

Лекции  
по математическому анализу:  
многообразия, криволинейные и  
поверхностные интегралы,  
введение в векторный анализ.

19 мая 2019 г.

**Аннотация**

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Внимание! Записки не подвергались редактуре, поэтому, возможно, содержат множество неточностей, опечаток и смысловых ошибок.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Многообразия</b>	<b>3</b>
1.1	Многообразия без края	3
1.2	Многообразия с краем	6
1.3	Касательное и нормальное пространства	10
1.4	Задача на условный экстремум	13
1.5	Площадь поверхности	15
1.6	Площадь графика функции	19
<b>2</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>21</b>
2.1	Криволинейные интегралы I-рода	21
2.2	Объем шара и площадь сферы	22
2.3	Формула коплощади	23
<b>3</b>	<b>Введение в векторный анализ</b>	<b>25</b>
3.1	Дифференциальные формы	25
3.2	Ориентация	27
3.3	Интеграл 1-формы по кривой	31
3.4	Внешние формы второго порядка	41
3.5	Внешний дифференциал 1-формы	43
3.6	Ротация векторного поля	45
3.7	Внешние формы высших порядков	46
	3.7.1 Замена переменной в $k$ -форме	47
	3.7.2 Интеграл $k$ -формы по ориентированному $k$ -мерному многообразию	48
3.8	25.04.19	55
3.9	Дивергенция векторного поля	58

# 1 Многообразия

## 1.1 Многообразия без края

**Определение 1.1.** Множество  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием без края, если для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  — окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ , где  $V$  — окрестность нуля в  $\mathbb{R}^k$ .

При  $r = 0$  многообразие называется топологическим, при  $r > 0$  многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

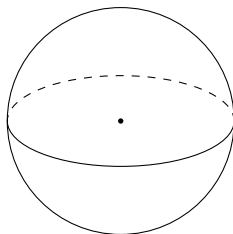
1. Набор изолированных точек ( $k = 0$ ).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ( $k = 1$ ).



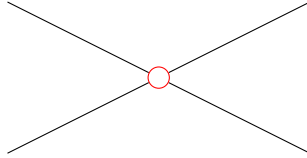
3. Поверхности ( $k = 2$ ).



### Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения — многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания  $k$ -мерных многообразий.

**Теорема 1.3.** Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество, тогда  $U$  является  $n$ -мерным многообразием.

*Доказательство.* Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка  $x_0$  лежит в некоторой окрестности.

Отображение  $\Phi$  можно определить следующим образом:  $\Phi(x) = x - x_0$  — сдвиг в ноль, переводит окрестность  $x_0$  в окрестность нуля.  $\square$

**Теорема 1.4** (О графике). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^r$ , тогда график этой функции  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$  —  $C^r$ -гладкое  $n$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Доказательство.* Определим отображение  $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$  следующим образом:  $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$ , тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение  $\Phi$  является  $C^r$ -диффеоморфизмом и  $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$ , т. е.  $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ .  $\square$

**Теорема 1.5** (О локальном вложении). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r$  и  $k \leq n$ . Тогда, если  $t^0 \in U$  и  $\text{rank } Df(t^0) = k$ , то существует  $V$ -окрестность  $t^0$ , такая что  $f(V)$  является  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

*Доказательство.* Так как  $\text{rank } Df(t^0) = k$ , следовательно набор векторов  $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$  является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  — базис в  $\mathbb{R}^n$ .

Определим  $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  так, что  $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \dots + s_nv_n$ .

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}, v_{k+1}, \dots, v_n]$ , следовательно  $\det D\Phi \neq 0$ .

По теореме об обратной функции существует  $W$  — окрестность  $(t_0, 0)$ , такая что  $\Phi : W \rightarrow \Phi(W)$  —  $C^r$ -диффеоморфизм. Выберем  $V \times (-h, h) \in W$ , так что  $V$  — окрестность  $x_0$  в  $\mathbb{R}^k$ , тогда  $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$ .  $\square$

**Определение 1.6.** Пусть  $x^0$  — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда  $x^0$  называется регулярным, если  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$ .

**Теорема 1.7** (О решении системы уравнений). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_i \in C^r \forall i \leq k$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -гладкое  $(n - k)$ -мерное многообразие.

*Доказательство.* Пусть  $x^0$  — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из  $n$  столбцов, где  $k$  из них линейно независимы.

$f(x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) = f(x, y) = 0$ . Существует окрестность  $V$  такая, что  $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  тогда по теореме о неявной функции  $y = g(x)$ .

В некоторой окрестности  $x^0$ :

$$\begin{aligned} x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\ &\dots \\ x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}). \end{aligned}$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ &\dots \\ x_{n-k} &= x_{n-k}, \\ x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\ &\dots \\ x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}). \end{aligned}$$

□

## 1.2 Многообразия с краем

**Определение 1.8.**  $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$  — верхнее полупространство ( $\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$  — нижнее полупространство).

**Определение 1.9.** Пусть  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  — окрестность нуля, тогда  $V \cap \mathbb{R}_+^k$  называется полукрестностью нуля. В ее основании лежит  $(k-1)$ -мерная окрестность нуля.

