یادآوری:
فرایندهای تصادفی

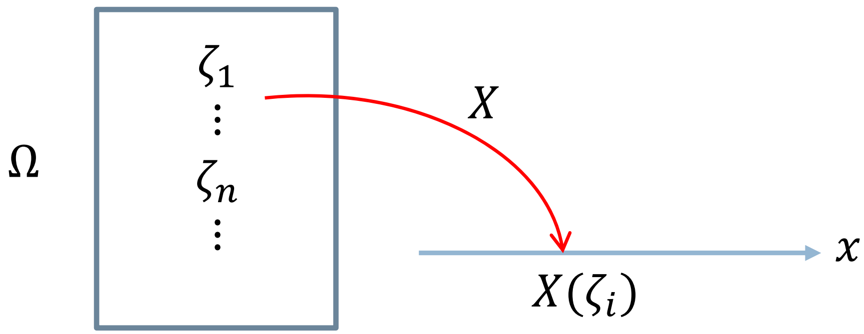
شماره درس: ۲۵۶۳۰

یکشنبه و سه‌شنبه ۱۵–۱۳:۳۰

نیم‌سال اول ۱۴۰۱–۱۴۰۰

متغیرهای تصادفی

- متغیر تصادفی (Random Variable)
  - یک عدد $X(\zeta)$ است که به هر خروجی آزمایش تصادفی اختصاص داده می‌شود.



$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

  - در واقع فضای نمونه را به یک فضای حقیقی نگاشت می‌کنیم.

- مفهوم $\{X \leq x\}$: زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه شامل همه نتایج ζ_i که به ازای آنها $X(\zeta_i) \leq x$ است.

متغیرهای تصافی

- تابع توزیع تجمعی Cumulative Distribution Function (CDF)

- آزمایش‌هایی که مقادیرشان روی کمتر از x نگاشت می‌شود:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

- تابع توزیع احتمال Probability Distribution Function (pdf)

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \ge 0$$

- توابع توزیع پیوسته: یکنواخت، گوسی یا نرمال، exponential و …
- توابع توزیع گسسته: برنولی، پواسون و …

متغیرهای تصادفی

- تابع توزیع توأم و تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی:

$$F_X(x), \qquad f_X(x), \qquad F_Y(y), \qquad f_Y(y)$$

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)dy\,dx$$

- تابع توزیع کناری (Marginal Distribution):

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy\,dx$$

- تابع چگالی کناری (Marginal density):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

متغیرهای تصادفی

- تابع چگالی شرطی (Conditional density function):

$$f_X(x|Y=y) = f_{XY}(x,y)/f_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y).f_X(x|Y=y) = f_X(x).f_Y(y|X=x)$$

- دو متغیر تصادفی را مستقل (independent) می‌گوییم هرگاه:

$$f_Y(y|x) = f_Y(y)$$
$$f_X(x|y) = f_X(x)$$
$$f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

- امید ریاضی (Expected Value):

$$E\{X\} = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$$

$$E\{g(X)\} = \overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)dx$$

متغیرهای تصافی

- اگر $g(x) = x^k$ باشد: ممان k–ام (k-th moment)

$$m_k = \overline{x^k} = E\{X^k\} = \int x^k f_X(x)dx$$

$$m_0 = 1$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx \text{ (متوسط)}$$

$$m_2 = E\{X^2\} = \overline{x^2}$$

- اگر $g(x) = (x - \bar{x})^k$ باشد: ممان مرکزی k–ام (Central moment)

$$\mu_k = E\{(X - \bar{x})^k\} = \int (x - \bar{x})^k f_X(x)dx$$

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = \int (x - \bar{x}) f_X(x)dx = 0$$

$$\mu_2 = \int (x - \bar{x})^2 f_X(x)dx = m_2 - m_1^2 = \sigma_X^2 \text{ (واریانس)}$$

