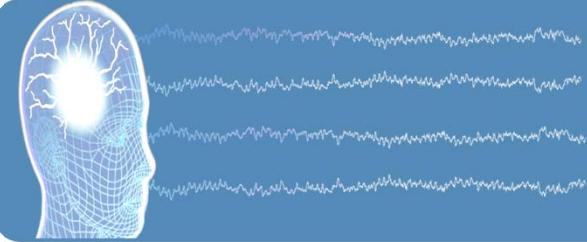




روش‌های جداسازی کور و نیمه کور منابع

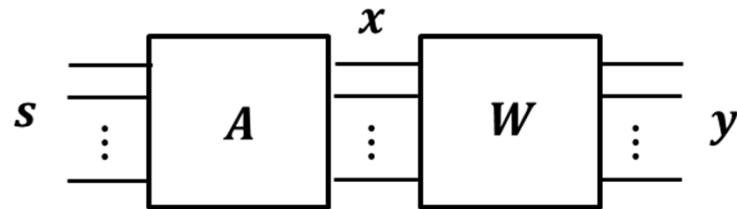
شماره درس: ۲۵۶۳۰
یکشنبه و سه‌شنبه ۱۵:۳۰-۱۳:۳۰
نیمسال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰



تعریف مساله

○ جداسازی کور و نیمه کور منابع

Blind and semi-blind source separation ○



○ مشاهدات: x_i ها

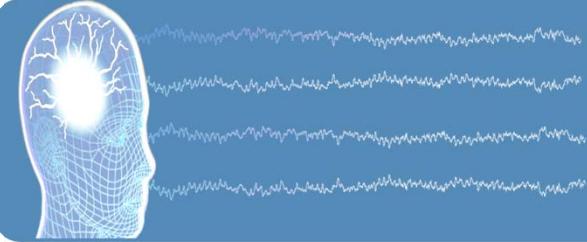
○ هدف: پیدا کردن ماتریس W به گونه‌ای که خروجی‌های y_i همان s_i ها بشوند.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad m \geq n \text{ معمولاً}$$

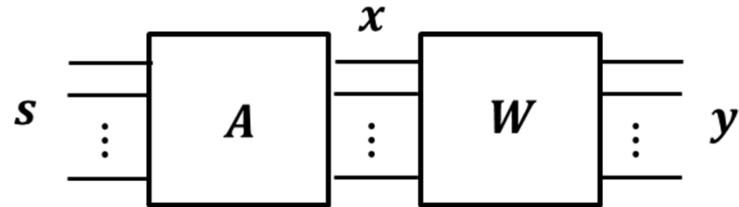
$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

فرض:
تعداد منابع=تعداد مشاهدات
 $m = n$



تعریف مساله

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

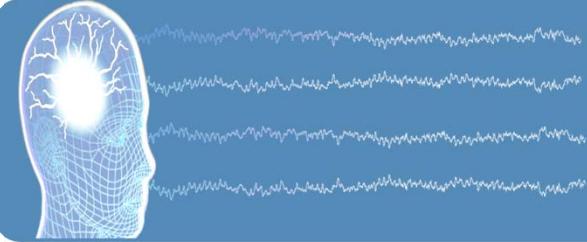


$$\begin{cases} x_k(t) = \sum_{i=1}^n a_{ki} s_i(t) \\ \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{W}\mathbf{A} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{s}(t)$$

- هدف: $\mathbf{y}(t)$ یک کپی از $\mathbf{s}(t)$ باشد.
- $\mathbf{C} \equiv$ ماتریسی باشد که تنها جای منابع را عوض می‌کند و یا انرژی آنها را تغییر می‌دهد.



تعریف مساله

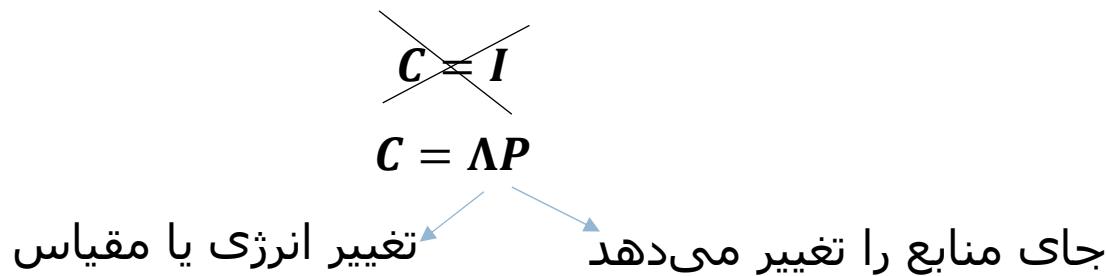
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s_2 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

○ مثال:

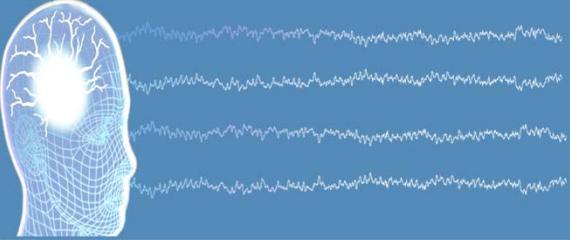
○ C در هر سطر و ستون دقیقاً یک عنصر غیر صفر دارد.

○ C به صورت حاصل ضرب یک ماتریس قطری در یک ماتریس جایگشت (permutation) قابل بیان است:

○ انتظار ما ←



○ ماتریس جایگشت: ماتریسی که در هر سطر و هر ستون فقط یک ۱ دارد و بقیه عناصر آن صفر است ← در اعمال به یک بردار فقط جای عناصر آن را جابه جا می کند.



دو عدم قطعیت در تخمین منابع

- دو عدم قطعیت در تخمین منابع:

- ترتیب منابع

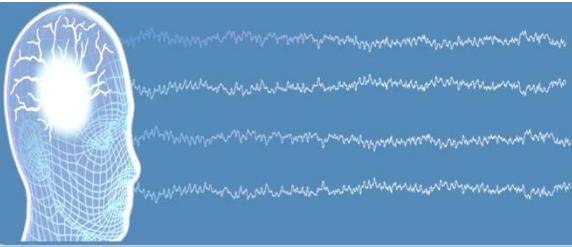
$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(t) = \sum_{j=\text{perm}(1:n)} a_j s_j(t)$$

- مقیاس منابع

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} a_i \cdot \beta_i s_i(t)$$

- مثال:

$$2s_1 + 3s_2 = 6 \frac{s_2}{2} + \frac{1}{2} \times 4s_1$$



استخراج زیرفضای مطلوب

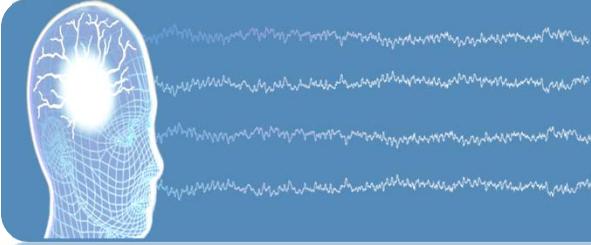
- استخراج زیرفضای مطلوب با استفاده از روش‌های مبتنی بر جداسازی منابع:

$$x(t) = As(t) \xrightarrow{SS} A \rightarrow W = A^{-1} \rightarrow s(t) = Wx(t)$$

$$s(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \rightarrow s_{den}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_L(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_{den}(t) = As_{den}(t)$$

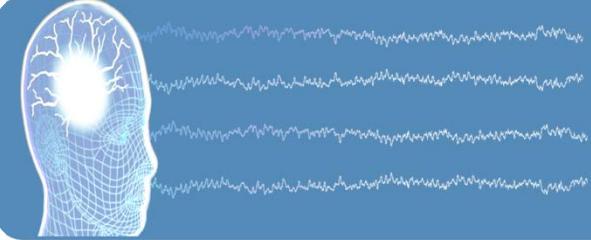
اطلاعات در مورد فضای سیگنال یا نویز

- توجه: عدم قطعیت‌های ترتیب و مقیاس تأثیری در ترتیب و مقیاس x حذف نویز شده ندارند.



روش‌های جداسازی منابع

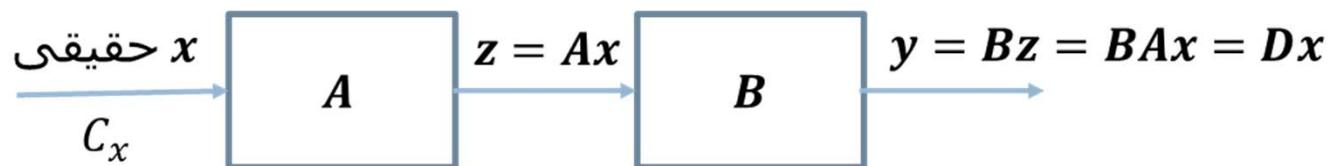
- روش‌های کور جداسازی منابع: استفاده از حداقل اطلاعات در مورد منابع و سیستم ترکیب
 - آنالیز مولفه‌های اصلی (PCA)
 - آنالیز مولفه‌های مستقل (ICA)
 - آنالیز مولفه‌های کانونی (CCA)
- روش‌های نیمه‌کور جداسازی منابع: استفاده از برخی اطلاعات در مورد منابع و سیستم ترکیب در مرحله جداسازی منابع
 - تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته (GEVD)
 - (DSS) Denoising Source Separation
- توجه: کور یا نیمه‌کور بودن الگوریتم‌ها مربوط به مرحله جداسازی منابع است، و گرنه در مرحله حذف نویز، روش‌های کور نیز باقیستی از اطلاعات موجود در مورد منابع مطلوب استفاده کنند.



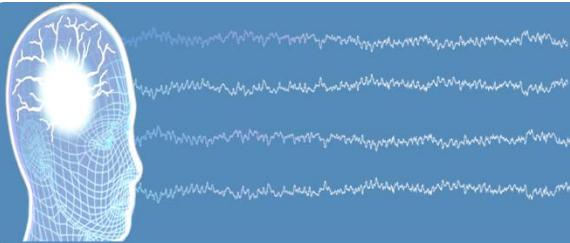
آنالیز مولفه‌های اصلی

- آنالیز مولفه‌های اصلی (Principal Component Analysis)
- سفیدسازی (Whitening)
- کاهش ابعاد (Dimension Reduction)

- بردار تصادفی حقیقی x با ماتریس کوواریانس C_x داده شده است.
- هدف تعیین ماتریس D (ترکیب خطی) به گونه‌ای است که $y = Dx$ یک بردار تصادفی سفید نرمالیزه باشد، یعنی: $C_y = I$



آنالیز مولفه‌های اصلی



- اگر بردار تصادفی y ترکیب خطی درایه‌های بردار تصادفی x باشد:

$$\mathbf{y}_{m \times 1} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1}$$

$$\mathbf{m}_y = E\{\mathbf{y}\} = E\{\mathbf{A}\mathbf{x}\} = \mathbf{A} E\{\mathbf{x}\} = \mathbf{A} \mathbf{m}_x$$

$$\mathbf{C}_y = E\left\{(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T\right\} = E\{\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{A}^T\} = \mathbf{A} \mathbf{C}_x \mathbf{A}^T$$

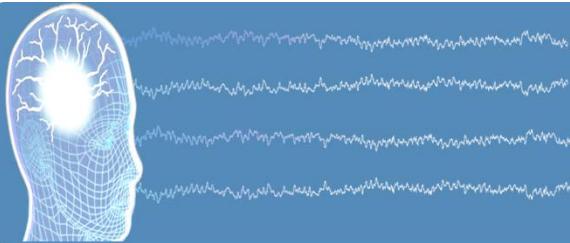
- در نتیجه:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C}_z = \mathbf{A} \mathbf{C}_x \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C}_y = \mathbf{B} \mathbf{C}_z \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- می‌خواهیم $\mathbf{C}_y = \mathbf{I}$ باشد.

آنالیز مولفه‌های اصلی



○ راه حل:

- تجزیه مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس مشاهدات \mathbf{C}_x (ماتریس متقارن حقیقی مثبت معین)

$$\mathbf{C}_x \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad i = 1 \dots n$$

λ_i ها حقیقی مثبت
 \mathbf{u}_i ها حقیقی متعامد

$$\mathbf{C}_x \mathbf{U} = \mathbf{U} \Lambda \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{C}_x = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^T \quad \text{or} \quad \mathbf{U}^T \mathbf{C}_x \mathbf{U} = \Lambda$$

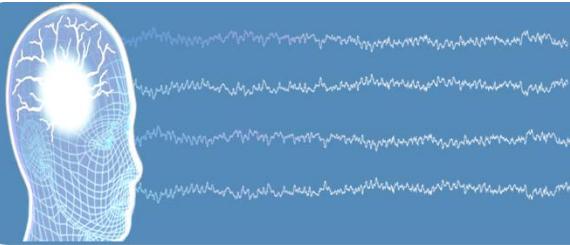
$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]^T$$

$$\mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{A} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{D} \mathbf{C}_x \mathbf{D}^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_x \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I}$$

آنالیز مولفه‌های اصلی



○ در PCA معمولاً λ_i ها بر روی قطر Λ از بزرگ به کوچک مرتب می‌شوند:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

○ می‌توان به y_i ها به صورت منابع تولید‌کننده بردار تصادفی x نگاه کرد:

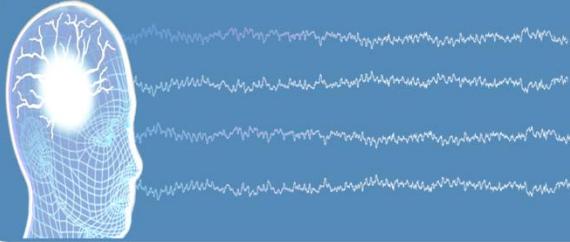
$$y = Dx \rightarrow x = D^{-1}y \rightarrow x = A'y \quad (x(t) = A'y(t))$$

○ یعنی می‌توان پس از تعیین $y_i(t)$ ها، منابع نویز را حذف کرد و بقیه منابع را با استفاده از ماتریس $A' = D^{-1}$ به فضای مشاهدات بازگرداند.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \rightarrow y_{den}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_L(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_{den}(t) = A'y_{den}(t)$$

○ می‌توان نشان داد که اگر λ_i ها از بزرگ به کوچک مرتب شوند، بیشترین انرژی در مولفه‌ها اول وجود دارد و منابع ناهمبسته هستند. در نتیجه مولفه‌های آخر معمولاً شامل نویز است.

آنالیز مولفه‌های اصلی

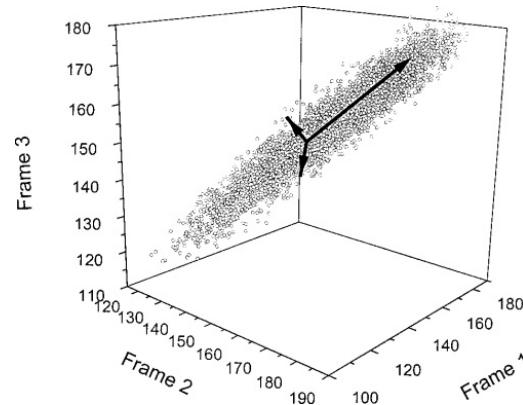
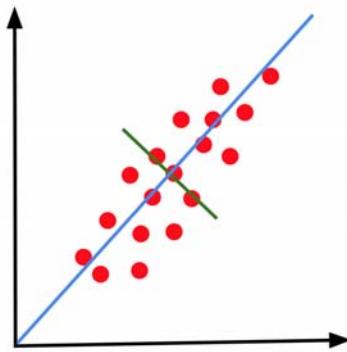


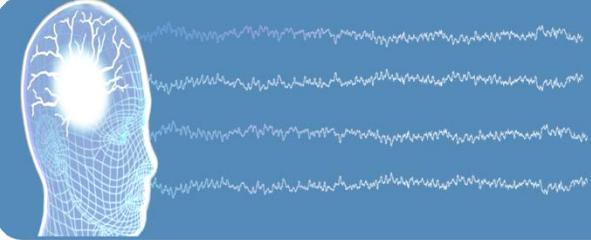
- استفاده از PCA برای کاهش بعد:
- از آنجا که انرژی اصلی سیگنال در مولفه‌های اول قرار دارد، برای کاهش بعد با استفاده از PCA به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathbf{D} \triangleq \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \quad \mathbf{D}_{red} = \mathbf{D}(1:d,:) \in \mathbb{R}^{d \times n}$$

$$\mathbf{y}_{red} = \mathbf{D}_{red} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{y}_{red} \in \mathbb{R}^d$$

- مولفه‌های \mathbf{y}_{red} ناهمبسته بوده و بعد ($d < n$) \mathbf{y}_{red} است.





آنالیز مولفه‌های مستقل

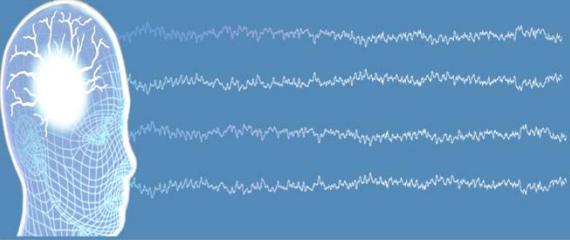
- آنالیز مولفه‌های مستقل (Independent Component Analysis)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad m \geq n$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$$

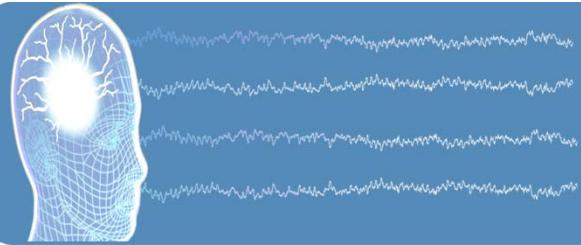
- هدف: $\mathbf{y}(t)$ یک کپی از $\mathbf{s}(t)$ باشد.
- فرض اصلی: منابع $s_i(t)$ مستقل آماری هستند.
- \mathbf{s} در هر لحظه t , شامل n متغیر تصادفی مستقل است.
- تفاوت سیگنال‌های ترکیب (مشاهدات) و سیگنال‌های منبع:
- منابع مستقل‌اند، اما ترکیب آنها نه (چون ترکیب‌ها شامل منابع مشترک هستند).



آنالیز مولفه‌های مستقل

- قضیه حد مرکزی:
- مجموع یک سری متغیر تصادفی مستقل با واریانس محدود، یک توزیع گوسی می‌سازد.
- جمع دو متغیر تصادفی مستقل، متغیر تصادفی است که توزیع آن نسبت به توزیع تک تک متغیرها به گوسی نزدیک‌تر است.
- الگوریتم‌های ICA:
 - ماکزیمم استقلال Mutual Information ← مینیموم Independence
 - ماکزیمم غیر‌گوسی بودن Non-gaussianity
- معمولاً قبل از اعمال ICA مراحل زیر انجام می‌شود:
 - حذف میانگین Centering
 - سفیدسازی Whitening
 - کاهش بعد Dimensionality Reduction

آنالیز مولفه‌های مستقل



○ قضیه دارموآ (Darmois):

○ اگر s_1, \dots, s_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند و

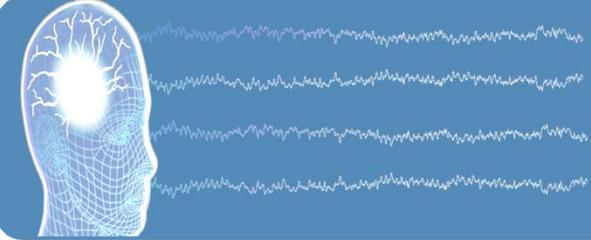
$$\begin{cases} x_1 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n \\ x_2 = b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_n s_n \end{cases}$$

○ اگر x_1 و x_2 مستقل باشند، آن‌گاه برای هر i که $a_i b_i \neq 0$ باشد، s_i گوسی است.

○ روش‌های ICA برای منابع گوسی کار نمی‌کنند.

