یادآوری:
سیگنال و ماتریس

شماره درس: ۲۵۶۳۰

یکشنبه و سه‌شنبه ۱۵–۱۳:۳۰

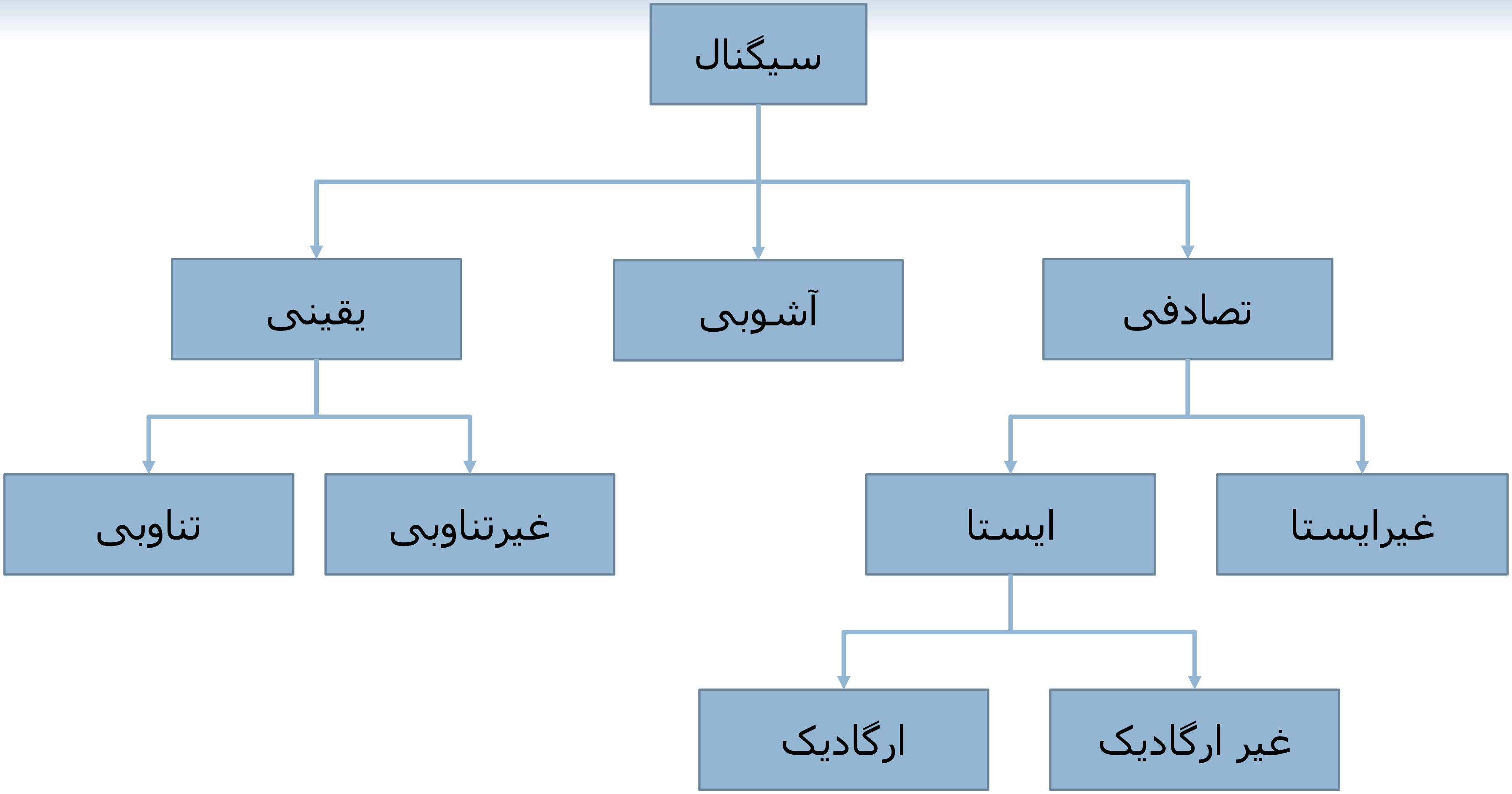
نیم‌سال اول۱۴۰۱–۱۴۰۰

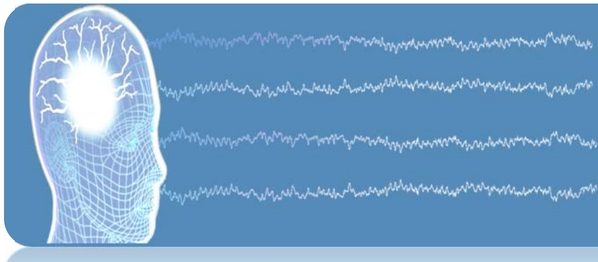
مقدماتی راجع به سیگنال

- سیگنال:
  - هر کمیت فیزیکی که به عنوان تابعی از یک متغیر مستقل تغییر یابد.
  - متغیر مستقل معمولاً زمان است: $x(t)$

- انواع سیگنال از نظر آماری:
  - یقینی: طبق یک قاعده کاملاً مشخص تولید می‌شود.
  - تصادفی: یک تابع نمونه از یک فرآیند تصادفی است. مقدارش را توسط یک تابع احتمال می‌توان بیان کرد.
  - آشوبی: سیگنالی که توسط یک سیستم آشوبی تولید می‌شود.

