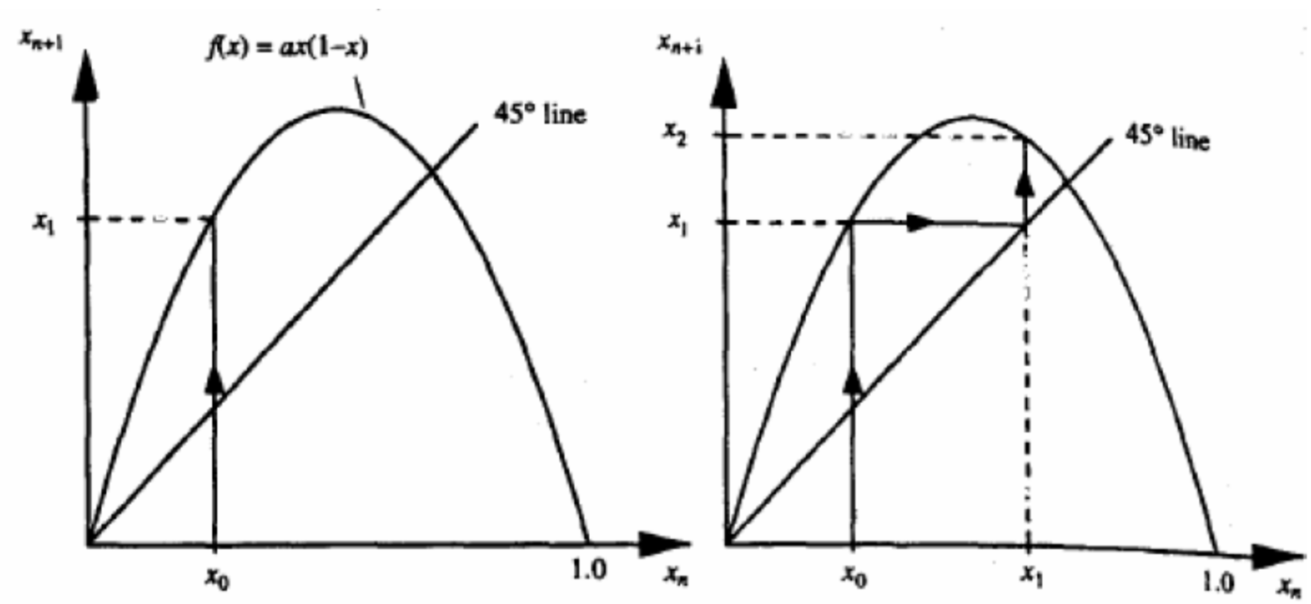
  - با توجه به اندازه A، محل رأس سهمی جابه‌جا می‌شود و دهانه آن باز و بسته می‌شود.

  - نقطه تعادل: جایی که نمودار با نیمساز تلاقی داشته باشد:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \dfrac{1}{A} \end{cases}$$

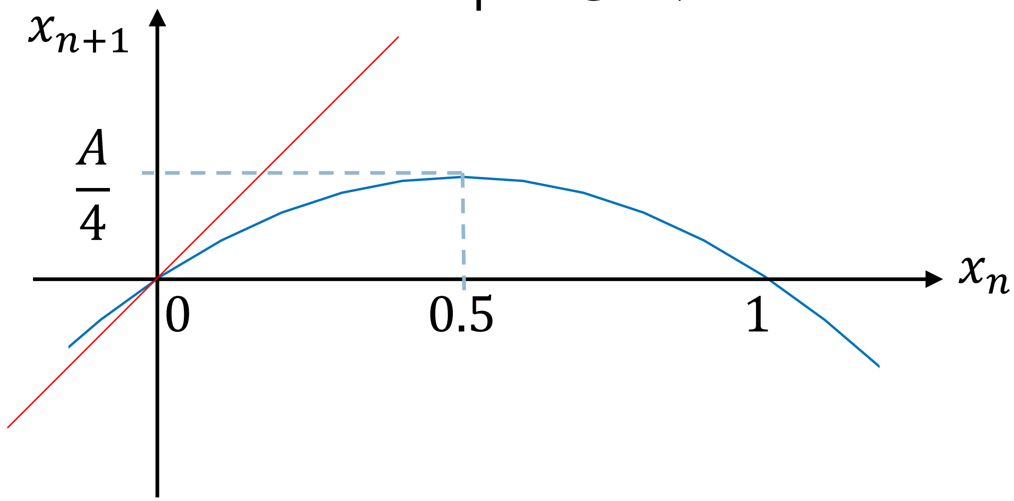
آشوب در مدل‌های ریاضی

- رویکرد هندسی: (فرض: $A > 0$)
- نحوه بررسی نقطه تعادل:



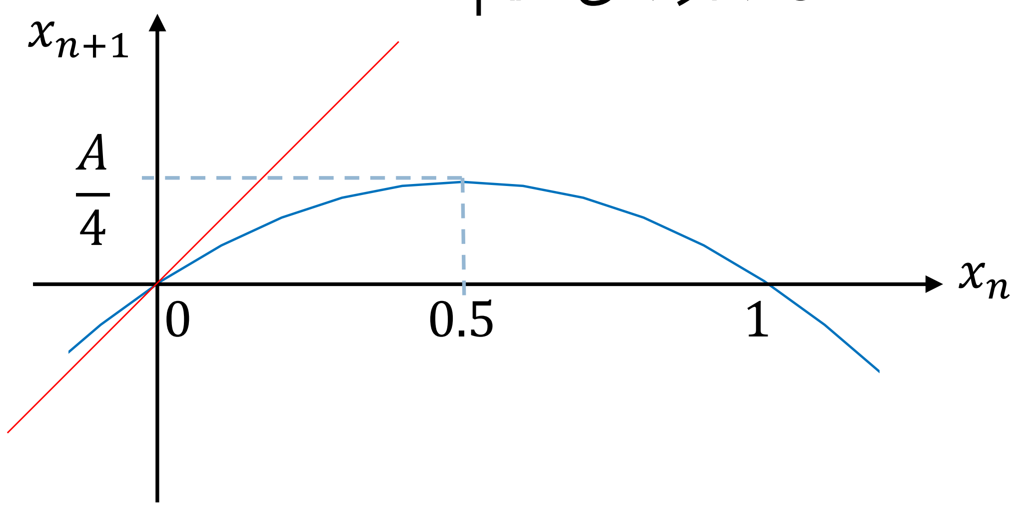
آشوب در مدل‌های ریاضی

- حال می‌خواهیم پایداری و ناپایداری این نقاط تعادل را بررسی کنیم.
- فرض: A خیلی کوچک باشد:

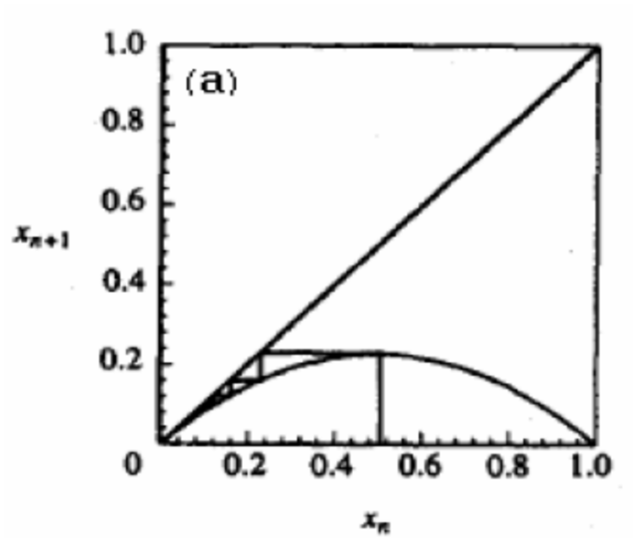


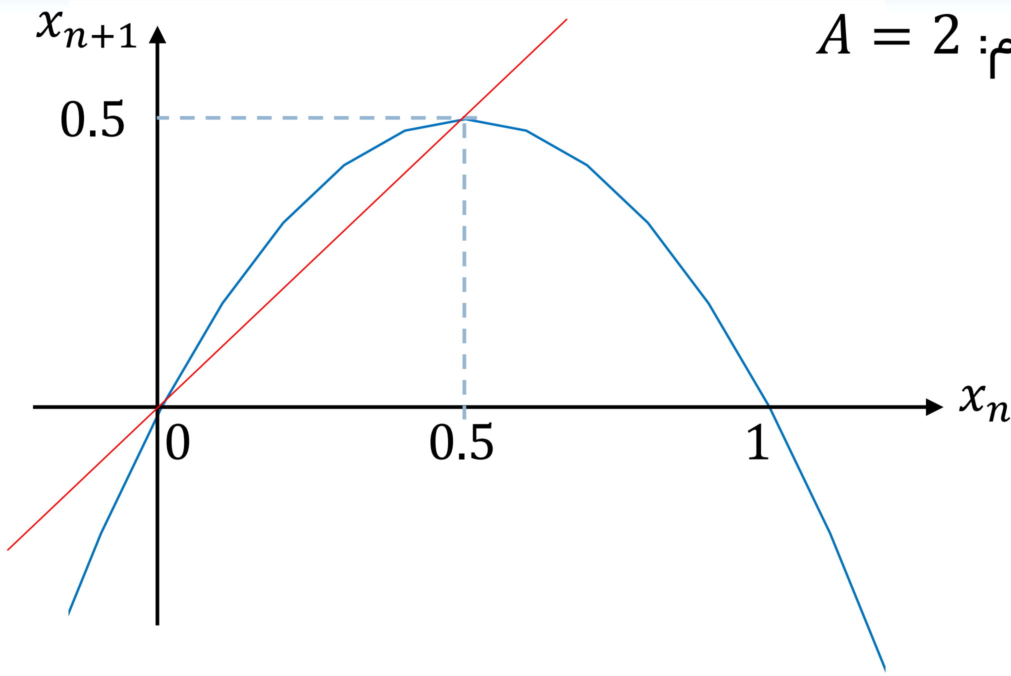
- از نقطه صفر $+\epsilon$ دور شویم، چون A کوچک است نمودار زیر خط نیمساز است، پس $f(\epsilon) < \epsilon$ شده و $x_{n+1} < x_n$ می‌شود.
- در هر گام به صفر نزدیک می‌شود.
- آن‌قدر حرکت می‌کند تا به صفر برسد و سپس در صفر ثابت می‌شود.
- با شروع از $-\epsilon$ نیز، به صورت مشابه چون $|f(-\epsilon)| < |-\epsilon|$، به سمت صفر حرکت می‌کند و در صفر ثابت می‌شود.

- حال می‌خواهیم پایداری و ناپایداری این نقاط تعادل را بررسی کنیم.
- فرض: A خیلی کوچک باشد:



- مثال: $A = 0.9$,$x_0 = 0.5$

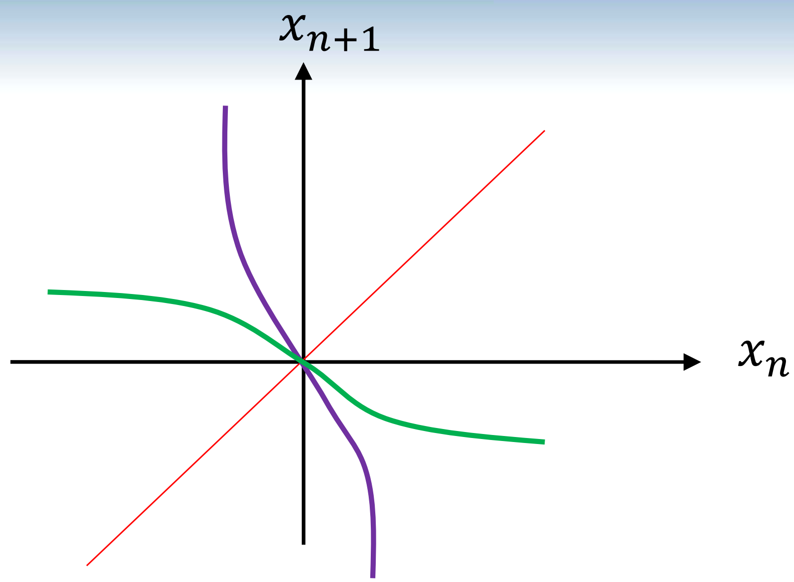




- حال مقدار پارامتر A را افزایش می‌دهیم: $A = 2$

- نقطه صفر تعادل ناپایدار می‌شود:
  - $f(\epsilon) > \epsilon$: ناپایدار
  - $|f(-\epsilon)| > |-\epsilon|$: ناپایدار

آشوب در مدل‌های ریاضی

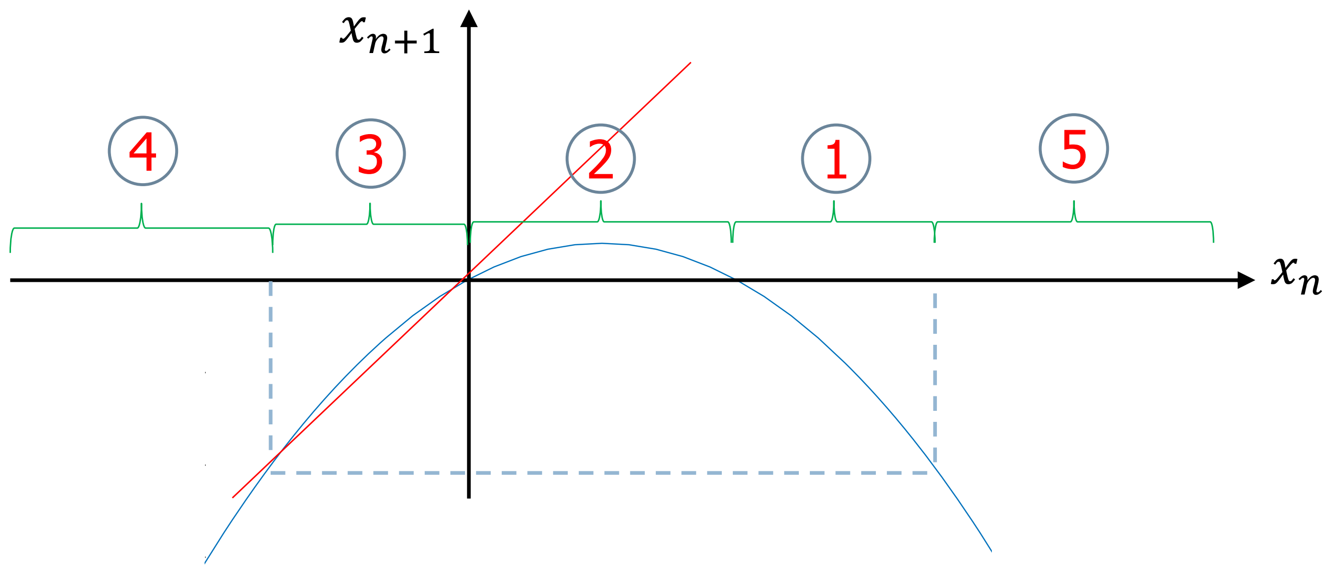


- حال فرض کنیم معادله ما لاجیستیک نباشد:
- در نمودار سبز: $|f(\epsilon)| < |\epsilon|$
  - با اینکه در هر مرحله تغییر علامت داریم، اندازه کوچکتر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود. تعادل پایدار است.
- در نمودار بنفش: $|f(\epsilon)| > |\epsilon|$
  - تعادل ناپایدار است.
- شیب منحنی در نقطه تعادل:
  - اگر اندازه شیب بزرگ‌تر از ۱ باشد، تعادل ناپایدار است. اگر اندازه شیب کوچک‌تر از ۱ باشد، تعادل پایدار است. برای حالت اندازه شیب مساوی ۱ صحبتی نمی‌توان کرد.

آشوب در مدل‌های ریاضی

○ دوباره یک $A > 0$ با اندازه خیلی کوچک در نظر می‌گیریم:

○ $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \frac{1}{A} \rightarrow -\infty \end{cases}$



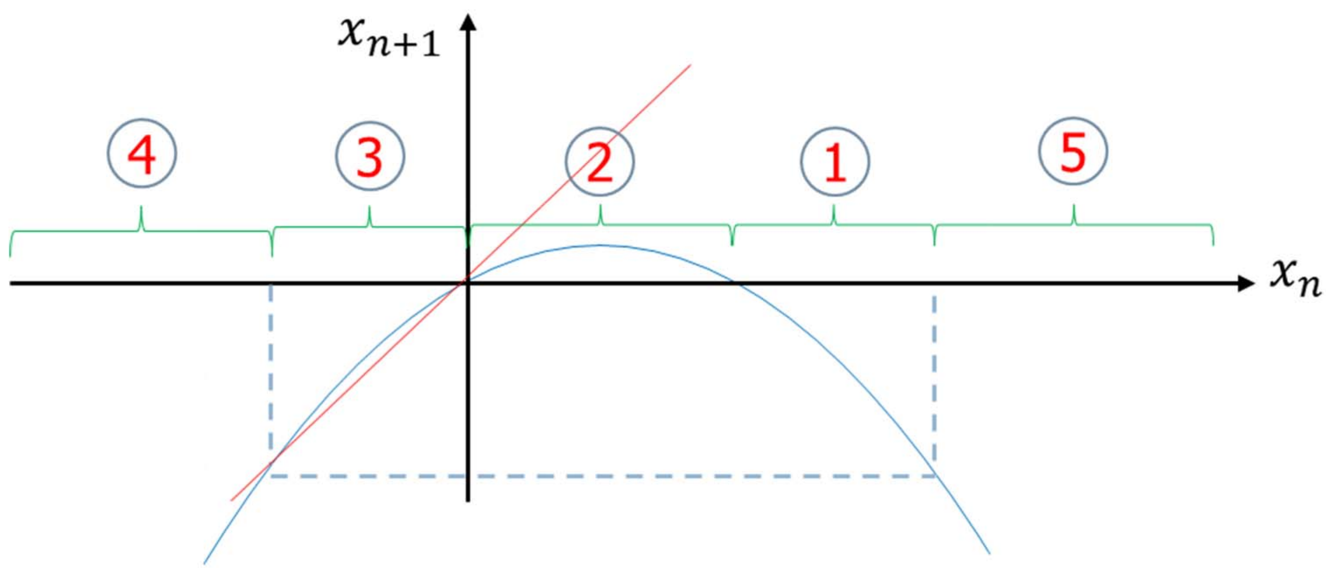
○ اگر شرط اولیه در بازه $[-\infty, x_2^*]$ (بازه ٤) باشد، به سرعت به $-\infty$ می‌رسیم.

○ اگر شرط اولیه در بازه $[x_2^*, 0]$ (بازه ۳) باشد، به صفر میل می‌کند.

○ اگر شرط اولیه در بازه $[0,1]$ (بازه ۲) باشد، به صفر میل می‌کند.