○ نتیجه: اگر بدانیم که هیچ‌کدام از s_i ‌ها گوسی نیستند، آن‌گاه از استقلال x_1 و x_2 می‌توان نتیجه گرفت که هر s_i یا در x_1 است یا در x_2 ولی نه هر دو، یعنی:

$$\forall i, \quad a_i = 0 \quad \text{or} \quad b_i = 0$$



آنالیز مولفه‌های مستقل

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- استقلال و ناهمبستگی:
- فرض: داده‌ها میانگین صفر

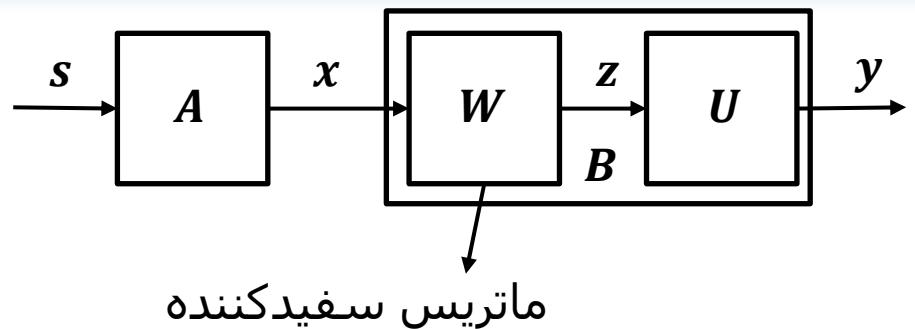
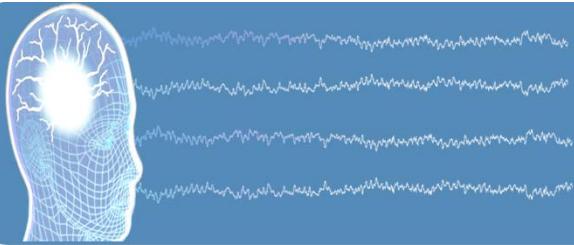
○ اگر عناصر روی قطر ماتریس مجهول را 1 در نظر بگیریم $\leftarrow n - n^2$ مجهول داریم.

$$E\{y_i y_j\} = 0 \quad \text{:decorrelation}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{نصف تعداد لازم}$$

○ فقط با استفاده از شروط ناهمبستگی نمی‌توان منابع مستقل استخراج کرد.

آنالیز مولفه‌های مستقل



$$B = UW$$

$$E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\} = \mathbf{I}$$

- نکته جالب: اگر \mathbf{z} ها به صورت فضایی سفید باشند، یعنی $E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\} = \mathbf{I}$ ، آن‌گاه \mathbf{U} یک ماتریس دوران است (ماتریس متعامد یکه)

- طبق فرض استقلال منابع و ابهام (عدم قطعیت) انرژی/مقیاس، فرض سفیدبودن \mathbf{z} ها برقرار است.

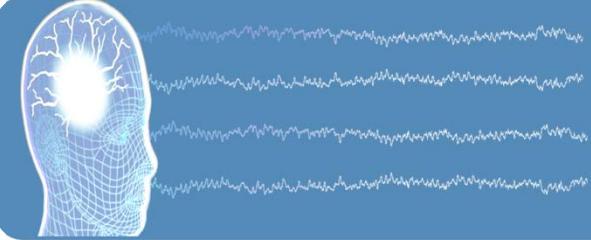
$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z}$$

مستقل + ابهام انرژی

$$E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = \mathbf{I}$$

$$E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = \mathbf{U}E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$$

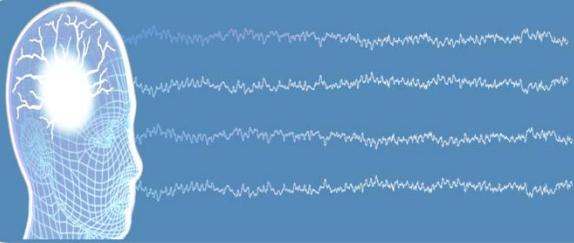
$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$$



آنالیز مولفه‌های مستقل

- نتیجه: جداسازی را می‌توان در دو مرحله انجام داد:
 - مرحله اول: سفید کردن decorrelation
 - مرحله دوم: دوران
- برای یافتن ماتریس دوران U , نسبت به ماتریس کلی B می‌توان فضای کوچکتری را جستجو کرد:
- مثلًاً استفاده از حاصل ضرب ماتریس‌های Givens پایه

آنالیز مولفه‌های مستقل



✓ چند نکته/ایده برای طراحی الگوریتم‌های ICA:

- آمارگان‌های مرتبه بالا (HOS) (Higher Order Statistics)
 - برای یک متغیر تصادفی:
 - میانگین: آمارگان مرتبه ۱
 - واریانس: آمارگان مرتبه ۲
- مممان مرتبه n -ام: $m_n = E\{X^n\}$
- مممان مرتبه n -ام ضرایب بسط تیلورتابع مشخصه اول متغیر تصادفی X را نشان می‌دهد:

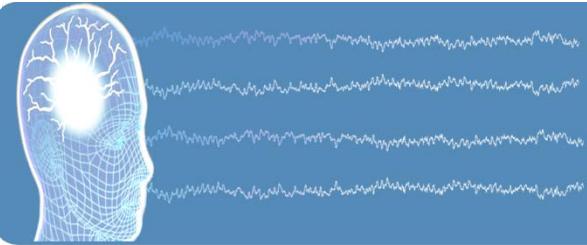
$$\Phi_X(s) = E\{e^{sX}\}$$

$$\Phi_X^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} E\{e^{sX}\} = E\{X^n e^{sX}\}$$

$$\Phi_X^n(0) = E\{X^n\} = m_n$$

$$\Phi_X^n(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + \frac{1}{2!}\Phi''(0)s^2 + \dots = 1 + m_1 s + \frac{1}{2!}m_2 s^2 + \frac{1}{3!}m_3 s^3 + \dots$$

آنالیز مولفه‌های مستقل



○ کومولان (Cumulant):

○ کومولان‌ها بر مبنای ضرایب بسط تیلورتابع مشخصه دوم (یعنی $\Psi(s) = Ln\Phi(s)$) تعریف می‌شوند:

$$c_n = n! \Psi^{(n)}(0)$$

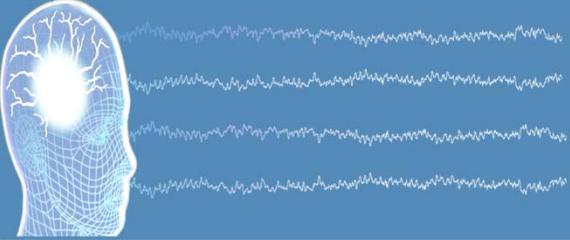
○ تعاریف دقیق برای حالت توأم بین n متغیر تصادفی $\{X_1, \dots, X_n\}$:

$$Mom\left\{X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \dots, X_n^{k_n}\right\} \triangleq E\left\{X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}\right\} = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \dots \partial \omega_n^{k_n}} \Big|_{\omega_1=\dots=\omega_n=0}$$

یکی از مممانهای توأم مرتبه $r = k_1 + \dots + k_n$

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_n) = Ln \Phi(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$Cum\left\{X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \dots, X_n^{k_n}\right\} \triangleq (-j)^r \frac{\partial^r \Psi(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \dots \partial \omega_n^{k_n}} \Big|_{\omega_1=\dots=\omega_n=0}$$



آنالیز مولفه‌های مستقل

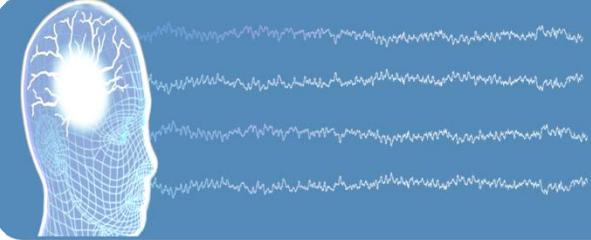
○ مثال: کومولان‌های یک متغیر تصادفی

$$\begin{aligned}k_1 &= m_1 \\k_2 &= m_2 - m_1^2 \\k_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \\k_4 &= m_4 - 4m_1m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4\end{aligned}$$

○ حالت خاص میانگین صفر: $m_1 = 0$

$$\begin{aligned}k_1 &= 0 \\k_2 &= m_2 \\k_3 &= m_3 \\k_4 &= m_4 - 3m_2^2\end{aligned}$$

○ نکته مهم: تمام کومولان‌های بزرگ‌تر از ۲ برای توزیع گوسی صفر است.



آنالیز مولفه‌های مستقل

○ مثال:

$$Cum\{X^3\} = Cum\{X, X, X\}$$

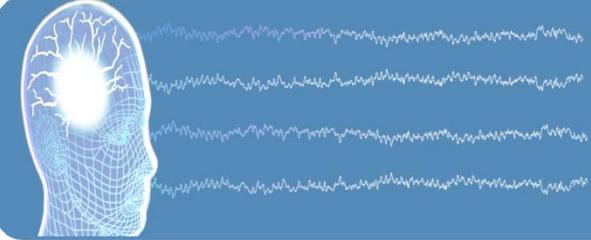
$$Cum\{X^2, Y\} = Cum\{X, X, Y\}$$

○ مثال:

$$E\{X_i\} = 0 \rightarrow$$

$$Cum\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$= E\{X_1, X_2, X_3, X_4\} - E\{X_1 X_2\}E\{X_3 X_4\} - E\{X_1 X_3\}E\{X_2 X_4\} - E\{X_1 X_4\}E\{X_2 X_3\}$$



آنالیز مولفه‌های مستقل

○ چند خاصیت مهم کومولان‌ها:

۱- اگر بتوان متغیرهای تصادفی $\{X_1, \dots, X_n\}$ را به دو (یا چند) گروه تقسیم کرد که این گروه‌ها از هم مستقل باشند، آن‌گاه:

$$Cum\{X_1, \dots, X_n\} = 0$$

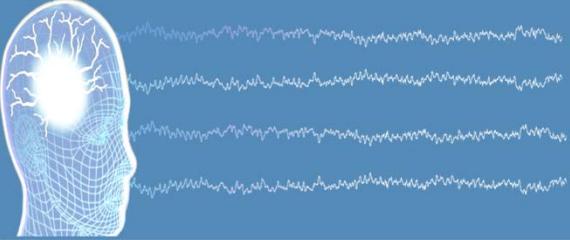
ولی لزوماً $Mom\{X_1, \dots, X_n\}$ صفر نیست.

○ حالت خاص: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند:

$$Cum\{X^{k_1}, Y^{k_2}\} = Cum\{\underbrace{X, \dots, X}_{\text{تا } k_1}, \underbrace{Y, \dots, Y}_{\text{تا } k_2}\} = 0$$

○ یعنی تمام کومولان‌های متقابل دو متغیر تصادفی مستقل صفرند.

○ مثلًاً کومولان مرتبه دوم همان واریانس است و صفر است \leftarrow ناهمبستگی



آنالیز مولفه‌های مستقل

۲- برای مجموعه متغیرهای $\{Y, X_1, \dots, X_n\}$:

$$Cum\{X_1 + Y, \dots, X_n\} = Cum\{X_1, \dots, X_n\} + Cum\{Y, \dots, X_n\}$$

$$Mom\{X_1 + Y, \dots, X_n\} = Mom\{X_1, \dots, X_n\} + Mom\{Y, \dots, X_n\}$$

۳- برای ثابت‌های a_1 تا a_n داریم:

$$Cum\{a_1 X_1, \dots, a_n X_n\} = a_1 \dots a_n Cum\{X_1, \dots, X_n\}$$

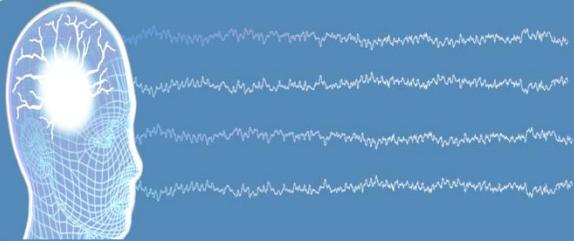
$$Mom\{a_1 X_1, \dots, a_n X_n\} = a_1 \dots a_n Mom\{X_1, \dots, X_n\}$$

۴- ممانتها و کومولان‌ها توابعی متقارن از آرگومانشان هستند:

$$Cum\{X_1, X_2, X_3\} = Cum\{X_3, X_1, X_2\}$$

۵- اگر متغیرهای $\{X_1, \dots, X_n\}$ توامًا گوسی باشند، تمام کومولان‌های مرتبه بالاتر از ۲ صفرند.

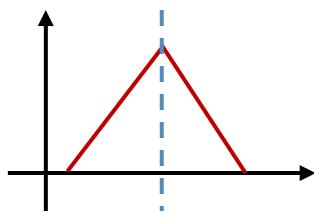
آنالیز مولفه‌های مستقل



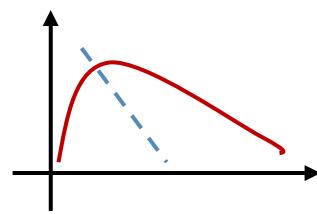
○ کومولان مرتبه ۳ (نرمالیزه) \leftarrow skewness

$$\tilde{k}_3 = \frac{k_3}{(k_2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{m_1=0} \tilde{k}_3 = \frac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E\{X^3\}}{\sigma^3}$$

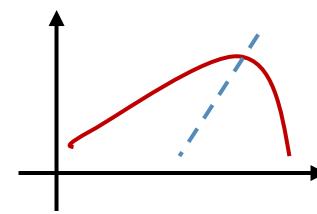
○ Skewness نشان‌دهنده تقارن یک توزیع است (به جنس توزیع بستگی ندارد):



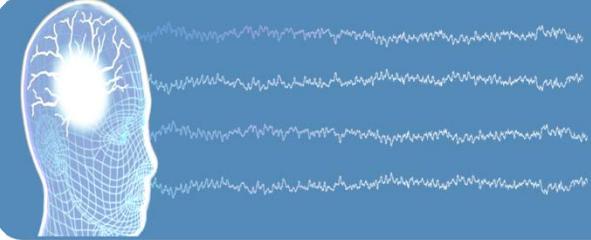
$skewness = 0$



$skewness > 0$



$skewness < 0$



آنالیز مولفه‌های مستقل

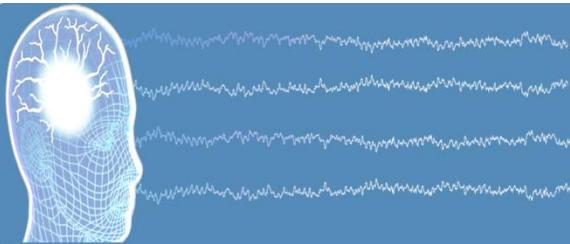
○ کومولان مرتبه ۴ (نرمالیزه) \leftarrow kurtosis

$$\tilde{k}_4 = \frac{k_3}{(k_2)^2} \xrightarrow{m_1=0} \tilde{k}_4 = \frac{m_4 - 3(m_2)^2}{(m_2)^2} = \frac{m_4}{(m_2)^2} - 3$$

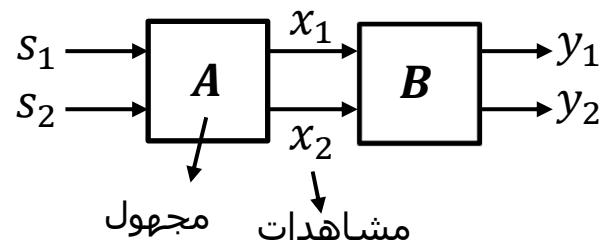
○ Kurtosis مناسب برای BSS

○ برای توزیع گوسی: $\tilde{k}_4 = 0$

آنالیز مولفه‌های مستقل



- یک مثال برای الگوریتم ICA:



$$\mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

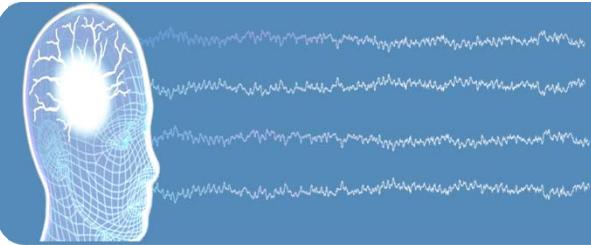
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a x_2 \\ y_2 = b x_1 + x_2 \end{cases}$$

- ایده اول:

○ استفاده از کومولان‌های مرتبه ۴: می‌خواهیم y_1 و y_2 مستقل باشند، در نتیجه:

$$\begin{cases} C_{31}(y_1, y_2) = Cum(Y_1^3, Y_2) = 0 \\ C_{22}(y_1, y_2) = Cum(Y_1^2, Y_2^2) = 0 \\ C_{13}(y_1, y_2) = Cum(Y_1, Y_2^3) = 0 \end{cases}$$

آنالیز مولفه‌های مستقل



- می‌خواهیم $f(a,b)$ ماکزیمم شود:

Lacoume:

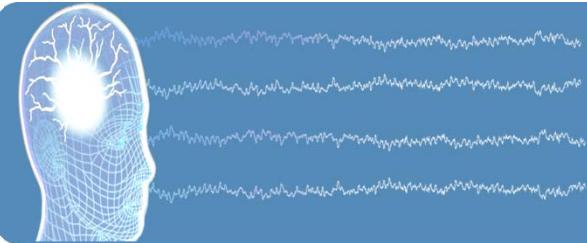
$$f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{(C_{31}(y_1, y_2)^2 + C_{22}(y_1, y_2)^2 + C_{13}(y_1, y_2)^2)}}$$

$$\begin{cases} a \leftarrow a + \mu \frac{\partial f}{\partial a} \\ b \leftarrow b + \mu \frac{\partial f}{\partial b} \end{cases}$$

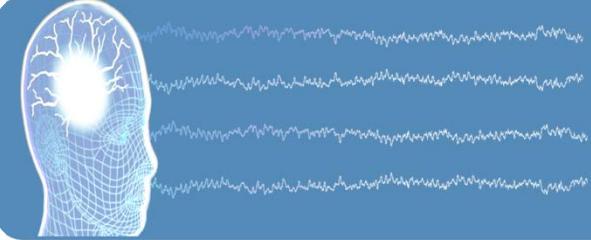
- ایده دوم:
○ تابع هزینه بر مبنای Non-gaussianity

$$\text{Max}(\text{kurt}(y_1)^2 + \text{kurt}(y_2)^2)$$

آنالیز مولفه‌های مستقل



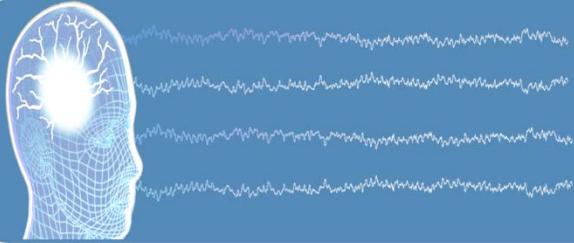
- چند مثال از الگوریتم‌های ICA:
 - fastICA ← ماکریم غیرگوسی بودن
 - Mutual Information ← مینیموم Infomax
 - JADE (Joint Approximation of Eigen-Matrices) ← ماکریم غیرگوسی بودن
 - Kernel-ICA ← مینیموم MI
 - CoM2 ← ماکریم غیرگوسی بودن



روش‌های نیمه‌کور

- روش‌های نیمه‌کور جداسازی منابع:
- تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته (GEVD)
- (DSS) Denoising Source Separation
- Constrained ICA

تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته



○ تعریف مسئله ریاضی GEVD:

○ A و B ماتریس‌های متقارن و مثبت معین:

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Av_i = \lambda_i Bv_i , \quad i = 1, \dots, n$$

مقادیر ویژه تعمیم‌یافته: λ_i

$$\lambda(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(A - \lambda B) = 0\}$$

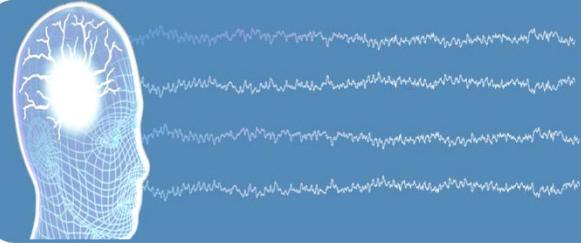
بردارهای ویژه تعمیم‌یافته: v_i

$$V = [v_1, \dots, v_n] , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad AV = BV\Lambda$$

○ می‌توان نشان داد که این مسئله معادل مسئله قطری‌سازی همزمان دو ماتریس A و B است:

$$V^T A V = \Lambda , \quad V^T B V = I$$

تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته



○ نحوه محاسبه در MATLAB:

$$[V, \Lambda] = \text{eig}(A, B) \quad AV = BV\Lambda$$

○ نسبت رایلی (Rayleigh quotient) دو ماتریس متقارن A و B (تابعی از w):

$$R(w) = \frac{w^T A w}{w^T B w}$$

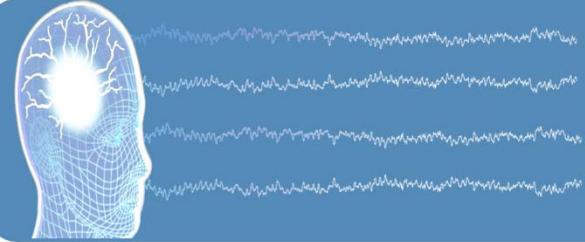
$$(\min \text{ or } \max) R(w) \rightarrow \frac{d}{dw} R(w) = \frac{2Aw(w^T Bw) - 2Bw(w^T Bw)}{(w^T Bw)^2} = 0$$

$$Aw(w^T Bw) = Bw(w^T Aw) \quad Aw = \frac{w^T Aw}{w^T Bw} Bw = R(w)Bw = \lambda Bw$$

→ GEVD: $\lambda = R(w)$ مقدار ویژه تعمیم‌یافته w بردار ویژه تعمیم‌یافته

○ ماکزیمم/مینیمم نسبت رایلی با بردارهای ویژه متناظر با بزرگ‌ترین/کوچک‌ترین مقدار ویژه تعمیم‌یافته به دست می‌آیند.

تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته



○ تجزیه خطی با استفاده از GEVD

$$x(t) = x_s(t) + x_n(t)$$

↓
مطلوب ↓
نامطلوب

$x(t) \in \mathbb{R}^N$ مشاهدات با میانگین صفر

$$\mathbf{C}_x \triangleq E_t\{x(t)x^T(t)\}$$

↓
میانگین‌گیری در زمان

تخمین ماتریس کوواریانس

$$x(t) = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{n}(t)$$

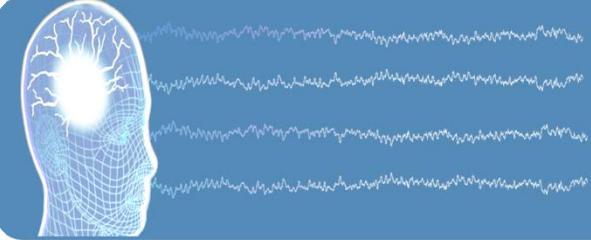
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ماتریس ترکیب

$$\mathbf{n}(t) \in \mathbb{R}^N$$

نویز کوچک

○ هدف: استفاده از دانش اولیه (a priori knowledge) در حل مسئله جداسازی منابع

Sameni et al., 2010, A deflation procedure for subspace decomposition



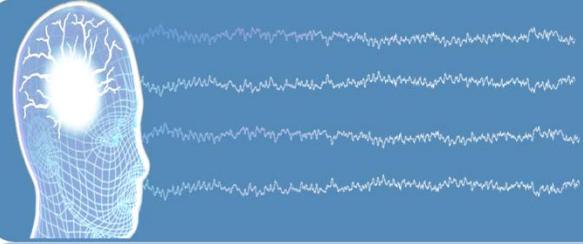
تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌پافته

- هر ترکیب خطی $x(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n(t)$$

$$\triangleq y_s(t) + y_n(t)$$

- می‌خواهیم \mathbf{w} را به گونه‌ای بیابیم که $y(t)$ تا حد ممکن به $y_s(t)$ شبیه باشد.
- $y_n(t)$ کوچک باشد.



تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

:SNR Maximization (۱)

- می‌خواهیم ترکیب خطی مشاهدات را بیشترین SNR به دست آوریم:

$$SNR(\mathbf{w}) \triangleq \frac{E_t\{y_s(t)^2\}}{E_t\{y_n(t)^2\}}$$

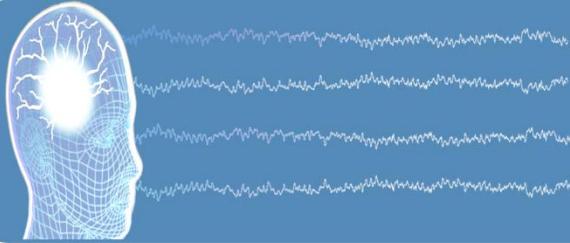
$$= \frac{E_t\{\mathbf{w}^T \mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{w}\}}{E_t\{\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n(t) \mathbf{x}_n^T(t) \mathbf{w}\}} = \frac{\mathbf{w}^T E_t\{\mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^T(t)\} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T E_t\{\mathbf{x}_n(t) \mathbf{x}_n^T(t)\} \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_{x_s} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_{x_n} \mathbf{w}}$$

- با در نظر گرفتن ناهمبستگی بین سیگنال و نویز:

$$\rightarrow SNR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_{x_n} \mathbf{w}} - 1$$

- به حل مسئله GEVD برای زوج ماتریس‌های $(\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_{x_n})$ یا $(\mathbf{C}_{x_s}, \mathbf{C}_{x_n})$ تبدیل می‌شود.
- این رویکرد زمانی مناسب است که \mathbf{C}_{x_s} یا \mathbf{C}_{x_n} را بدانیم یا بتوانیم تخمین بزنیم.

تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته



$$GEVD(\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_{x_n}) \rightarrow \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$$

$$y_1(t) \triangleq \mathbf{w}_1^T \mathbf{x}(t) \quad \text{SNR را دارد} \quad y_1(t)$$

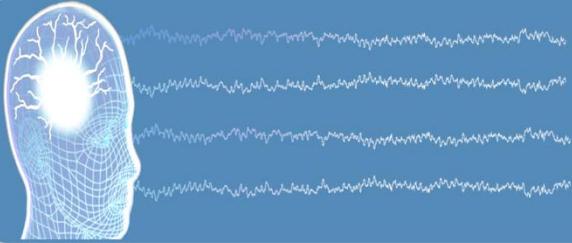
⋮

$$y_N(t) \triangleq \mathbf{w}_N^T \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{W} \triangleq [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N]$$

○ حذف نویز ← اگر y_1 تا y_M منابع مطلوب باشند:

$$\mathbf{y}_{new}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{denoised}(t) = \mathbf{W}^{-T} \mathbf{y}_{new}(t)$$



تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

Nonstationary Maximization (۲)

- اگر بخش سیگنال یا نویز مشاهدات رفتار burst-like داشته باشد، یعنی فقط در دوره‌های خاص از زمان وجود داشته باشد و زمان‌های فعال را بشناسیم یا اینکه بتوانیم تخمین بزنیم.
- مثال: EEG با حرکات چشم، برانگیخته با تحریک، اسپایک‌های صرعی و ...
- مشاهدات به صورت ترکیب‌های غیرایستا از سیگنال و نویز هستند.

$$f(\mathbf{w}) \triangleq \frac{E_{\theta}\{y(\theta)^2\}}{E_t\{y(t)^2\}} = \frac{\mathbf{w}^T \tilde{\mathcal{C}}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathcal{C}_x \mathbf{w}}$$

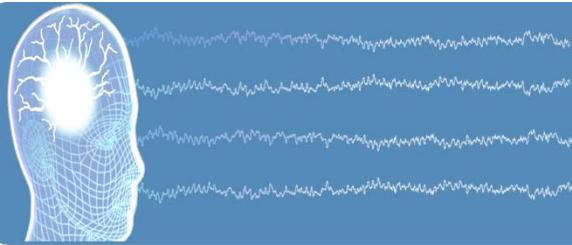
زمان‌های فعال: θ

$$\tilde{\mathcal{C}}_x \triangleq E_{\theta}\{x(\theta)x^T(\theta)\}$$

ماتریس کوواریانس مشاهدات در دوره‌های غیرایستایی

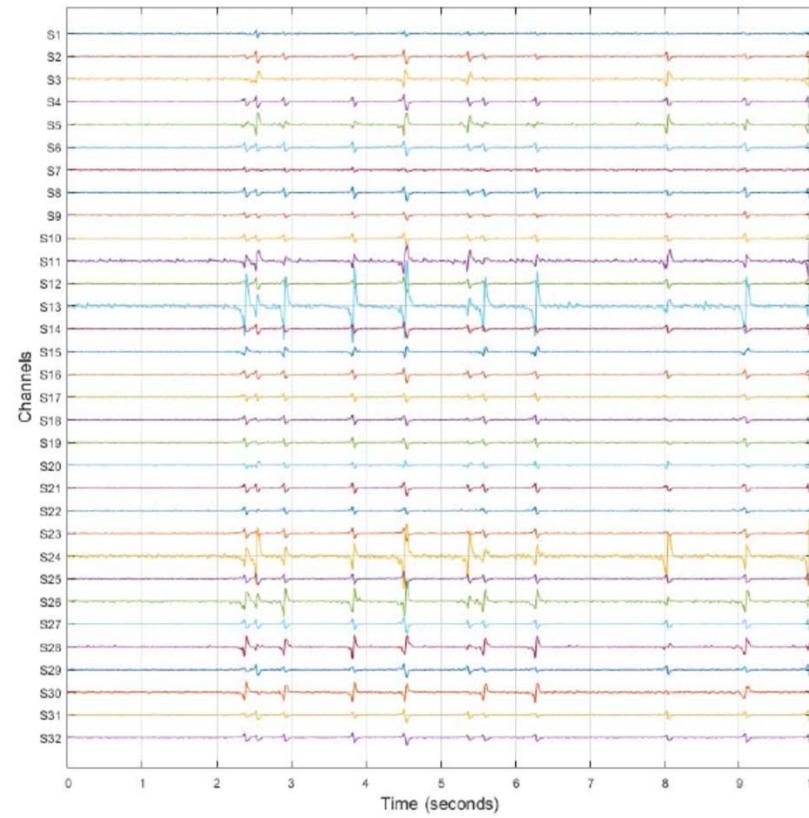
- با بیشینه کردن $f(\mathbf{w})$ می‌توان مولفه‌هایی را پیدا کرد که بیشترین انرژی را در دوره‌های θ دارند، در حالی که سهم کمتری را در انرژی کلی سیگنال دارند.
- حل مسئله GEVD زوج ماتریس $(\tilde{\mathcal{C}}_x, \mathcal{C}_x)$

تجزیه مقادیر ویژه تعمیم یافته

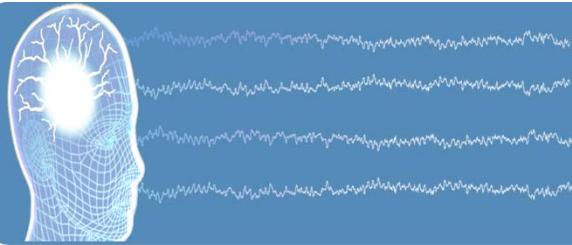


Nonstationary Maximization (۲)

مثال: سیگنال بدون نویز

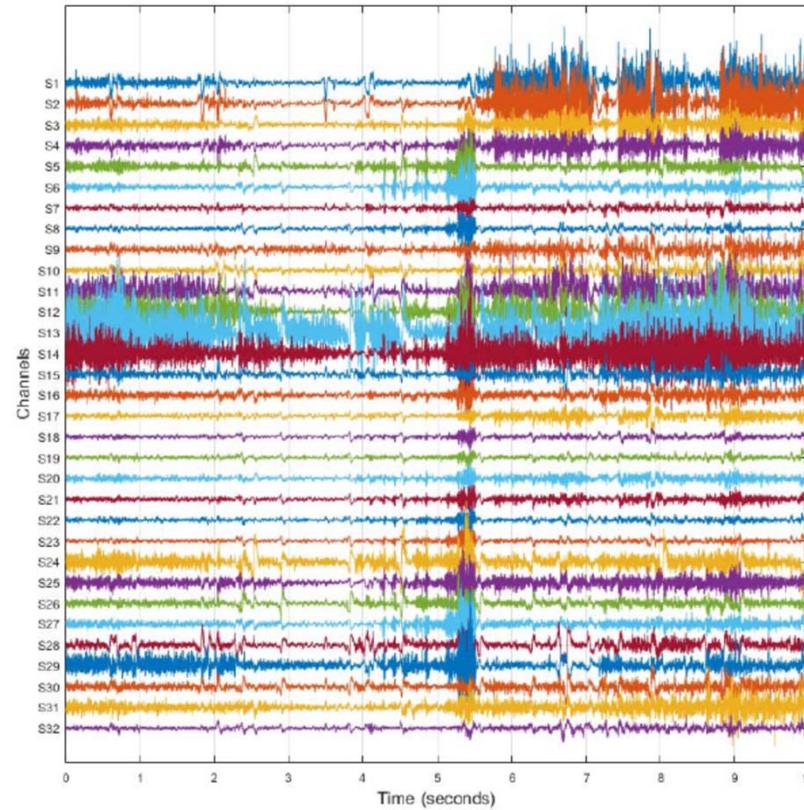


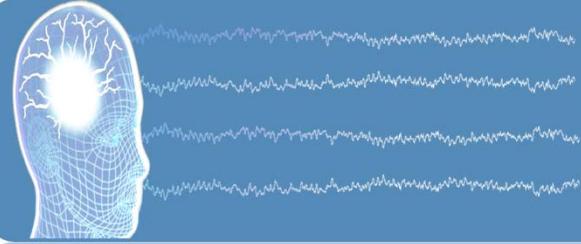
تجزیه مقادیر ویژه تعمیم یافته



Nonstationary Maximization (۲)

مثال: سیگنال نویزی

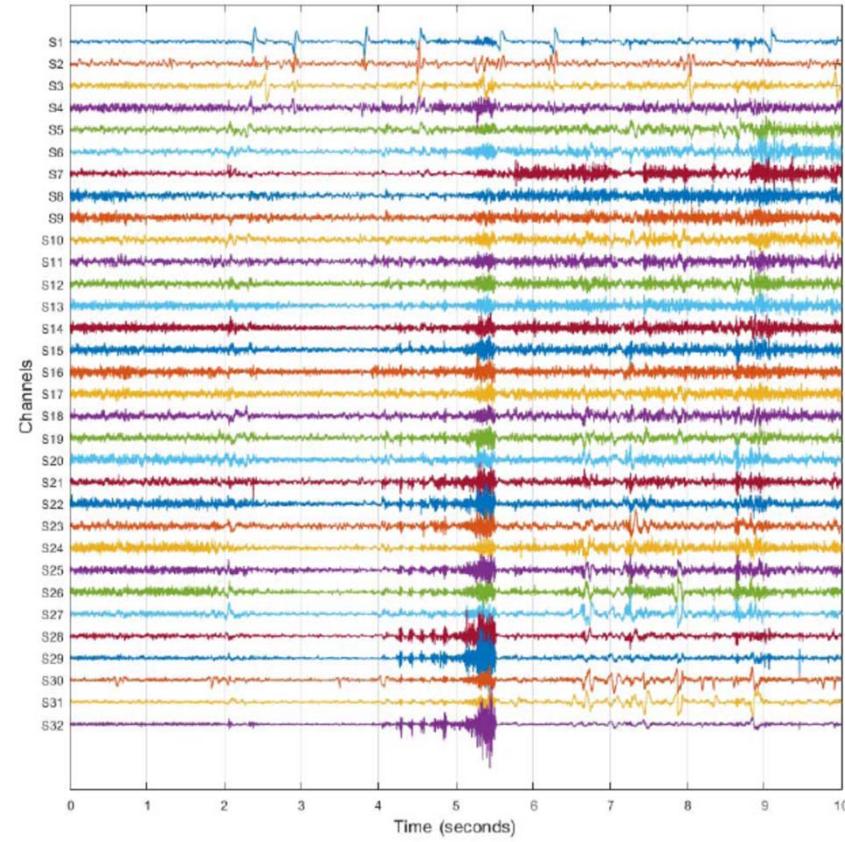


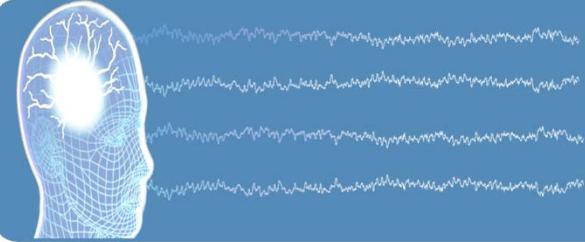


تجزیه مقادیر ویژه تعمیم یافته

Nonstationary Maximization (۲)

مثال: منابع به دست آمده با روش GEVD

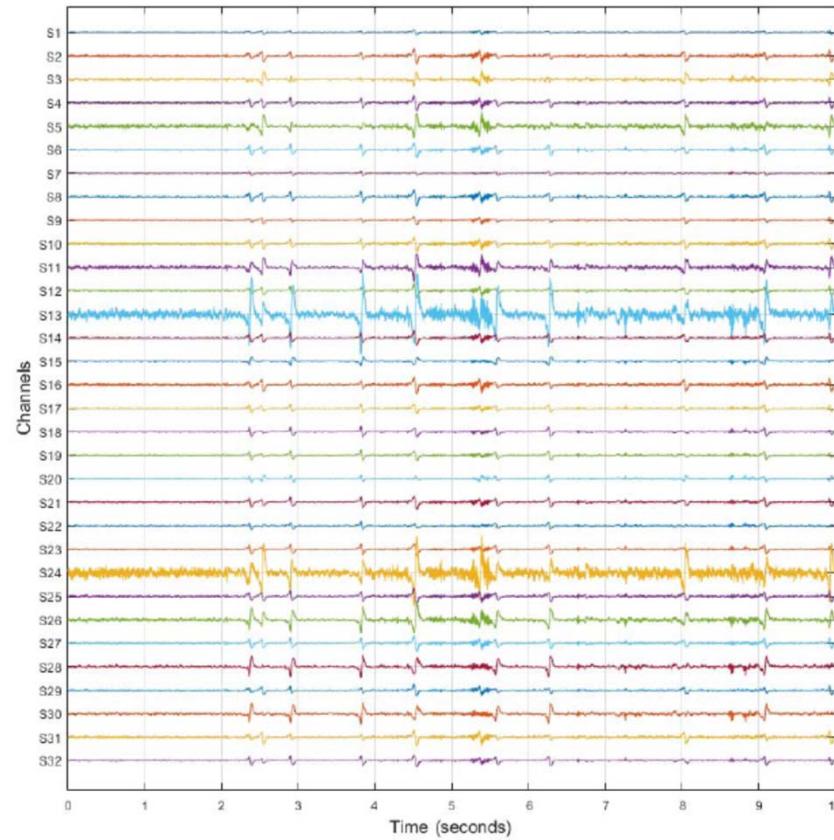


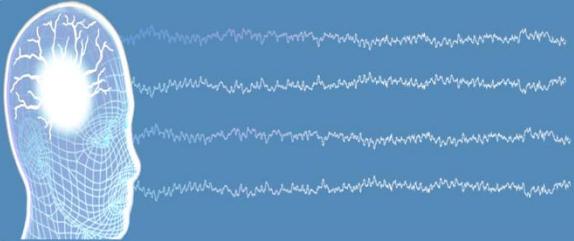


تجزیه مقادیر ویژه تعمیم یافته

Nonstationary Maximization (۲)

مثال: سیگنال حذف نویز شده با روش GEVD





تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

:Spectral Contrast Maximization (۳)

- جدایی‌پذیری سیگنال و نویز ممکن است در حوزه‌هایی به جز زمان برقرار باشد:
- هر حوزه‌ای که خطی بودن را حفظ کند (مانند فرکانس، ولت و ...)
- مثال: جداسازی سیگنال‌هایی با باند محدود
- جداسازی ریتم آلفا یا بتا از EEG نویزی ثبت شده

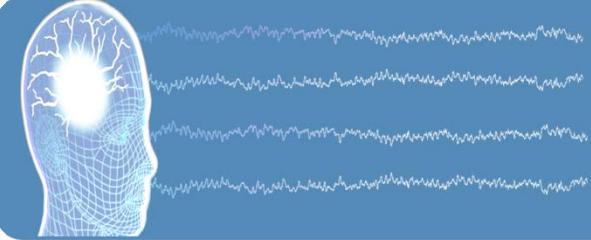
$$Y(f) \triangleq \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{\mathbf{w}^T \mathbf{x}(t)\} = \mathbf{w}^T \mathcal{F}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{w}^T \mathbf{X}(f) \quad \mathbf{X}(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{F}\{x_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{F}\{x_N(t)\} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(\mathbf{w}) \triangleq \frac{E_v\{|Y(v)|^2\}}{E_f\{|Y(f)|^2\}} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}}$$

با توجه به قضیه پارسوال

باند فرکانسی مطلوب v :
کل باند فرکانسی f :

$$\mathbf{S}_x \triangleq E_v\{\mathbf{X}(v)\mathbf{X}^H(v)\} \quad \text{Cross-spectrum}$$



تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

◦ Spectral Contrast Maximization (۳)

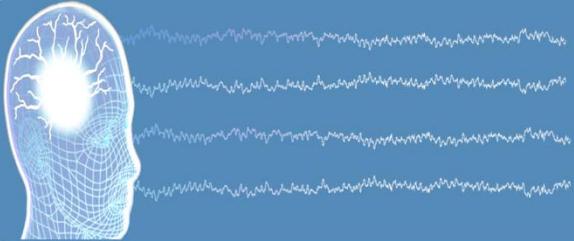
$$\sigma(\mathbf{w}) \triangleq \frac{E_v\{|Y(v)|^2\}}{E_f\{|Y(f)|^2\}} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}}$$

v: باند فرکانسی مطلوب
f: کل باند فرکانسی

$\mathbf{S}_x \triangleq E_v\{\mathbf{X}(v)\mathbf{X}^H(v)\}$ Cross-spectrum

برای اینکه \mathcal{L}_x متقارن حقیقی شود، فرکانس‌های مثبت و منفی به صورت متقارن در نظر گرفته می‌شوند.