انواع سیگنال از نظر آماری





مقدماتی راجع به سیگنال

- انواع سیگنال از نظر نحوه نمایش و پردازش:
  - پیوسته زمان یا آنالوگ: سیگنالی است که در یک بازه زمانی به طور پیوسته در زمان بیان شده باشد و دامنه آن نیز پیوسته باشد: $x(t)$
  - گسسته یا گسسته زمان: سیگنالی که در لحظات خاصی برایش مقدار تعریف شده است. لحظاتی که به طور منظم یا نامنظم انتخاب شده‌اند. مقدار سیگنال پیوسته (هر عدد حقیقی) است: $x[n] = x(nT_s)$
  - کوانتیزه‌شده: در همه زمان‌ها تعریف‌شده ولی مقدار سیگنال کوانتیزه شده است. مثل خروجی D/A یا عملگر گردکردن
  - دیجیتال: هم در زمان نمونه‌برداری شده و هم مقادیرش با چند رقم کد شده (کوانتیزه) است.
- عمدتاً با سیگنال‌های گسسته (Discrete) کار داریم.

تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه: در هر فرکانسی، سیگنال به چه ترتیبی توزیع شده و هر فرکانس در ساخت $x(t)$ یا $x[n]$ چه سهمی دارد.

- سیگنال پیوسته $x(t)$:

رابطه آنالیز

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

رابطه سنتز

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \hat{x}(t)$$

- شرط کافی برای تبدیل فوریه: (به مفهوم $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t) - x(t)|^2 dt = 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$$

تبدیل فوریه

- سیگنال گسسته $x[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

پیوسته نسبت به ω

متناوب با دوره تناوب 2π

- شرط کافی برای داشتن تبدیل فوریه:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

انرژی و توان

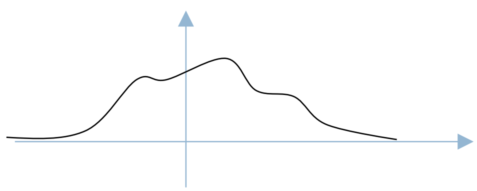
- انرژی سیگنال:

$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \qquad\qquad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

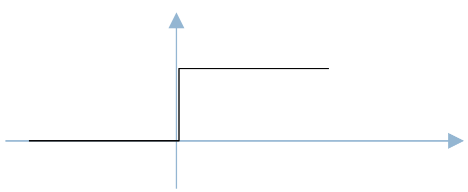
- توان سیگنال:

$$P_{av} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2 \qquad\qquad P_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

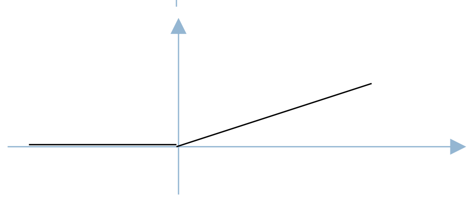
- انواع سیگنال:
  - سیگنال انرژی $\quad E_x < \infty \;,\; P_{av} = 0$



  - سیگنال توان $\quad E_x = \infty \;,\; P_{av} < \infty$



  - نه توان و نه انرژی $\quad E_x = \infty \;,\; P_{av} = \infty$



قضیه پارسوال

- اگر سیگنال انرژی باشد، قضیه پارسوال وجود دارد و می‌توان انرژی را از تبدیل فرکانسی هم به دست آورد.

- قضیه پارسوال برای سیگنال‌های انرژی:

  - سیگنال پیوسته $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 \, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

  - چگالی طیف انرژی: $S_x(f) = |X(f)|^2$

  - سیگنال گسسته $x[n]$:

$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

  - چگالی طیف انرژی: $S_x(\omega) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$

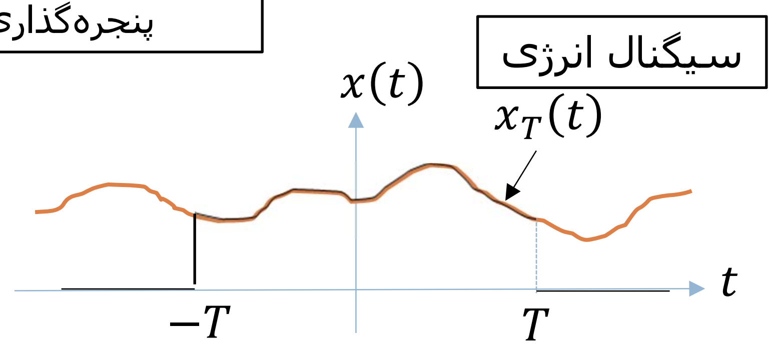
قضیه پارسوال

- سیگنال توان تبدیل فوریه ندارد و یا تبدیل فوریه ضربه دارد. با این وجود باز هم می‌توان برای آن چگالی طیف توان تعریف کرد.

$$P_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt \quad = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x_T(t)|^2dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_T(t)|^2dt \ = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{|X_T(f)|^2}_{\text{چگالی طیف انرژی سیگنال پنجره‌گذاری‌شده}}df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_T(f)|^2}_{\text{چگالی طیف توان}}df$$



چگالی طیف توان

- چگالی طیف توان برای سیگنال توان:
  - سیگنال پیوسته:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$$

  - سیگنال گسسته:

$$S_x(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left|X_N\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

تابع همبستگی متقابل

- تابع همبستگی متقابل بین دو سیگنال (در مورد سیگنال‌های یقینی): مقدار همبستگی دو سیگنال را به‌ازای شیفت‌های متفاوت نشان می‌دهد.

- سیگنال‌های پیوسته:
  - سیگنال‌های انرژی:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

  - سیگنال‌های توان:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

تابع همبستگی متقابل

- تابع همبستگی متقابل بین دو سیگنال (در مورد سیگنال‌های یقینی): مقدار همبستگی دو سیگنال را به‌ازای شیفت‌های متفاوت نشان می‌دهد.