متغیرهای تصافی

- ممان‌های توأم دو متغیر تصادفی:
  - ممان توأم: $m_{k,\ell} = E\{X^k Y^\ell\}$
  - ممان مرکزی توأم: $\mu_{k,\ell} = E\{(X-\bar{x})^k (Y-\bar{y})^\ell\}$

$$m_{1,0} = \bar{x} \quad m_{0,1} = \bar{y} \quad m_{2,0} = \overline{x^2} \quad m_{0,2} = \overline{y^2} \quad m_{1,1} = \overline{xy}$$

$$\mu_{1,0} = 0 \quad \mu_{0,1} = 0 \quad \mu_{2,0} = \sigma_x^2 \quad \mu_{0,2} = \sigma_y^2$$

$$\mu_{1,1} = \sigma_{xy} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$ کوواریانس

- ضریب همبستگی:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad 0 \le |r| \le 1$$

متغیرهای تصافی

- دو متغیر X و Y را متعامد گویند اگر $E\{XY\} = 0$ باشد.
- دو متغیر X و Y را ناهمبسته گویند اگر $r = 0$ یا $\sigma_{xy} = 0$ یا
$$E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$$
- دو متغیر X و Y را مستقل گویند اگر $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- استقلال نسبت به همبستگی شرط کلی‌تری است.
  - اگر X و Y مستقل باشند، ناهمبسته هستند.

متغیرهای تصافی

- تابع مشخصه Characteristic Function

$$\Phi_X(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} = \int e^{j\omega x} f_X(x)dx$$

- $f_X(x)$ تابع یقینی و شناخته‌شده است. انگار از $f_X(x)$ تبدیل فوریه گرفته‌ایم (با در نظر گرفتن یک علامت منفی).

- می‌توان نشان داد:

$$m_k = E\{X^k\} = \left.\frac{\frac{1}{(j)^k}\left(d^k\Phi_X(\omega)\right)}{d\omega^k}\right|_{\omega=0}$$

$$\Phi_{XY}(\omega_x,\omega_y) = E\{e^{j(\omega_x X+\omega_y Y)}\}$$

- اگر X و Y مستقل باشند:

$$\Phi_{XY}(\omega_x,\omega_y) = \Phi_X(\omega_x)\Phi_Y(\omega_y)$$

متغیرهای تصافی

- کومولان (Cumulant):

$$c_n = (-j)^k \left. \frac{d^k Ln\Phi_x(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0}$$

$c_1 = m_1$ میانگین

$c_2 = m_2 - (m_1)^2$ واریانس

معیاری از میزان پراکندگی حول میانگین

$c_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$ Skewness

معیاری برای میزان نامتقارنی

$c_4 = m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4$ Kurtosis

معیاری برای میزان گوسی بودن

متغیرهای تصافی

- اگر متوسط صفر باشد، همه ممان‌های مرکزی همان ممان‌های معمولی خواهند بود.
- اما کومولان متغیر تصادفی با میانگین صفر، ممان معمولی آن نیست.

- اگر توزیع گوسی داشته باشیم:
  - کومولان‌های مرتبه ۳ به بالا مطلقا صفر است (تنها متغیر تصادفی با این خاصیت).
  - ممان مرکزی و معمولی برای توزیع گوسی حتی با میانگین صفر، غیرصفر است.

- اگر متغیر تصادفی X گوسی باشد با $\bar{x}$ و σ_x^2 کاملاً توصیف می‌شود.

بردار تصادفی

- بردار تصادفی: برداری متشکل از n متغیر تصادفی

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

- متوسط بردار تصادفی :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = E\{\boldsymbol{X}\} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{m}_X$$

بردار تصافی

- ماتریس همبستگی:

$$R_X = E\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H\} = \begin{bmatrix} \overline{x_1 x_1^*} & \cdots & \overline{x_1 x_n^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{x_n x_1^*} & \cdots & \overline{x_n x_n^*} \end{bmatrix}$$

- ماتریس کوواریانس:

$$C_X = E\{(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m}_X)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m}_X)^H\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