◦ حل مسئله GEVD زوج ماتریس $(\mathbf{S}_x, \mathbf{C}_x)$



تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

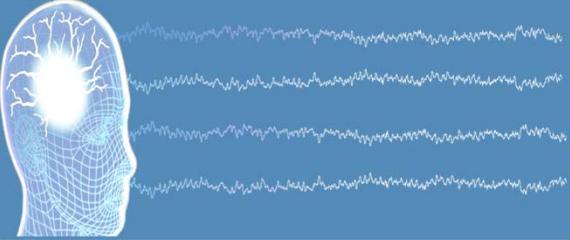
:Periodicity Maximization (E)

- بخش مطلوب یا نامطلوب سیگنال مشاهدات متناوب یا شبهمتناوب باشد.
- مثال: ترکیب ECG یا MCG با نویز

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{w}) &\triangleq \frac{E_t\{y(t)y(t + \tau_t)\}}{E_t\{y^2(t)\}} \\ &= \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{P}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}} \quad \mathbf{P}_x \triangleq E_t\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau_t)\}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\mathbf{w}^T \widetilde{\mathbf{P}}_x \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}} \quad \widetilde{\mathbf{P}}_x \triangleq \frac{1}{2} (\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_x^T)$$

- حل مسئله GEVD زوج ماتریس ($\mathbf{P}_x, \mathbf{C}_x$)

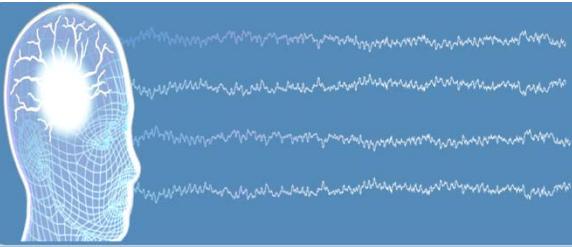


تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌پافته

- در همه حالت‌های توضیح داده شده، مسئله GEVD خوش‌رفتار است:
- ماتریس‌های مثبت معین
- نکته مهم: مولفه‌ها بر اساس اطلاعات اولیه استفاده شده مرتب می‌شوند.
- مولفه‌های به‌دست‌آمده، ناهم‌بسته و سفیدسازی شده‌اند:
- افزونگی در مولفه‌های استخراج شده نداریم.

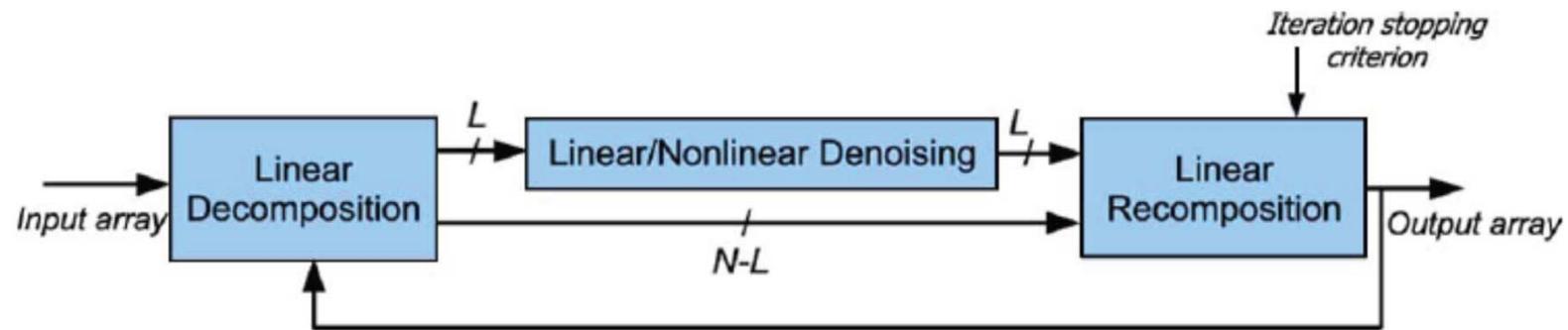
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{W}^T \mathbf{C}_x \mathbf{W} = \Lambda$$

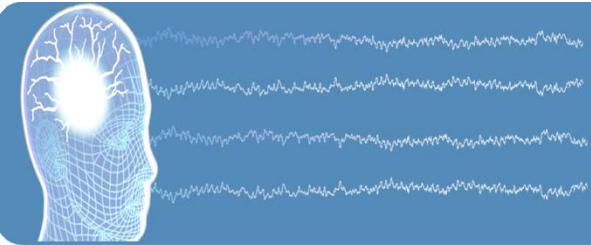


تجزیه مقادیر ویژه تعمیم‌یافته

The subspace decomposition with a deflation procedure



Sameni et al., 2010, A deflation procedure for subspace decomposition



DSS

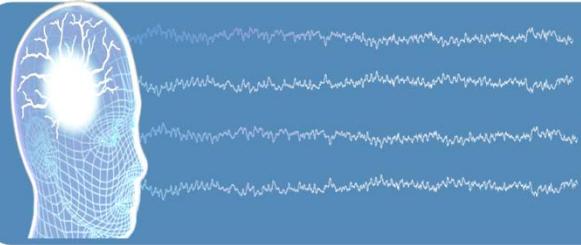
- (DSS) Denoising Source Separation (چارچوب DSS)
- روشن نیمه کور برای استخراج منابع بر مبنای الگوریتم Expectation-Maximization (EM)
- منابع یکی یکی استخراج می‌شوند.
- از مدل آماری زیر استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = Gr[n] + v[n], \quad n = 1, \dots, N \quad r[n] \in \mathbb{R}^P$$

- فرض: مشاهدات $x[n]$ سفیدسازی شده‌اند:
- ماتریس کوواریانس مشاهدات بدون نویز برابر با ماتریس همانی است.
- در نتیجه، تعداد مشاهدات برابر با تعداد منابع بوده و G یک ماتریس $P \times P$ متعامد است.
- هدف: تعیین ماتریس ترکیب G و سیگнал منابع

Särelä, J., & Valpoli, H. (2005). Denoising source separation

چارچوب DSS



- شروع از یک مقدار تصادفی برای بردار $w_p^{(0)} \in \mathbb{R}^P$: E (۱ گام)
- الف) محاسبه تخمین نویزی یکی از منابع:

$$\forall n, \quad r_p^{(i)}[n] = w_p^{(i)T} x[n]$$

- ب) حذف نویز بر اساس اطلاعات اولیه در مورد منابع:

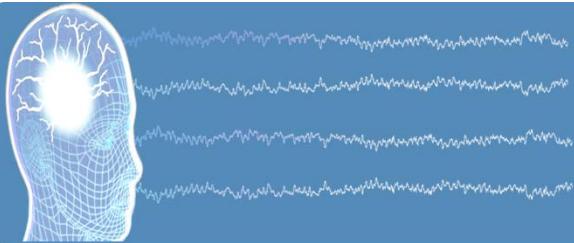
$$\forall n, \quad r_p^{(i)+}[n] = f(r_p^{(i)}[n]) \quad :M \text{ گام (۲)}$$

$$w_p^{(i)+} = \sum_{n=1}^N x[n] r_p^{(i)+}[n] \quad :w_p^{(i)} \text{ ML}$$

$$w_p^{(i+1)} = \frac{w_p^{(i)+}}{\|w_p^{(i)+}\|} \quad ○ \text{نرمالیزه کردن بردار ترکیب:}$$

$r_p^{(i)}[n]$ بیانگر p -امین بردار جداکننده و p -امین منبع در تکرار i -ام هستند.

DSS



- هرچند تفسیر ارائه شده جدید نیست، اما امکان توسعه الگوریتم‌های جدیدی را به وجود می‌آورد که از مدل‌های ریاضی به دست نیامده‌اند.
- در نتیجه خانواده الگوریتم‌های DSS به صورت الگوریتم‌هایی به فرم دو گام ۱ و ۲ تعریف می‌شوند که معادله (ب) به صورت یک فرمول حذف نویز بیان می‌شود.

❖ نکات تكميلی:

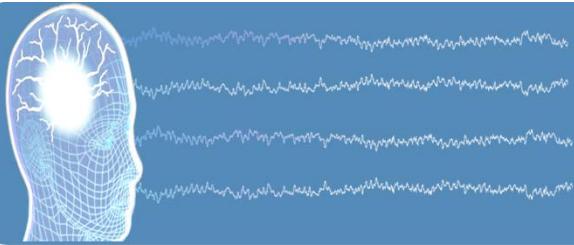
- منابع با توجه به اطلاعاتی که راجع به آنها داریم یک به یک استخراج می‌شوند:

$$\forall n, \quad r_p^{(i)+}[n] = f(r_p^{(i)}[n])$$

↓
متلاً صفر کردن بازه‌های off

- نیازی به استخراج همه منابع نیست.

DSS



- برای اینکه منبع جدید به یکی از منابع قبلی همگرا نشود، به مرحله (ج) یک مرحله (ج^۲) نیز اضافه می‌کنیم:

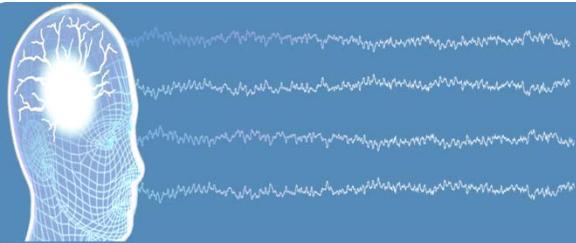
$$\mathbf{w}_{orth_p}^{(i)} = \mathbf{w}_p^{(i)} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{w}_p^{(i)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{w}_p^{(i)} = \boldsymbol{\Pi}^\perp\mathbf{w}_p^{(i)}$$

$$\mathbf{A} \triangleq [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{p-1}] \in \mathbb{R}^{P \times (p-1)}$$

سپس نرمالیزاسیون را روی $\mathbf{w}_{orth_p}^{(i)}$ انجام می‌دهیم.

- مرحله حذف نویز (ب)، مانند GEVD ممکن است با اطلاعات در حوزه زمان، فرکانس، تناوب و ... انجام شود.
- اطلاعات برای استخراج منابع جدید ممکن است یکسان یا متفاوت باشد.

DSS



- مراحل کلی حذف نویز با استفاده از چارچوب DSS:

$$\mathbf{x}[n] \in \mathbb{R}^N \quad \text{مشاهدات}$$

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{x}[n] \quad \mathbf{B}^\dagger \in \mathbb{R}^{P \times N} \quad \mathbf{z}[n] \in \mathbb{R}^P$$

مشاهدات سفیدسازی شده

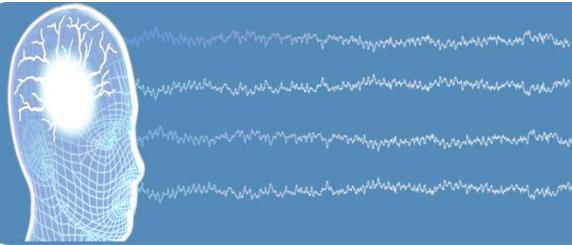
- اعمال DSS و استخراج M منبع مطلوب:

$$r_p[n] = \mathbf{w}_p^T \mathbf{z}[n]$$

$$\mathbf{W} \triangleq [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_P] \in \mathbb{R}^{P \times P}$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}[n] = \mathbf{W}^T \mathbf{z}[n] = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z}[n]$$

DSS



$$\mathbf{r}[n] = \begin{bmatrix} r_1[n] \\ \vdots \\ r_P[n] \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{new}[n] = \begin{bmatrix} r_1[n] \\ \vdots \\ r_M[n] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{z}[n] = \mathbf{W}\mathbf{r}[n] = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_P]\mathbf{r}[n]$$

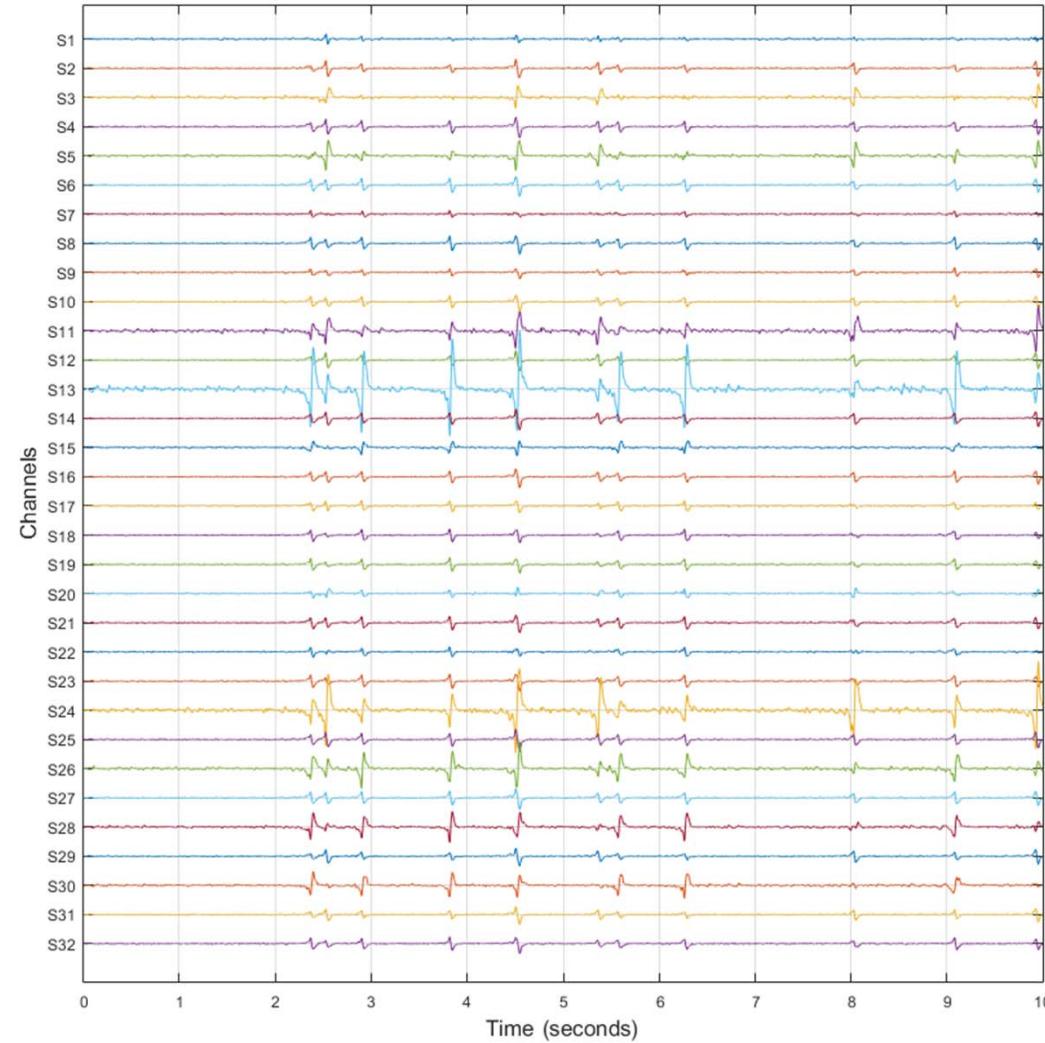
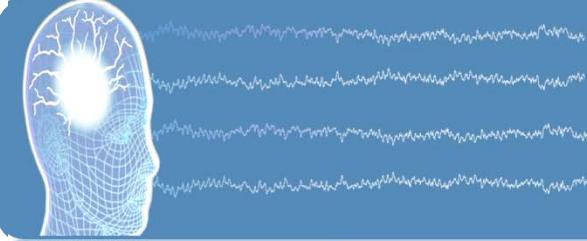
$$\rightarrow \quad \mathbf{z}_{denoised}[n] = \mathbf{W}\mathbf{r}_{new}[n] = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_P]\mathbf{r}_{new}[n]$$

$$\mathbf{z}_{denoised}[n] = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_P] \begin{bmatrix} r_1[n] \\ \vdots \\ r_M[n] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_P] \begin{bmatrix} r_1[n] \\ \vdots \\ r_M[n] \end{bmatrix}$$

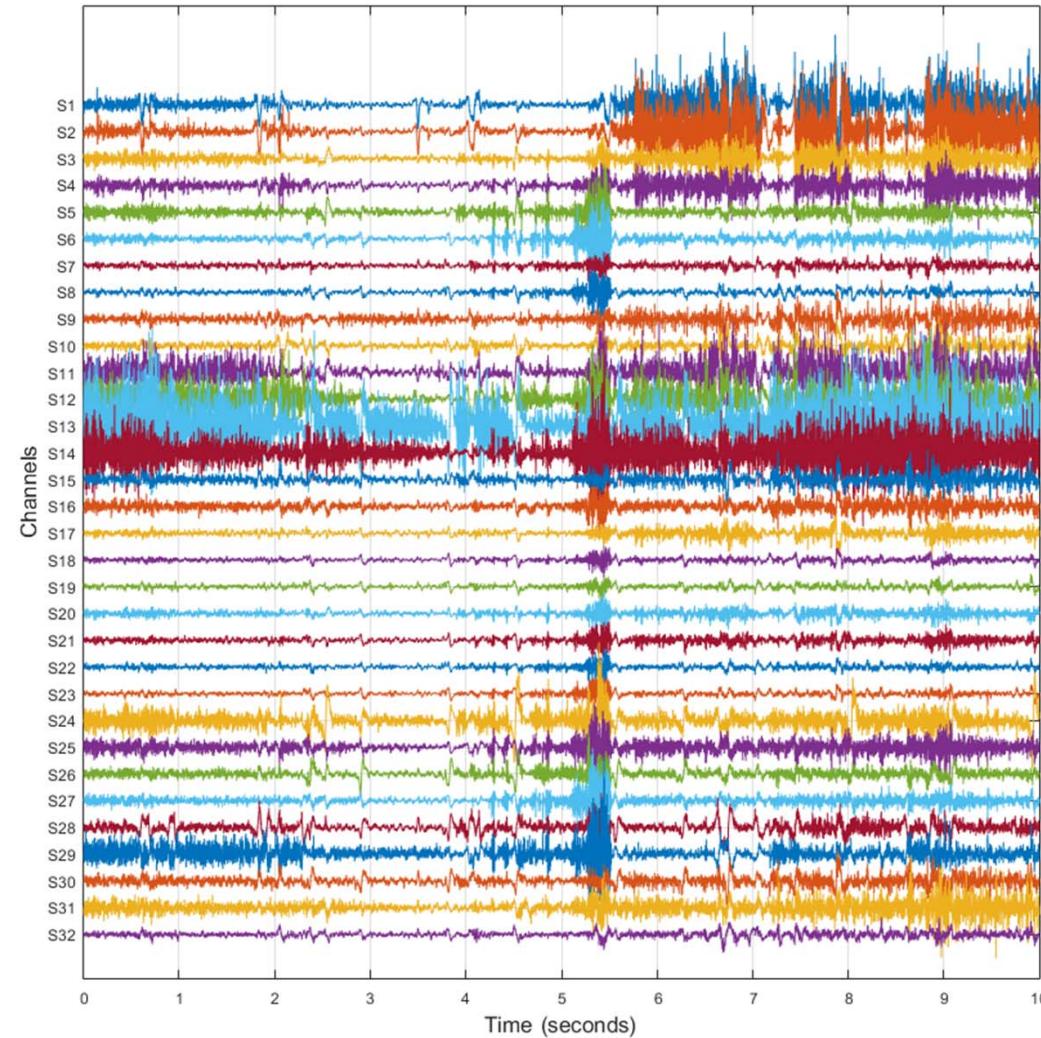
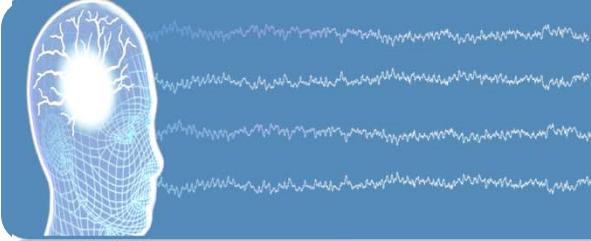
$$\mathbf{W}_{new} \triangleq [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M] \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{denoised}[n] = \mathbf{B}\mathbf{W}_{new} \begin{bmatrix} r_1[n] \\ \vdots \\ r_M[n] \end{bmatrix}$$

○ در حذف نویز با استفاده از روش DSS نیازی به استخراج همه منابع نیست.