- دوباره یک $A > 0$ با اندازه خیلی کوچک در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \dfrac{1}{A} \to -\infty \end{cases}$$

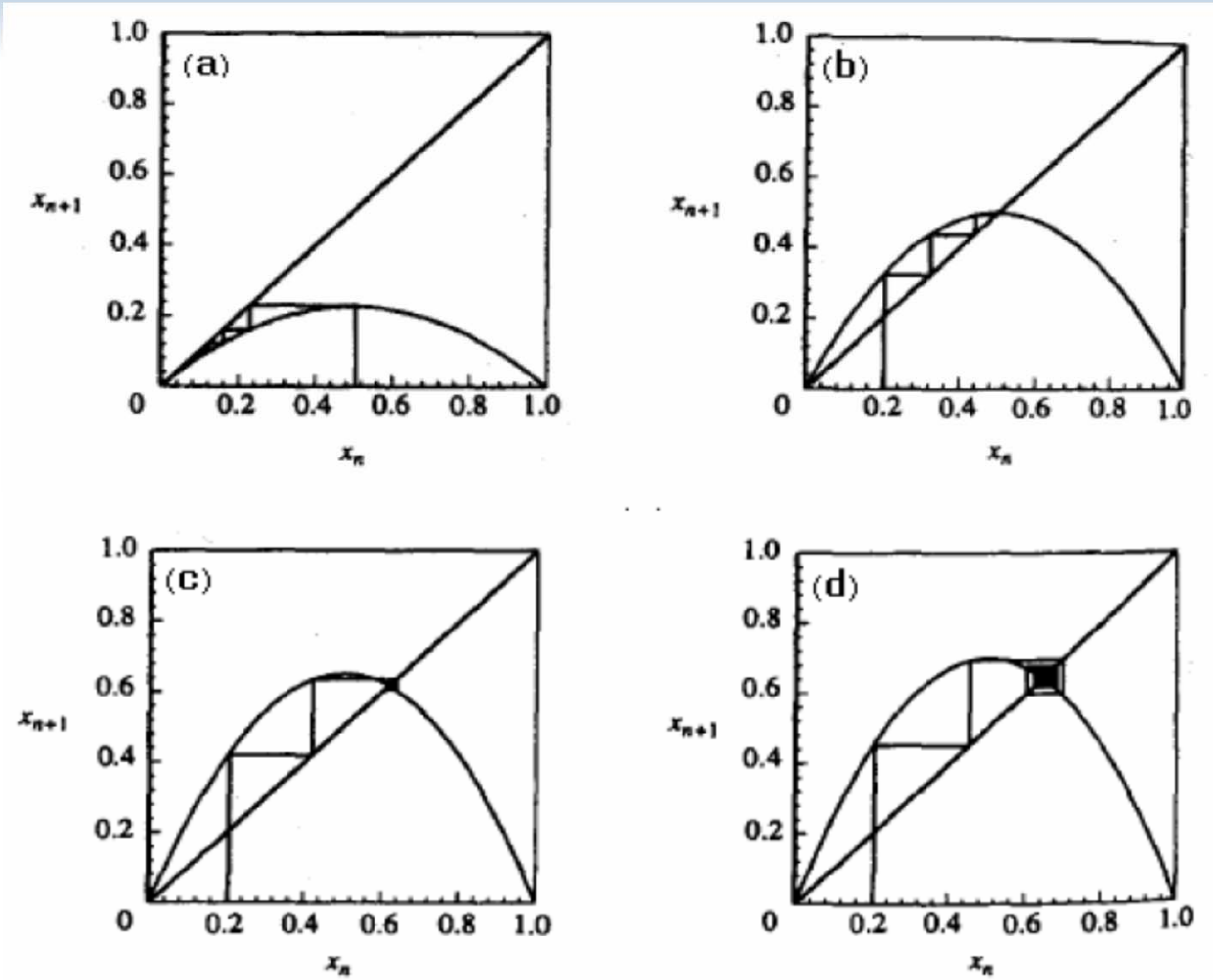


- اگر شرط اولیه در بازه $[1,1+|x_2^*|]$ (بازه ۱) باشد، ابتدا یک پرش به ناحیه ۳ می‌کند و از آنجا به سمت صفر می‌رود.
- اگر شرط اولیه در بازه $[1+|x_2^*|,+\infty]$ (بازه ۵) باشد، ابتدا یک پرش به ناحیه ٤ می‌کند و از آنجا به سمت $-\infty$ می‌رود.

آشوب در مدل‌های ریاضی

- در معادله لاجیستیک:
  - $0 < A < 1$: یک تعادل پایدار (صفر) و یک تعادل ناپایدار $(1 - \frac{1}{A})$.
  - $1 < A < 3$:
    - اگر شرط اولیه $x_0 < 0$ یا $x_0 > 1$ باشد، به $-\infty$ می‌رود.
    - اگر شرط اولیه $0 < x_0 < 1$ باشد، به نقطه تعادل پایدار $1 - \frac{1}{A}$ می‌رود.
  - $A > 3$: ؟

آشوب در مدل‌های ریاضی



$(a)\ A = 0.9, x_0 = 0.5$, $(b) A = 2, x_0 = 0.2$, $(c)\ A = 2.6, x_0 = 0.2$, $(d)\ A = 2.8, x_0 = 0.2$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- در معادله لاجیستیک:

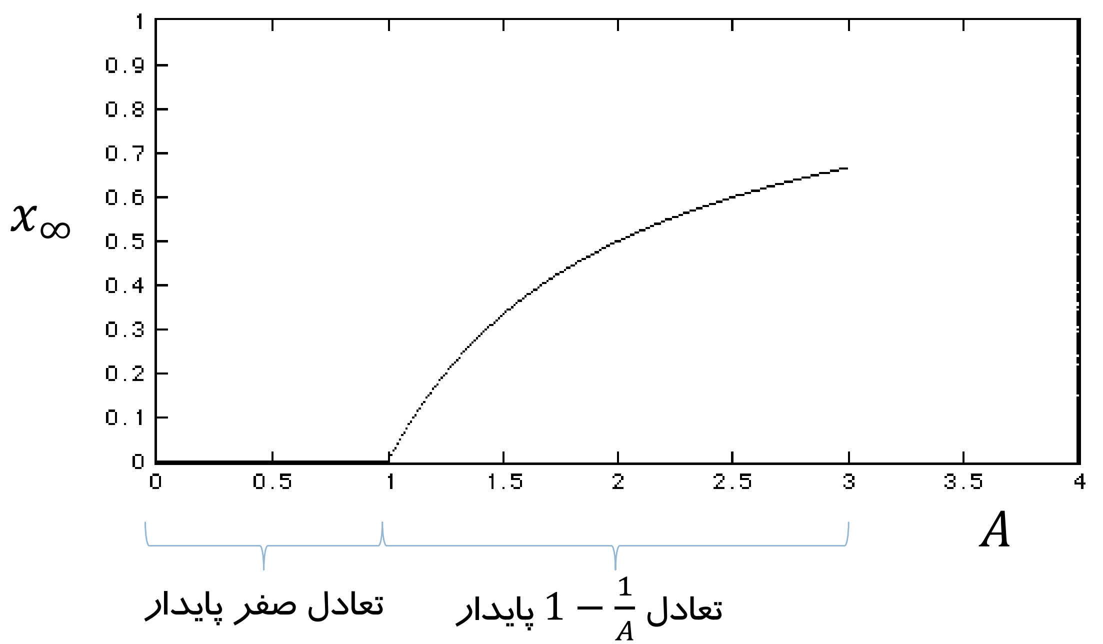
$$x_{n+1} = A\,x_n(1 - x_n) \rightarrow \; f(x) = A\,x\,(1-x) = Ax - Ax^2$$
$$\rightarrow f'(x) = A - 2Ax$$

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \rightarrow f'(x_1^*) = A \\ x_2^* = 1 - \dfrac{1}{A} \rightarrow f'(x_2^*) = A - 2A\left(1 - \dfrac{1}{A}\right) = 2 - A \end{cases} \qquad \begin{cases} if \;\; 0 < A < 1 \;\; \rightarrow x_1^* \;\; stable \\ if \; 1 < A < 3 \;\; \rightarrow \;\; x_2^* \;\; stable \end{cases}$$

- اگر شرط اولیه $x > 1$ باشد، در اولین گام به قسمت منفی پرش می‌کند و داستان مشابه شرط اولیه $x < 0$ است.
- در شرط اولیه $x < 0$ با توجه به مقدار A یا به سمت صفر حرکت می‌کند و یا به سمت $-\infty$.
- از این به بعد کلاً شرط اولیه را $0 < x < 1$ قرار می‌دهیم و بررسی می‌کنیم.

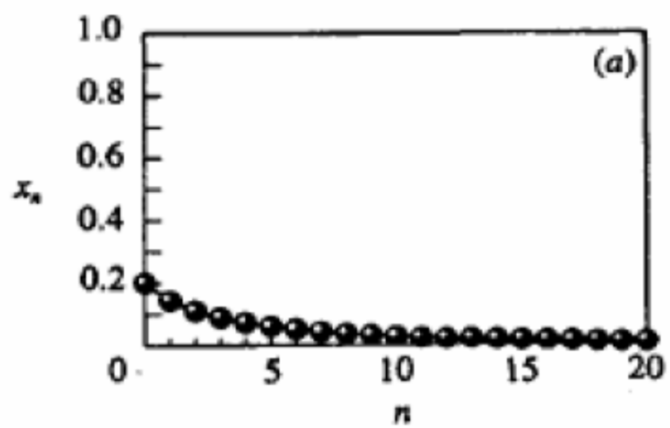
آشوب در مدل‌های ریاضی

- نمودار انشعابی یا بایفورکیشن (Bifurcation map):
- محور x: پارامتر A
- محور y: غایت سیستم (x_∞)
- در اینجا شرط اولیه را $0 < x < 1$ می‌دهیم. پس دیگر غایت‌های ∞ را نداریم و برایمان مشکل ایجاد نمی‌کند.

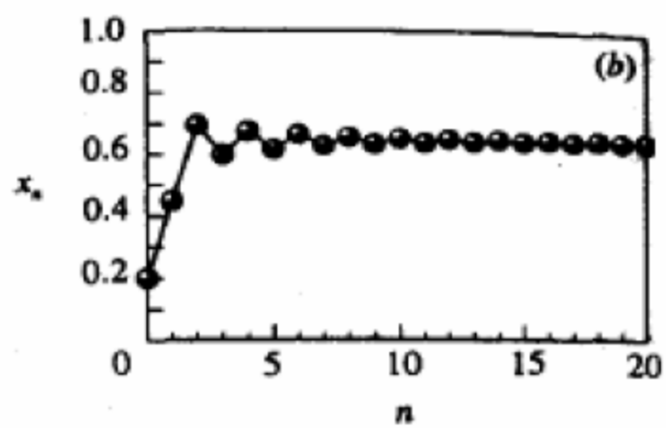


آشوب در مدل‌های ریاضی

- نمودار انشعابی یا بایفورکیشن (Bifurcation map):
- از چه n ای به بعد را غایت سیستم در نظر می‌گیریم؟
  - کاملاً تجربی است و هیچ قانون خاصی ندارد. در لاجیستیک به طور تجربی برای رسیدن به حالت نهایی $n = 1000$ در نظر می‌گیریم:
    - ۹۰۰ تا را حالت گذار می‌گیریم.
    - ۱۰۰ تا را غایت سیستم می‌گیریم.



$A = 0.9$



$A = 2.6$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- $0 < A < 1$: به نقطه تعادل صفر میل می‌کند. هرچه A بزرگتر شود و به ۱ نزدیک‌تر شود، دیرتر به صفر میل می‌کند. یعنی تعداد تکرارهای بیشتری باید بگذرد تا جواب به صفر برسد (صفر دارد پایداری‌اش را از دست می‌دهد).

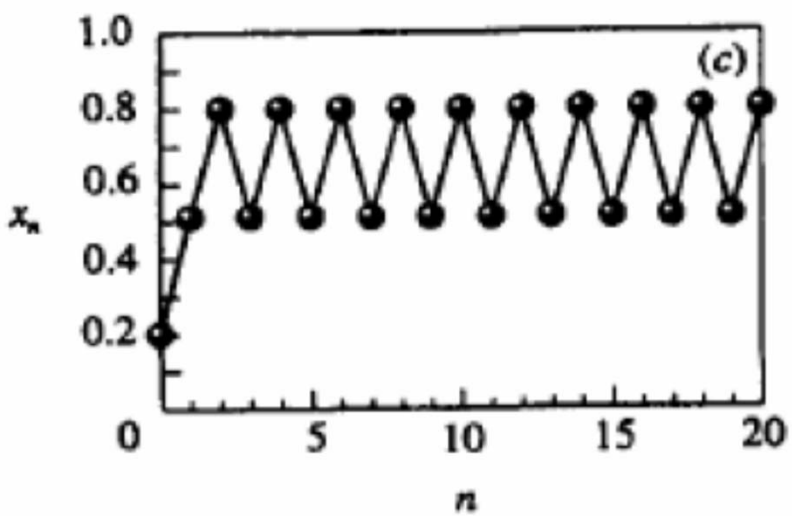
- $A = 1$: نقطه تعادل صفر دارد پایداری‌اش را از دست می‌دهد و نقطه تعادل $1 - \frac{1}{A} = 0$ قرار است پایدار شود: یعنی صفر نقطه تعادل هست ولی خیلی دیر به آن می‌رسد.

- $1 < A < 3$: به نقطه تعادل پایدار $1 - \frac{1}{A}$ می‌رود. تا یک جایی به صورت مستقیم طی می‌کند و به $1 - \frac{1}{A}$ می‌رسد. از یک جایی به بعد به صورت نوسانی به نقطه تعادل $1 - \frac{1}{A}$ میل می‌کند.

- $3 < A <?$: رفتار پریودیک با پریود بالاتر.

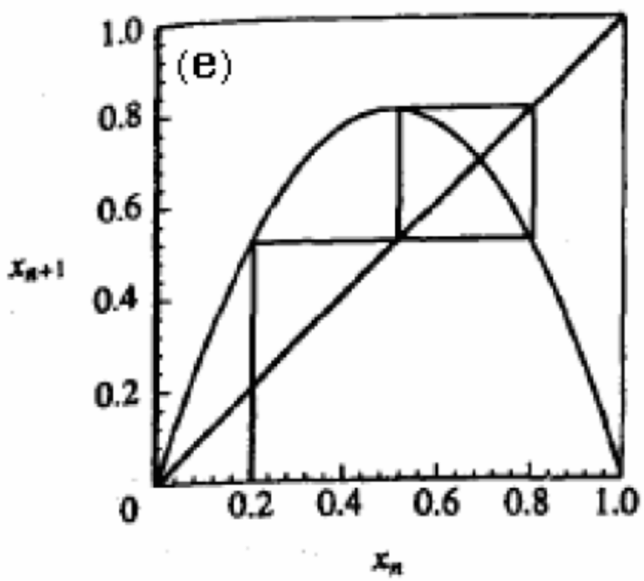
آشوب در مدل‌های ریاضی

- وقتی A کمی از ۳ بزرگ‌تر شود:

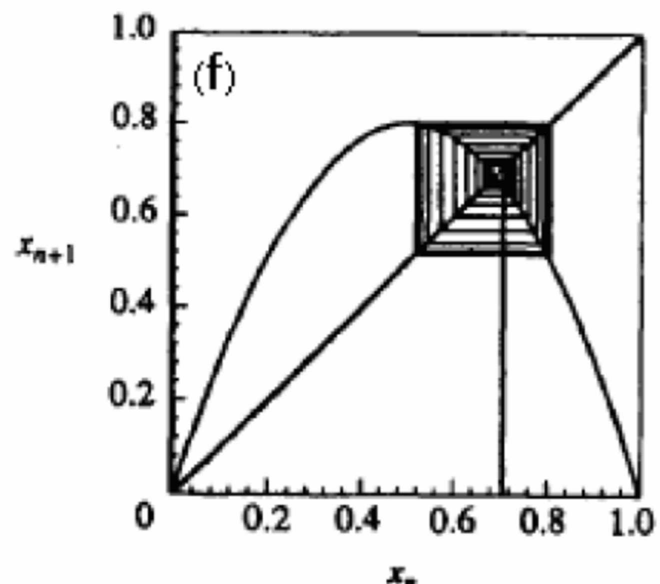


$$A = 3.2\ , x_0 = 0.2$$

- رفتار تناوب ۲



$$A = 3.2\ , x_0 = 0.2$$

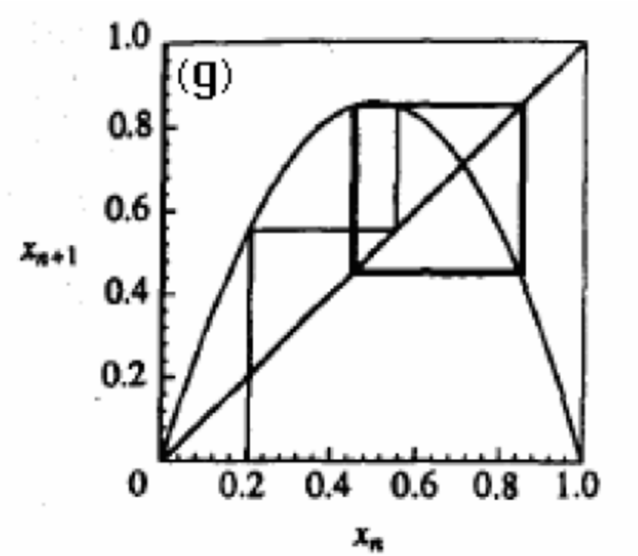


$$A = 3.2\ , x_0 = 0.7$$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- وقتی A کمی از ۳ بزرگ‌تر شود:

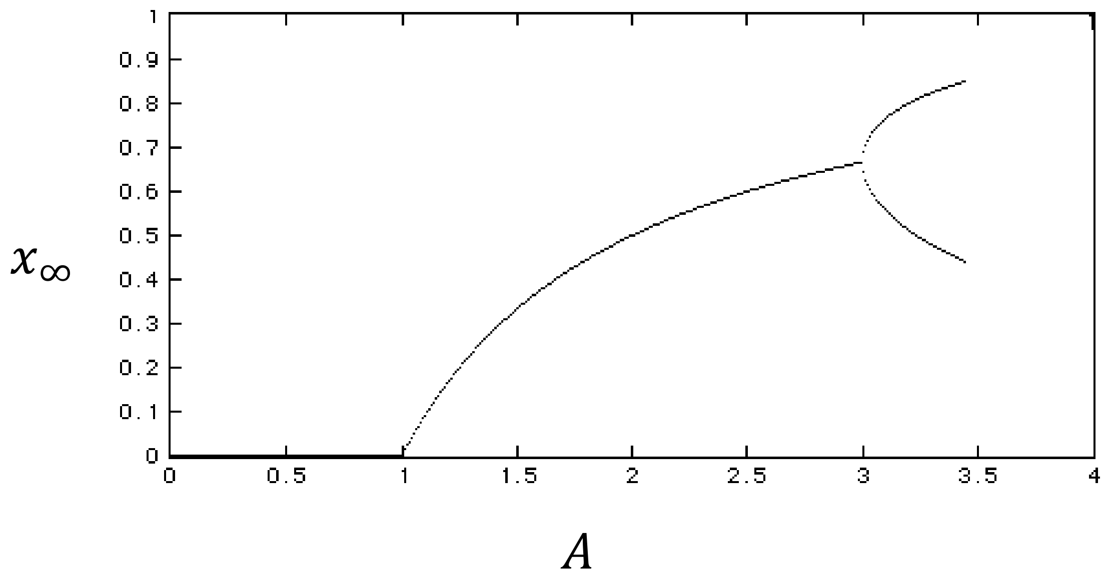
- رفتار تناوب ۲



$$A = 3.42 \, , x_0 = 0.2$$

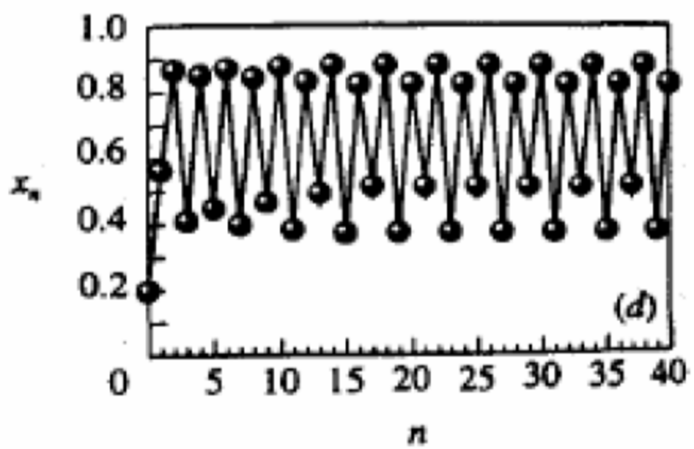
آشوب در مدل‌های ریاضی

- نمودار انشعابی یا بایفورکیشن (Bifurcation map):

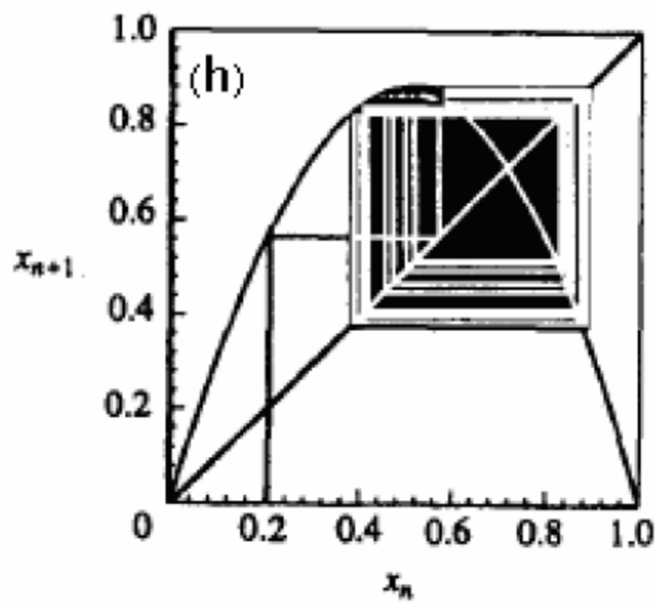


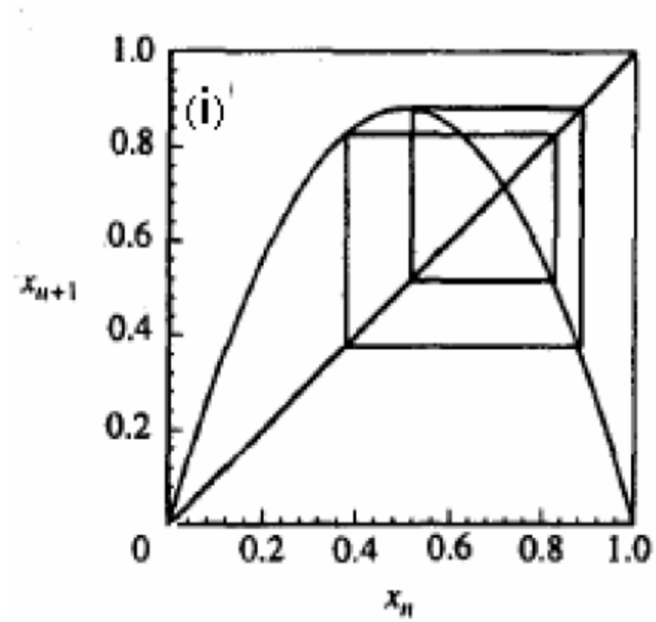
آشوب در مدل‌های ریاضی

- رفتار تناوب ٤



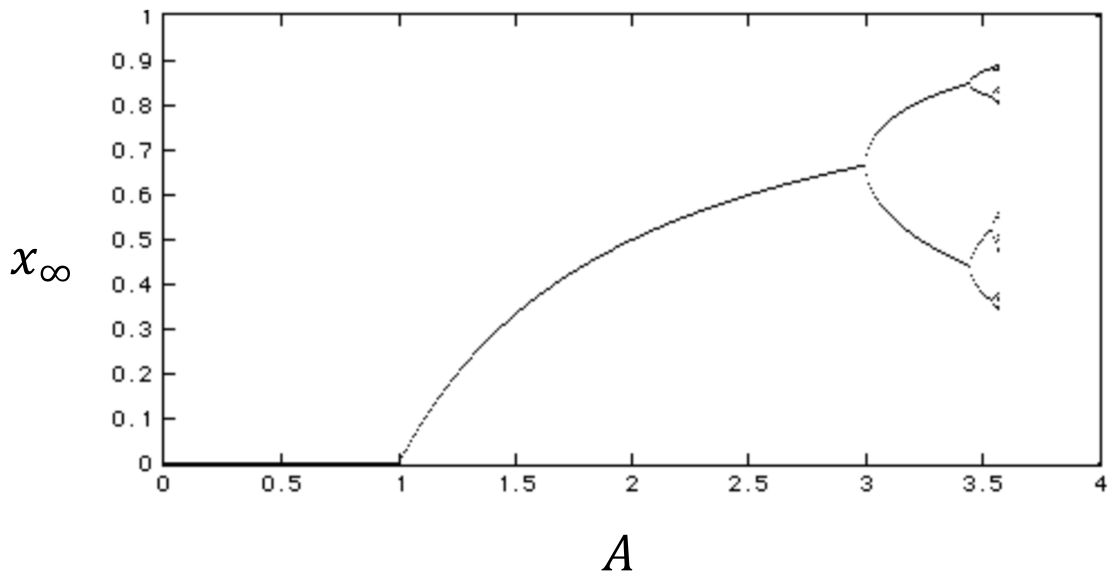
$$A = 3.52\,, x_0 = 0.2$$





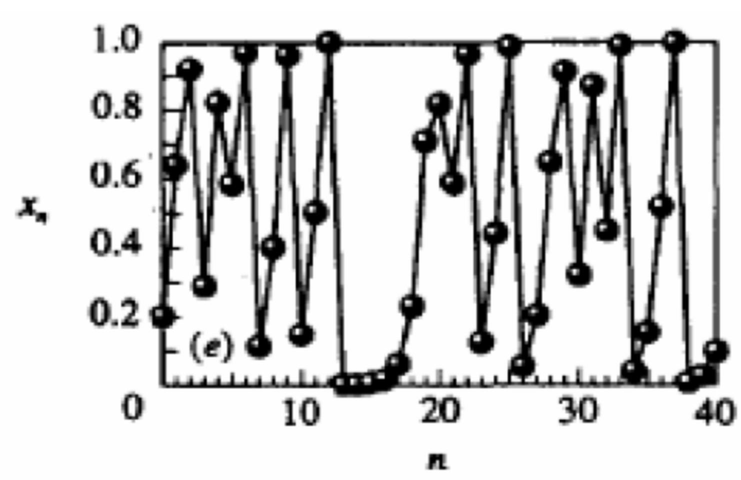
آشوب در مدل‌های ریاضی

- نمودار انشعابی یا بایفورکیشن (Bifurcation map):

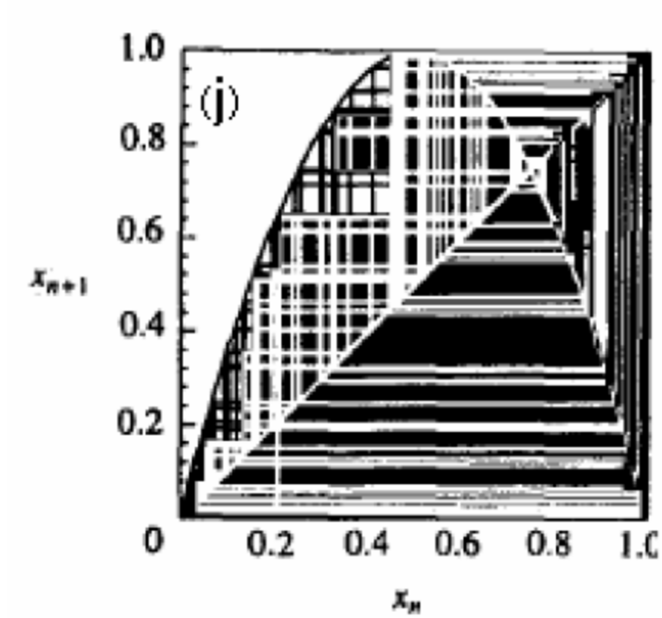


آشوب در مدل‌های ریاضی

- $A>?$: رفتار آشوبی

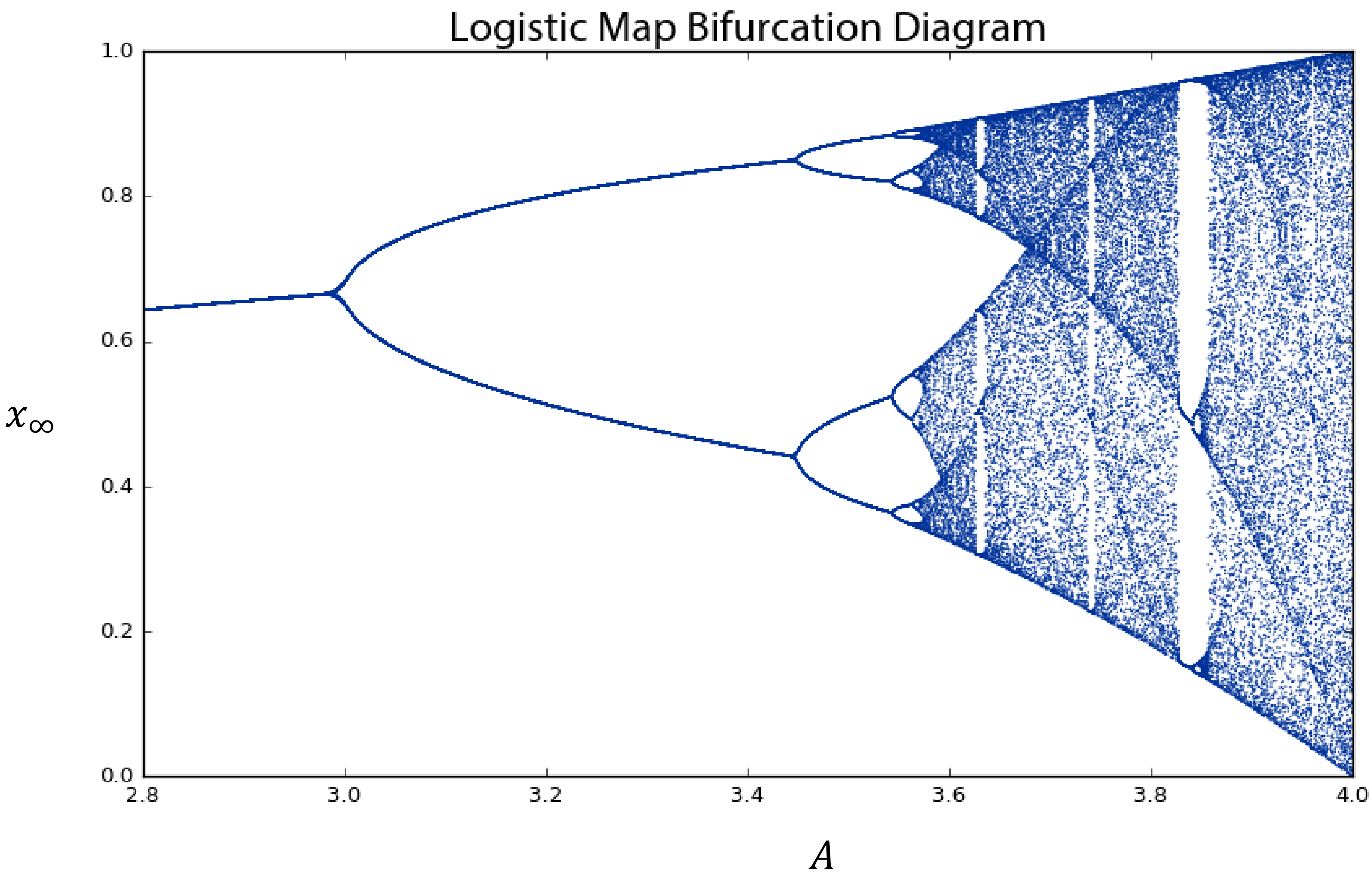


$$A = 4\,, x_0 = 0.2$$



آشوب در مدل‌های ریاضی

- نمودار انشعابی یا بایفورکیشن (Bifurcation map):



آشوب در مدل‌های ریاضی

- تعریف آشوب:
  - دینامیک آشوبی، دینامیکی است که به شرایط اولیه حساسیت داشته باشد (معروف به اثر پروانه‌ای butterfly effect) به شرط کراندار (bounded) بودن.
- در سیستم‌های عادی، اگرتفاوت شرایط اولیه بسیار کم باشد، حالت نهایی سیستم به ازای آن دو شرط اولیه متفاوت تقریباً مشابه است. اما در سیستم‌های آشوبی پاسخ نهایی سیستم به ازای این شرایط اولیه دورتر و دورتر می‌شود.
- سوال: اگر دو لیزر را با اختلاف زاویه بسیار اندک بتابانیم، در فاصله دور این دو بسیار از هم دور می‌شوند و دائم هم در حال دور شدن هستند. آیا این سیستم آشوبی است؟
  - خیر، زیرا این سیستم کراندار نیست. در حالتی دور شدن به معنای آشوبی است که سیستم کراندار باشد.
- مثال سیستم آشوبی: میز و توپ‌های بیلیارد

آشوب در مدل‌های ریاضی

- آشوب در دینامیک پیوسته:
  - معادلات دیفرانسیل پیوسته:

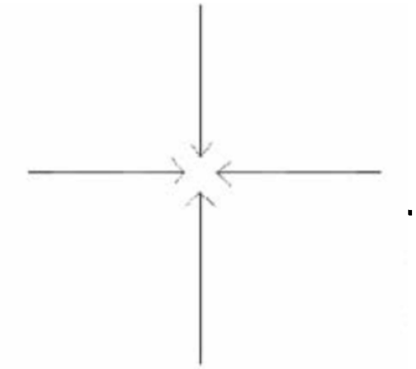
$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,z) \\ \dot{y} = f_2(x,y,z) \\ \dot{z} = f_3(x,y,z) \end{cases}$$

آشوب در مدل‌های ریاضی

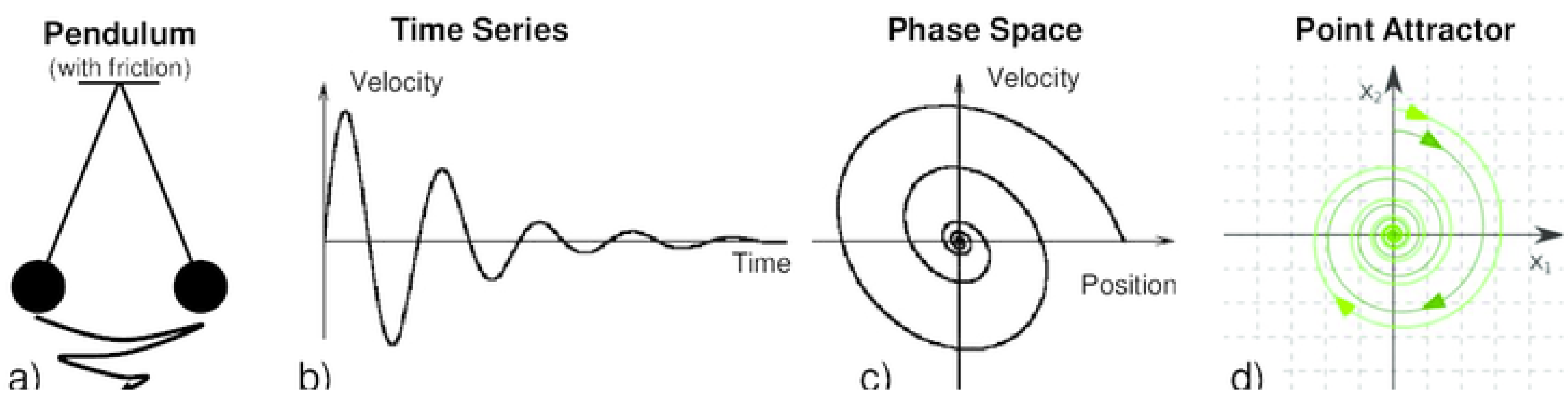
- فضای فاز یا فضای حالت (phase space یا state space):
  - سیستمی را در نظر بگیرید که توسط m متغیر تعریف شده باشد. حالت این سیستم در یک زمان خاص را می‌توان با یک نقطه در فضای m-بعدی نمایش داد. به این فضا، فضای فاز می‌گویند.
- مدار (orbit):
  - در سیستم های دینامیکی، مدار مجموعه نقاطی در فضای فاز است که در طول زمان، بردار حالت سیستم از آنها عبور می‌کند.
  - اگر سیستم دینامیکی گسسته (نگاشت یا map) باشد، مدار یک دنباله خواهد بود و اگر سیستم دینامیکی پیوسته (جریان یا flow) باشد، مدار به صورت منحنی خواهد بود.
  - به مدارهای ایجاد شده قبل از رسیدن به حالت نهایی، مدار گذرا (transient orbit) و به مدار در حالت نهایی مدارهای بعد از گذرا (post transient orbit) گفته می شود.