**Определение 1.10.** Множество  $M \in \mathbb{R}^n$  называется  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием с краем, если для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  — окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и, либо  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$  (тогда  $x_0$  — внутренняя точка), либо  $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}_+^k) \times \{0\}^{n-k}$  (тогда  $x_0$  — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при  $k = 0$ .
2. Край незамкнутой кривой ( $k = 1$ ) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При  $k = 2$ , внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

**Определение 1.11.** Пусть  $M$  — многообразие, тогда  $\partial M = \{x \mid x \text{ — краевая точка } M\}$  — множество краевых точек многообразия  $M$ .

**Теорема 1.12** (О крае). Пусть  $M$  —  $C^r$ -гладкое  $k$ -мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек  $\partial M$  является  $C^r$ -гладким  $(k - 1)$ -мерным многообразием без края ( $\partial \partial M = \emptyset$ ).

*Доказательство.* Пусть  $x \in \Phi(U \cap M)$ , тогда  $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$ .

Если  $x_k = 0$ , то  $x \in \partial M$  — краевая точка. Отображение  $\Phi$  переводит все краевые точки  $U \cap M$  в  $(k - 1)$ -мерную плоскость (основание полупространства). Основание —  $(k - 1)$ -мерная окрестность нуля, следовательно  $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$  — выполнено определение многообразия.  $\square$

**Теорема 1.13** (О решении системы уравнений и неравенства). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f_1, \dots, f_{k+1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \forall i \leq k + 1$  и  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + 1$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -гладкое  $(n - k)$ -мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение  $(k + 1)$  уравнений).

*Доказательство.* Решение неравенства  $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$  является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

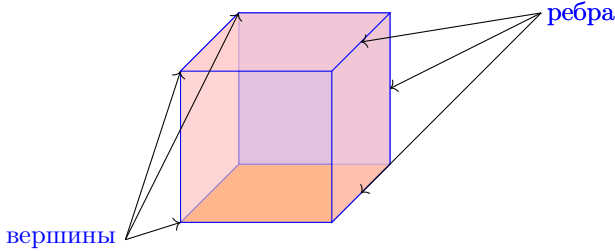
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает  $(k - 1)$  мерную поверхность — край многообразия.  $\square$

**Определение 1.14.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^k$  называется  $k$ -мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1.  $M$  —  $k$ -мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение  $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$ , такое что  $\tilde{M}$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие, а  $Z_i$  — кусочно гладкие многообразия размерности  $l \leq k - 1$ .

**Пример 1.15.** Куб.



**Теорема 1.16.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \forall i \leq k + l$  и  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + l$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -кусочно-гладкое  $(n - k)$ -мерное многообразие с краем.

**Пример 1.17.** Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$



*Решение.* Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы  $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$ .

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если  $x = 0$  или  $y = 0$ . Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно  $\text{rank} \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$  и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

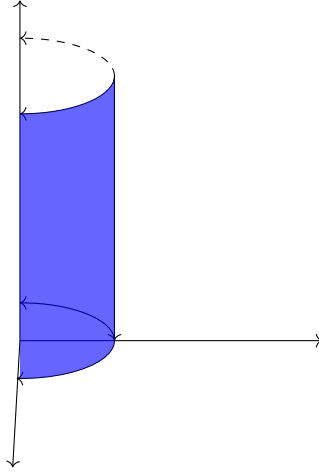
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases} & & \end{array}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2 (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий).  $\square$

**Пример 1.18.** в  $\mathbb{R}^3$ .  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

### 1.3 Касательное и нормальное пространства

**Определение 1.19.** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ , тогда вектор  $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$  называется вектором скорости кривой  $\gamma$ .

**Определение 1.20.** Вектор  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  называется касательным к множеству  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  в точке  $x_0 \in M$ , если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в  $M$ , т.е. существует кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Множество касательных векторов к  $M$  в точке  $x_0$  обозначается  $T_{x_0}M$ .

**Задача 1.21.** Пусть  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  – параметризованная кривая,  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  –  $C^1$ -диффеоморфизм. Показать, что если  $v$  – вектор скорости кривой  $\gamma$  в точке  $t_0 \in (a, b)$ , то  $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v \rangle$  – вектор скорости кривой  $\Gamma = \Psi \circ \gamma$  в точке  $t_0$ .

*Решение.* Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0 \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0) \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v \rangle. \quad \square$$

**Лемма 1.22.** Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если  $\vec{v} \in T_{x_0}M$ , то  $\forall \lambda > 0 \ \lambda \vec{v} \in T_{x_0}M$ .

*Доказательство.* По условию, существует кривая  $\gamma \subset M$ , для которой  $\vec{v}$  является вектором скорости. Зададим кривую  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$  и проверим, что вектор  $\lambda \vec{v}$  является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda \vec{v}$$

□

**Теорема 1.23** (О множестве касательных векторов). *Если  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  —  $C^1$ -гладкое  $k$ -мерное многообразие,  $x_0 \in M$ , тогда:*

1. Если  $x_0 \in M \setminus \partial M$ , то  $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$ .
2. Если  $x_0 \in \partial M$ , то  $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}_+^k$ .