بردار تصافی

- خواص ماتریس‌های R_X و C_X:
  - اگر ماتریس R_X قطری باشد ← درایه‌های بردار دو به دو بر هم عمودند.
  - اگرماتریس C_X قطری باشد ← درایه‌های بردار دو به دو ناهمبسته هستند.
  - تقارن هرمیتی دارند: $C_X^H = C_X$ $\qquad$ $R_X^H = R_X$
  - ماتریس معین نامنفی هستند:

$$\forall y \neq 0 \quad y^H R_X y \geq 0 \;, y^H C_X y \geq 0$$

  - $\det C_X \geq 0 \qquad \det R_X \geq 0$
  - n مقدار ویژه حقیقی نامنفی و n بردار ویژه دو به دو متعامد دارند.

بردار تصافی

- بردار تصادفی گوسی (نرمال)
  - هر ترکیب خطی از هر تعداد از درایه‌های آن یک متغیر تصادفی گوسی است:

$$Z=\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \quad \rightarrow \quad X_i \sim N\left(\overline{x_i}, \sigma_{x_i}^2\right) \quad Z \sim N(\bar{z}, \sigma_z^2)$$

$$\bar{z}=\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{x_k} \qquad \sigma_z^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{x_i x_j}$$

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X)^T C_X^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X)\right)$$

- یک بردار نرمال با بردار متوسط و ماتریس کوواریانس به طور یکتا معلوم می‌شود.

بردار تصافی

- اگر بردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$ ترکیب آفین بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ باشد:

$$\boldsymbol{Y}_{m\times 1} = A_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} + \boldsymbol{b}_{m\times 1}$$

A و $\boldsymbol{b}$ یقینی هستند

$$\boldsymbol{m}_Y = A\boldsymbol{m}_X + \boldsymbol{b}$$

$$C_Y = AC_XA^H$$

بردار تصافی

○ سفیدسازی (Whitening):

$\boldsymbol{X}$ حقیقی, C_X → A → $\boldsymbol{Z} = A\boldsymbol{X}$ → B → $\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{Z} = BA\boldsymbol{X} = D\boldsymbol{X}$

$$C_Z = AC_XA^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$C_Y = BC_ZB^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$C_X = U\Lambda U^T$ تجزیه مقادیر ویژه

$$A \triangleq [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n]^T = U^T$$

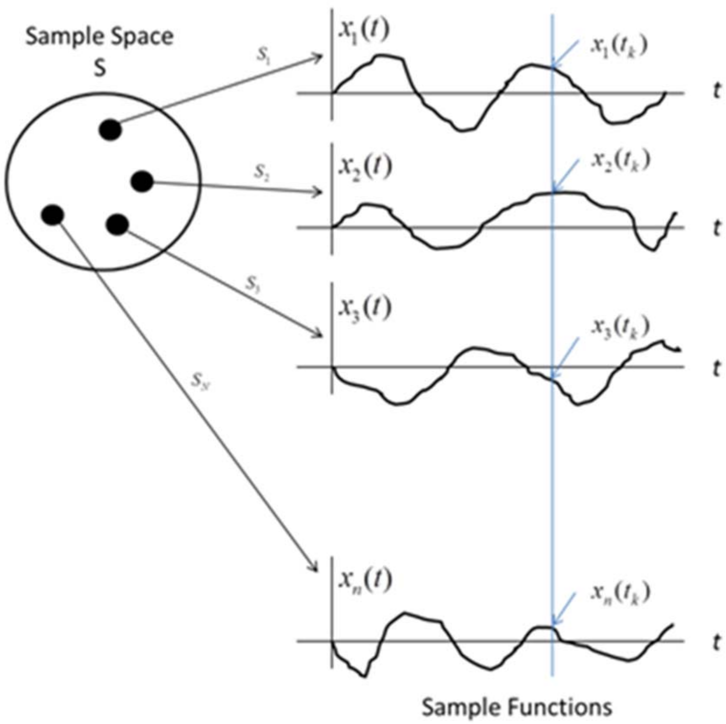
$$B \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$D = BA = \Lambda^{-\frac{1}{2}}U^T$$

$$C_Y = DC_XD^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}}U^TU\Lambda U^TU\Lambda^{-\frac{1}{2}} = I$$