آشوب در مدل‌های ریاضی

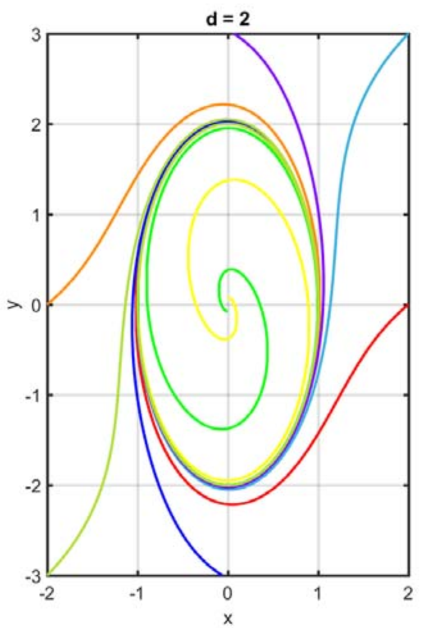
- مسیر (trajectory):
  - منحنی ایجاد شده در فضای فاز توسط دنباله حالت‌های متوالی در طول زمان
- جاذب یا رباینده (attractor):
  - یک سیستم و فضای فاز آن را در نظر می‌گیریم. شرایط اولیه در ناحیه B ممکن است وقتی $t \to \infty$ با مجموعه کوچک‌تری مانند A مجانب شود. در این صورت A را جاذب می‌گوییم.
  - در واقع جاذب مجموعه جواب‌های معادلات دینامیکی سیستم است وقتی که سیستم برای مدت زمان طولانی کار می‌کند.
- بستر جذب رباینده (basin of attractor):
  - بستر جذب رباینده شامل تمامی شرایط اولیه در فضای فاز است که اگر سیستم از آن نقاط شروع به کار کند در نهایت جذب رباینده می شود.

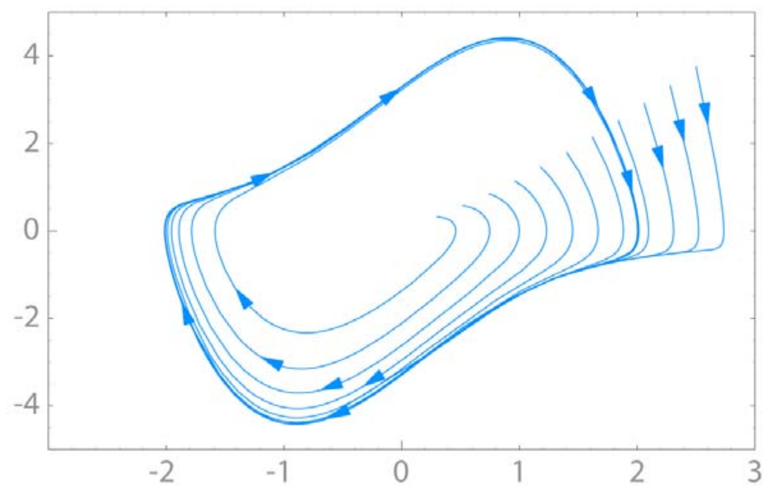


- انواع جاذب‌ها:
  - جاذب‌های نقطه‌ای (point attractor) یا (fixed point):
    - در حقیقت همان نقاط تعادل سیستم در حالت ماندگار هستند.
    - مثال کلاسیک: آونگ



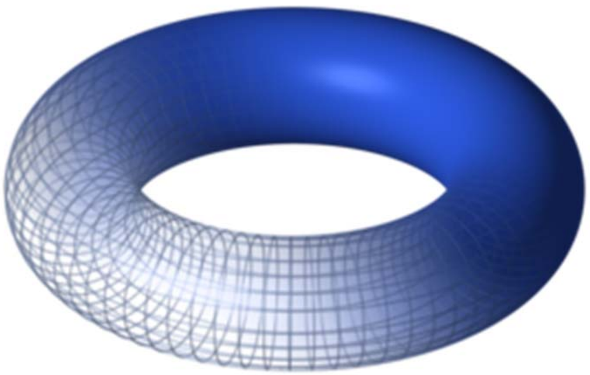
- انواع جاذب‌ها:
  - سیکل‌های حدی (limit cycle):
    - به صورت یک منحنی بسته می‌باشند که رفتار سیستم در فضای فاز به این منحنی محدود می‌شود.
    - این مدارهای بسته مربوط به جواب‌های متناوب می‌باشند.





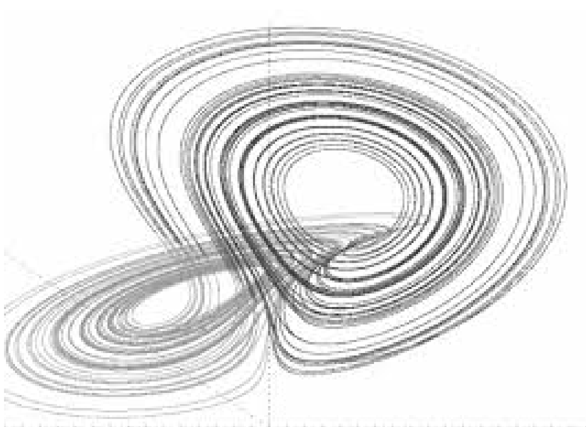
آشوب در مدل‌های ریاضی

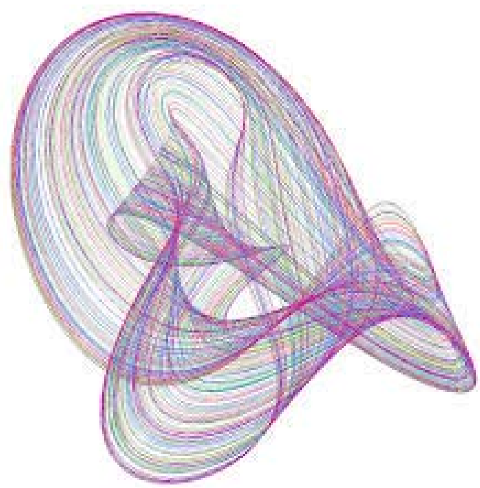
- انواع جاذب‌ها:
  - جاذب‌های سطحی مارپیچی (limit torus یا troidal attractor):
    - در این حالت بردار حالت سیستم در فضای حالت در طول زمان به صورت مارپیچی حرکت می‌کند ولی این حرکات به روی یک سطح بسته دونات مانند محدود است.
    - پیچیدگی رفتار سیستم در این حالت در مقایسه با جاذب‌های نقطه‌ای و سیکل‌های حدی خیلی بیشتر است اما همچنان قابل پیش‌بینی و یقینی است.



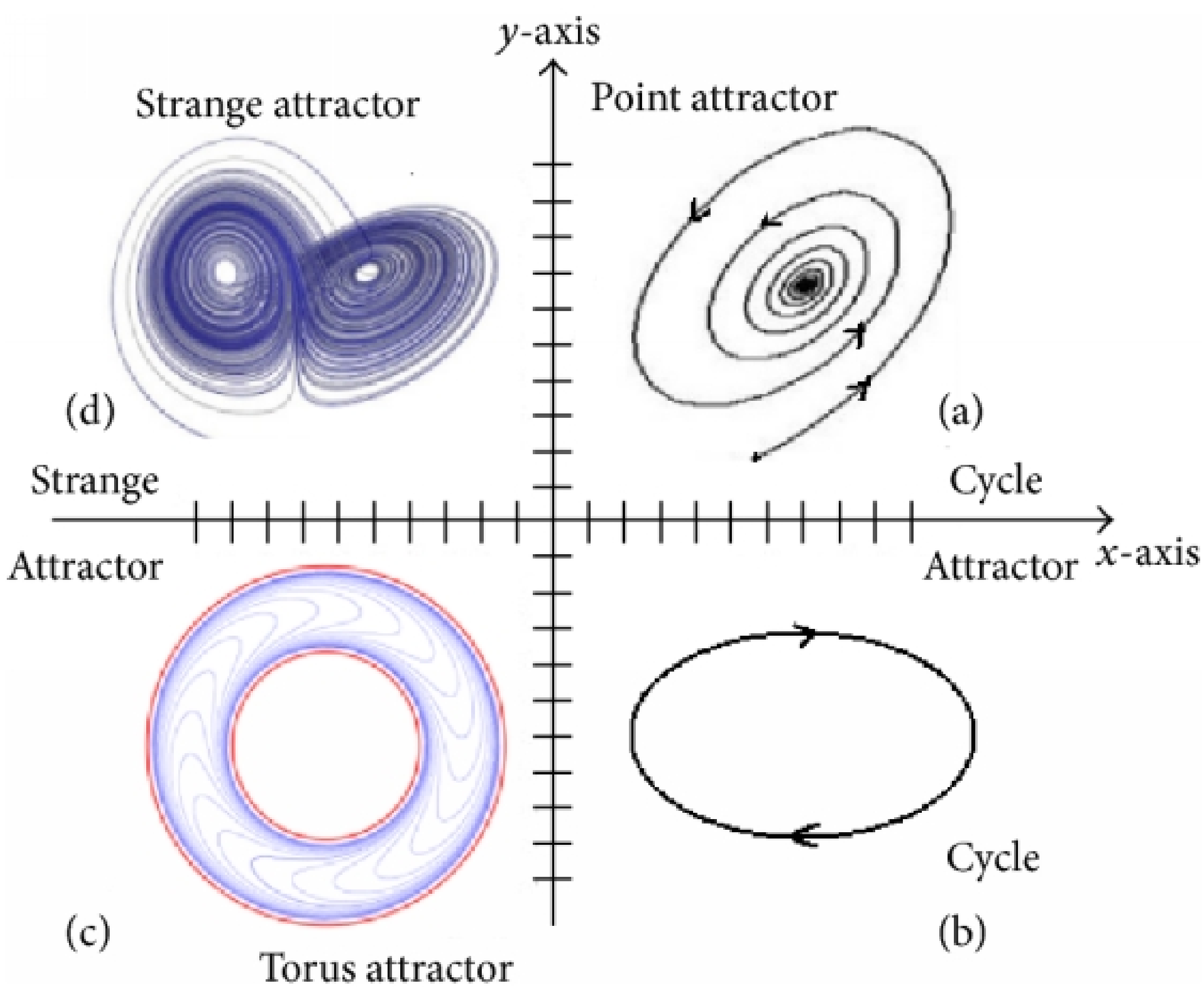
آشوب در مدل‌های ریاضی

- انواع جاذب‌ها:
  - جاذب‌های عجیب (strange attractor):
    - در این حالت رفتار سیستم به ناحیه‌ای از فضای فاز محدود می‌شود ولی رفتار بسیار پیچیده و غیر قابل پیش‌بینی است.
    - جاذب‌های عجیب خاصیت خودشباهتی و ساختار فرکتالی دارند و دارای بعد غیر صحیح می‌باشند.



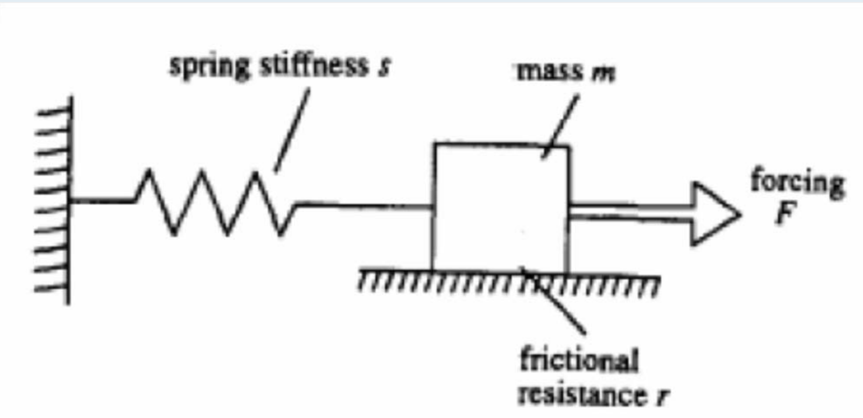


آشوب در مدل‌های ریاضی



آشوب در مدل‌های ریاضی

- آشوب در دینامیک پیوسته:
  - نوسان‌ساز دافینگ:



- یک فنر با ثابت فنر s از یک طرف به یک جسم با جرم m متصل است و از طرف دیگر به دیوار متصل است.
- سطح دارای ضریب اصطکاک r است.
- رابطه غیرخطی فنر:

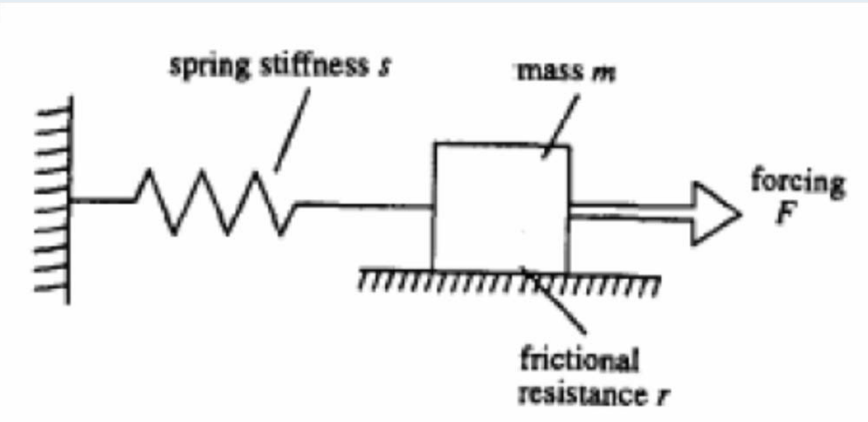
$$F = -s\,x^3$$

- یک نیروی خارجی سینوسی به سیستم اعمال می‌شود:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx^3 = A_f\,Cos(\omega t)$$

آشوب در مدل‌های ریاضی

- آشوب در دینامیک پیوسته:
  - نوسان‌ساز دافینگ:

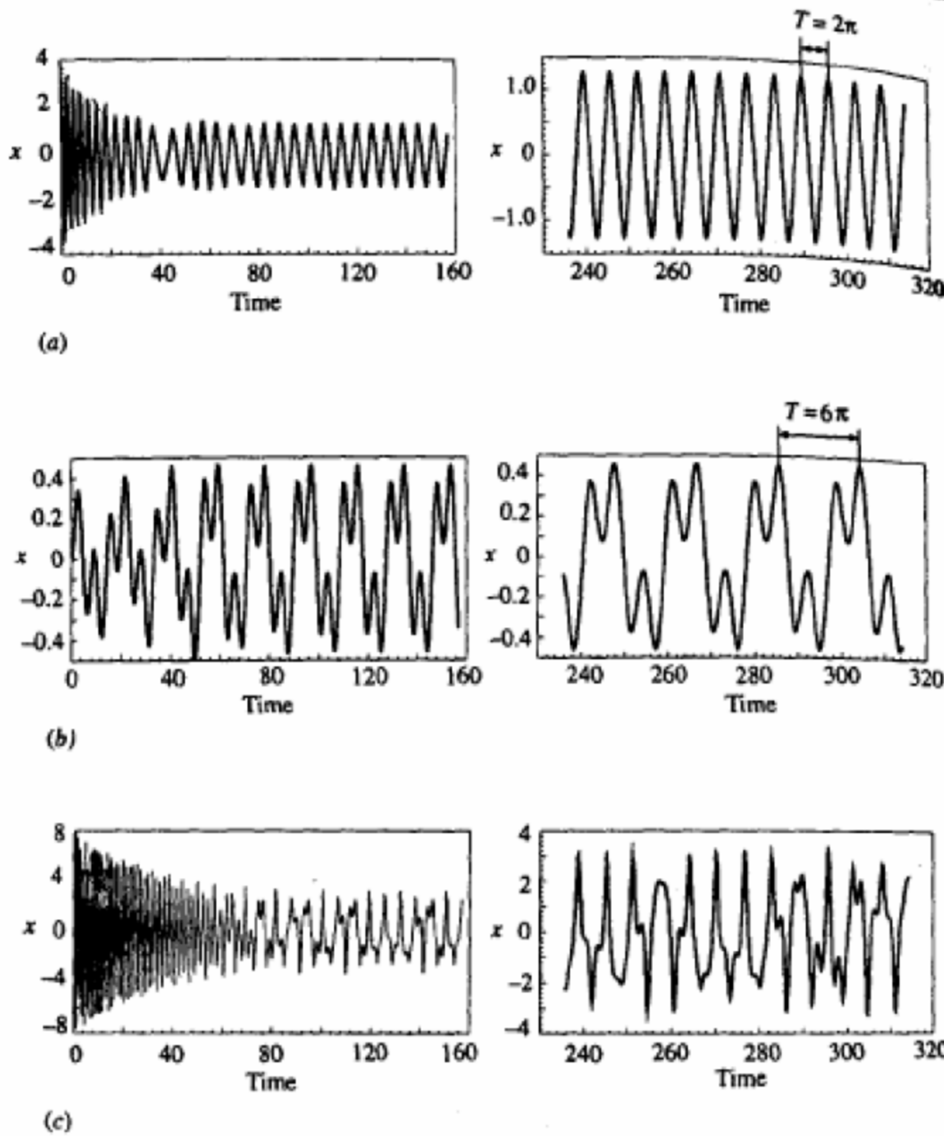


- بر اساس مقادیر پارامترها سیستم می‌تواند رفتار پریودیک یا آشوب‌گونه داشته باشد.
- مقدار فرکانس تحریک خارجی، جرم جسم و ضریب فنر برابر واحد فرض شده است.
- اثر تغییر پارامترهای کنترلی r و A_f مورد بررسی قرار گرفته است:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + x^3 = A_f\,Cos(t)$$

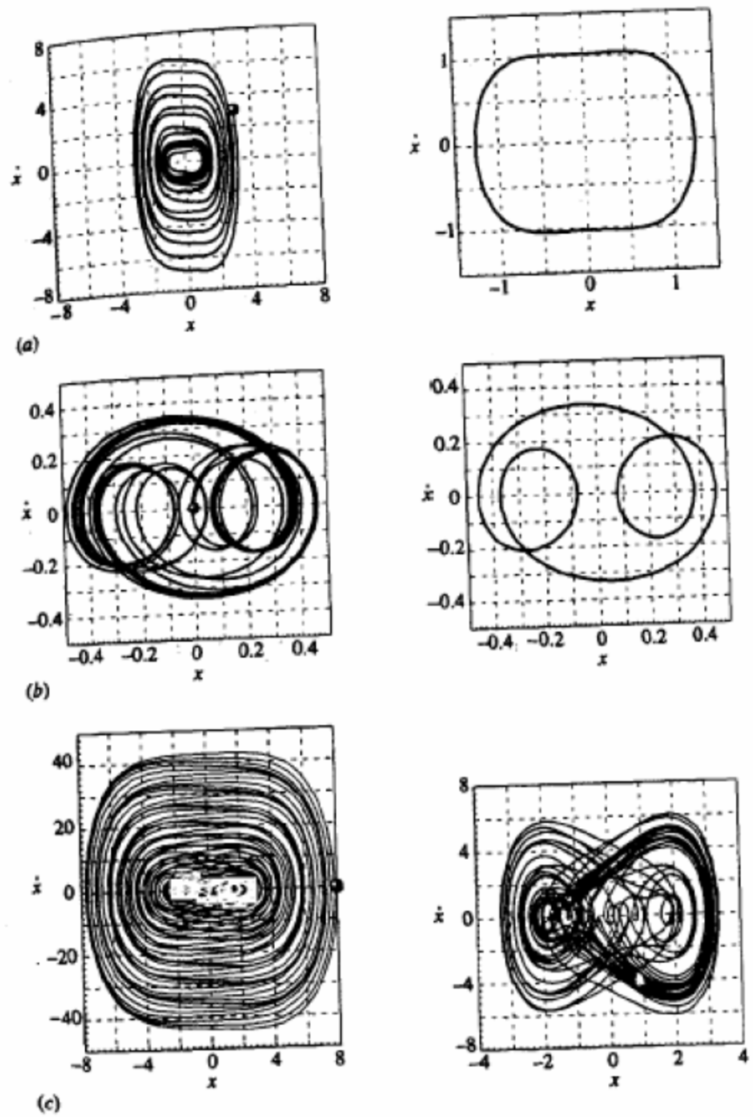
آشوب در مدل‌های ریاضی

○ سری‌های زمانی پریودیک و آشوبی برای نوسان‌ساز دافینگ:



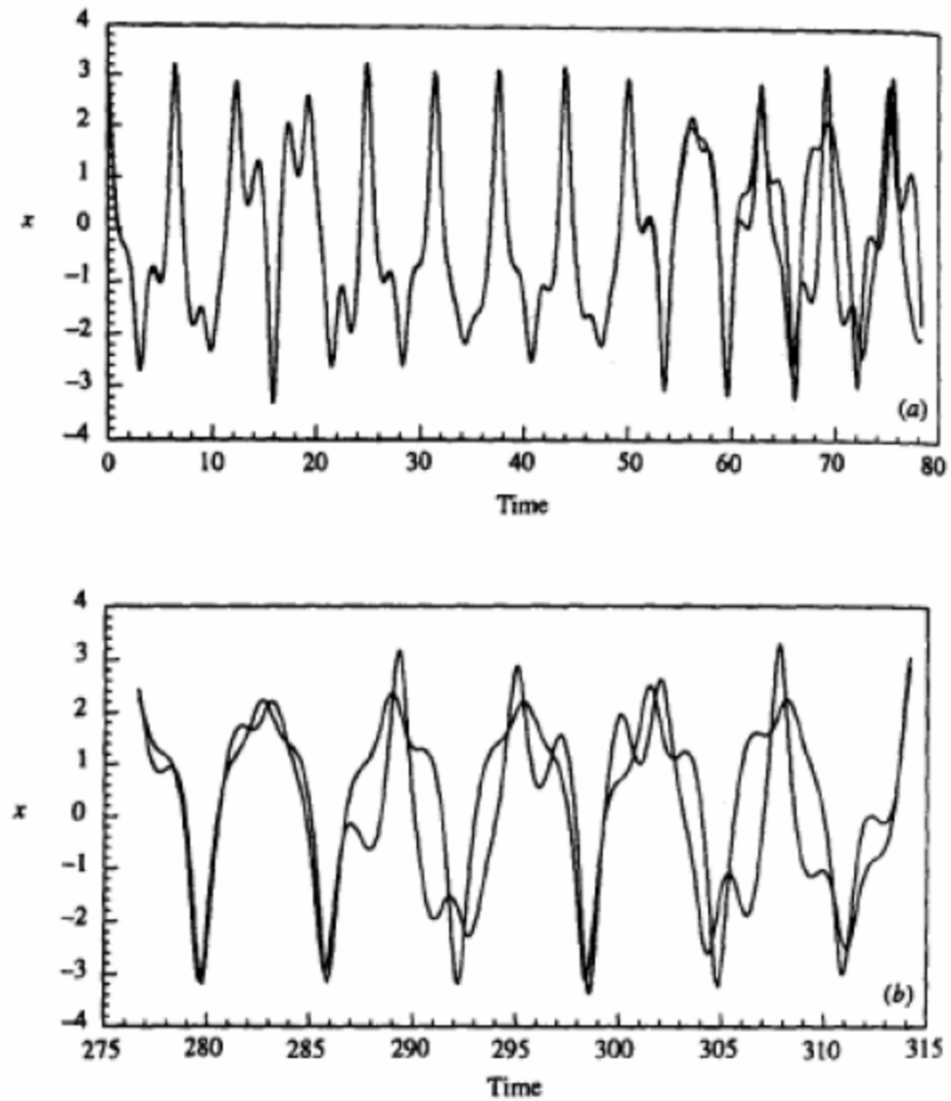
آشوب در مدل‌های ریاضی

- جاذب‌ها در فضای فاز در رفتارهای پریودیک و آشوبی برای نوسان‌ساز دافینگ:



آشوب در مدل‌های ریاضی

○ اثر تغییر جزئی در شرایط اولیه در نوسان ساز دافینگ:



آشوب در مدل‌های ریاضی

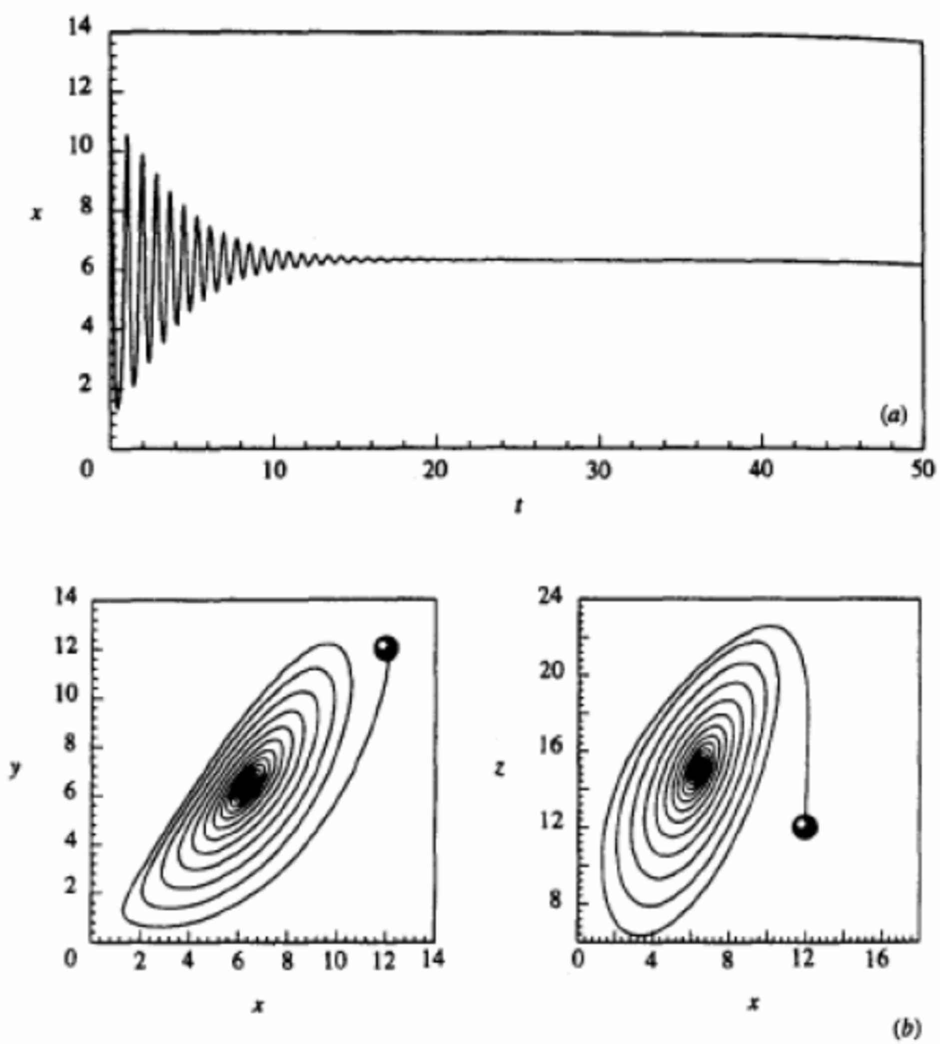
- مدل لورنز:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

- مقادیر $\sigma = 10$ و $b = 2.67$ را ثابت در نظر می‌گیریم.
- پارامتر r را به عنوان پارامتر کنترلی تغییر می‌دهیم.
- به ازای r های کمتر از $r_c = 24.74$، سیستم در نهایت به یک حالت پایدار غیرنوسانی خواهد رسید.
- به ازای r های بزرگتر از r_c و کمتر از ۲۸، رفتارهای نوسانی ظاهر می‌شوند.
- برای $r > 28$ یک رفتار غیرپریودیک آشوبی ایجاد می‌شود.

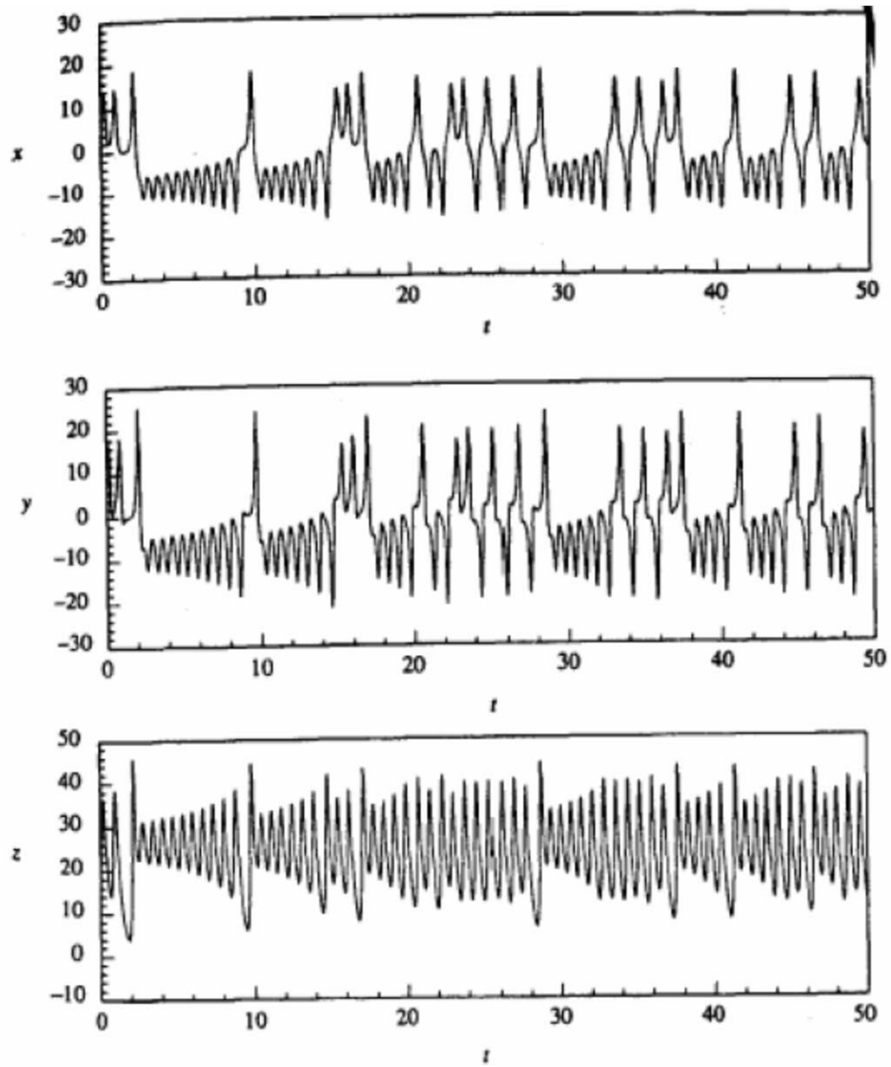
آشوب در مدل‌های ریاضی

○ جواب حالت پایدار سیستم لورنز و تصویر جاذب ایجاد شده در صفحات مختصات:

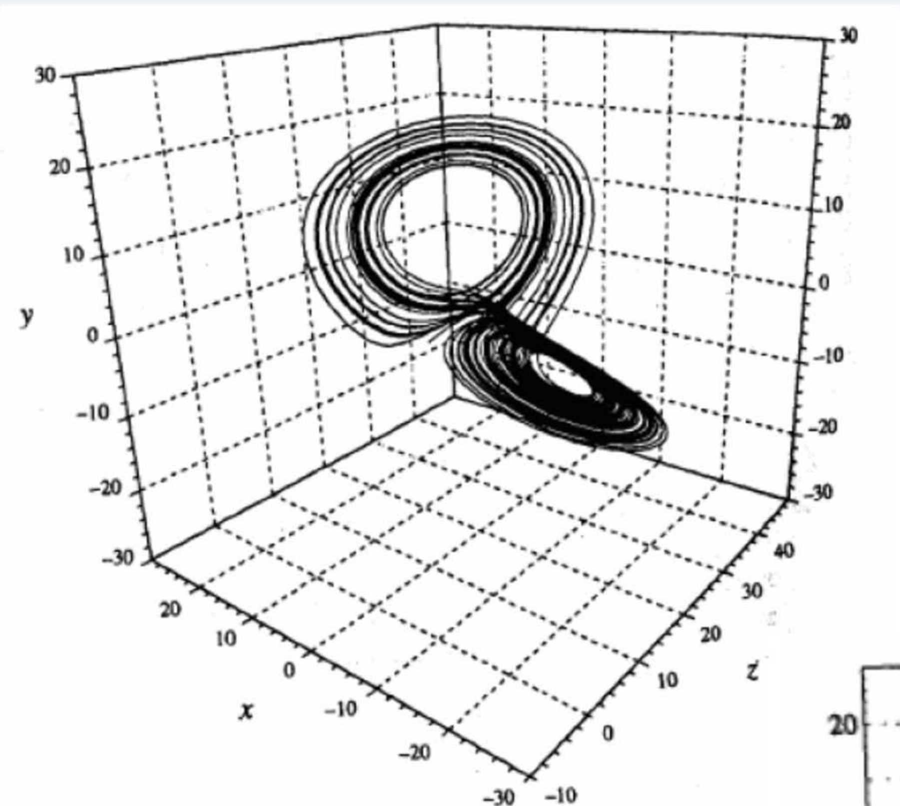


آشوب در مدل‌های ریاضی

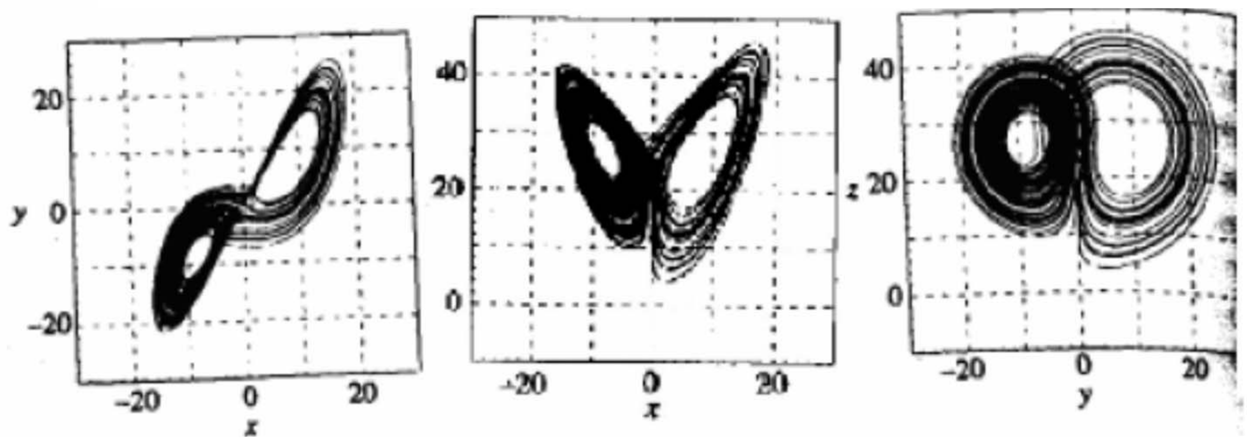
○ سری زمانی مدل لورنز در حالت وجود آشوب:



آشوب در مدل‌های ریاضی

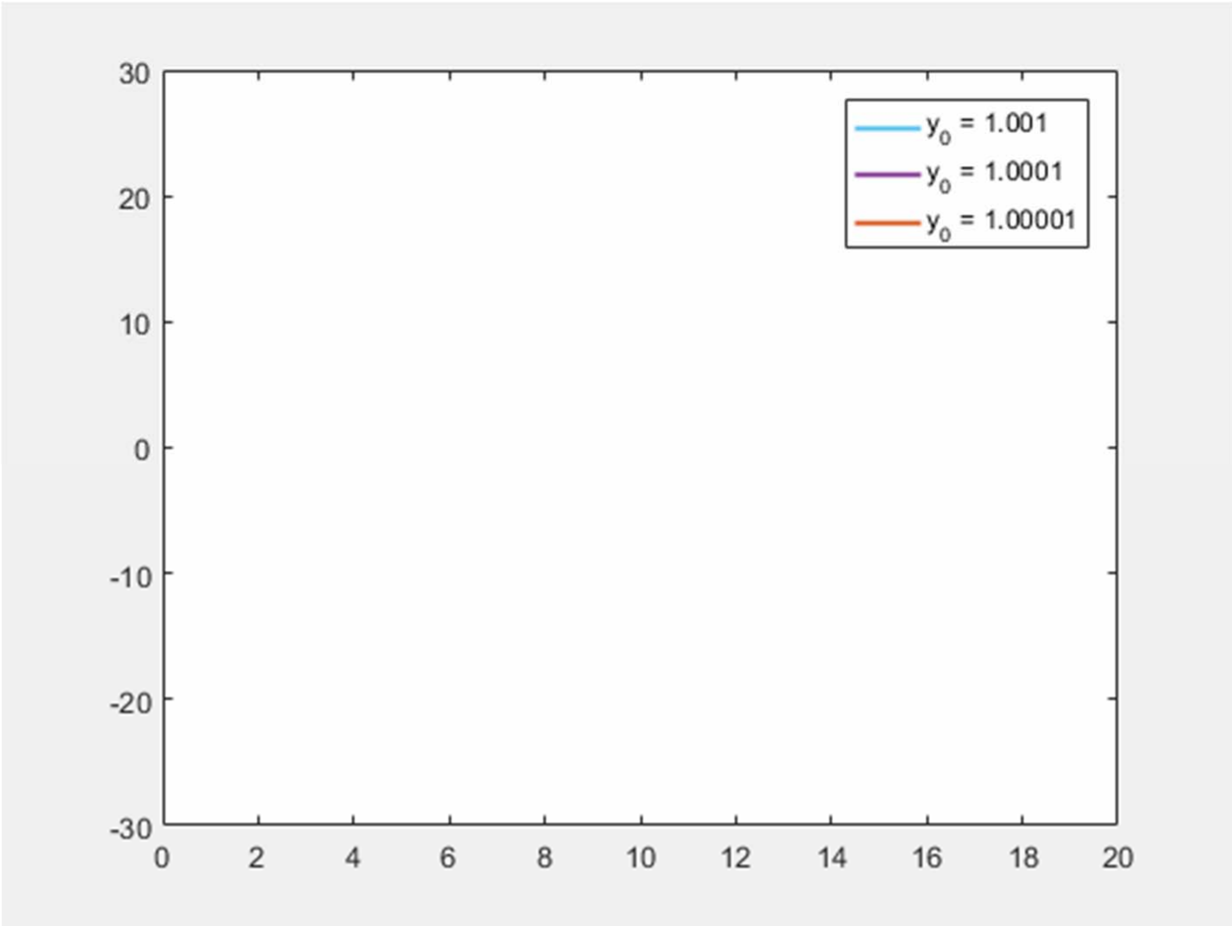


- جاذب آشوب‌گونه مدل لورنز و تصویر آن در صفحات مختصات:



آشوب در مدل‌های ریاضی

○ تغییرات متغیر y در سیستم لورنز با در نظر گرفتن حالت اولیه یکسان برای x و z :

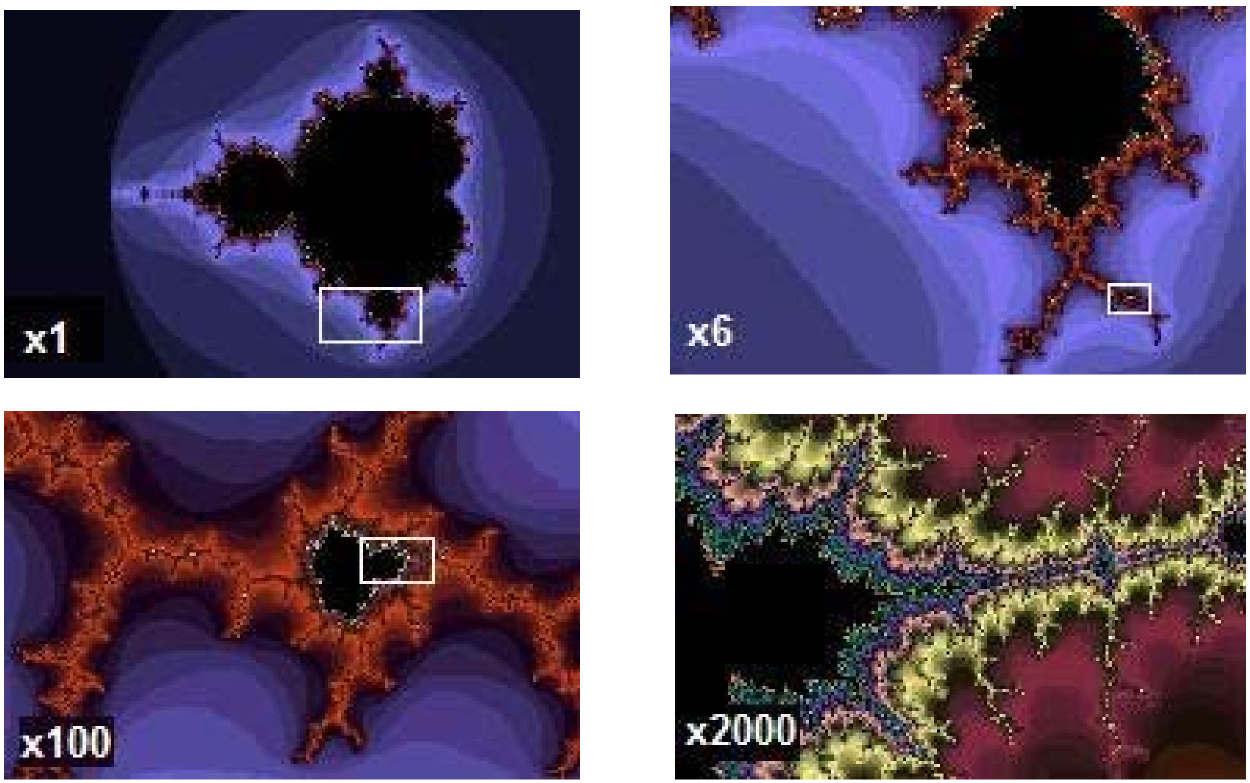


- جاذب آشوب‌گونه مدل لورنز و تصویر آن در صفحات مختصات:

○ واگرایی مقادیر اولیه نزدیک به هم در سیستم لورنز:

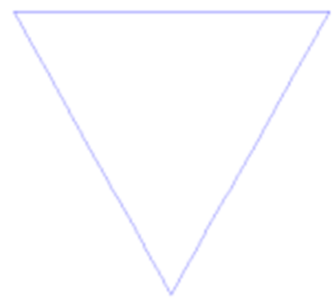
فرکتال

- فرکتال (Fractal) ساختاری هندسی است که با بزرگ کردن هر بخش از این ساختار به نسبت معین، همان ساختار نخستین به دست آید.
  - هر بخش از آن با کل‌اش همانند است.
  - از دور و نزدیک یکسان دیده می‌شود.
  - به این ویژگی خودهمانندی (self-similarity) گویند.

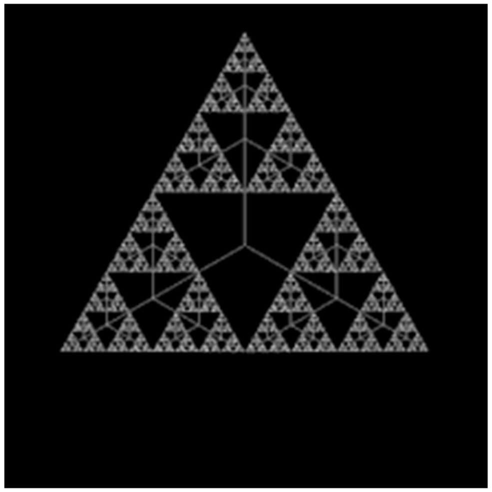


فرکتال‌های ساختگی

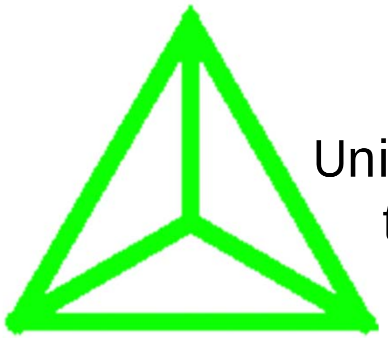
Sierpinski carpet



Koch snowflake

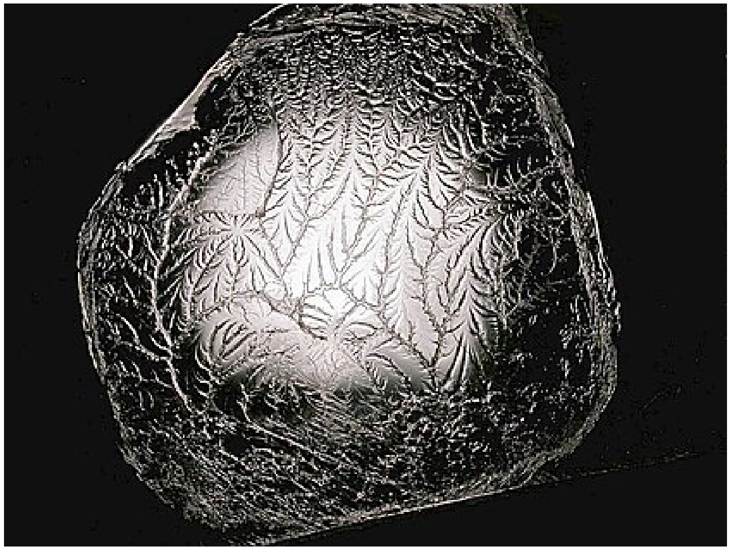


A Sierpinski gasket
can be generated
by a fractal tree



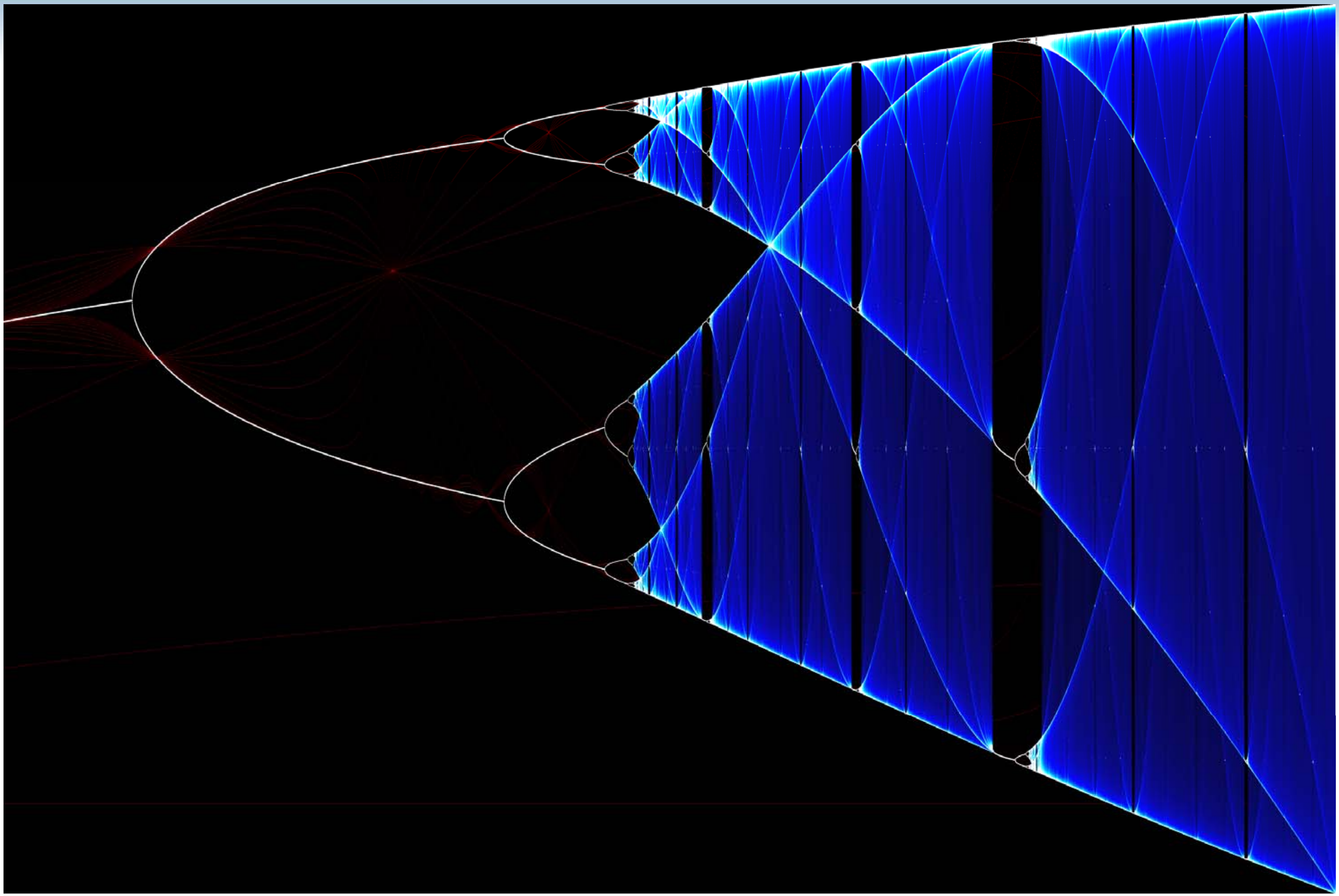
Uniform mass center
triangle fractal

فرکتال‌های طبیعی

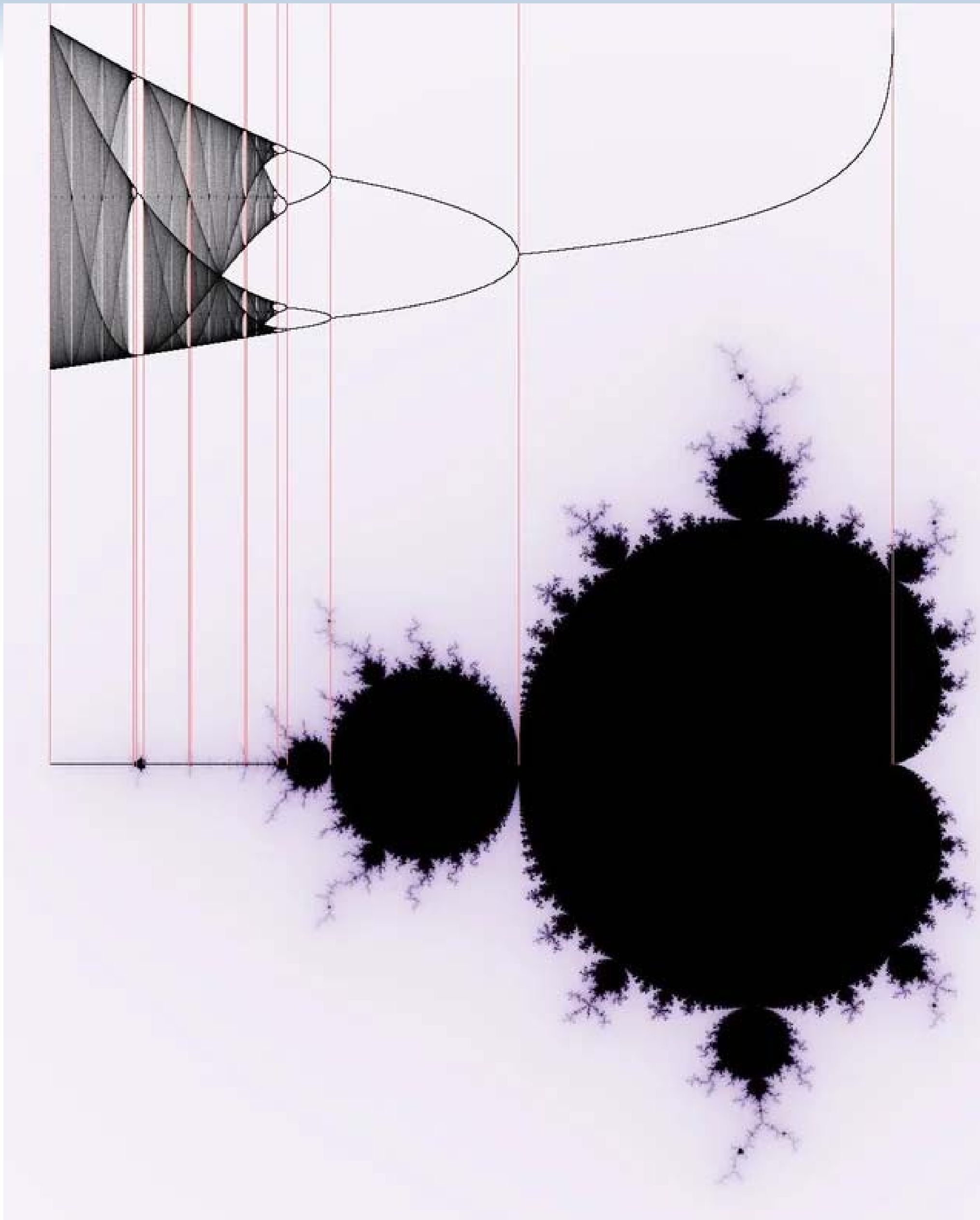


- هر دو نظریه دارای دسته مشخصی از تابع‌های ریاضی هستند. این دسته از توابع که با نام تابع تکرار شونده (iterative function) شناخته می‌شوند، یک عملیات ریاضی را بر روی یک مقدار انجام داده و آن عملیات را چندین و چند بار بر روی نتیجه به دست آمده نیز انجام می‌دهند.

آشوب و فرکتال



آشوب و فرکتال



آشوب در مدل‌های ریاضی

- عدد Feigenbaum:
  - مقادیری از پارامتر A در مدل logistic که مقدار دوبرابر شدن پریود اتفاق می‌افتد:

$$a_1 = 3.0 \qquad a_2 = 3.449490$$
$$a_3 = 3.544090 \quad a_4 = 3.564407$$
$$a_5 = 3.568759 \quad a_6 = 3.569692 \quad a_7 = 3.569891$$

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2} \approx \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_3} \approx \frac{a_4 - a_3}{a_5 - a_4} \approx \frac{a_5 - a_4}{a_6 - a_5} \approx \ldots \approx \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k}$$

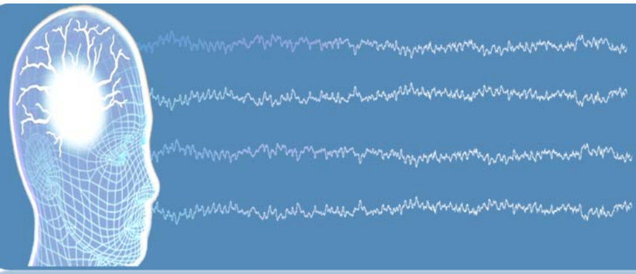
$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \right] = \delta = 4.669201$$

آشوب در مغز

- بر اساس هر کاربرد پردازش سیگنال‌های مغزی، بایستی ویژگی‌های متفاوت و متناظر با کاربرد از سیگنال EEG استخراج شوند.
- می‌توان ویژگی‌ها را به دو دسته کلی تقسیم کرد:
  - ویژگی‌های خطی و ویژگی‌های غیرخطی
- ویژگی‌های خطی: ویژگی‌های حوزه فرکانس، زمان-فرکانس، مدلسازی پارامتری و ...
- ویژگی‌های خطی اطلاعات محدودی از فعالیت الکتریکی مغز ارائه می‌دهند زیرا دینامیک غیرخطی EEG را نادیده می‌گیرند.
- زیرسیستم‌های سیستم عصبی که سیگنال‌های EEG را تولید می‌کنند، غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند.
- حتی در افراد سالم، سیگنال‌های EEG رفتار آشوبگونه سیستم عصبی را نشان می‌دهند.
- با توجه به طبیعت غیرخطی سیگنال‌های EEG، اطلاعات بیشتری را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های غیرخطی استخراج کرد.
- ویژگی‌های غیرخطی که میزان پیچیدگی (مثلاً بعد همبستگی) و پایداری (نمای لیاپانوف) را اندازه می‌گیرند، اطلاعات مهمی را در مورد دینامیک مغز ارائه می‌دهند.