*Доказательство.* По определению  $k$ -мерного многообразия, для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  — окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ , где  $V$  — окрестность нуля в  $\mathbb{R}^k$ .

Под действием  $\Phi$  кривая перейдет в кривую.

$$\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t), 0, \dots, 0).$$

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$  — линейное отображение, такое, что  $\det D\Phi \neq 0$ .

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$  —  $k$ -мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

**Определение 1.24.** Нормальное пространство  $N_{x_0}M$  к дифференцируемому многообразию в точке  $x_0$  — это ортогональное дополнение к касательному пространству  $T_{x_0}M$ .

**Лемма 1.25.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $x_0 \in M$ , тогда если  $\dim M = k$  то,  $\dim T_{x_0}M = k$  и  $\dim N_{x_0}M = n - k$ .

**Теорема 1.26** (О базисе касательного пространства). Пусть многообразие  $M$  задано параметрически:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

, где  $(t_1, \dots, t_k) \in U$ .

Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r$  и  $t^0 \in U$ . Тогда, если  $M = f(U)$  — многообразие и  $\text{rank } Df = k$ , то  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_1}(t^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t^0) \right\}$  — базис в  $T_{f(t^0)}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $t^0 \in U$ , определим  $\Gamma_j = t^0 + t \cdot \vec{e}_j$ , тогда  $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$  — кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке  $t^0$ :  $\gamma'_j(t^0) = \frac{d}{dt}f(t^0 + t \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t^0) \in T_{f(t^0)}M$ .

Набор векторов  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{i=1}^k$  является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства.  $\square$

**Теорема 1.27.** Пусть многообразие  $M$  задано системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k. \end{cases}$$

и  $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \forall i \leq k$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество, а так же  $\text{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = k$ , тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0, \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

задает  $T_{x_0}M$ , а  $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$  базис в  $N_{x_0}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in M$ . Возьмем вектор  $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$ , тогда по определению существует кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

$$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle.$$

Подставим  $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$ . Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$ , из чего получаем, что  $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$  — базис в  $N_{x_0}M$ , т.к.  $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$ .  $\square$

## 1.4 Задача на условный экстремум

**Определение 1.28.** Пусть  $M, N$  — дифференцируемые многообразия, тогда  $f : M \rightarrow N$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если существует линейное отображение  $L : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N$ , такое что для каждой кривой  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такой что  $\gamma \in C^1$ ,  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$ , выполняется  $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$ .

**Теорема 1.29** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируема и  $x_0$  — её экстремум, тогда  $df(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$  кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Для  $f|_\gamma$   $x_0$  — экстремум, следовательно  $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}(\vec{v})$ .  $\square$

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $M \subseteq U$  —  $k$ -мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии  $f|_M$ .

**Теорема 1.30** (Необходимое условие условного экстремума). Если  $x_0 \in M$  — точка экстремума  $f$ , то  $df|_{T_{x_0}M} = 0 \iff \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$  кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Тогда  $x_0$  — экстремум  $f(\gamma(t))$  и  $f(\gamma(0)) = 0$ . Заметим, что  $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_{x_0}(\vec{v})$ .  $\square$

**Теорема 1.31** (Метод множителей Лагранжа). Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда, если  $x_0$  — условный экстремум при условиях  $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$ , то  $dL(x_0) = 0$ , где  $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$  — функция Лагранжа.

*Доказательство.* Рассмотрим  $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ .  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$  — решение системы уравнений.

Возьмем частную производную  $L$  по  $x_j$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда  $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x)$  — градиенты  $\nabla \varphi_i$  — это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом,  $\nabla f$  — нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума.  $\square$

**Лемма 1.32** (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{E} \in C^2$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое множество и  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \in C^2$  – кривая. Тогда

1.  $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$ ,
2.  $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$ .

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

*Доказательство.*  $(f \circ \gamma)''(t) = (df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t$  – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что  $d_x(df_x \langle \vec{v} \rangle) = d^2 f(x) \langle \vec{v} \rangle$  и  $d_{\vec{v}}(df_x \langle \vec{v} \rangle) = df_x$ .

Отсюда имеем  $(df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$ .

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – уравнения связи, то  $x \in M$  (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

**Теорема 1.33** (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ ,  $\text{rank} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = k$  всюду, то. Определим функцию Лагранжа как  $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x)$ , тогда, если  $dL(x_0, \lambda_0) = 0$ , то при  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) > 0$  –  $x_0$  – точка минимума, а при  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) < 0$  – точка максимума.

*Доказательство.* Пусть  $dL(x_0, \lambda_0) = 0$ ,  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) |_{T_{x_0} M \times T_{x_0} M} > 0$ .

$dL(x_0, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$ . Кроме того,  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$ . Следовательно,  $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} |_{T_{x_0} M} = 0$ .

Возьмем произвольную  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \in C^2$ ,  $\gamma(0) = x_0$ . Посмотрим, как ведет себя функция  $f$  на кривой  $\gamma$ , т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . По лемме 1.32  $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$ .  
 $(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0} \langle \gamma'(0) \rangle = 0$ .