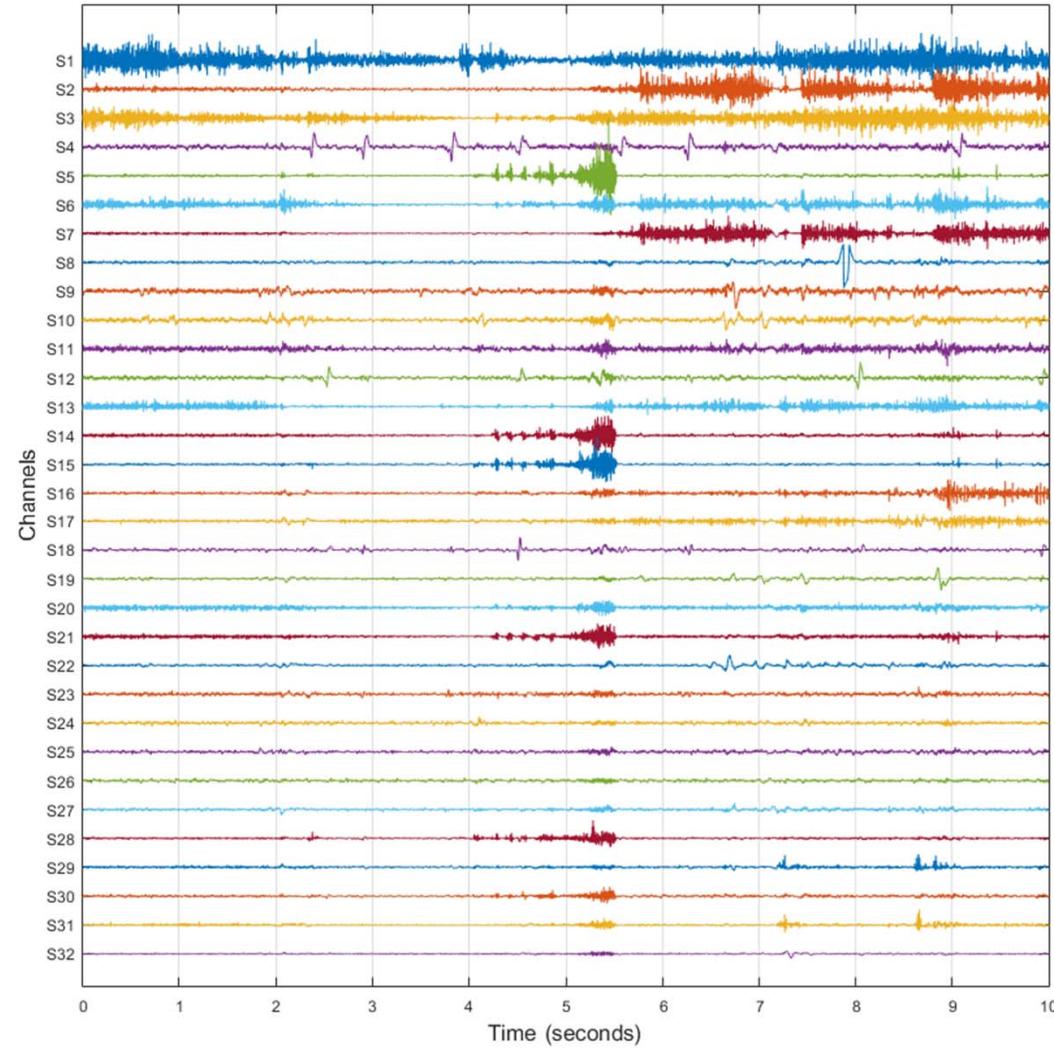
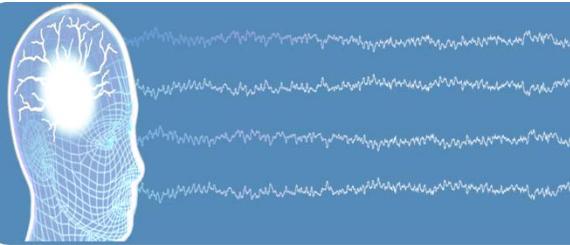
سیگنال بدون نویز



سیگنال نویزی

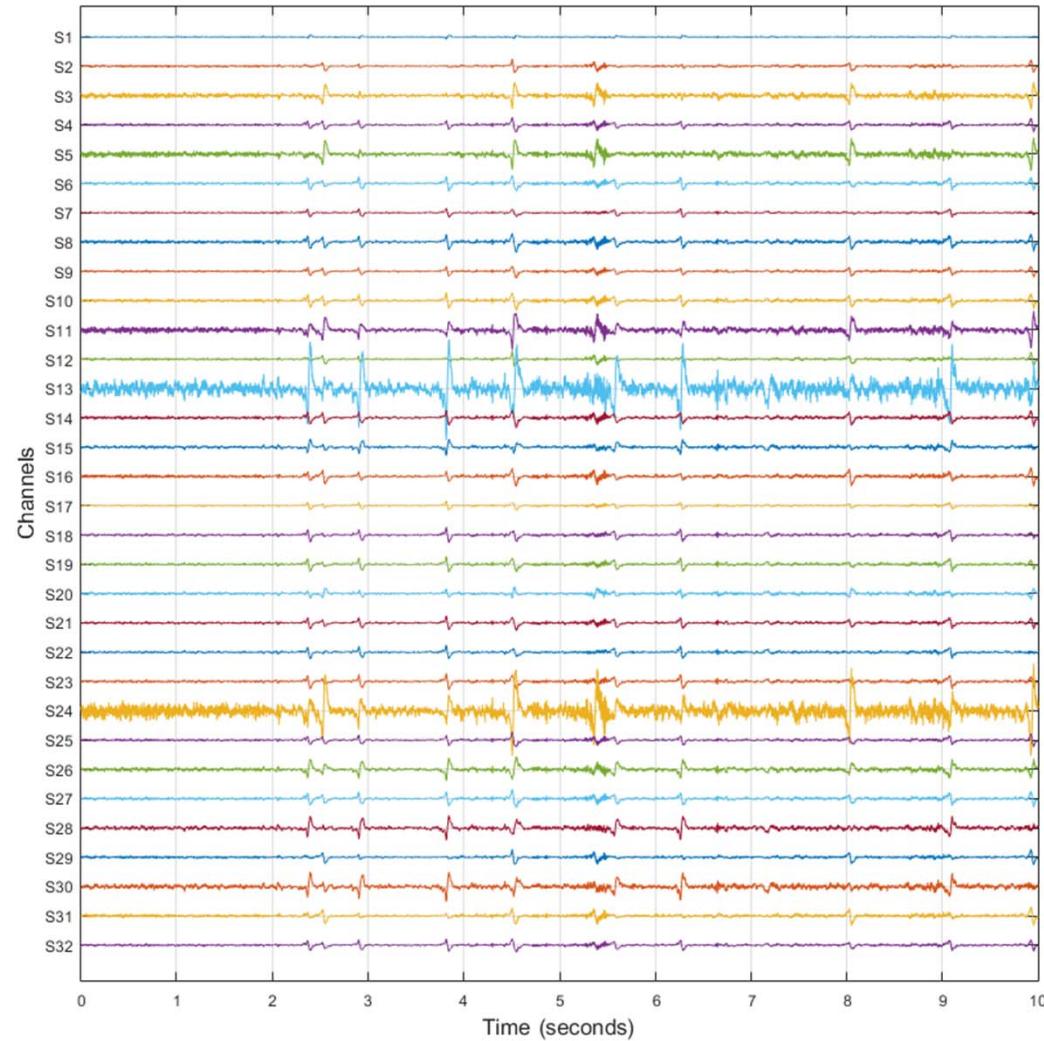


منابع روشن ICA

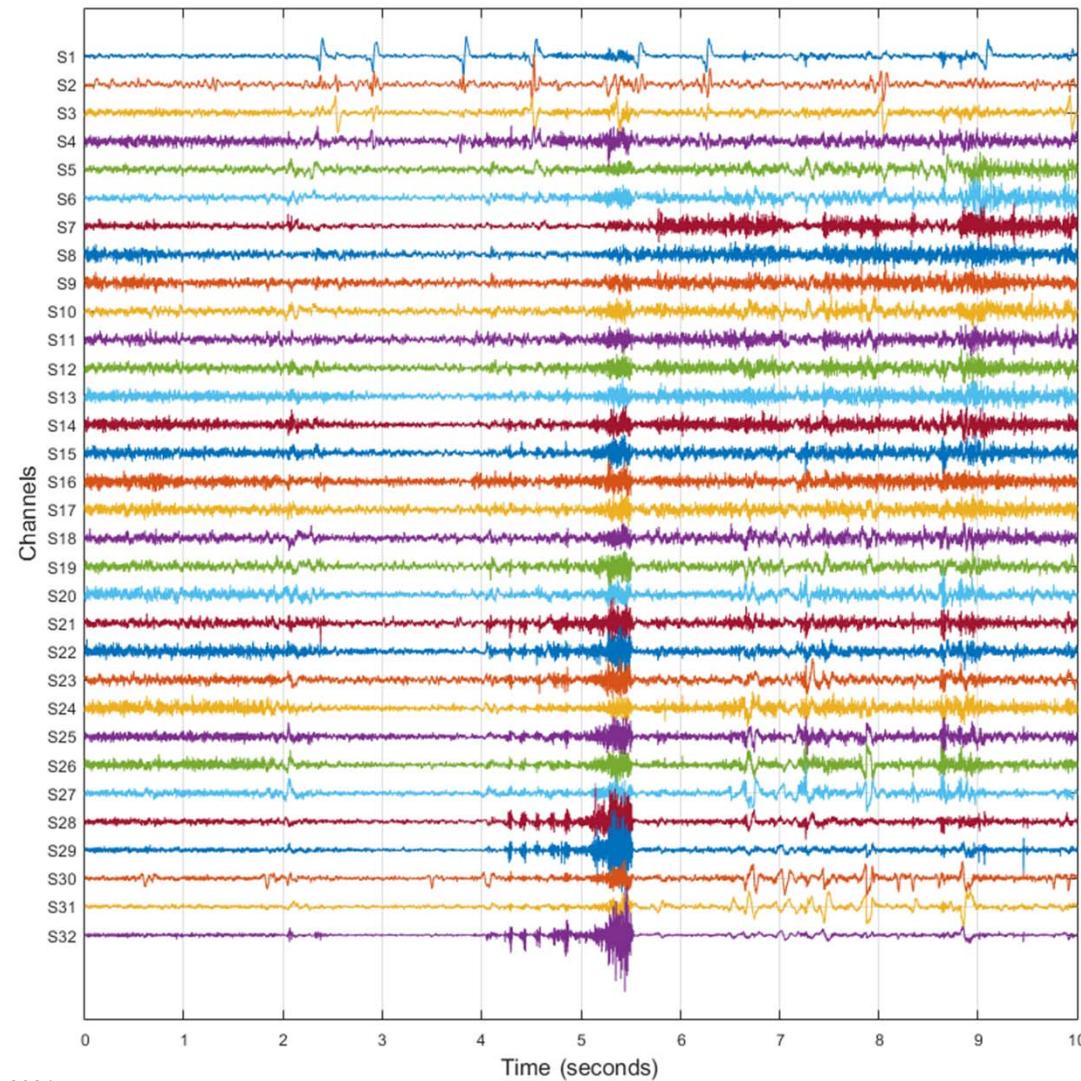
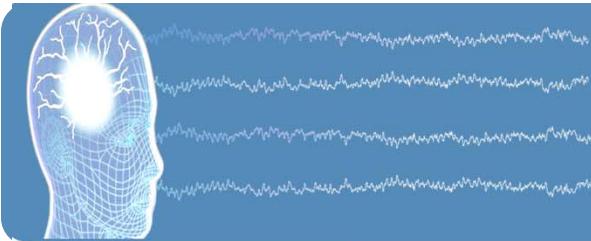




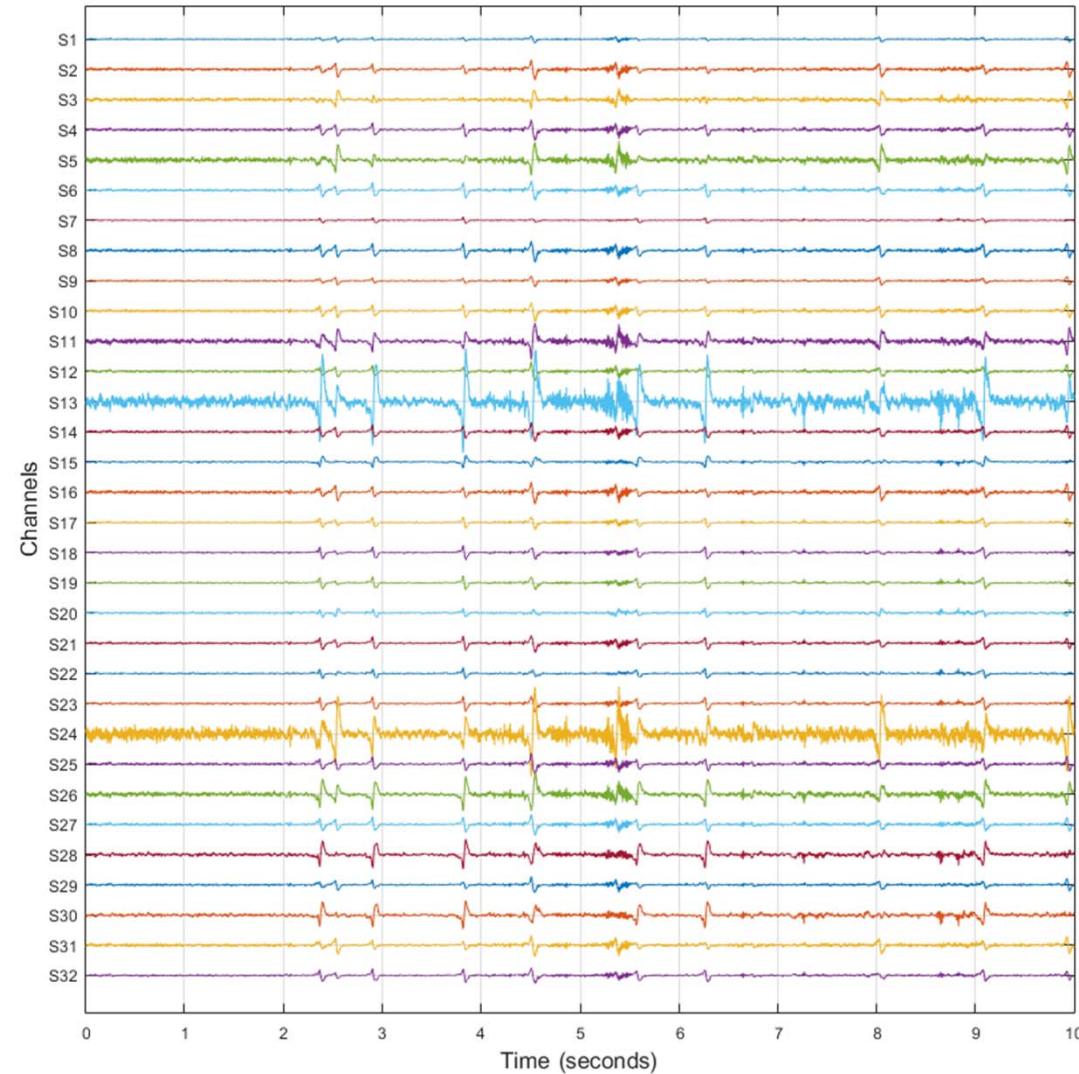
سیگنال حذف نویز شده با روش ICA



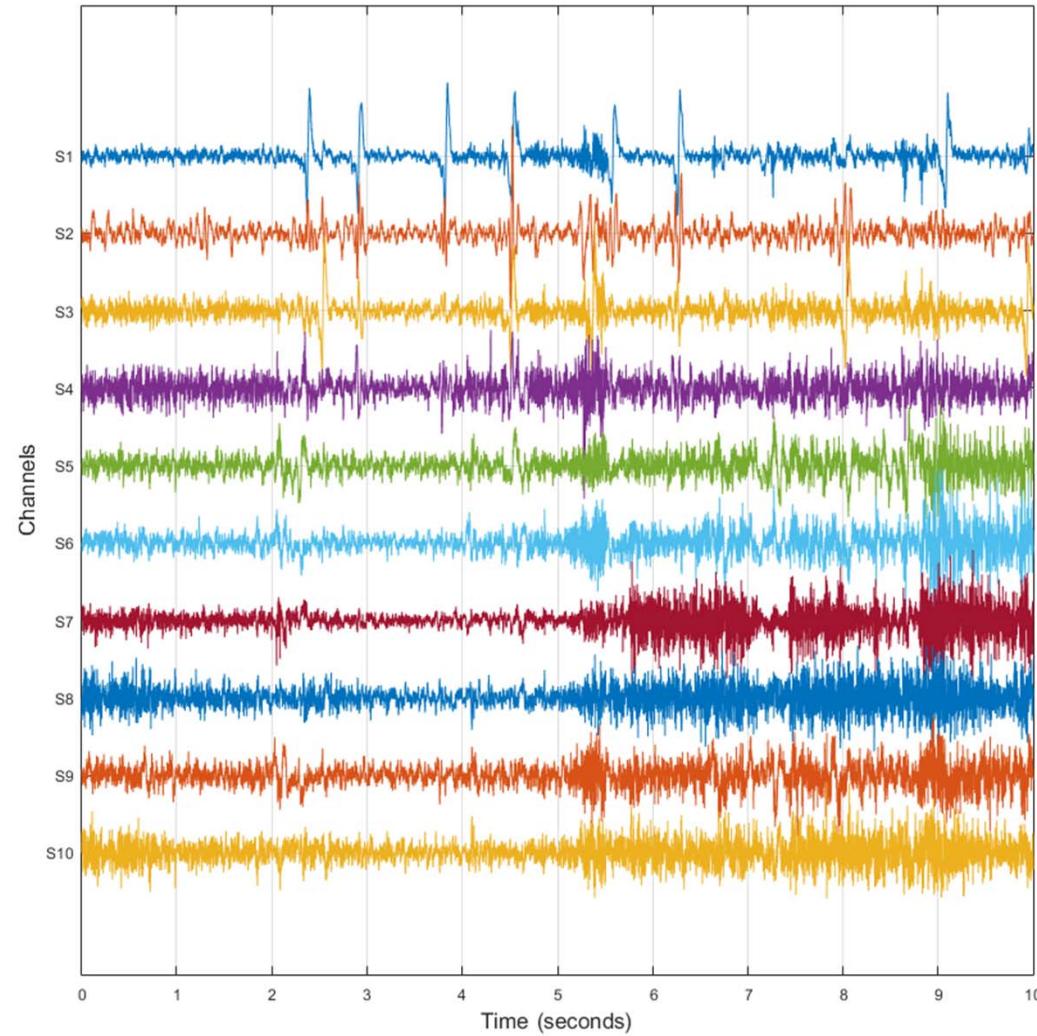
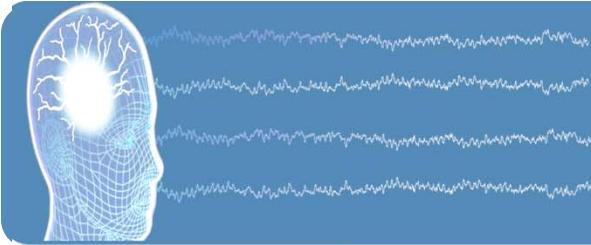
منابع روشن GEVD