فرآیند تصادفی

- فرآیند تصادفی (Stochastic process)
  - به ازای یک ζ_i مشخص، یک تابع نمونه داریم: $x(\zeta_i,t)$, $x(t)$

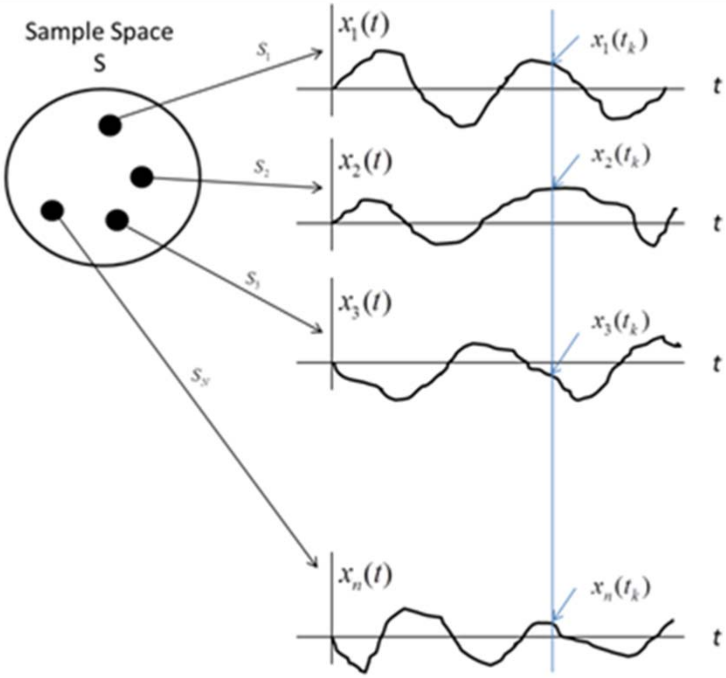


متغیر تصادفی $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

فرآیند تصادفی $\Omega \times T \xrightarrow{X(\zeta,t)} \mathbb{R}$

- توصیف فرآیند: در هر لحظه زمانی یک متغیر تصادفی داریم.
  - در لحظه t_1 ← متغیر تصادفی $X(t_1)$

فرآیند تصادفی



- برای اینکه بتوانیم یک فرآیند را به طور کامل توصیف کنیم باید:

- $f_{X(t_1)}(x(t_1))$ را به ازای هر t_1 داشته باشیم.

- $f_{X(t_1)X(t_2)}(x(t_1),x(t_2))$ را به ازای هر t_1 و t_2 داشته باشیم.

- $\forall n$ و $\forall t_1,t_2,\dots,t_n$ تابع چگالی توأم زیر را داشته باشیم:

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x(t_1),x(t_2),\dots,x(t_n))$$

فرآیند تصادفی

- توصیف آماری محدود:
- ۱) توصیف مرتبه اول: یعنی متوسط را در تمامی لحظات داشته باشیم.

تابع متوسط

$$\eta_X(t) = \overline{x(t)} = E\{X(t)\} = \int x(t) f_{X(t)}\big(x(t)\big) dx(t)$$

- ۲) توصیف مرتبه دوم: تابع همبستگی بین دو لحظه دلخواه t_1 و t_2 را بدانیم.