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим  $\gamma(t) = x$  в  $L(x, \lambda)$ , получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + d_x L \langle \gamma''(t) \rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ ,  $(f \circ \gamma)''(0) > 0$ . Следовательно,  $t = 0$  является точкой минимума для  $f \circ \gamma$ .

Таким образом,  $x_0$  – точка минимума для любой кривой  $\gamma \subseteq M$ , проходящей через  $x_0$ . Следовательно,  $x_0$  – точка минимума для  $f|_M$ .  $\square$

**Пример 1.34.** Найти экстремумы функции  $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$  на  $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$ .

## 1.5 Площадь поверхности

Пусть  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Из прошлого семестра, мы знаем, что  $n$ -мерный объем параллелепипеда  $\Pi(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$ , натянутого на набор векторов  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  может быть вычислен по формуле  $|\Pi| = |\det[v_1, \dots, v_n]|$ . Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая  $A = [v_1, \dots, v_n]$ , из  $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$  получаем:  $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$ .

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества  $E \subseteq \mathbb{R}^k$ , мера его образа вычисляется по формуле  $|L(E)| = J_L |E| = |\det L| |E|$ .

Если же отображение  $\varphi \in C^1$  не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества  $E$ , мера его образа вычисляется по формуле  $|\varphi(E)| = \int_E J_{\varphi(x)} dx$ .

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

**Теорема 1.35** (Объем  $k$ -мерного параллелепипеда). Пусть  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$ . Тогда  $|\Pi(v_1, \dots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$ . Обозначив за  $A = [v_1, \dots, v_n]$ , это выражение можно записать в виде  $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $k$ -мерная гиперплоскость  $L$  содержит в себе параллелепипед  $\Pi$ .

Существует ортогональное преобразование  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что  $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ . Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянута параллелепипед:  $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^T$ .

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ где } \theta - k \times k \text{ матрица}$$

Используя равенство  $(QA)^* QA = \theta^* \theta$ , получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

**Определение 1.36.** Пусть  $A$  - матрица, имеющая из  $n$  строк и  $k$  столбцов и  $M(n, k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$  - множество мультииндексов. Тогда  $A_I$  - минор, составленный из  $i_1, i_2, \dots, i_k$  строк матрицы  $A$ .

**Теорема 1.37** (Формула Бине-Коши). Пусть  $A$  - матрица, имеющая из  $n$  строк и  $k$  столбцов, тогда  $\det A^* A = \sum_{I \in M(n, k)} \det^2 A_I$ .

*Доказательство.* Докажем более общее утверждение: пусть  $A, B = (n, k)$ -матрицы, тогда  $\det A^* B = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$ .

Пусть  $A = [u_1; \dots; u_n]$  и  $B = [v_1, \dots, v_n]$ , определим отображения  $L_1$  и  $L_2$  следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$



$$L_2 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что  $L_1$  и  $L_2$  линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что  $L_1 = L_2$  достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ???).

$$L_1 \langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2 \langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle$$

□

**Следствие 1.38.** Пусть  $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  - линейное отображение, такое, что  $\text{rank } L = k \leq n$ . Тогда для каждого измеримого множества  $A$ ,  $L(A)$  - измеримо и  $|L(A)|_k = J_L |A|_k$ , где  $J_L = \sqrt{\det L^* L}$ .

**Следствие 1.39.** Пусть  $\Pi$  -  $k$ -мерная плоскость в  $\mathbb{R}^n$  и  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого  $E \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Pi(E)$  - измеримо и  $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x) dx$ , где  $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x) D\varphi(x)}$ .

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за  $A$  некоторый вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ , можно получить:

$$v^T v = \langle v, v \rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы  $u, v \in \mathbb{R}^3$  в столбцы матрицы  $A$ , получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  -  $k$ -мерное  $C^1$ -гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что  $\varphi \in C^1$  и  $M = \varphi(U)$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k) \in U$$

Определим меру  $k$ -мерной площади  $S^k$  на параметрически заданном многообразии  $M$ .

**Определение 1.40.** Пусть  $E \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}^k$  - измеримо по  $|\cdot|_k$ , тогда  $\varphi(E)$  назовем измеримым по  $S^k$  и будем вычислять его меру как  $S^k(\varphi(E)) := \int_E J_\varphi(t) dt$ , где  $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$ .

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

**Лемма 1.41.** Пусть  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  — различные параметризации многообразия, такие что  $\text{rank } D\varphi = \text{rank } D\psi = k$ . Тогда  $\int_U J_\varphi(t) dt = \int_V J_\psi(t) dt$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\psi^{-1} \circ \varphi$  — отображение между  $U$  и  $V$ .

Очевидно, что  $\psi^{-1} \circ \varphi$  является биекцией и  $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$ . Следовательно,  $\psi^{-1} \circ \varphi$  —  $C^1$ -диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных  $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$  в интеграле:

$$\begin{aligned} \int_V \sqrt{\det D\psi^*(y)D\psi(y)} dy &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ |\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &\quad \sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл.  $\square$

Рассмотрим некоторые свойства меры  $S^k$ :

1. Счетная аддитивность.