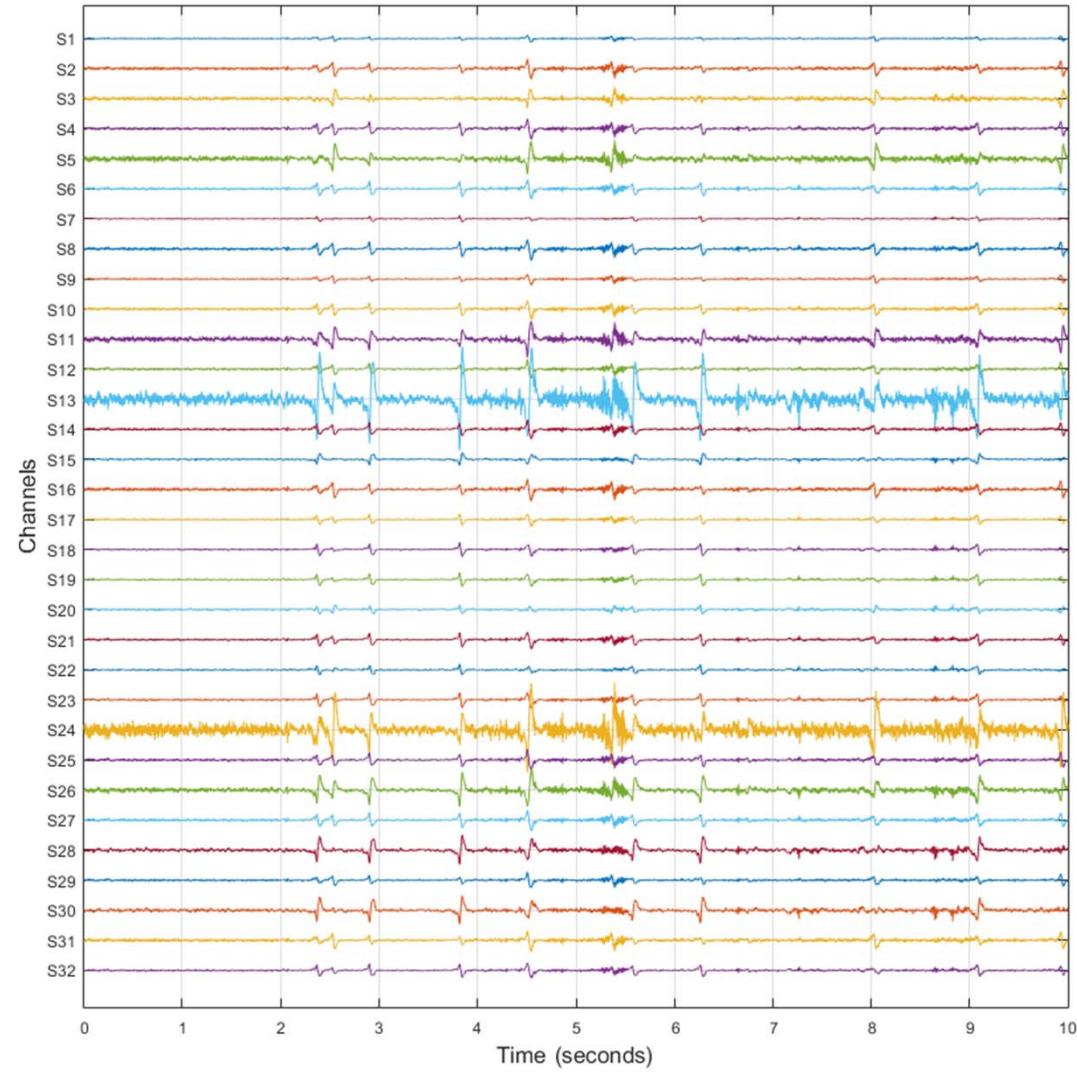
سیگنال حذف نویز شده با روش GEVD



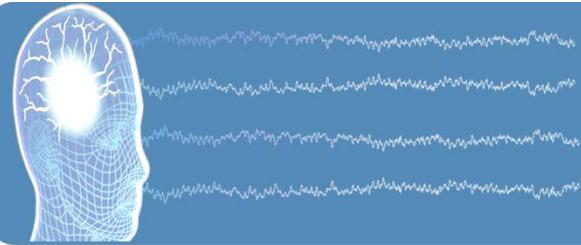
منابع روشن DSS



سیگنال حذف نویز شده با روش DSS



چند تعریف



◦ نسبت سیگنال به نویز (SNR):

$$x[m] = s[m] + N[m]$$

$$\rightarrow SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{E\{S^2\}}{\sigma_N^2}$$

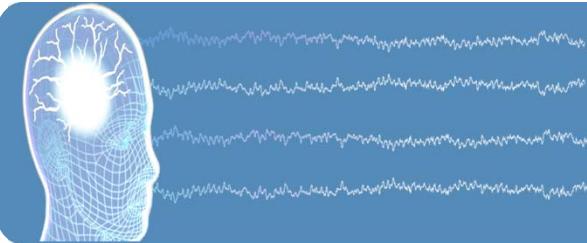
◦ دسی بل (dB): $P_{signal,dB} = 10 \log_{10}(P_{signal})$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SNR) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right)$$

◦ محاسبه SNR برای یک سیگنال زمانی ($m = 1, \dots, M$):

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{m=1}^M s[m]^2}{\sum_{m=1}^M N[m]^2} \right) = 10 \log_{10} \frac{\|s\|_2^2}{\|N\|_2^2} = 20 \log_{10} \frac{\|s\|_2}{\|N\|_2}$$

چند تعریف



○ اضافه کردن یک نویز با SNR مشخص به یک سیگنال:

$$P_s = \|s\|_2^2$$

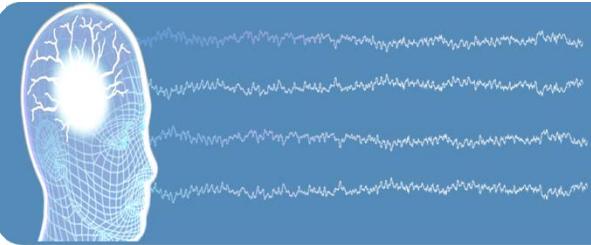
$$P_N = \|N\|_2^2$$

$$\text{SNR}_{dB} \text{ داده شده} \rightarrow x[m] = s[m] + \sigma N[m] = s[m] + N'[m]$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\|s\|^2}{\|\sigma N\|^2} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{\sigma^2 P_N} \rightarrow \frac{P_s}{\sigma^2 P_N} = 10^{\left(\frac{SNR_{dB}}{10}\right)}$$

P_s
↑
 $\|s\|^2$
 P_N' ↓

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{P_s}{P_N} \times 10^{-\left(\frac{SNR_{dB}}{10}\right)}$$



چند تعریف

○ سیگنال چند کاناله: SNR

$$x[m] = s[m] + N[m]$$

$$\rightarrow SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M s_n[m]^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_n[m]^2} \right)$$

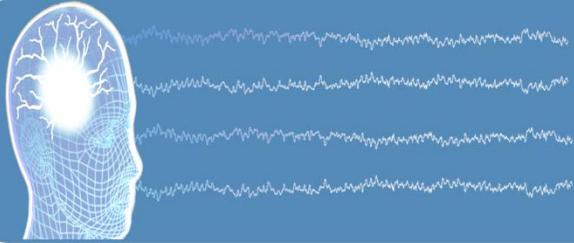
○ اضافه کردن نویز چند کاناله با SNR مشخص به یک سیگنال چند کاناله:

$$x[m] = s[m] + \sigma N[m]$$

○ توجه: σ برای همه کانال‌ها ثابت است (σ ‌های مختلف نداریم).

○ در این حالت اگر SNR را برای هر کانال محاسبه کنیم، ممکن است مقادیر متفاوتی به دست آید.

ارزیابی روش‌های حذف نویز



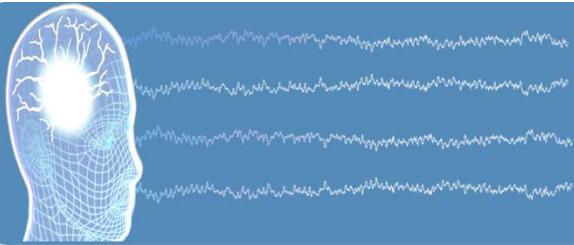
- داده‌های شبیه‌سازی شده:
- بررسی در حوزه منبع
- بررسی در حوزه سنسور
- در حوزه منابع، ترتیب و مقیاس دو عدم قطعیت موجود هستند:
 - منابع اصلی: $s[m]$
 - منابع تخمین‌زده شده: $\hat{s}[m]$

مثال برای معیار درست‌بودن نتایج استخراج منابع:

$$\min_{\Pi} \sum_{p=1}^P corrcoeff(s_p[m], \Pi(\hat{s}[m])_p)$$

: تابع جایگشت Π

ارزیابی روش‌های حذف نویز



- در حوزه سنسور، سیگنال بدون نویز اولیه و سیگنال حذف نویز شده باید از هر نظر یکسان باشند:

- اجازه تغییر ترتیب یا تغییر مقیاس را نداریم.

$$x[m] = x_{org}[m] + N[m] \quad m = 1, \dots, M \quad x_{org}[m] \quad x_{denoised}[m]$$

$$RMSE_n = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (x_{org_n}[m] - x_{den_n}[m])^2}$$

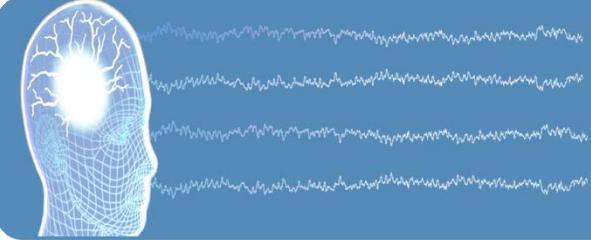
خطای کanal n -ام

$$RRMSE_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (x_{org_n}[m] - x_{den_n}[m])^2}}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (x_{org_n}[m])^2}}$$

خطای نسبی کanal n -ام

$$RRMSE = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (x_{org_n}[m] - x_{den_n}[m])^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (x_{org_n}[m])^2}}$$

خطای نسبی کل کانال‌ها



ارزیابی روش‌های حذف نویز

- استفاده از نتایج مکانیابی منابع:

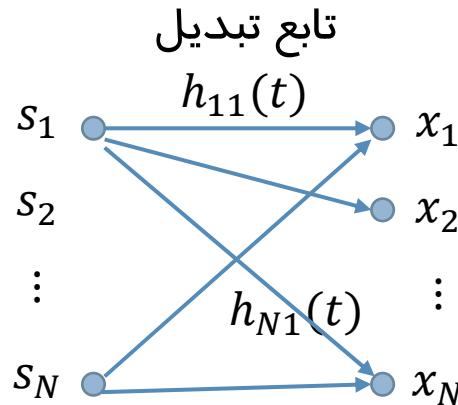
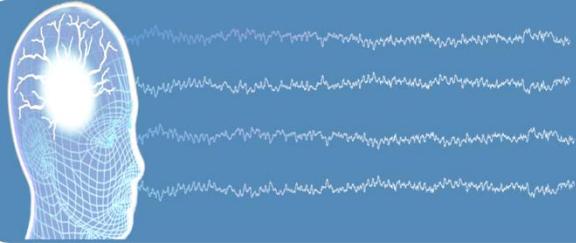
- AUC و ROC

- داده‌های واقعی:

- نتایج مکانیابی منابع و مقایسه با بازه‌های بدون نویز یا مدل‌یته‌های دیگر

- نتایج طبقه‌بندی

مخلوطهای کانولوتویو

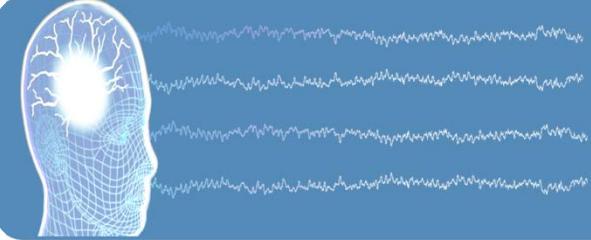


- مخلوطهای کانولوتویو:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(t) * s_j(t)$$

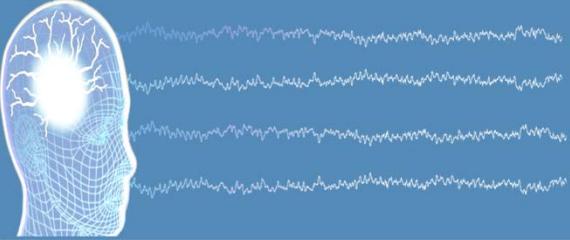
- در مورد مخلوطهای کانولوتویو هم می‌توان اثبات کرد که استقلال خروجی‌ها موجب جدایی از منابع می‌شود.

- اما ابهام از مخلوطهای لحظه‌ای بیشتر است.



مخلوطهای کانولوتویو

- ابهام‌های مخلوطهای لحظه‌ای:
 - ترتیب
 - دامنه (مقیاس)
- ابهام‌های مخلوطهای کانولوتویو:
 - ترتیب
 - فیلترینگ:
- سیگنال‌های منابع با ابهام از یک فیلتر نامعلوم به دست می‌آیند.
- توجه: در مخلوطهای کانولوتویو اگر چه خود منابع تنها با تقریب یک فیلتر نامعلوم به دست می‌آیند، ولی می‌توان اثر هر منبع در هر سنسور (یعنی آنچه که سنسور می‌دید اگر سایر منابع صفر بودند) را به دست آورد.



مخلوطهای کانولوتویو

- ایده‌های استفاده شده برای جداسازی مخلوطهای کانولوتویو:
 - روش‌های حوزه زمان
 - روش‌های حوزه فرکانس
- یک روش در حوزه فرکانس:

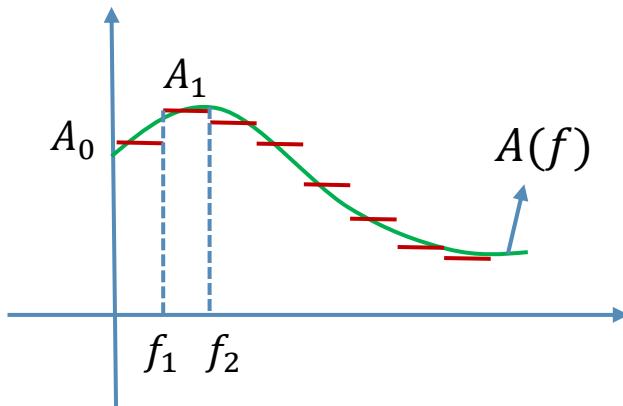
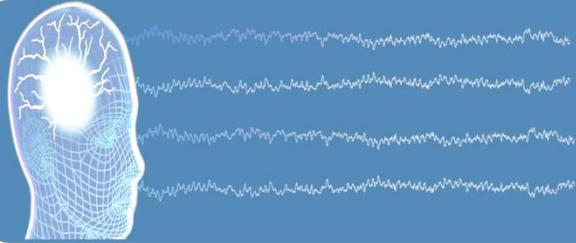
$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(t) * s_j(t)$$

$$x_i(f) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(f) \cdot s_j(f) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(f) = \mathbf{A}(f)\mathbf{s}(f)$$

معادل با حل مسئله $\rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{s}(t)$

- یعنی ماتریس ضرایب با زمان تغییر می‌کند.

مخلوطهای کانولوتو

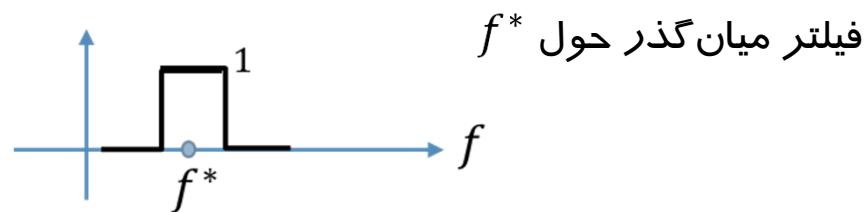


$A(f)$ را در هر بازه ثابت در نظر می‌گیرند.

$$x_i(n) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(n) * s_j(n)$$

$$x_i(f) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(f) \cdot s_j(f)$$

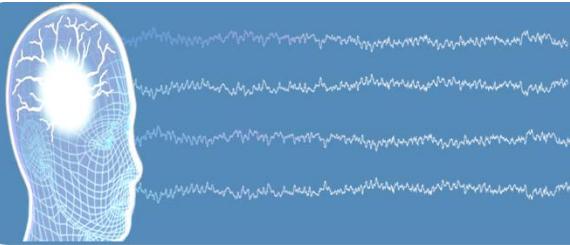
فیلتر شده سیگنال $x_i(n)$ توسط
فیلتر میان‌گذر حول f^*



$$x_i(n, f^*) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(f^*) s_j(n, f^*)$$

عدد ثابت

مخلوطهای کانولوتویو

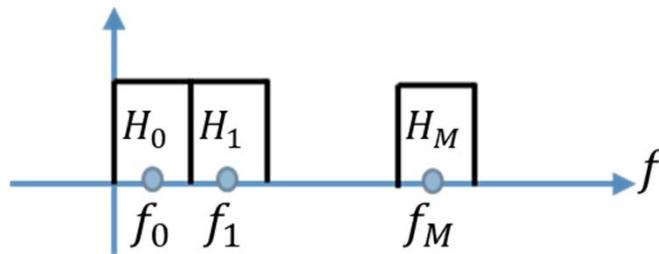


$$x_i(n, f^*) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(f^*) s_j(n, f^*)$$

فیلتر شده سیگنال $x_i(n)$ توسط
فیلتر میان‌گذر حول f^*

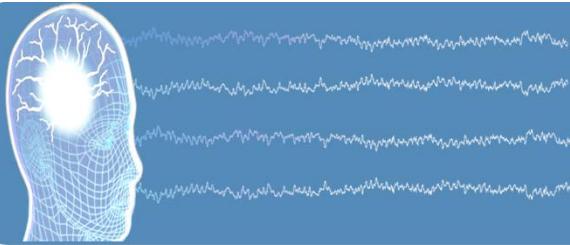
عدد ثابت

- مخلوط لحظه‌ای متناظر با مولفه‌های سنسورها و منابع در یک بین فرکانسی اطراف f^*
- قابل حل شدن با ICA لحظه‌ای
- ایده: در تک تک بین‌های فرکانسی به صورت جداگانه با ICA لحظه‌ای منابع را تخمین بزنیم و بعد همه بین‌های مختلف هر منبع را با هم سنتز کنیم تا سیگنال منابع به دست آید.

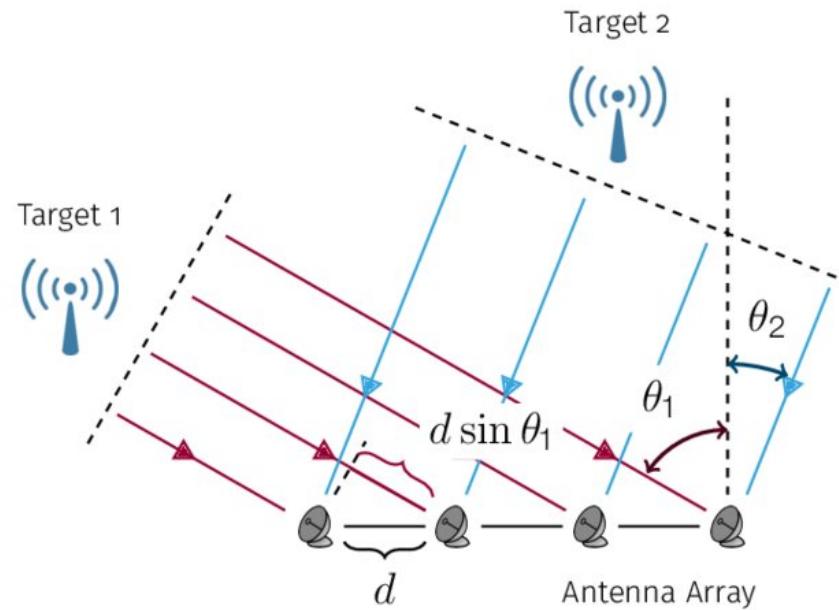


- دو مشکل اساسی:
 - ابهام ترتیب
 - ابهام دامنه

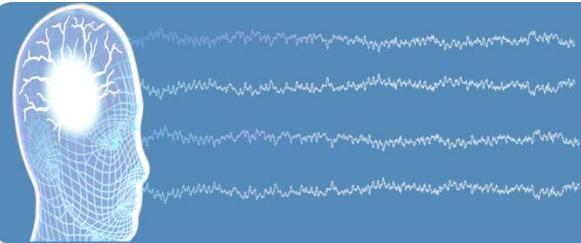
مخلوطهای کانولوتویو



- رفع ابهام ترتیب با استفاده از DoA
- در هر فرکانس، زاویه منابع را به دست آورده و در فرکانس بعدی هم همین عمل را انجام می‌دهیم.
- مولفه‌هایی با یک زاویه مربوط به یک منبع هستند.