تابع همبستگی

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$
$$= \int\int x(t_1)x(t_2) f_{X(t_1)X(t_2)}\big(x(t_1)x(t_2)\big) dx(t_1)dx(t_2)$$

تابع کوواریانس

$$C_X(t_1, t_2) = E\Big\{\Big(X(t_1) - \overline{x(t_1)}\Big)\Big(X(t_2) - \overline{x(t_2)}\Big)\Big\}$$
$$= R_X(t_1, t_2) \text{-} \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$$

فرآیند تصادفی

- دو فرآیند تصادفی:

$X(t): \quad \eta_X(t) \quad , \quad R_X(t_1, t_2)$

$Y(t): \quad \eta_Y(t) \quad , \quad R_Y(t_1, t_2)$

$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\}$ تابع همبستگی متقابل Cross-correlation

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{\big(X(t_1) - \eta_X(t_1)\big)\big(Y(t_2) - \eta_Y(t_2)\big)\}$$

تابع کوواریانس متقابل Cross-covariance

- استقلال ← تابع توزیع توأم جدایی‌پذیر باشد.
- ناهمبستگی ← $C_{XY}(t_1,t_2) = 0$
- تعامد ← $R_{XY}(t_1,t_2) = 0$

فرآیند تصادفی

- ایستایی (Stationary):
- ۱) ایستا به مفهوم اکید Strict Sense Stationary (SSS)
  - مشخصه‌های آماری برای نمونه‌ها با اختلاف ثابت، یکسان است.

$$\forall n, \forall t_1, \dots, t_n$$

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}\big(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\big) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\dots X(t_n+\tau)}\big(x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \dots, x(t_n+\tau)\big)$$

  - چک کردن این مفهوم عملی نیست.

فرآیند تصادفی

- ایستایی (Stationary):
- ۲) ایستا به مفهوم وسیع Wide Sense Stationary (WSS)
  - معمولاً منظور از ایستا این نوع است.
  - متوسط مستقل از زمان است:

$$\eta_X(t) = \overline{x(t)} = E\{X(t)\} = \eta_X = \text{ثابت}$$

  - همبستگی تابعی از تفاضل دو لحظه است:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_X(t_1 - t_2)$$

$$\rightarrow \quad R_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\}$$

- اگر فرآیند SSS باشد، WSS است.

فرآیند تصادفی

- فرآیند نرمال (گوسی):

$X(t)$: $\forall n \,, \forall t_1, \dots, t_n \quad X(t_1), \dots, X(t_n)$

- بردار تصادفی به ازای هر n و هر t گوسی باشد:
  - چگالی احتمال هر نقطه گوسی است.
  - برای هر دو نقطه‌ای، چگالی احتمال توأم آنها گوسی است.
  - به ازای هر n نقطه، بردار گوسی است.

- اگر فرآیند تصادفی گوسی WSS باشد، SSS هم هست.

فرآیند تصادفی

- فرآیند ارگادیک:
- فرآیند $X(t)$ را به مفهوم تابع g ارگادیک گوییم اگر:

$$\underbrace{\overset{1}{E\{g(X(\zeta_i,t)\}}}_{\text{تابع } t} = \langle g\big(x(\zeta_i,t)\big)\rangle = \underbrace{\overset{2}{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g\big(x(\zeta_i,t)\big)dt}}_{\text{یک متغیر تصادفی خواهد بود (تابع } \zeta\_i \text{)}}$$

- (۱) نباید تابع t باشد و (۲) نباید تابع ζ_i باشد و باید به یک عدد میل کند. (۱) و (۲) باید برابر باشند.

- فرآیند را ارگادیک گوییم اگر برای هر تابع دلخواه g، ارگادیک باشد.

فرآیند تصادفی

- دو حالت خاص:
- ۱) ارگادیک به مفهوم متوسط (Mean Ergodic)
  - فرآیند را ME گویند اگر:

$$\underbrace{E\{X(t)\}}_{\eta_x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

  - فرآیند باید به مفهوم متوسط ایستا باشد.

- ۲) ارگادیک به مفهوم همبستگی (Correlation Ergodic)
  - فرآیند را CE گویند اگر فرآیند $Z(\tau) = X(t)X^*(t-\tau)$ یک فرآیند ME باشد:

$$E\{X(t)X^*(t-\tau)\} = \langle x(t)x^*(t-\tau) \rangle$$

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)dt$$