- سیگنال‌های گسسته:
  - سیگنال‌های انرژی:

$$R_{xy}[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n-m]$$

  - سیگنال‌های توان:

$$R_{xy}[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} x[n] y^*[n-m]$$

تابع همبستگی متقابل

- در مورد سیگنال‌های یقینی می‌توان نشان داد: (روابط برای هر دو نوع سیگنال توان و انرژی برقرار است)

$$if \quad x(t) = y(t) \rightarrow \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$R_x(\tau) \xrightarrow{Fourier} S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

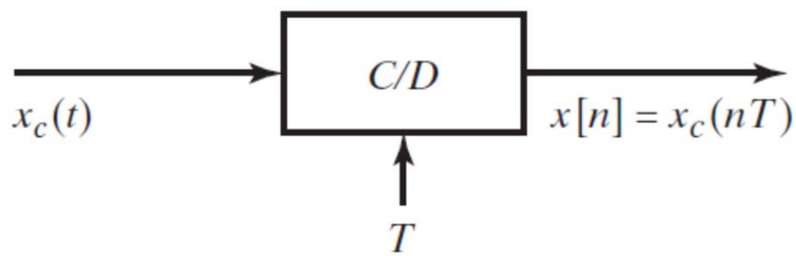
$$R_x(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S_x(f)$$

$$R_x[m] \xrightarrow{Fourier} S_x(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, e^{-j\omega m}$$

$$R_x[m] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S_x(\omega)$$

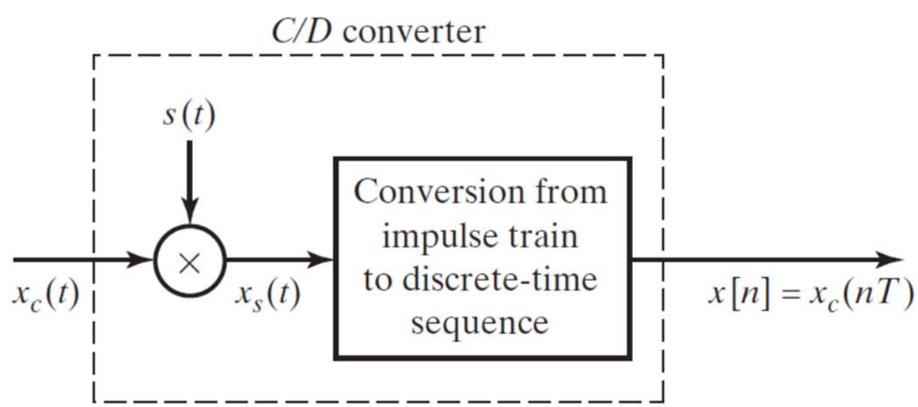
نمونه‌برداری در زمان

DSP/Oppenheim: ch4



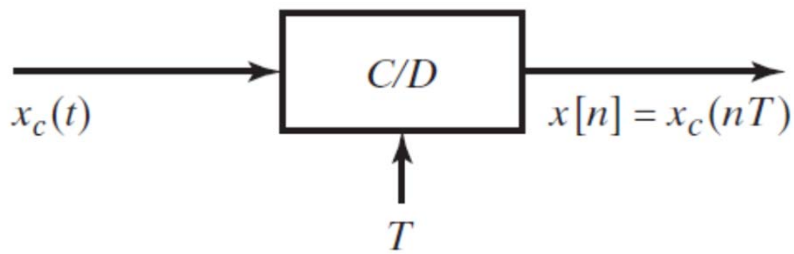
$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty.$$

$$f_s = 1/T \qquad \Omega_s = 2\pi/T$$



نمونه‌برداری در زمان

$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty.$$



$$f_s = 1/T \qquad \Omega_s = 2\pi/T$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

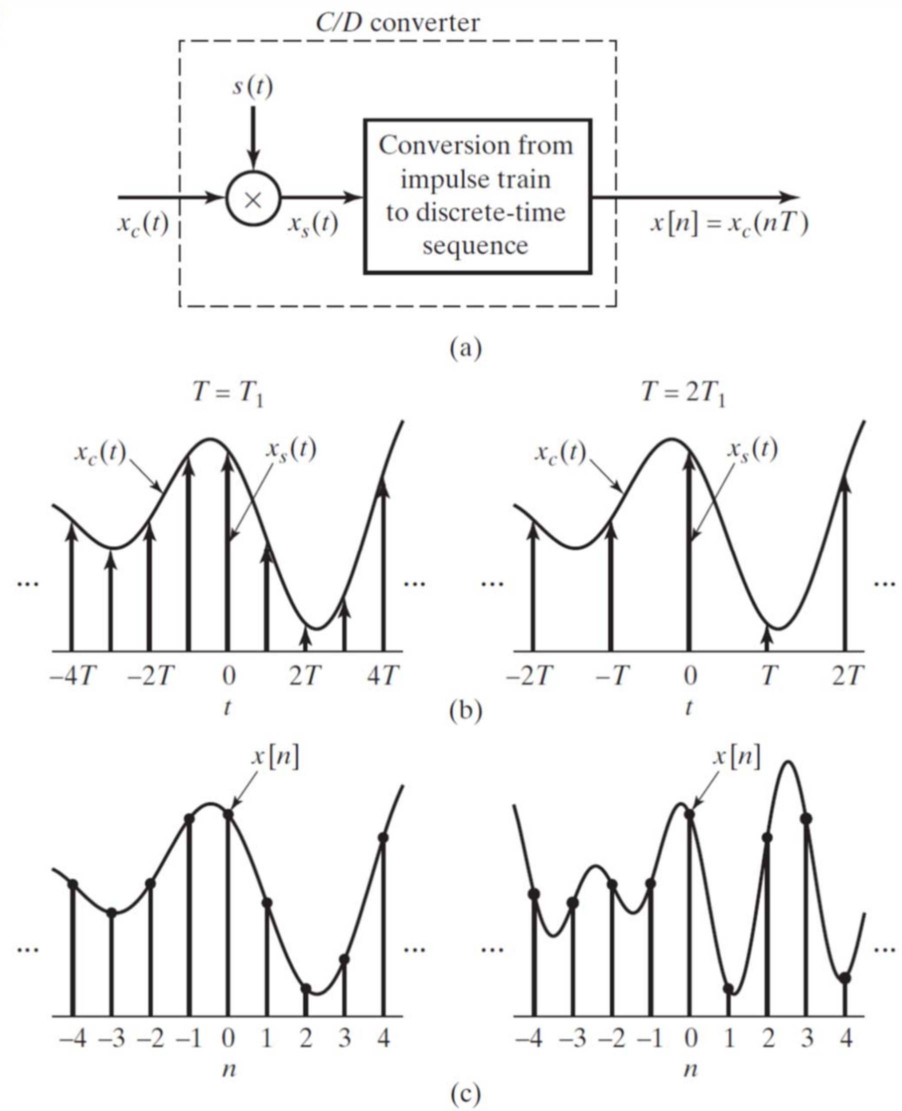
$$x_s(t) = x_c(t)s(t)$$

$$= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT).$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$\boxed{x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)}$$