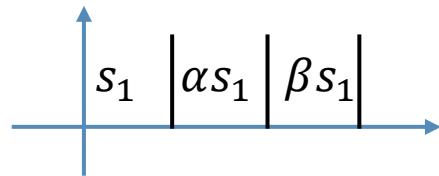


مخلوطهای کانولوتویو



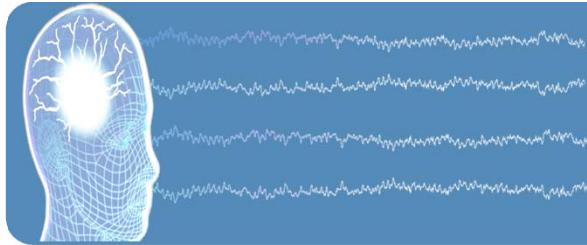
○ رفع مشکل ابهام دامنه (بعد از حل ترتیب):

- در یک بین s_1 ، در یک بین αs_1 و در بین دیگر βs_1 به دست آورده‌ایم.
- یک سری ایده برای حل این مشکل نیز وجود دارد.



○ فصل دوم کتاب Blind Speech Separation, Makino et. al., 2007

تجزیه‌های تانسوری

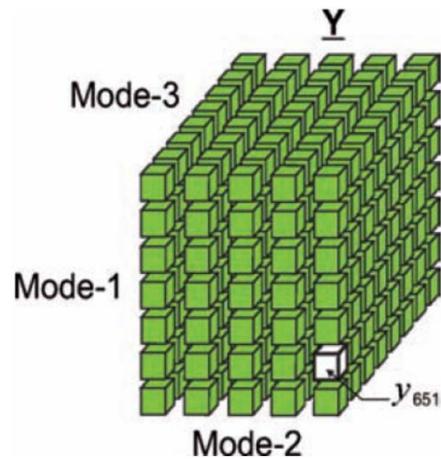


- تانسور:

- آرایه چندراهنمای یا ماتریس چندبعدی

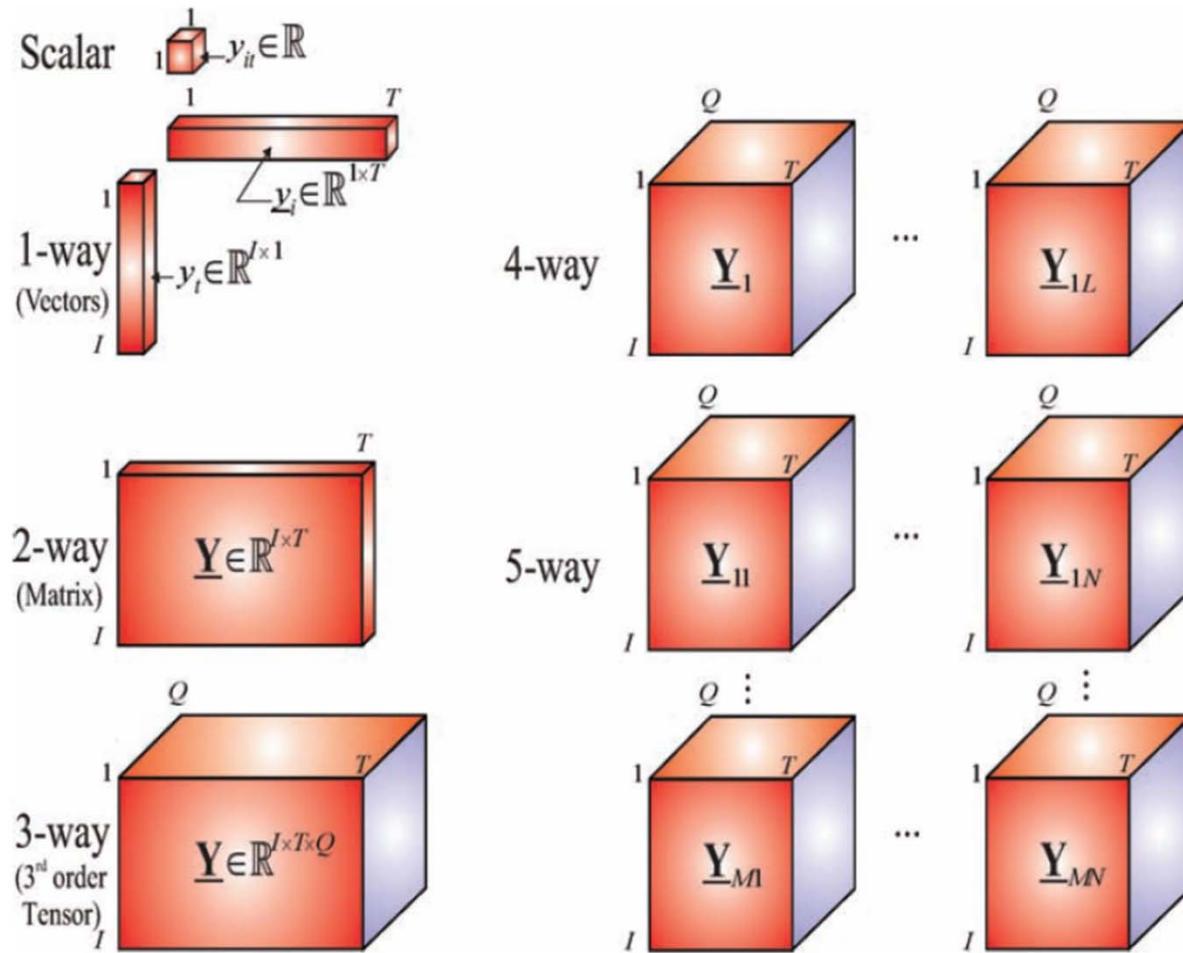
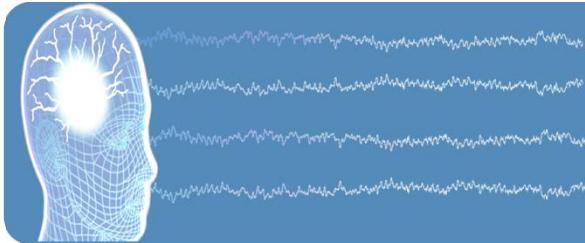
- مرتبه یک تانسور:

- تعداد بعدهای آن که way یا mode هم نامیده می‌شوند.

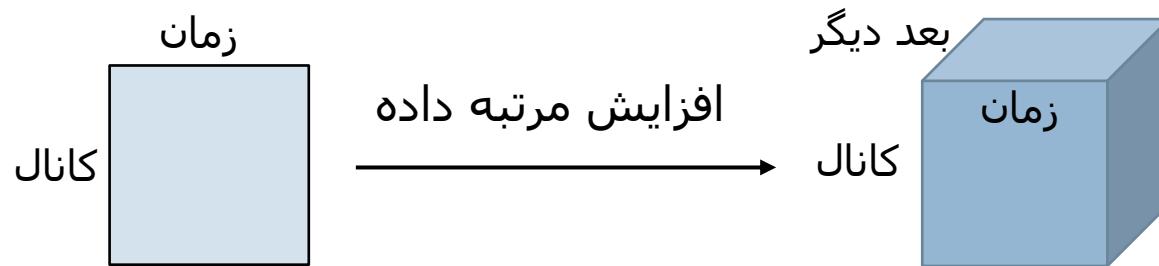
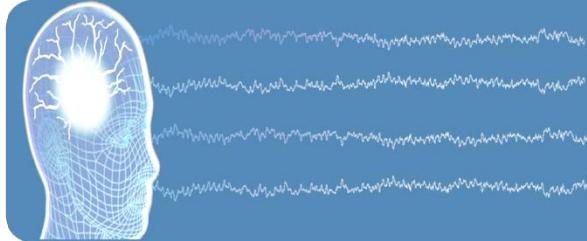


- تانسور مرتبه ۳ یا three-way array

تجزیه‌های تانسوری

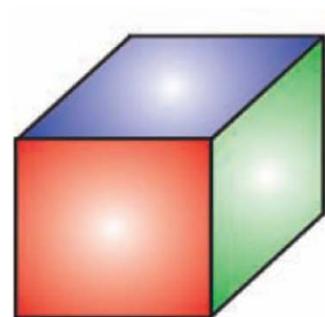
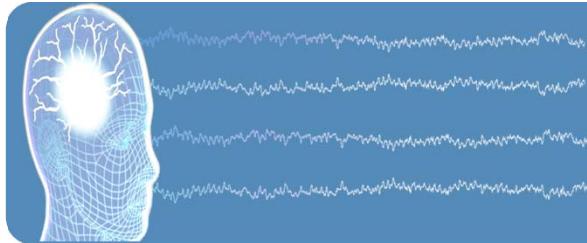


تجزیه‌های تانسوری

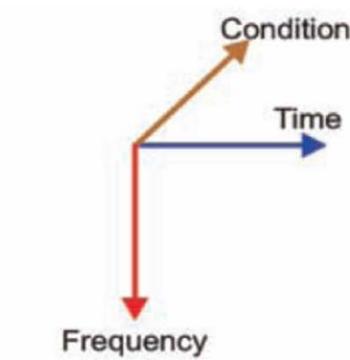
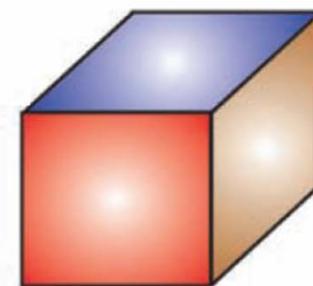
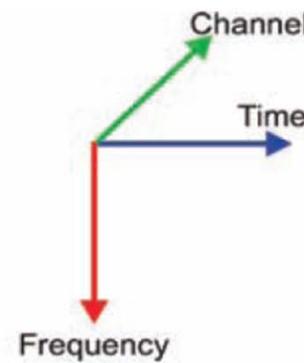


- ابعاد جدید:
- فرکانس: استفاده از تبدیل‌های زمان-فرکانس
- سوژه
- آزمایش (تکرار)
- ... ○

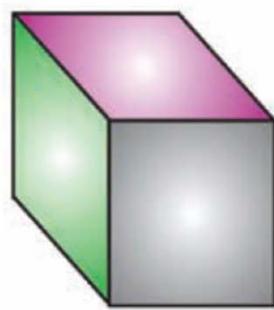
تجزیه‌های تانسوری



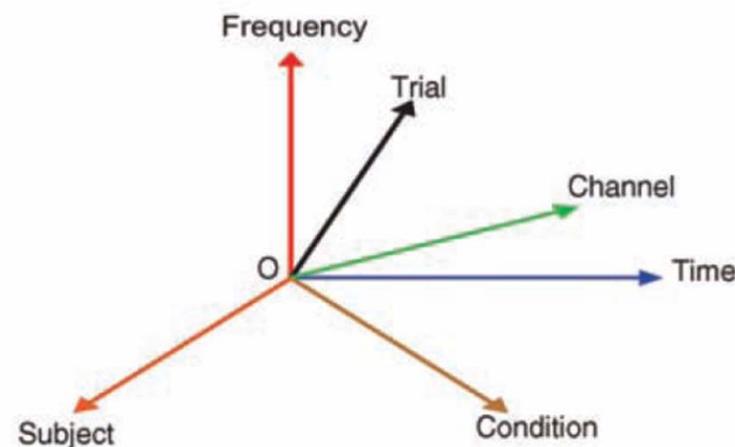
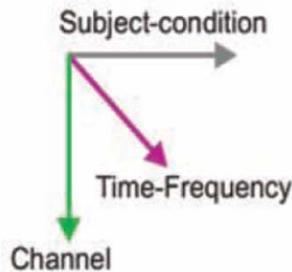
(a)



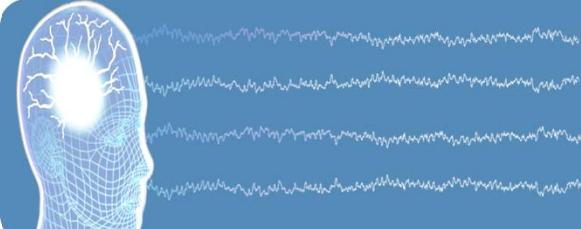
(b)



(c)



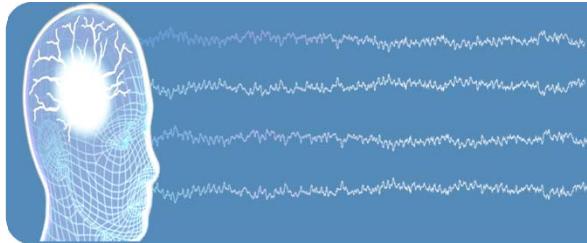
(d)



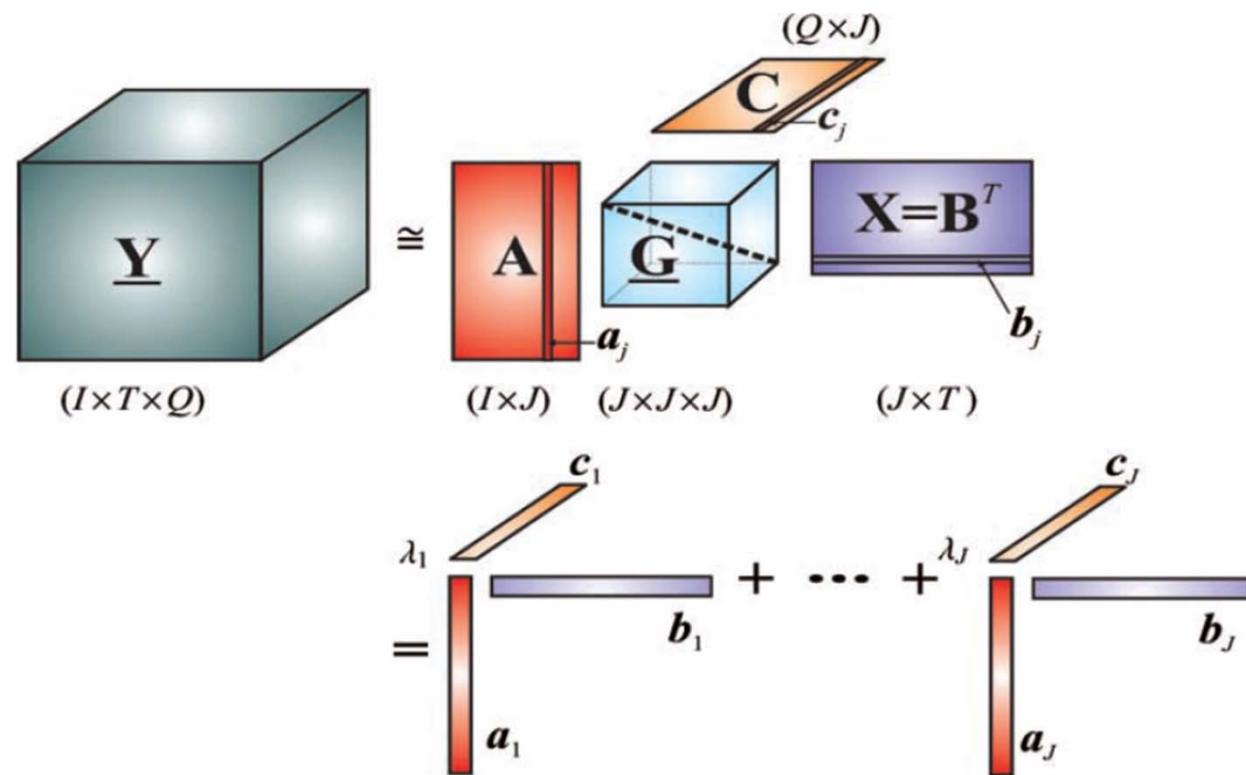
تجزیه‌های تانسوری

- چرا تجزیه‌های تانسوری مفید هستند؟
- تجزیه‌های ماتریسی فقط برای داده‌های نمایش‌داده شده در دو بعد (مثلًاً کanal و زمان) کاربرد دارند و استفاده از آنها محدود است.
- در بسیاری از کاربردها، ساختارهای داده اغلب حاوی ابعاد بالاتر مانند آزمایش‌ها، شرایط ثبت، سوژه‌ها و گروه‌ها همراه با ابعاد ذاتی کanal، زمان و فرکانس هستند.
- اگر داده‌ها برای هر سوژه به طور جداگانه با استخراج یک ماتریس یا قطعه از یک بلوک داده مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد، ما اطلاعات همبسته در بین افراد را از دست خواهیم داد. برای کشف اجزای پنهان در داده‌ها و حفظ اطلاعات یکپارچه، ابزارهای تجزیه و تحلیل باید ساختار چندبعدی داده‌ها را منعکس کنند.

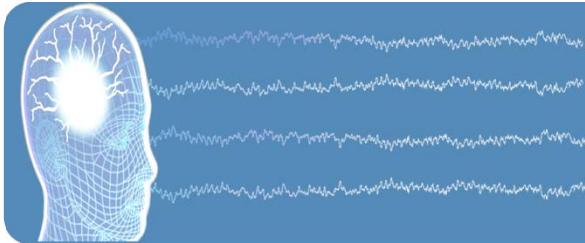
تجزیه‌های تانسوری



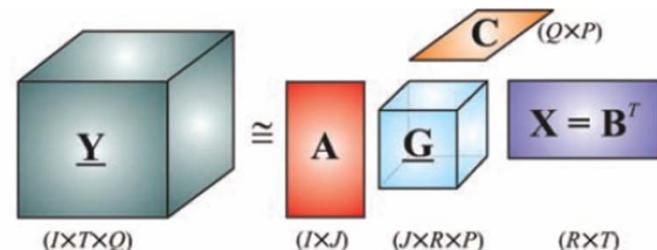
○ تجزیه پلیادیک کانونی یا تجزیه PARAFAC یا CP