آشوب در مغز

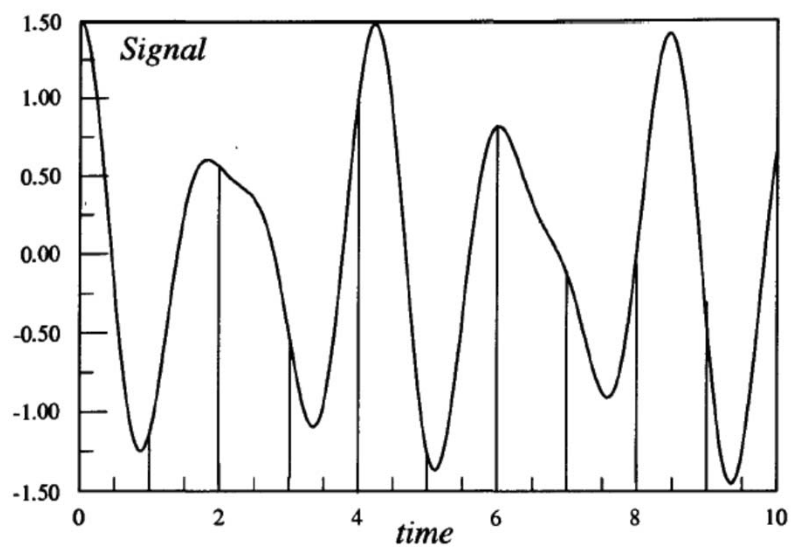
- Babloyantz در سال ۱۹۸۵:
  - اولین استفاده از تئوری آشوب در آنالیز سیگنال‌های EEG
  - او با محاسبه بعد همبستگی سیگنال EEG به آشوبی بودن سیگنال EEG پی برد.
  - با رسم فضای فاز سیگنال EEG در مراحل مختلف خواب، محدود بودن هندسه بستر جذب سیگنال EEG در خواب و بیداری را نشان داد.
- Natarajan در سال ۲۰۰۳:
  - محاسبه شاخص‌های متعددی مانند بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف، نمای هرست و آنتروپی تخمینی برای حالت‌های مختلفی از مغز
  - حالت نرمال، حالت گوش دادن به موسیقی کلاسیک، حالت گوش دادن به موسیقی راک و حالت ایجاد آرامش از طریق ماساژ پا
  - در تمام حالات، سیگنال مغزی از خود رفتار آشوبی نشان می‌داد.
  - هر چه‌قدر فرد تحت عمل آرامش‌بخش‌تری قرار بگیرد، سطح فعالیت امواج EEG کاهش می‌یابد و امواج آلفای مغز برجسته‌تر می‌شود.
  - کمترین آشوب به ترتیب: ماساژ کف پا، گوش دادن به موسیقی راک و گوش دادن به موسیقی کلاسیک



ویژگی‌های حوزه آشوب

- ویژگی‌های غیرخطی یا ویژگی‌های آشوبی
- هدف: کمّی‌سازی رفتار آشوبی سیستم
  - تشخیص و جداسازی رفتار آشوبی از رفتار نویزی
  - تعیین تعداد متغیرهای مورد نیاز برای مدلسازی دینامیک یک سیستم
  - تغییرات در مقادیر کمّی می‌تواند با تغییرات در رفتار دینامیکی سیستم مرتبط باشد.
- فرض: یک دنباله از مقادیر ثبت‌شده داریم:

$$x(t_0)\,,x(t_1)\,,x(t_2),\ldots$$



ویژگی‌های حوزه آشوب

- دو دسته تعریف متفاوت اما وابسته برای کمّی‌سازی آشوب:

  - دسته اول: تاکید بر دینامیک (ارتباط زمانی) در رفتار آشوبی
    - مانند نمای لیاپانوف، آنتروپی
    - این دسته از ویژگی‌ها مشخص می‌کنند که سیستم چگونه در زمان تکامل پیدا می‌کند و برای تراژکتوری‌های نزدیک به هم با گذشت زمان چه اتفاقی می‌افتد.

  - دسته دوم: تاکید بر طبیعت هندسی تراژکتوری‌ها در فضای فاز (فضای حالت)
    - مانند بعد فرکتال، بعد همبستگی
    - در این دسته ویژگی‌ها، اجازه می‌دهیم سیستم برای زمان طولانی رشد یابد و سپس هندسه تراژکتوری‌های حاصل را در فضای حالت بررسی می‌کنیم.

بازسازی فضای حالت

- بازسازی فضای فاز یا فضای حالت (Embedding of the time series یا state space reconstruction):
  - تکنیک نمایش فضای حالت یک سیستم دینامیک با استفاده از یک سری زمانی

- دو رویکرد کلی:
  - Time-delay embedding
  - Spatial embedding

بازسازی فضای حالت

- :Time-delay embedding
- فرض: x_t مقدار لحظه‌ای از یک سیستم دینامیک است یعنی یک نمونه از سری زمانی که با نمونه‌برداری از یک متغیر سیستم به دست آمده است.
- در مورد سیگنال EEG، x_t نمونه زمانی سیگنال EEG در زمان t است.
- یک فضای حالت m-بعدی بازسازی‌شده با رویکرد time-delay به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{x}_t = [x_t, x_{t+\tau}, \ldots, x_{t+(m-1)\tau}]$$

  - τ: تاخیر زمانی؛ فاصله زمانی بین دو مولفه متوالی از بردار حالت $\boldsymbol{x}_t$
  - m: بعد بازسازی
  - دنباله بردارهای بازسازی‌شده با افزایش t، جاذب بازسازی‌شده را در فضای حالت ایجاد می‌کنند.

- انتخاب دو پارامتر τ و m گام اصلی و سخت در آنالیزهای غیرخطی است.
  - انتخاب نامناسب این پارامترها موجب ایجاد نتایج نادرست می‌شود.

بازسازی فضای حالت

- Time-delay embedding:
- پارامتر τ:
  - اگر بسیار کوچک در نظر گرفته شود، m مولفه $\boldsymbol{x}_t$ بسیار به هم نزدیک بوده و هندسه جاذب از بین می‌رود.
  - اگر بسیار بزرگ باشد، مولفه‌های هر بردار بازسازی کاملاً به یکدیگر غیروابسته خواهند بود.
  - یک روش برای تعیین τ: اولین صفر از خودهمبستگی زمانی داده یا اولین مینیموم از اطلاعات مشترک بین مولفه‌های بردارها در فضای حالت
- پارامتر m باید به گونه‌ای انتخاب شود که دینامیک سیستم در فضای حالت حفظ شود.
  - تئوری Taken: اگر فضای حالت سیستم d بعد داشته باشد: $m > 2d$
  - یک روش برای تعیین m: افزایش m و محاسبه بعد همبستگی D_2 تا زمانی که $m > 2D_2$
  - روش false nearest neighbors: m را افزایش دهیم تا زمانی که نزدیک‌ترین همسایه‌ها در فضای m بعدی، در فضای $m+1$ بعدی نیز نزدیک بمانند.

بازسازی فضای حالت

- Spatial embedding:
- این روش زمانی قابل استفاده است که m سری زمانی از سیگنال‌های EEG مستقل در اختیار باشد.
- در این حالت، m مولفه هر بردار در فضای حالت با m مقدار هر سری زمانی در یک زمان مشخص ایجاد می‌شود.
- در نتیجه، بعد فضای بازسازی m، برابر با تعداد کانال‌های EEG است.
- با استفاده از روش Spatial embedding، یک جاذب یکتا که بیانگر دینامیک نورون‌ها است، به دست می‌آید.
- مهم‌ترین ایراد این رویکرد، ثابت بودن تاخیر مکانی (spatial lag) (یعنی فاصله بین کانال‌های EEG) است که به طور معمول با توجه به کاربرد ثابت بوده و نمی‌توان به صورت بهینه آن را انتخاب کرد.

نمای لیاپانوف

- نمای لیاپانوف (LE): نرخ واگرایی و همگرایی در جهت‌های مختلف.
  - این جهت‌ها همان جهت‌های اصلی x و y و z نیستند.
  - این جهت‌ها بر دستگاه مختصات سوار بر تراژکتوری تعریف می‌شوند.

- ایده کلی:
  - دو نقطه نزدیک به هم در لحظه فعلی، در لحظه بعد نسبت به هم کجا قرار دارند؟
  - مثال: اگر سیستم تعادل پایدار داشته باشد، دو نقطه غایتشان یکی است و به سمت هدف یکسان می‌روند و فاصله‌شان کم می‌شود. در این حالت اگر نرخ تغییرات فاصله را به صورت نمایی در نظر بگیریم، ضریب نمایی منفی خواهد بود.
  - اگر قرار است نقاط از هم دور شوند، این نمایی باید مثبت باشد.

نمای لیاپانوف

- به تعداد بعد سیستم، نمای لیاپانوف داریم:
  - منفی بودن نمای لیاپانوف یعنی جاذبه
  - مثبت بودن نمای لیپانوف یعنی دافعه
  - صفر بودن نمای لیاپانوف یعنی جاذبه و نه دافعه

- مثال: سیستم دوبعدی
  - اگر هر دو نمای لیاپانوف منفی باشند، سرنوشت سیستم نقطه تعادل پایدار است: از هر دو طرف جذب می‌شود.
  - اگر یکی از نماهای لیاپانوف صفر و دیگری منفی باشد، سرنوشت سیکل حدی است: از یک طرف جذب می‌شود و از یک طرف آزادانه حرکت می‌کند.
  - اگر هر دو نمای لیاپانوف صفر باشند، سرنوشت سیستم سیکل است (غیر حدی): در هر شرط اولیه‌ای رها کنیم با همان شعاع دایره می‌زند.

نمای لیاپانوف

- تعریف آشوب:
  - حساسیت به شرایط اولیه + کراندار بودن
  - داشتن نمای لیاپانوف بزرگتر از صفر + کراندار بودن
  - برای کراندار بودن بایستی نمای لیاپانوف منفی داشته باشیم و قدرت آن بیشتر از نمای لیاپانوف مثبت باشد.

- مثال: سیستم سه‌بعدی
  - ۳ نمای لیاپانوف منفی: نقطه تعادل پایدار
  - ۲ منفی و یک صفر: limit cycle
  - ۱ منفی و دو صفر: limit torus
  - ۳ تا صفر: conservative torus (معادل سیکل در ۲ بعد)
  - ۱ منفی، ۱ صفر و ۱ مثبت: آشوب (به شرط اینکه مثبت < |منفی|)

نمای لیاپانوف

- محاسبه نمای لیاپانوف برای سری زمانی یک‌بعدی

$$x_0, x_1, x_2, \dots.$$

- اگر فاصله زمانی بین نمونه‌ها τ باشد:

$$t_n - t_0 = n\tau$$

- اگر یک مقدار از سری زمانی انتخاب کنیم مانند x_i و از سری یک مقدار دیگر مانند x_j انتخاب کنیم به گونه‌ای که به مقدار اول نزدیک باشد:

$$d_0 = |x_j - x_i|$$

$$d_1 = |x_{j+1} - x_{i+1}|$$

$$d_2 = |x_{j+2} - x_{i+2}|$$

$$d_n = |x_{j+n} - x_{i+n}|$$

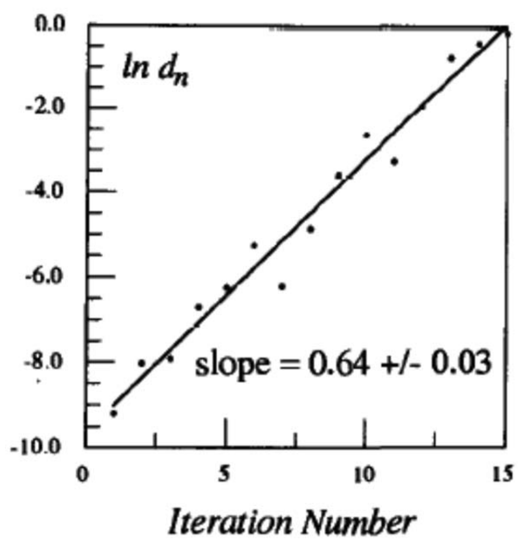
- و فرض کنیم که فواصل به طور میانگین با افزایش n به صورت نمایی افزایش می‌یابند:

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}$$

نمای لیاپانوف

$$\lambda = \frac{1}{n} ln \frac{\mathrm{d_n}}{d_0}$$

- نمای لیاپانوف (Lyapunov exponent):
- اگر λ مثبت باشد، رفتار سیستم آشوبی است.
- نکاتی در مورد محاسبه نمای لیاپانوف:
- فرض کردیم که نرخ جدایی دو تراژکتوری نمایی است. بایستی درستی این فرض بررسی شود. این کار را می‌توان با رسم لگاریتم فاصله d_m بر حسب اندیس m انجام داد. اگر نرخ واگرایی نمایی باشد، نقاط بایستی رو یا نزدیک یک خط باشند که شیب آن نمای لیاپانوف است:

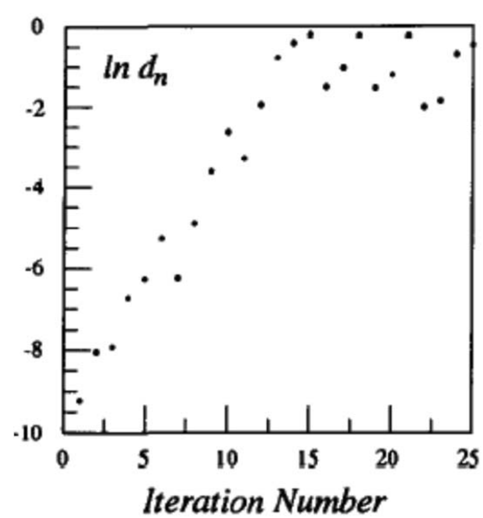


نمای لیاپانوف

- نکاتی در مورد محاسبه نمای لیاپانوف:
  - مقدار λ در حالت کلی به مقدار نقطه اولیه x_i بستگی دارد. در واقع باید بنویسیم: $\lambda(x_i)$
  - و نمای لیاپانوف میانگین را به ازای تعداد زیادی از نقاط اولیه که در نقاط مختلف جاذب پراکنده هستند، محاسبه کنیم:

$$\lambda = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda(x_i)$$

  - برای سیستم‌های کراندار که مورد نظر ما هستند، تعداد گام‌های زمانی n برای محاسبه λ نباید بسیار زیاد باشد. چون در فضای کراندار، فاصله d_i نمی‌تواند بیشتر از بزرگترین فاصله در این فضا باشد:

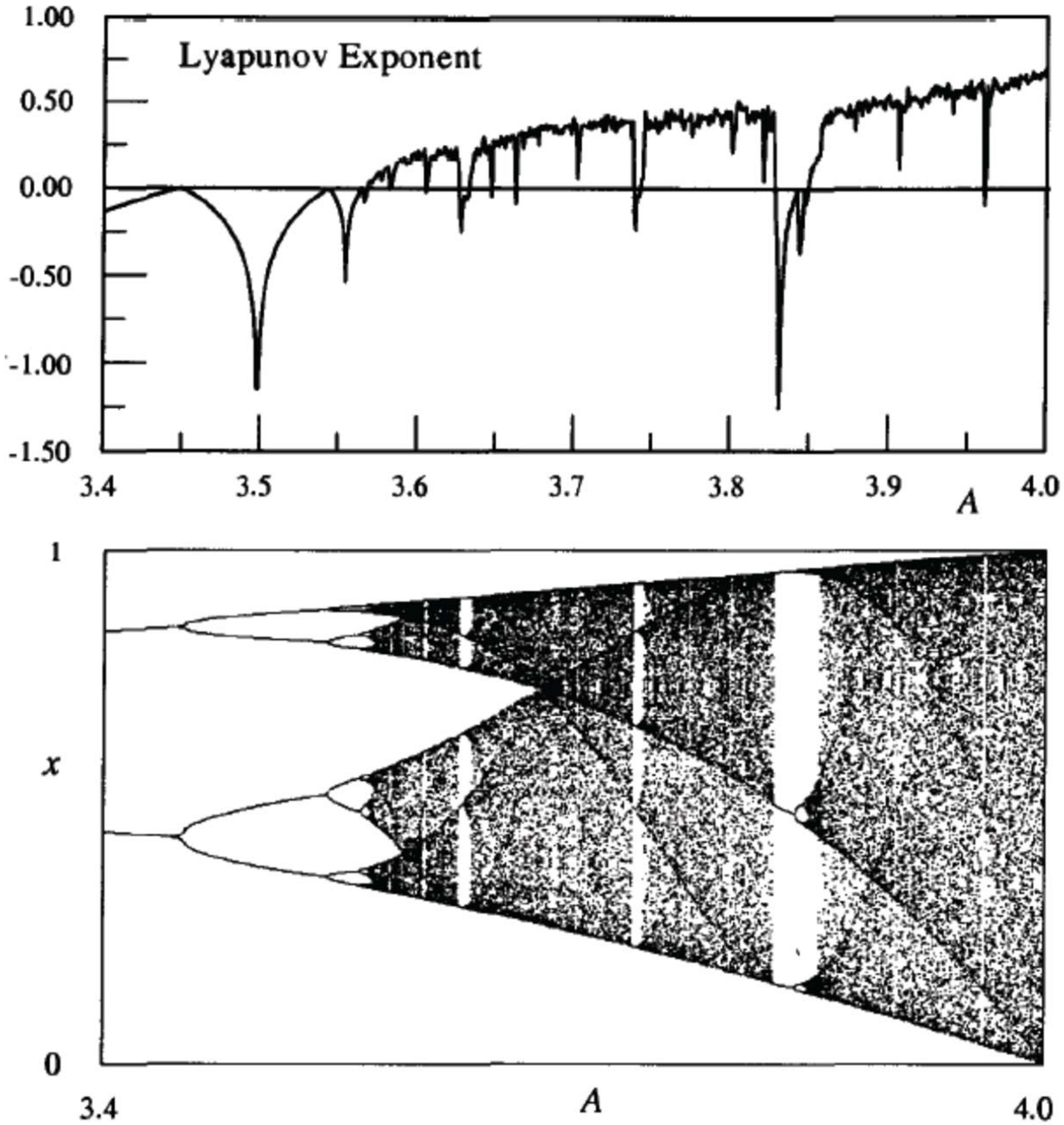


نمای لیاپانوف

- نکاتی در مورد محاسبه نمای لیاپانوف:
  - برای یک x_i داده شده، در مورد انتخاب j محدودیت‌هایی وجود دارد. نباید j خیلی به i نزدیک باشد، چون دو مقدار در زمان هم به هم نزدیک خواهند بود و انتظار داریم رفتار آنها در طول زمان هم نزدیک باقی بماند. در نتیجه مقدار کوچکی برای $\lambda(x_i)$ به دست خواهد آمد.

نمای لیاپانوف

- نمای لیاپانوف محاسبه شده برای مدل logistic بر حسب پارامتر A:



آنتروپی

- آنتروپی (Entropy): بی نظمی (آشفتگی) یا عدم قطعیت یک سیستم را بیان می‌کند.

$$S = -k \sum_r p_r \ln p_r$$

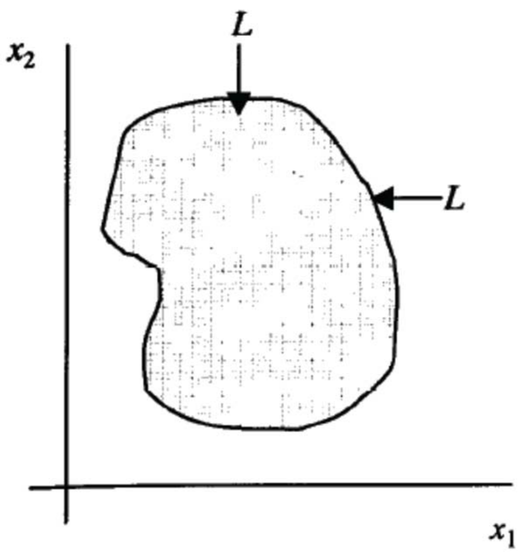
- p_r احتمال قرار گرفتن سیستم در r-امین حالت را بیان می‌کند.
- مجموع بایستی روی همه حالت‌های ممکن سیستم محاسبه شود.
- اگر یک حالت غیر قابل دسترسی وجود داشته باشد، آن‌گاه $p_r = 0$ است. این حالت در محاسبه آنتروپی وارد نمی‌شود.