Пусть  $\{M_i\}_{i \in N}$  — не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда  $S^k(\bigcup_i M_i) = \sum_i S^k(M_i)$ .

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше  $k$  равна нулю в мере  $S^k$ .

**Пример 1.42.** Вывести формулу длины кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с помощью меры  $S^k$ .

*Решение.*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{x'^2_1 + \dots + x'^2_n} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

**Определение 1.43.** Мера угла – длина дуги единичной окружности с центром в начале угла.

## 1.6 Площадь графика функции

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ , где  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  её график –  $n$ -мерное многообразие  $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ .

Чтобы найти  $S^k$  надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \dots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда  $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$ .

Посчитаем  $D\varphi$ .

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы  $\det D\varphi^* D\varphi$ . Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx$$

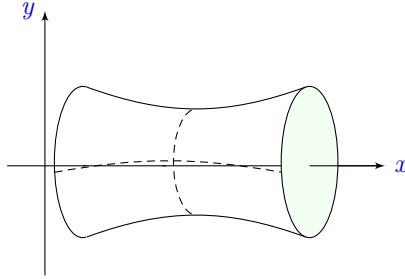
Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

*Доказательство.*  $S^k(\lambda M) =$

□

**Пример 1.44** (Вывод частной формулы из общей). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси  $Ox$ .

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра  $(x, \varphi)$ . Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \cos \varphi, \\ z = f(x) \sin \varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

## 2 Криволинейные интегралы

### 2.1 Криволинейные интегралы I-рода

**Определение 2.1.** Пусть  $M$  –  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие, задана функция  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$  – измеримая по  $S^k$ . Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию  $M = \varphi(U)$ , то  $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x) dx$ , получаем,

$$\int_M f(y) dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если  $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то

$$\int_M (\alpha f + \beta g) dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$

2. монотонность: если  $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $f \leq g$ , то

$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$

3. аддитивность по области определения: если  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , то

$$\int_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int_{M_1} f dS^k + \int_{M_2} f dS^k.$$

4. ограниченность: если  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ , то

$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$

## 2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в  $\mathbb{R}^n$ :

$$u = \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_2 = r \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_3 = r \sin \varphi \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что  $u(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  - параметризация шара, а  $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = u|_{r=\text{const}}$  — параметризация сферы.

Обозначим  $n$ -мерный шар радиуса  $r$  как  $B_r$ . Соответственно  $S_r$  -  $(n - 1)$ -мерная сфера радиуса  $r$ .

Вычислим якобианы  $J_u$  и  $J_{\tilde{u}}$  этих параметризаций. Нам известно, что  $J_u = |\det Du|$  и  $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$ .

Рассмотрим набор векторов  $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \dots, u_{\theta_{n-2}}\}$ , где  $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$ . Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r| |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} |u_r| &= 1 \\ |u_\varphi| &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_1}| &= r \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ &\dots \\ |u_{\theta_{n-3}}| &= r \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_{n-2}}| &= r \end{aligned}$$

Из того, что  $|u_r| = 1$  следует, что  $J_u = J_{\tilde{u}}$ .

Теперь мы можем записать конкретное выражение для  $J_u$ :

$$J_u = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_u d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\bar{u}} d\theta_{n-2}$$

Так как  $J_u = J_{\bar{u}}$ , можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_R| = \int_0^R S^{n-1}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержатся. Так же площадь сферы можно представить в виде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

### 2.3 Формула коплощади

Пусть  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Потребуем, чтобы  $\nabla\varphi \neq 0$  (т. е.  $\text{rank } D\varphi = k$  максимальный).

Уравнение  $\varphi(x) = 0$  задает поверхность в  $U$ . Эту поверхность можно так же задать как  $\varphi^{-1}(0)$ . Из этого получаем:

$$\int_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

**Теорема 2.2** (Формула коплощади). Пусть  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ , такая, что  $\text{rank}(D\varphi) = k$ , тогда верна формула коплощади

$$\int_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

где

$$J_\varphi(x) = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in U$ . Мы знаем, что  $\text{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$  — максимальный. Следовательно, в матрице  $D\varphi$  есть  $k$  линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это  $k$  последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует  $C^1$ -диффеоморфизм  $\Phi : V \rightarrow W$ , где  $V$  - окрестность  $x_0$ ,  $W$  - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\begin{aligned} \int_U f(x, y) J_\varphi(x, y) dx dy &= \int_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что  $\Phi_{z(x)}^{-1} = \Phi^{-1}(x, z)$  при фиксированном  $z$  является поверхностью. Возьмем  $s = \Phi_z^{-1}(x)$ , тогда

$$\int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int_{\varphi(U) \cap \mathbb{R}_z^{n-k}} g(\Phi_z^{-1}(x)) J_{\Phi_z^{-1}}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) □

Для проекции  $P_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  формула коплощади превращается в формулу Фубини:



$$\int_U f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\mathbb{R}_t^{n-k}} f(y)dy$$

где  $\mathbb{R}_t^{n-k} = \{(y, s) : s = t\}$  -  $(n - k)$ -мерная плоскость.