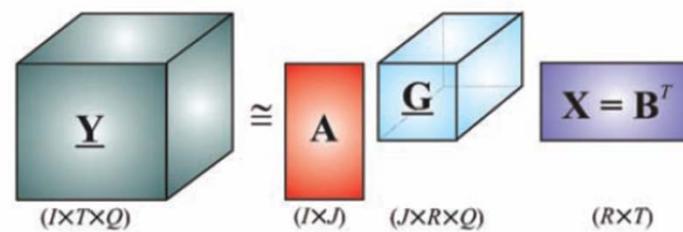
تجزیه‌های تانسوری



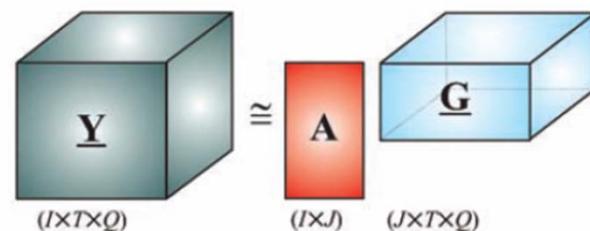
تجزیه‌های تانسوری



(a) Tucker3

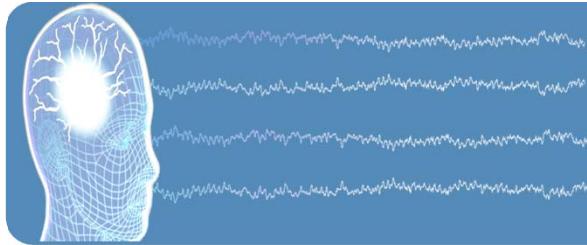


(b) Tucker2

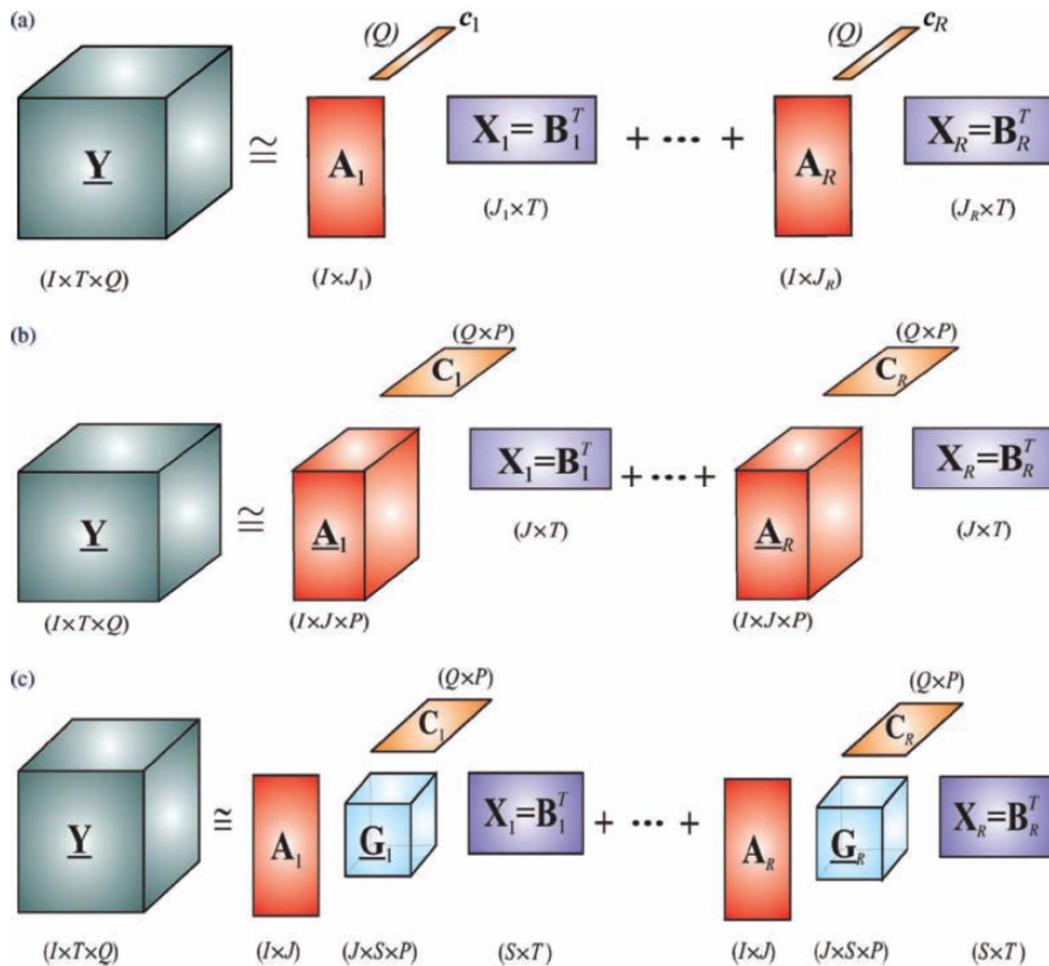


(c) Tucker1

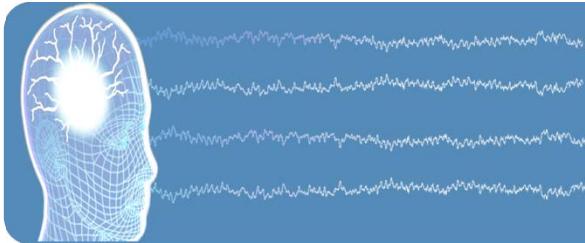
تجزیه‌های تانسوری



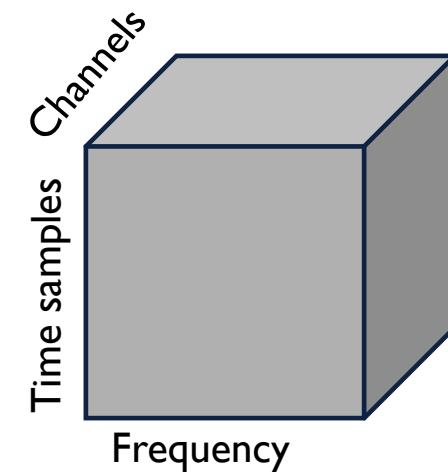
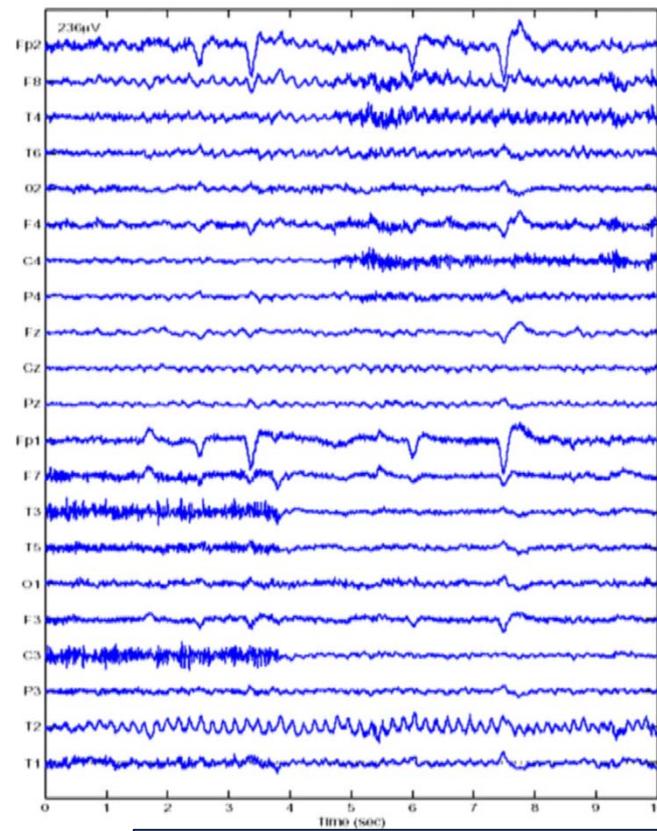
Block Component Decomposition (BCD) o



تجزیه‌های تانسوری

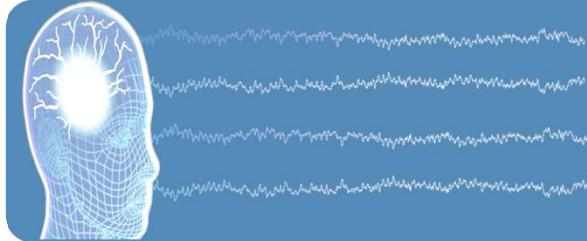


○ مثال: تجزیه CP سیگنال EEG صرعی تشنجی

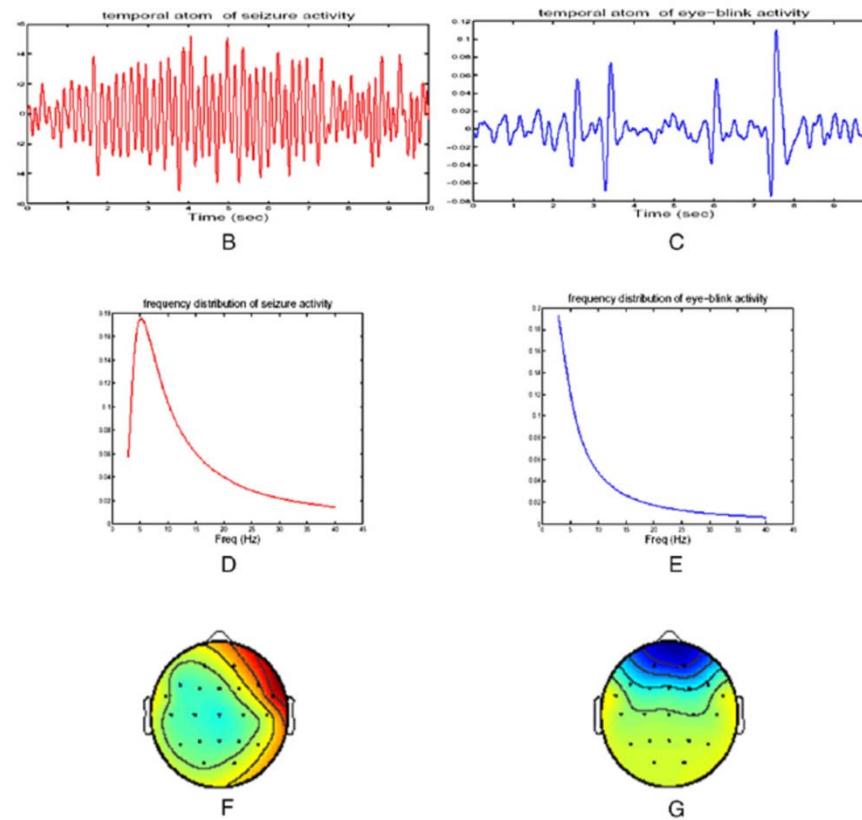


De Vos, Maarten, et al. "Canonical decomposition of ictal scalp EEG reliably detects the seizure onset zone", 2007.

تجزیه های تانسوری

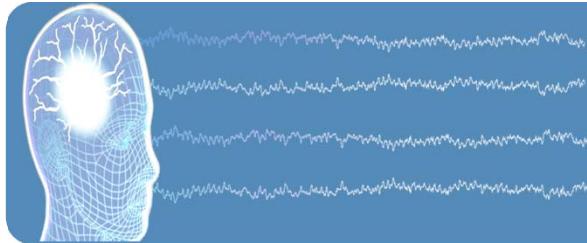


○ مثال: تجزیه CP سیگنال EEG صریعی تشنجی

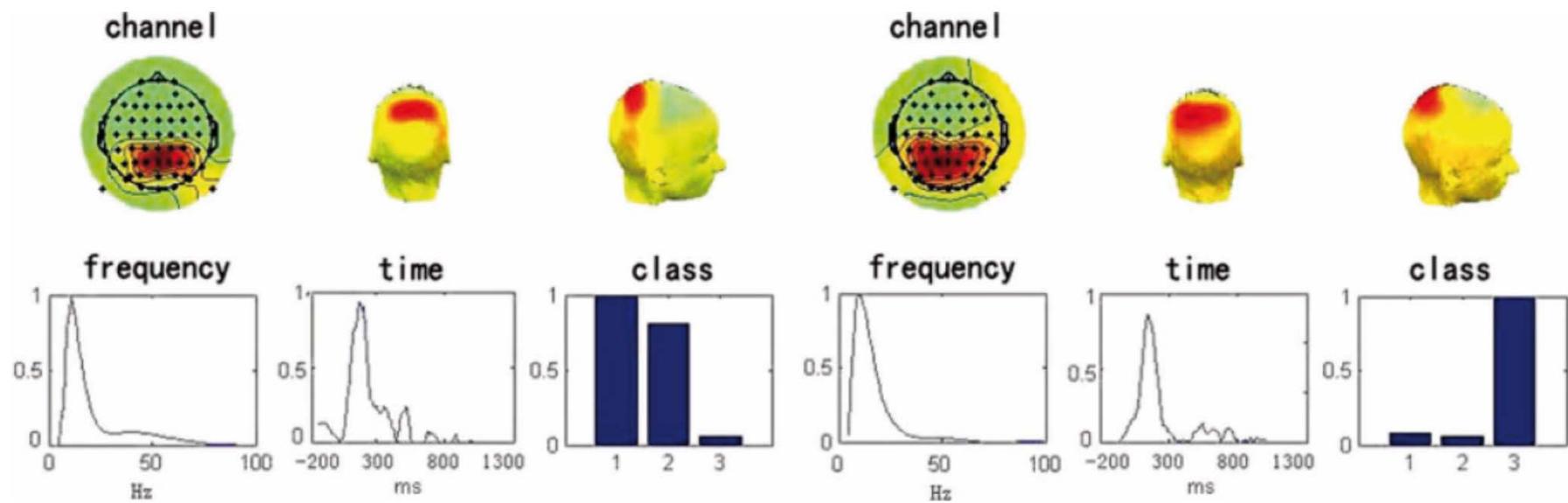


De Vos, Maarten, et al. "Canonical decomposition of ictal scalp EEG reliably detects the seizure onset zone", 2007.

تجزیه‌های تانسوری

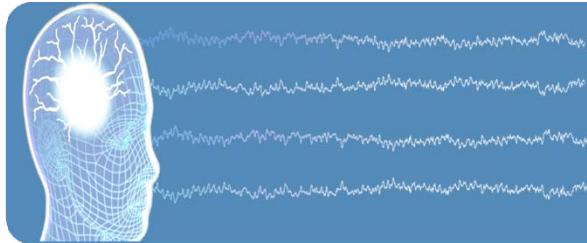


○ مثال: تجزیه CP پتانسیل برانگیخته بینایی

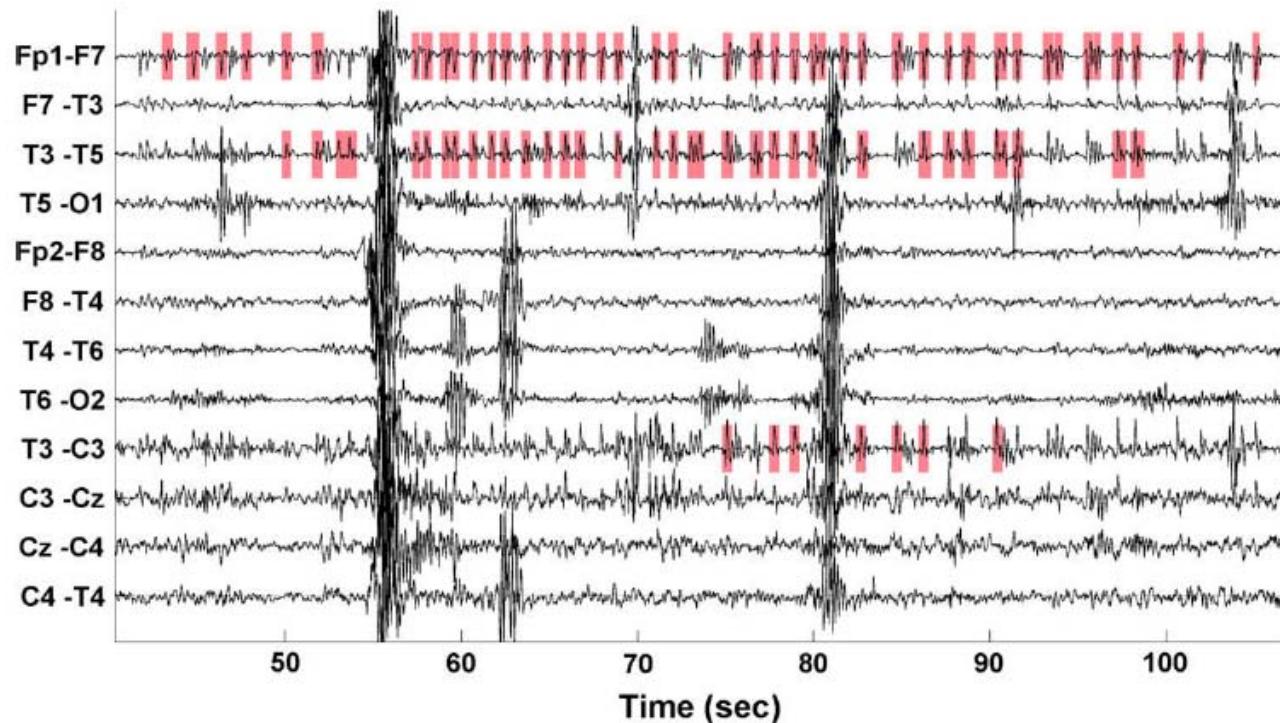


Li, Jie et. al . "Pattern classification of visual evoked potentials based on parallel factor analysis", 2008.

تجزیه های تانسوری

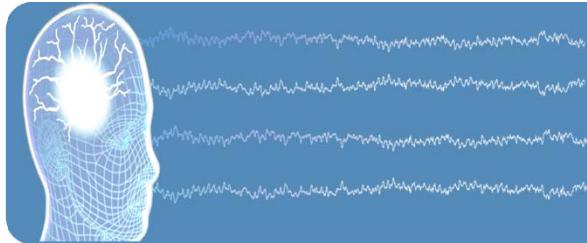


○ مثال: تجزیه CP سیگنال EEG صرعی غیرشنبجی

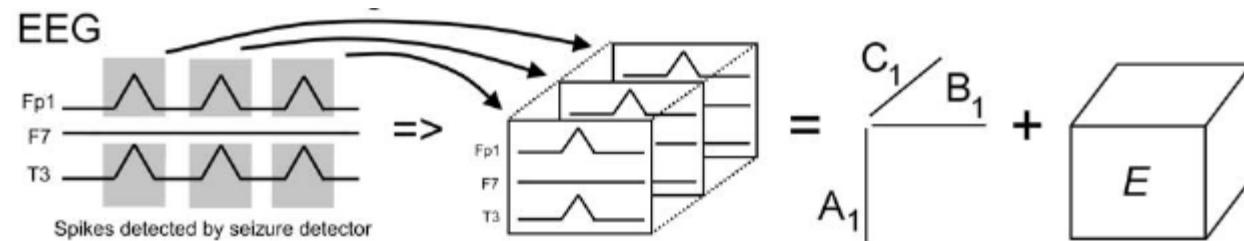


W. Deburchgraeve et. al. , “Neonatal seizure localization using PARAFAC decomposition”, Clinical Neurophysiology, 2007.

تجزیه های تانسوری

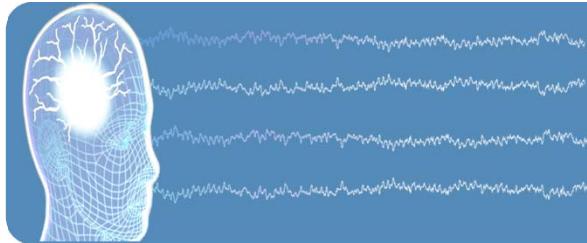


○ مثال: تجزیه CP سیگنال EEG صرعی غیرشننجی

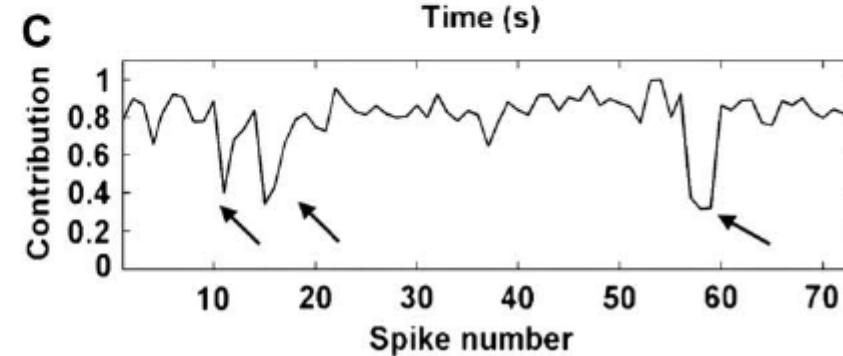
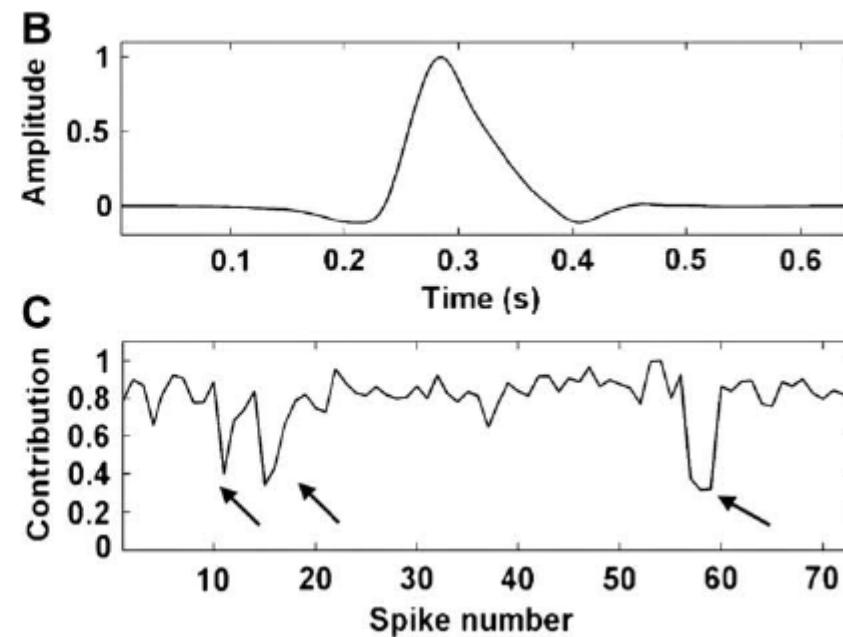
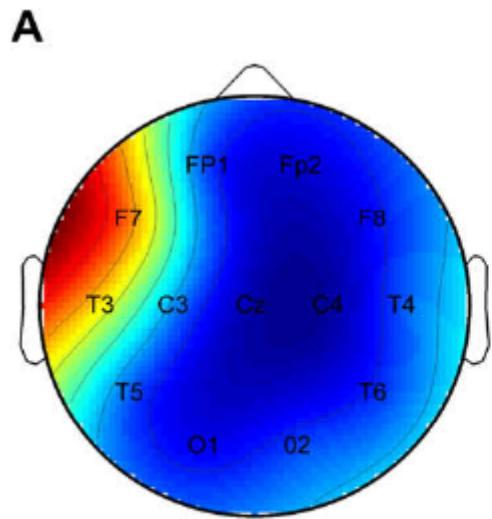


W. Deburchgraeve et. al. , “Neonatal seizure localization using PARAFAC decomposition”, Clinical Neurophysiology, 2007.

تجزیه های تانسوری



○ مثال: تجزیه CP سیگنال EEG صرعی غیرشنبجی



W. Deburchgraeve et. al. , “Neonatal seizure localization using PARAFAC decomposition”, Clinical Neurophysiology, 2007.