نمونه‌برداری در زمان



نمونه‌برداری در زمان

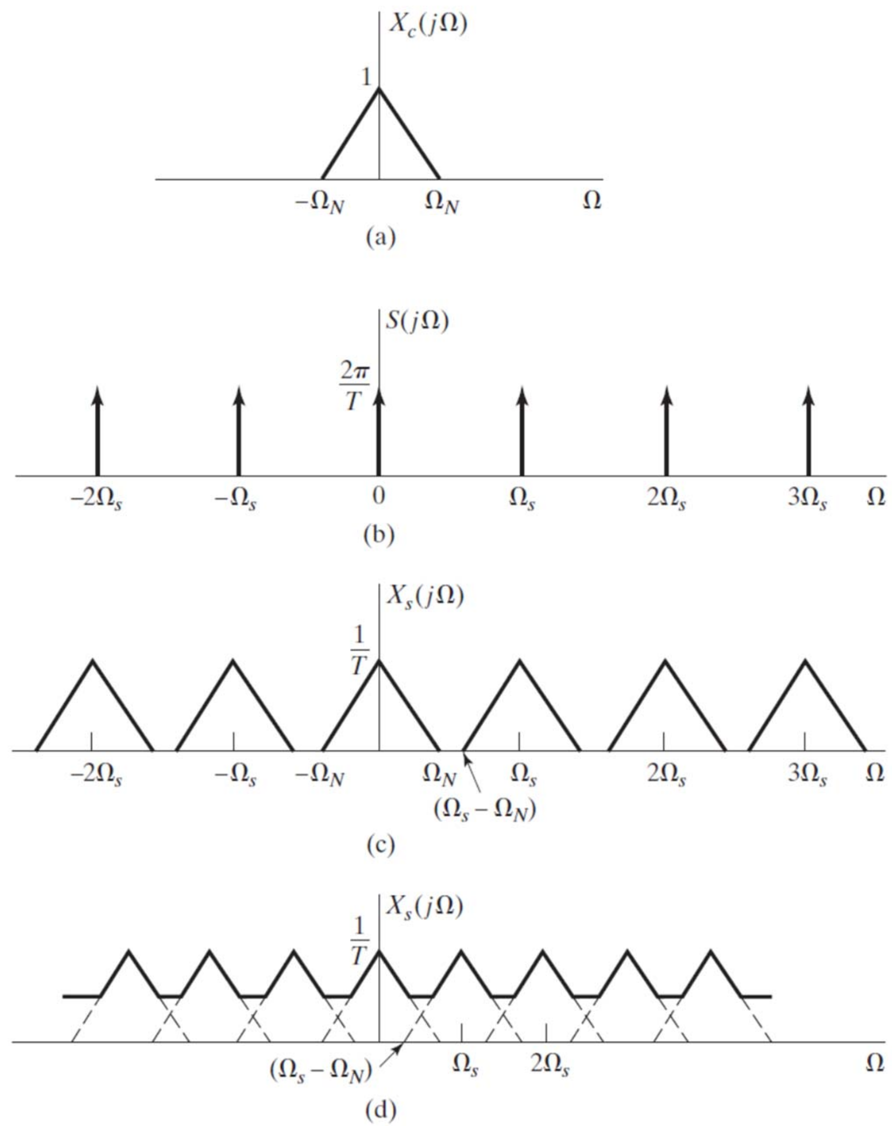
$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\,\Omega_s) \qquad \Omega_s = 2\pi/T$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\,\Omega_s))$$