## 3 Введение в векторный анализ

### 3.1 Дифференциальные формы

**Определение 3.1.** Векторным полем на многообразии  $M$  называется функция  $F : M \rightarrow F(x)$ , такая что  $F(x) \in T_x M$ .

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

**Определение 3.2.** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем  $\varphi^*$  и определим результат его действия на функцию  $f : V \rightarrow \mathbb{E}$  как функцию  $\varphi^* f : U \rightarrow \mathbb{E}$ , такую, что  $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$ .

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть  $v : V \rightarrow TV$  - векторное поле, тогда  $\varphi^* v : U \rightarrow TV$  и  $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)} \langle v(\varphi(x)) \rangle$ .

**Свойства оператора переноса:**

**Свойство 1°.** ЛИНЕЙНОСТЬ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g$  — функции  $\forall u, v$  — векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^* f + \beta \varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^* u + \beta \varphi^* v$$

**Свойство 2°.** МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ

пусть  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : V \rightarrow TV$ ,  $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$ . Тогда, если  $\varphi : U \rightarrow V$  —  $C^1$ -диффеоморфизм, то  $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$ .

**Свойство 3°.** ПЕРЕНОС КОМПОЗИЦИИ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОЗИЦИЕЙ ПЕРЕНОСОВ

пусть  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\psi : V \rightarrow W$  —  $C^1$ -диффеоморфизмы, тогда  $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ .

**Свойство 4°.** ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ С ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$\varphi^* d = d\varphi^*.$$

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — линейное отображение. Рассмотрим действие  $L$  на вектор  $v$ :

$$L\langle v \rangle = L\langle v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \rangle = v_1 L\langle e_1 \rangle + \dots + v_n L\langle e_n \rangle = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором:  $L\langle v \rangle = a \cdot v$ .

Введем базис на пространстве линейных отображений  $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ .

Набор функций  $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $dx_j(v_1, \dots, v_n) = v_j$ , является базисом в  $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Следовательно,  $L\langle v \rangle = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ .

Обозначим за  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  пространство алгебраических форм степени  $k$  над  $\mathbb{R}^n$ . В частности  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  и  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

**Определение 3.3.** Дифференциальной формой степени  $k$  (сокращенно  $k$ -формой) на  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  будем называть  $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$ .

**Лемма 3.4.** Существует так называемый дуализм между 1-формами и векторными полями, так как каждая 1-форма изоморфна некоторому векторному полю.

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую 1-форму  $w(x)$ , тогда  $w(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$ . Пусть  $v(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ , тогда  $w(x)\langle u \rangle = v(x) \cdot u$ .  $\square$

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

**Пример 3.5.**  $w = xdy$  — 1-форма, но не дифференциал.

*Доказательство.* От противного. Допустим, что  $w = df = f_x dx + f_y dy$ . Тогда  $f_x = 0$  и  $f_y = x$ . Из курса мы знаем, что для любой функции  $f_{xy} = f_{yx}$ . Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем  $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$ . Получили противоречие.  $\square$

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме  $w = xdy$ . Пусть  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ , тогда  $\varphi^* w = r \cos \varphi d(r \sin \varphi) = r \cos \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r \sin \varphi \cos \varphi dr + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi$ .

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

**Определение 3.6.** Пусть  $w$  – 1-форма на  $V$ . Пусть  $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  –  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда  $\varphi^*w$  – 1-форма на  $U$  и  $\varphi^*w(x)\langle v \rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle$ .

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

**Лемма 3.7** (Четвертое свойство оператора переноса). Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  –  $C^1$ -диффеоморфизм,  $f : V \rightarrow \mathbb{E} \in C^1$ , тогда  $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$ . Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.

*Доказательство.* Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi^*(df)(x)\langle v \rangle &= df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v \rangle = \\ &= d(f \circ \varphi)(x)\langle v \rangle = d(\varphi^*f)(x)\langle v \rangle\end{aligned}$$

□

**Пример 3.8** (Работа векторного поля вдоль кривой). Рассмотрим одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле  $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$ . То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму  $A = w_g\langle l \rangle$ . А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем  $A = \int_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}'(x)dl(x)$ .

## 3.2 Ориентация

**Определение 3.9.** Пусть  $V$  – конечномерное векторное пространство, в нем определены два базиса  $u_1, \dots, u_n$  и  $v_1, \dots, v_n$  связанные между собой матрицей перехода  $A$  такой, что  $v_j = Au_j$  и  $\det A \neq 0$ . Базисы назовем *сориентированными* если  $\det A > 0$ , и *противоположено ориентированными* если  $\det A < 0$ .

Ориентация – класс сориентированных базисов.

**Определение 3.10.** Пусть  $\mathfrak{B}^n$  – множество базисов в  $\mathbb{R}^n$  *ориентацией* на  $\mathfrak{B}^n$  назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}^n \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

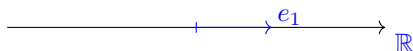
1.  $\Theta$  – непрерывная,

2.  $\Theta$  – кососимметричная.