- به راحتی می‌توان نشان داد اگر برای N حالت قابل دسترسی $p_r = \frac{1}{N}$ باشد و برای حالات غیرقابل دسترسی $p_r = 0$ باشد:

$$S = k \ln N$$

آنتروپی

- آنتروپی برای دینامیک‌های فضای حالت:
  - ابتدا فضای حالت را به یک سری سلول با سایز یکسان تقسیم می‌کنیم.
  - برای سیستم‌های کراندار که جاذب دارند، فقط لازم است ناحیه شامل جاذب را تقسیم‌بندی کنیم.



  - سپس تغییرات زمانی سیستم را با مجموعه‌ای از نقاط اولیه که معمولاً داخل یک سلول قرار دارند، بررسی می‌کنیم.
  - با رشد سیستم در زمان، تراژکتوری‌ها معمولاً روی تعداد زیادی سلول در فضای حالت پخش می‌شوند.

آنتروپی

- بعد از طی‌شدن n واحد زمانی (هر یک به طول τ)، فرکانس نسبی (احتمال) p_r را برای هر سلول حساب می‌کنیم:

$$p_r = \frac{M_r}{M}$$

- که در آن M تعداد کل تراژکتوری‌های مورد بررسی بوده و M_r تعداد تراژکتوری‌هایی که نقطه انتهایی آنها (در زمان n) در r-امین سلول قرار گرفته است.

- سپس آنتروپی S_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = -\sum_r p_r \ln p_r$$

آنتروپی

- بررسی آنتروپی تعریف‌شده در حالت‌های خاص:
  - **فرض:** تمام تراژکتوری‌ها با افزایش زمان، همراه با یکدیگر از سلولی به سلول حرکت کنند.
  - در این حالت برای سلول اشغال شده $p_r = 1$ بوده و برای بقیه سلول‌ها $p_r = 0$ است.
  - در این حالت به ازای تمام nها $S_n = 0$ است.
  - درنتیجه برای یک حرکت منظم (مثلاً یک limit cycle) آنتروپی ثابت است.

  - **فرض:** تعداد سلول‌های اشغال‌شده N_n با افزایش زمان، افزایش یابد و همه سلول‌های اشغال‌شده احتمال یکسان $1/N_n$ داشته باشند.
  - در این حالت خواهیم داشت:

$$S_n = +\ln N_n$$

  - آنتروپی با افزایش تعداد سلول‌های اشغال‌شده، افزایش می‌یابد.

آنتروپی

- بررسی آنتروپی تعریف‌شده در حالت‌های خاص:
  - **فرض:** برای یک سیستم کاملاً تصادفی، هر یک از M تراژکتوری به سلول مخصوص خودش خواهد رسید.
  - در این حالت:

$$S_n = +\ln M$$

  - در این حالت با افزایش M، S_n بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد.

  - برای یک سیستم آشوبی با تعداد متغیر فضای حالت کوچک (یعنی سیستم کاملاً تصادفی نیست)، آنتروپی برای Mهای بزرگ مستقل از M است.

- با توجه به مثال‌ها، ما با تغییر آنتروپی کار داریم نه با خود مقدار آنتروپی.
  - به طور مثال برای یک حرکت منظم، اگر یک مجموعه از شرایط اولیه در نظر بگیریم، مقدار آنتروپی نباید صفر باشد، اما بایستی با رشد سیستم ثابت بماند.

آنتروپی

- آنتروپی Kolmogorov-Sinai (K-S entropy):
  - محاسبه نرخ تغییرات آنتروپی با رشد سیستم

- آنتروپی K-S بعد از n واحد زمانی:

$$K_n = \frac{1}{\tau}(S_{n+1} - S_n)$$

- آنتروپی K-S میانگین:

$$K = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0]$$

- تعریف کامل آنتروپی K-S:

$$K = \lim_{\tau\to 0} \lim_{L\to 0} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0]$$

بعد فرکتال

- بعد فرکتال (Fractal Dimension)
  - در این ویژگی (برخلاف دو ویژگی قبلی) تاکید روی خواص هندسی جاذب‌ها است.
- در عمل، اجازه می‌دهیم تراژکتوری‌ها برای زمان طولانی اجرا شوند و یک سری زمانی طولانی از داده فراهم می‌کنیم.
- سوال اصلی: بعد (موثر) جاذب به دست آمده چه‌قدر است؟
  - اگر جاذب یک نقطه پایدار است، بعد آن صفر است.
  - اگر جاذب یک خط یا یک منحنی بسته ساده است، بعد آن یک است.
  - بعد یک صفحه، ۲ بوده و بعد یک حجم پر، ۳ است.

- نکته: در یک سیستم دینامیک کراندار، بعد جاذب بایستی کوچک‌تر از بعد فضای حالت کامل باشد.
  - یادآوری: بعد فضای حالت برابر با مینیموم تعداد متغیرهای مورد نیاز برای توصیف حالت سیستم است.

بعد فرکتال

- اگر یک جاذب بعد غیر صحیح داشته باشد، می‌گوییم سیستم یک جاذب عجیب دارد.
- تعاریف متنوع و متفاوتی برای بعد غیرصحیح ارائه شده است که مقادیر عددی مختلفی نیز ایجاد می‌کنند. در برخی مواقع این اعداد به هم نزدیکند.

- یک تعریف ساده برای بعد غیرصحیح:
  - box-counting dimension یا capacity dimension

- جعبه یا (ابر) مکعب‌هایی با ضلع R ایجاد می‌کنیم که همه فضای بازسازی‌شده را پوشش دهند.
  - مثال: برای فضای یک‌بعدی، پاره‌خط و برای فضای دوبعدی، مربع هستند.

- مینیموم تعداد جعبه‌هایی را که نیاز است تا همه نقاط شیءِ هندسی را دربربگیرند، می‌شماریم: $N(R)$
  - انتظار داریم با کاهش R، $N(R)$ افزایش یابد.

بعد فرکتال

- Box-counting dimension به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(R) = \lim_{R \to 0} k R^{-D_b}$$

- که در آن k یک مقدار ثابت است.
- با لگاریتم‌گیری از دو طرف رابطه خواهیم داشت:

$$D_b = \lim_{R \to 0} \left\{ -\frac{\log N(R)}{\log R} + \frac{\log k}{\log R} \right\}$$

$$D_b = -\lim_{R \to 0} \frac{\log N(R)}{\log R}$$

بعد فرکتال

- مثال: یک نقطه ایزوله

$$\forall R, \qquad N(R) = 1 \qquad\qquad D_b = 0$$

- مثال: چند نقطه ایزوله
  - R را آن‌قدر کوچک می‌گیریم که حول هر نقطه، یک جعبه داشته باشیم. هر چه‌قدر R را کوچک‌تر کنیم، $N(R)$ تغییری نمی‌کند.

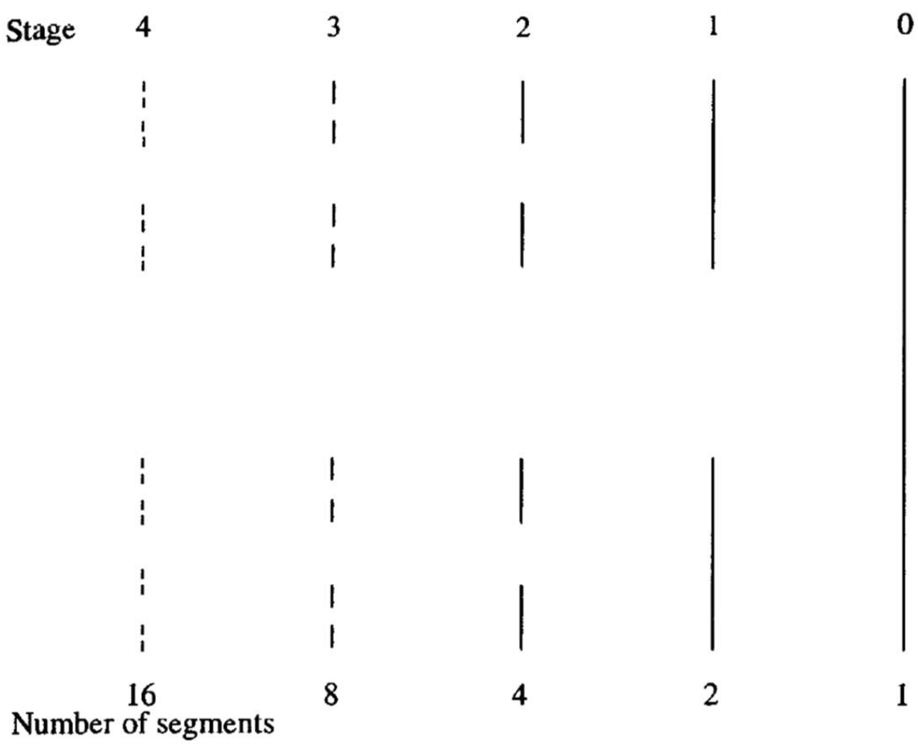
$$N(R) = constant \qquad\qquad D_b = 0$$

- مثال: یک پاره خط با طول L
  - در این حالت به $N(R) = \frac{L}{R}$ جعبه نیاز داریم که همه پاره‌خط را شامل شود.

$$D_b = -\lim_{R\to 0} \frac{\log\left(\frac{L}{R}\right)}{\log(R)} = -\lim_{R\to 0} \frac{\log L - \log R}{\log R} = 1$$

بعد فرکتال

- مثال: Cantor set



- در M–امین مرحله، تعداد 2^M پاره‌خط به طول $\left(\frac{1}{3}\right)^M$ وجود دارد.
- در این حالت حداقل به تعداد 2^M جعبه با ضلع $R = \left(\frac{1}{3}\right)^M$ نیاز داریم.

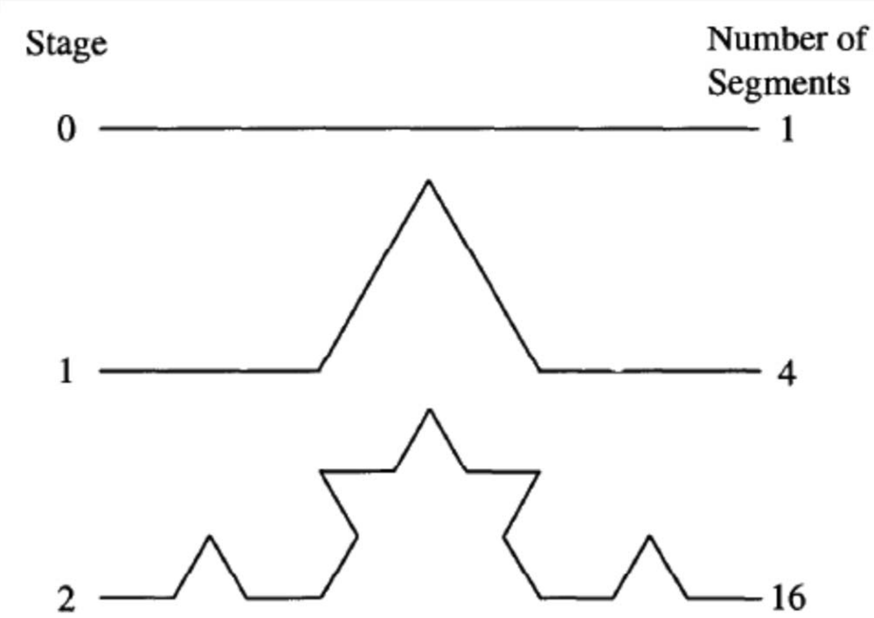
$$D_b = -\frac{\log 2^M}{\log\left(\frac{1}{3}\right)^M} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63\ldots$$

- مقدار باقیمانده از خط:

$$length = 1 - 1\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \cdots - 2^{M-1}\left(\frac{1}{3}\right)^M$$

$$length = 1 - \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right] = 0$$

بعد فرکتال



- مثال: Koch curve

$$D_b = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26 \ldots$$

- مثال: logistic map

$$D_b = 0.5388 \ldots$$

بعد همبستگی

- بعد همبستگی Correlation dimension (D_c)
- اجازه می‌دهیم تراژکتوری‌ها برای زمان طولانی اجرا شوند و یک سری زمانی طولانی از داده به طول N فراهم می‌کنیم.
- D_c برخلاف D_b از خود نمونه‌های تراژکتوری استفاده می‌کند.

$$C(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \Theta\left(R - \left|x_i - x_j\right|\right)$$

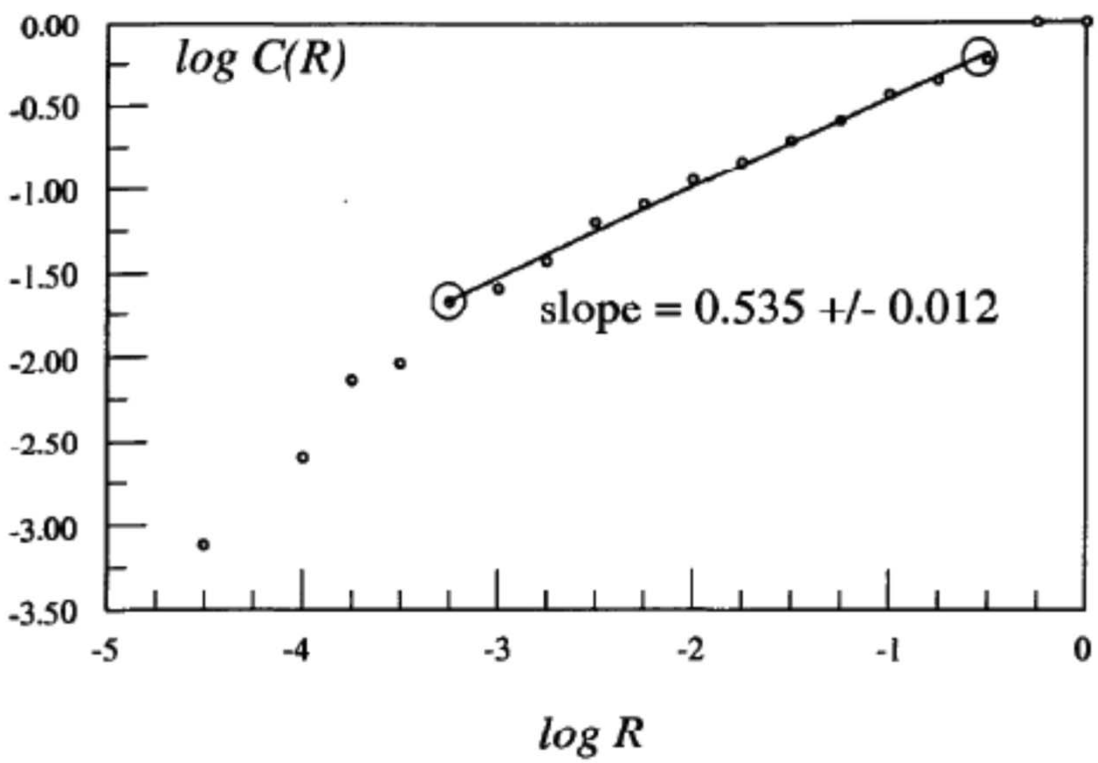
- $\Theta(.)$: تابع پله

$$D_c = \lim_{R \to 0} \frac{\log C(R)}{\log R}$$

بعد همبستگی

- مثال: logistic map با $A = 3.56995$

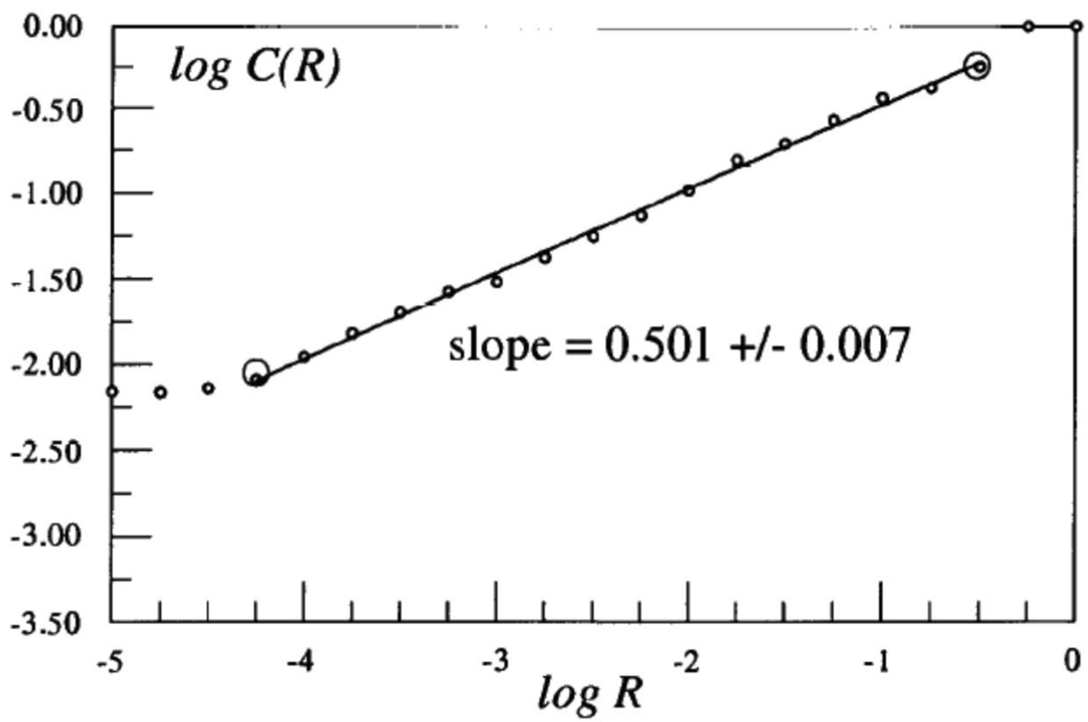
$$N = 100$$



بعد همبستگی

- مثال: logistic map با $A = 3.56995$

$$N = 1000$$



آشوب در مغز

- کاربردهای آشوب در پردازش سیگنال‌های مغزی:
  - کاربردهای پزشکی
    - صرع
    - عمق بیهوشی
    - اوتیسم
    - افسردگی
    - آلزایمر

  - کاربردهای غیرپزشکی
    - رابطهای مغز-رایانه
    - تشخیص احساسات
    - Mental fatigue

Rodriguez-Bermudez, German, and Pedro J. Garcia-Laencina. "Analysis of EEG signals using nonlinear dynamics and chaos: a review." Applied mathematics & information sciences, 2015.