- در تبدیل پیوسته به گسسته تغییر مقیاس فرکانسی داریم: $\omega = \Omega\, T_s$

نمونه‌برداری در زمان



نمونه‌برداری در زمان

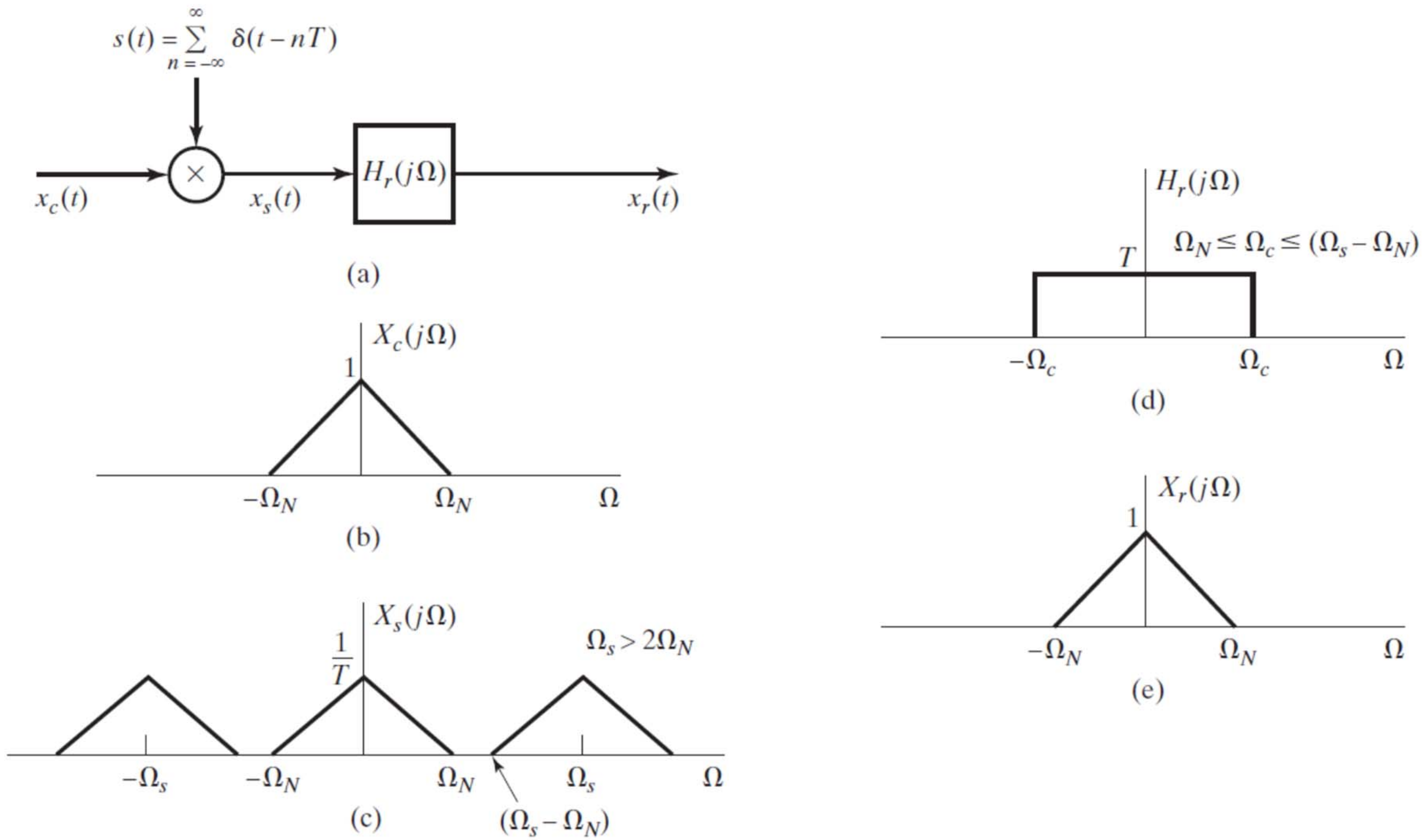
- برای اینکه طیف سیگنال پیوسته از روی طیف سیگنال گسسته قابل بازیابی باشد:

$$\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N, \quad \text{or} \quad \Omega_s \geq 2\Omega_N$$

- اگر سیگنال در فرکانس باند محدود داشته باشد و $\Omega_s > 2\,\Omega_N$ (نرخ نایکوییست)، می‌توان سیگنال پیوسته را با استفاده از فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل بازسازی کرد.

نمونه‌برداری در زمان

- بازسازی سیگنال:



نمونه‌برداری در فرکانس

- در عمل از تمام نمونه‌های سیگنال $x_d[n]$ (از $-\infty$ تا $+\infty$) استفاده نمی‌کنیم و از یک پنجره از سیگنال با تعداد نمونه‌های محدود استفاده می‌کنیم.

$$x_d[n] \longrightarrow \otimes \longrightarrow x[n]$$ سیگنال M نقطه‌ای

$$w[n] = 0, n < 0 \;\&\; n \geq M$$

- برای سیگنال M نقطه‌ای بحث DFT مطرح می‌شود.

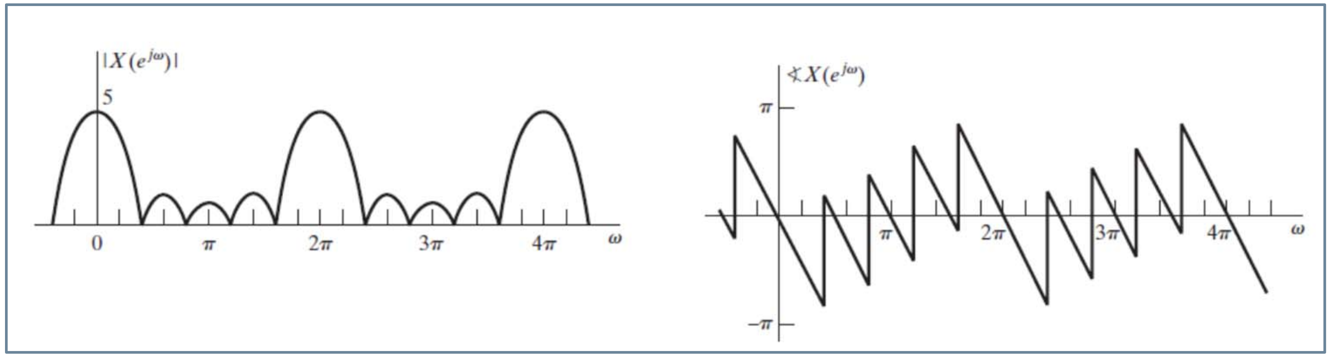
- نمونه‌برداری در فرکانس

نمونه‌برداری در فرکانس

- ایده کلی DFT:

$x[n]$
غیرپریودیک

$\xleftrightarrow{F}$



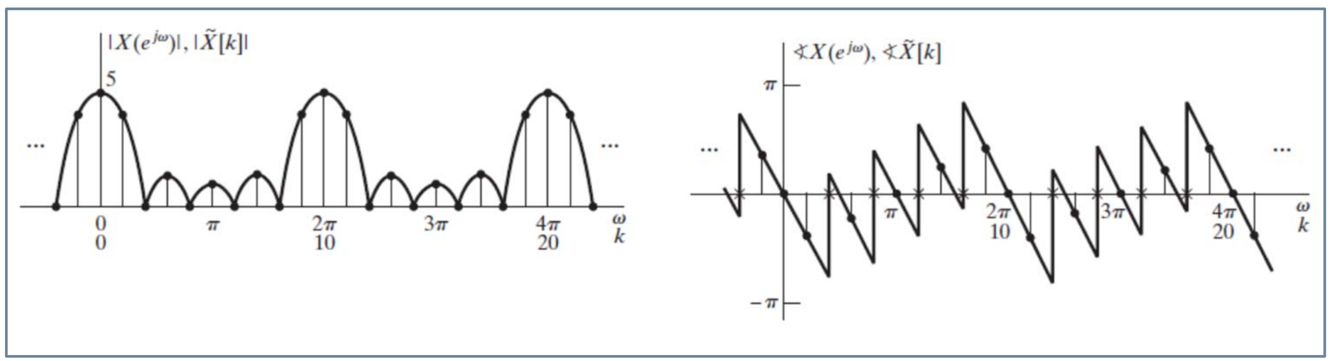
متناوب‌سازی

$N \geq M$

نمونه‌برداری

$\tilde{x}[n]$
پریودیک با
تناوب N

$\xleftrightarrow{DFS}$



نمونه‌برداری در فرکانس

- یادآوری:
  - DFS سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب N

$$\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

$$\text{Analysis equation:} \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}.$$

$$\text{Synthesis equation:} \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}.$$

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

نمونه‌برداری در فرکانس

- سیگنال غیرپریودیک $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}$$

- دنباله $\tilde{X}[k]$ از نمونه‌برداری $X(e^{j\omega})$ در فرکانس‌های $\omega_k = 2\pi k/N$ به دست آمده است:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k})$$

- دنباله $\tilde{X}[k]$ با دوره تناوب N متناوب است، در نتیجه می‌توان آن را به صورت ضرایب DFS یک دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ در نظر گرفت:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

نمونه‌برداری در فرکانس

- با ترکیب روابط خواهیم داشت:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(2\pi/N)km}\right]W_N^{-kn}$$

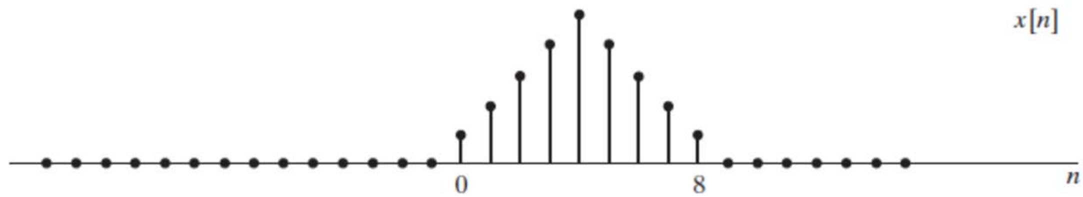
$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tilde{p}[n-m]$$

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-rN]$$

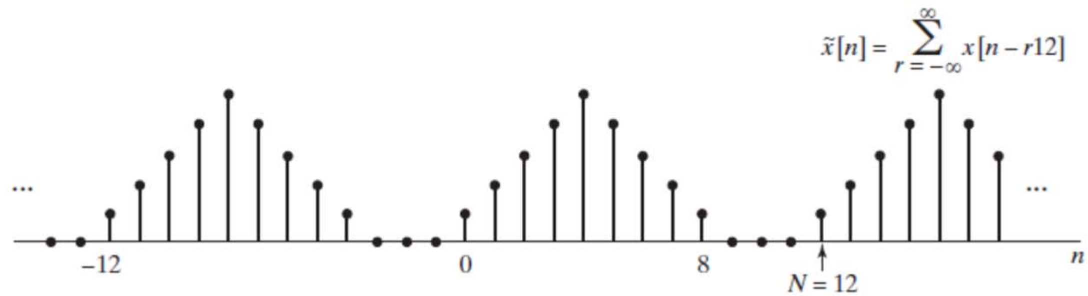
$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN].$$

- یعنی $\tilde{x}[n]$ یک دنباله متناوب است که از متناوب‌سازی $x[n]$ (غیرمتناوب) با دوره تناوب N به دست آمده است. یعنی از $x[n]$ می‌توان $\tilde{x}[n]$ را ساخت.

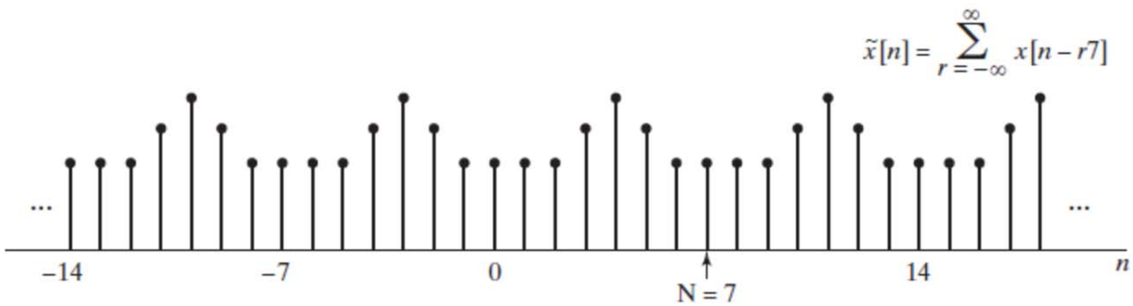
نمونه‌برداری در فرکانس



(a)



(b)



نمونه‌برداری در فرکانس

- در صورتی‌که طول $x[n]$ محدود باشد (M نقطه) و $N \geq M$ باشد، می‌توان از $\tilde{x}[n]$، $x[n]$ را ساخت (یک دوره تناوب):

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- پس از روی $\tilde{X}[k]$ می‌توان $x[n]$ را ساخت و درنتیجه $X(e^{j\omega})$ را تولید کرد.
- یعنی $X(e^{j\omega})$ افزونگی اطلاعات دارد.
- درنتیجه با استفاده از نمونه‌های $X(e^{j\omega})$ می‌توانیم خودش را بسازیم. در واقع می‌توانیم اطلاعات حوزه فرکانس را با نمونه‌های کمتر نمایش دهیم.