то есть, если  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  – перестановка, то  $\Theta(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n}) \rightarrow \text{sgn } \sigma \cdot \Theta(v_1, \dots, v_n)$

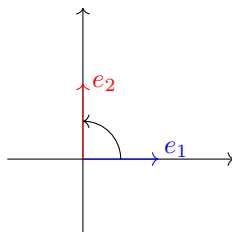
Теперь приведем примеры стандартных ориентаций. Они существуют для пространств  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ .

- ориентация в  $\mathbb{R}^1$



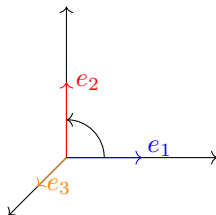
т.е. стандартная ориентация направлена по возрастанию.

- ориентация в  $\mathbb{R}^2$



т.е. стандартная ориентация получается вращением от вектора  $e_1$  к вектору  $e_2$  против часовой стрелки.

- ориентация в  $\mathbb{R}^3$



т.е. если вектор  $e_2$  получен вращением вектора  $e_1$  против часовой стрелки, то вектор  $e_3$  должен смотреть «на нас».

Теперь определим ориентацию на многообразии.

**Определение 3.11.** Пусть  $M$  —  $k$ -мерное многообразие и  $\mathfrak{B}M := \{(x, v_1, \dots, v_k) : x \in M, v_1, \dots, v_k \text{ — базис } T_x M\}$

ориентацией на многообразии  $M$  назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}M \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

1.  $\Theta$  — непрерывная,
2.  $\Theta$  — кососимметричная.

Оказывается, что не на всяком многообразии можно задать ориентацию. Таким многообразием, к примеру, является лента Мёбиуса: если мы возьмем стандартный базис  $\mathbb{R}^2$  и «протащим» его по ленте на один оборот, то он «зеркально отразится». Таким образом, на ленте Мёбиуса не существует функции, удовлетворяющей определению 3.11.

**Определение 3.12.** Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию. В противном случае оно называется *неориентируемым*.

**Определение 3.13.** Ориентируемое многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация.

**Лемма 3.14.** Если многообразие задано параметрически, то оно ориентируемое.

*Доказательство.* Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  при  $k \leq n$ .

$$M = f(U) \iff \begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

Поскольку в  $U$  есть ориентация  $k$ -мерного пространства  $\Theta(u_1, \dots, u_k)$ , определим на  $M$  ориентацию  $\tilde{\Theta}(x, v_1, \dots, v_k)$  следующим образом:  $x = f(t)$ ,  $v_1 = df_x \langle u_1 \rangle, \dots, v_k = df_x \langle u_k \rangle$ .  $\square$

**Лемма 3.15.** Многообразие заданное системой уравнений всегда ориентируемое.

*Доказательство.* Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$  и  $\text{rank } D\varphi = k$  всюду для всякого  $k \leq n$ .

$x$  — точка на многообразии  $M$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(x) = 0$ . В свою очередь

$$\varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

тогда  $\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_k(x)$  — нормали к многообразию  $M$  в точке  $x$ . Определим ориентацию следующим образом:

$$x \in M, \tau_1, \dots, \tau_{n-k} \in T_x M \implies$$

$$\tilde{\Theta}(x, \tau_1, \dots, \tau_{n-k}) = \Theta(\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_k(x), \tau_1, \dots, \tau_{n-k}).$$

□

Рассмотрим примеры ориентируемых многообразий и ориентаций на них.

- $k = 0$ . 0-мерное многообразие — набор точек.

$$\begin{array}{ccc} & \bullet -1 & \bullet +1 \\ +1 \bullet & & \\ & \bullet +1 & \\ & \bullet -1 & \end{array}$$

— просто приписываем  $\{-1, +1\}$  к точкам.

- $k = 2, n = 3$ . Поверхность в  $\mathbb{R}^3$ .

Ориентация задается нормалью.

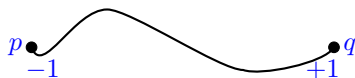
### Индукцированная ориентация края

**Определение 3.16.** Пусть  $M$  — ориентированное многообразие с краем,  $\Theta_M$  — ориентация на этом многообразии, т.е.  $\Theta_M(x, v_1, \dots, v_k) = \pm 1$ , где  $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ . Определим *ориентацию края*  $\Theta_{\partial M}$  следующим образом:

Пусть  $x \in \partial M$  и  $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$ . Выберем вектор  $w \in T_x M \setminus T_x \partial M$  так, чтобы он «смотрел наружу».

$$\text{Тогда } \Theta_{\partial M}(x, v_1, \dots, v_{k-1}) := \Theta_M(x, w, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

**Пример 3.17.** Рассмотрим случай при  $k = 1$  — кривая. Пусть  $\gamma$  — ориентированная кривая, край кривой — две точки: начальная и конечная. Обозначим их как  $p$  и  $q$  соответственно.



Тогда  $\partial\gamma = \{-p, q\}$  и верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p) = \int_{\partial\gamma} f.$$

### 3.3 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть  $\gamma - C^1$ -гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации  $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$  и  $\psi : [c, d] \rightarrow \gamma$ . Тогда  $\psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] \in C^1$  и  $\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$ .