- DFT (Discrete Fourier Transform): یک تناوب از نمونه‌های $X(e^{j\omega})$
- DFT یکتا نیست و باید تعداد نقاط داده شود: کمترین افزونگی $N = M$

نمونه‌برداری در فرکانس

- روابط محاسبه DFT:

$$x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k].$$

$$\text{Analysis equation:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$\text{Synthesis equation:} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \qquad 0 \le n \le N-1.$$

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

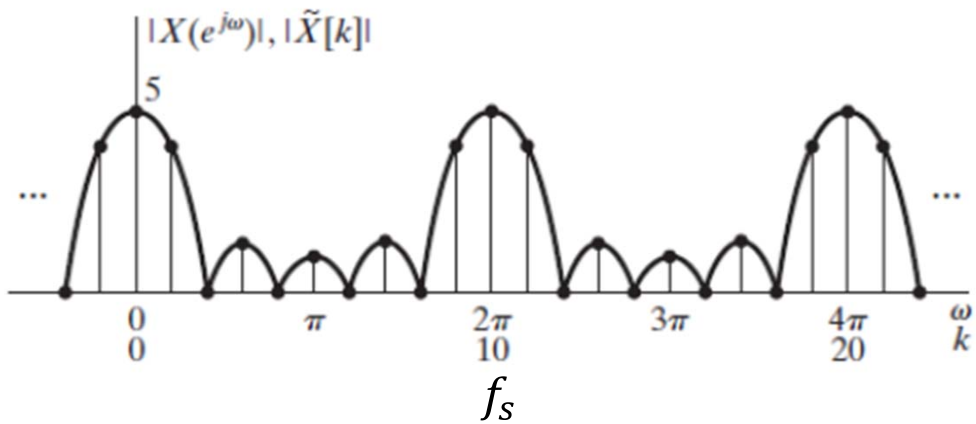
- FFT یک الگوریتم برای محاسبه سریع DFT است.

نمونه‌برداری در فرکانس

- ارتباط بین طیف فرکانسی و DFT N-نقطه‌ای سیگنال:
  - فرکانس متناظر با نمونه k-ام: f_k

$$f_k = \frac{k}{N} f_S \quad ; \qquad 0 \le k \le \left[\frac{N-1}{2}\right]$$

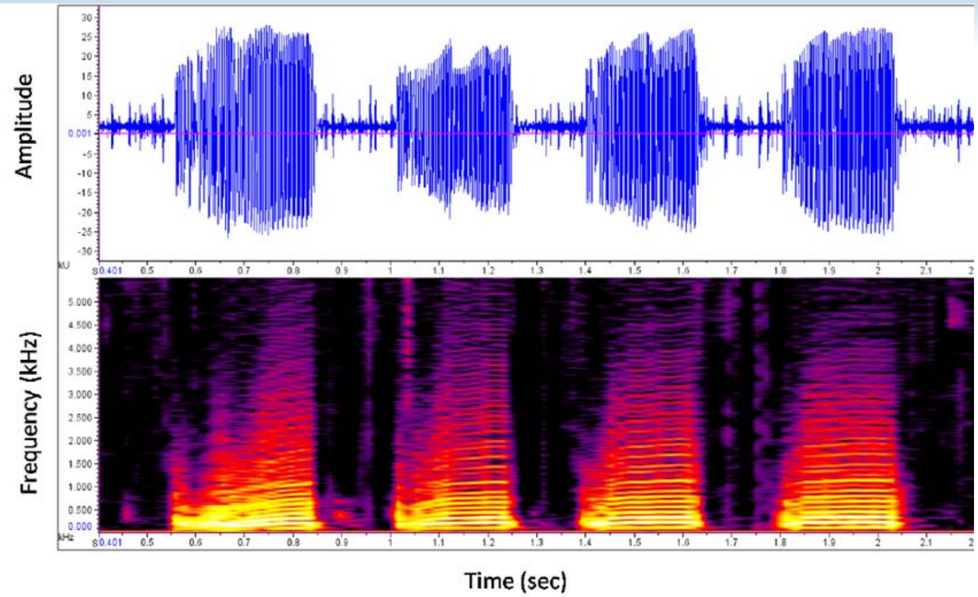
$$f_k = -\frac{N-k}{N} f_S \quad ; \left[\frac{N-1}{2}\right] < k \le N-1$$

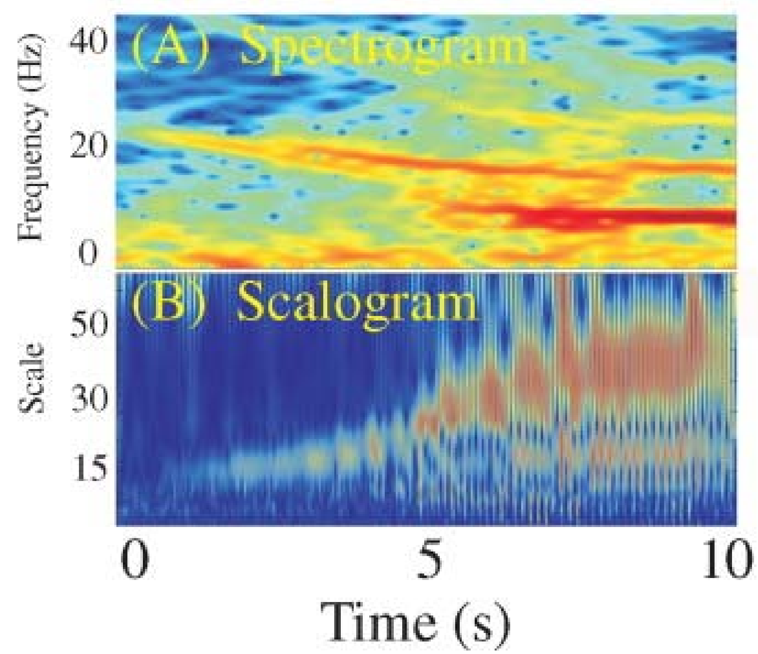


- DFT تقارن هرمیتی دارد:

$$X[k] = X^*[N-k]$$

نمایش توأم زمان-فرکانس





نمایش توأم زمان-فرکانس

- تبدیل فوریه:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

- سیگنال‌هایی که در طول زمان، محتوای فرکانسی‌شان تغییر می‌کند، تبدیل فوریه برایشان مناسب نیست.

- استفاده از تبدیل زمان-فرکانس:
  - به جای اینکه یک بار تبدیل فوریه بگیریم، در هر بازه پنجره گذاشته و پنجره را می‌لغزانیم و تبدیل فوریه می‌گیریم:
  - STFT (Short Time Fourier Transform)
  - تابعی که به دست می‌آید هم تابع زمان است هم فرکانس

نمایش توأم زمان-فرکانس

- تعریف STFT برای سیگنال پیوسته $x(t)$:

$$STFT_x(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, \underbrace{h(s-t)}_{\text{پنجره لغزان}}\, e^{-j\Omega s}\, ds$$

- اسپکتروگرام (Spectrogram):

$$SPEC_x(t,f) = |STFT_x(t,f)|^2$$

- تعریف STFT برای سیگنال گسسته $x[n]$:

$$STFT_x[n,\omega) = \sum_m x[m]\underbrace{h[m-n]}_{\text{پنجره گسسته لغزان}}e^{-j\omega m}$$

- اگر تعداد نقاط پنجره محدود باشد، می‌توان DFT گرفت:

$$STFT_x[n,k] = \sum_m x[m]h[m-n]e^{-jk\frac{2\pi}{M}m}$$

طول پنجره M

مفاهیم و تعاریف ماتریسی

- ماتریس $A_{m\times n}$:
  - ترانهاده: A^T
  - مزدوج: A^*
  - ترانهاده مزدوج (Hermitian): A^H
  - معکوس ماتریس: A^{-1} (برای ماتریس مربعی وارون‌پذیر)

- ماتریس مربعی $A_{n\times \mathrm{n}}$:
  - اگر $A^T = A$ باشد: متقارن
  - اگر $A^H = A$ باشد: هرمیتی
  - اگر $A^{-1} = A^H$ باشد: متعامد
  - $Trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

تجزیه مقادیر ویژه

- EigenValue Decomposition (EVD)

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \rightarrow & \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \rightarrow & \boldsymbol{u}_n \end{array}$$

مقادیر ویژه   بردارهای ویژه

$$(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u_i}$$

$$\underbrace{A[u_1\ u_2\ \ \dots u_n]}_{U} = [u_1\ u_2\ \ \dots u_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$AU = U\Lambda$$

تجزیه مقادیر ویژه

- EigenValue Decomposition (EVD)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- اگر A ماتریس حقیقی متقارن باشد، مقادیر ویژه حقیقی دارد. می‌توان بردارهای ویژه را به گونه‌ای انتخاب کرد که نسبت به هم عمود باشند:

$$U^{-1} = U^T \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = U\Lambda U^T \\ U^T A U = \Lambda \end{cases}$$

تجزیه مقادیر تکین

- Singular Value Decomposition (SVD)
- ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$:

$$A = U\Lambda V^T, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times m}, \Lambda \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- ماتریس‌های U و V متعامدند:

$$\begin{cases} UU^T = U^T U = I_{m\times m} \\ VV^T = V^T V = I_{n\times n} \end{cases}$$

- ماتریس Λ شبه قطری است:

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_p \ge 0 \quad, p = \min(m, n)$$

ماتریس مثبت معین

- ماتریس حقیقی متقارن $A_{n\times n}$:
  - مثبت معین (positive definite):

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\,,\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$$

  - مثبت نیمه‌معین (positive semidefinite):

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\,,\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \geq 0$$

  - نامعین (indefinite):

$$\exists \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}\,,\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0\,,\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y} < 0$$

- اگر A ماتریس حقیقی مثبت نیمه‌معین باشد، آن‌گاه مقادیر ویژه آن نامنفی بوده و بردارهای ویژه متمایز متعامد دارد.
- در مورد ماتریس هرمیتی A، ترانهاده (T) به ترانهاده مزدوج (H) تبدیل می‌شود.

حل معادلات خطی

- حل دستگاه معادلات:

$$A_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}$$

- حالت ۱: $A_{n\times n}$ مربعی
  - تعداد معادلات و مجهولات برابر است.
  - اگر $\det(A) \neq 0$ باشد:

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

  - اگر $\det(A) = 0$ باشد:
    - معادلات مستقل نیستند و می‌توانیم معادلات وابسته را حذف کنیم.
    - تعداد معادلات کمتر از مجهولات می‌شود.
    - مشابه حالت ۲.

حل معادلات خطی

- حل دستگاه معادلات:

$$A_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}$$

- حالت ۲: $m < n$, $A_{m\times n}$
  - بی‌نهایت جواب
  - $\min\|\boldsymbol{x}\|_2$ $\leftarrow$ $\boldsymbol{x} = A^H(AA^H)^{-1}\boldsymbol{b}$

- حالت ۳: $m > n$, $A_{m\times n}$
  - جواب ندارد
  - $min\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$ $\leftarrow$ $\boldsymbol{x} = (A^H A)^{-1}A^H\boldsymbol{b} = A^\dagger\boldsymbol{b}$
  - $A^\dagger$: شبه‌معکوس (از چپ) (Moore-Penrose Pseudoinverse) $A^\dagger A = I$

مشتق نسبت به بردار

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = a_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = a_n \end{cases}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}$$

$A: Symmetric\ matrix$