**Определение 3.18.** Две параметризации  $\varphi, \psi$  называются соразориентрованными (противоположно ориентированными), если  $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$  ( $(\psi^{-1} \circ \varphi)' < 0$ ).

**Определение 3.19.** Параметризация  $\varphi$  кривой  $\gamma$  называется согласованной с ориентацией  $\theta$ , если  $\theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$ .

**Определение 3.20.** Пусть  $w : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  — непрерывная 1-форма и  $\gamma \subset U - C^1$ -гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt$$

где  $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$  — параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

**Пример 3.21.** Пусть  $w = xdy + ydx$ , найти интеграл  $w$  по параболе  $y = 4 - x^2$  в направлении возрастания  $y$ .

*Решение.* Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 4 - (1 - t)^2, \\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда  $dx = -dt$ ,  $dy = 2(1-t)dt$ . Подставим эти выражения в формулу:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xdy + ydx &= \int_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt = \\ &= \int_0^1 2(1-t)^2dt - (4 - (1-t)^2)dt = \int_0^1 [3(1-t)^2 - 4]dt = \\ &= \int_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3 \Big|_0^1 = -3\end{aligned}$$

□

Свойства интеграла 1-формы

**Свойство 1°.** КОРРЕКТНОСТЬ

Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma, \psi : [c, d] \rightarrow \gamma \in C^1$  — параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть  $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$  и  $(\psi^{-1} \circ \varphi)$  — монотонно возрастает, следовательно  $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$  и  $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$ .

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle$$

Проведем замену переменных  $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$ .

$$\int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle = \int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s)))) \langle \psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) \rangle (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) ds$$

Так как  $w(\psi(s))$  — линейный оператор, можем внести  $(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)$  как множитель аргумента. Имеем  $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)$  как производную композиции.



$$\int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s)))) \langle \psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) \rangle (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) ds = \int_a^b w(\varphi(s)) \langle \varphi^{-1}(s) \rangle ds$$

□

### Свойство 2°. АНТИСИММЕТРИЧНОСТЬ

Пусть  $\gamma$  — ориентированная кривая, тогда  $-\gamma$  та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int_{-\gamma} w = - \int_{\gamma} w$$

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : [0, T] \rightarrow \gamma$  — параметризация кривой  $\gamma$ , согласованная с ориентацией, тогда  $\psi(t) = \varphi(T - t)$  — параметризация кривой  $-\gamma$ , согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_0^T w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle$$

Проведем замену переменных  $t = (\varphi^{-1} \circ \psi)(s)$ . Тогда  $\psi(0) = T$  и  $\psi(T) = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^T w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle &= \int_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s)))) \langle \varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s))) \rangle (\varphi^{-1} \circ \psi)'(s) ds = \\ &= \int_T^0 w(\psi(s)) \langle \psi^{-1}(s) \rangle ds = - \int_0^T w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle = - \int_{-\gamma} w \end{aligned}$$

□

### Свойство 3°. ЛИНЕЙНОСТЬ

$\forall w_1, w_2$  — формы,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\int_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \int_{\gamma} w_1 + \beta \int_{\gamma} w_2$$

**Свойство 4°. Аддитивность**

Пусть  $\varphi : [p, q] \rightarrow \gamma$  — параметризация кривой  $\gamma$ , возьмем  $r \in [p, q]$  и определим  $\varphi_{pr} : [p, r] \rightarrow \gamma_{pr}$  и  $\varphi_{rq} : [r, q] \rightarrow \gamma_{rq}$ , тогда

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma_{pr}} + \int_{\gamma_{rq}}$$

**Замечание 3.22.** Если кривая замкнута, тогда вместо  $\int_{\gamma} w$  используют обозначение  $\oint_{\gamma} w$ , чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

**Пример 3.23** (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой). Пусть  $\vec{v}$  — векторное поле,  $\gamma$  — ориентированная кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой  $\gamma$  вычисляется как ( $\vec{\tau}$  — касательный вектор к кривой)

$$\int_{\gamma} v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$$

**Теорема 3.24** (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть  $w = df$  — полный дифференциал,  $\gamma$  — ориентированная кривая с начальной точкой  $p$  и конечной точкой  $q$ , тогда справедлива формула

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$  — параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда  $\varphi(a) = p$  — начальная точка кривой и  $\varphi(b) = q$  — конечная точка кривой.

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t)) \Big|_a^b = f(q) - f(p)$$

□

**Следствие 3.25.** Если  $w = df$ , то  $\int_{\gamma} w$  не зависит от пути  $\gamma$ , а только от начальной и конечной точки.

**Следствие 3.26.**

$$\oint_{\gamma} df = 0$$

**Пример 3.27.** Пусть  $w = xdy + ydx$ , найти интеграл  $w$  по параболе  $y = 4 - x^2$  в направлении возрастания  $y$ .

*Решение.* Заметим, что  $w$  — полный дифференциал функции  $f = xy$ , а так же, что начальная точка параболы это  $(1, 3)$ , а конечная  $(0, 4)$ .

$$\int_{\gamma} xdy + ydx = \int_{\gamma} d(xy) = xy \Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

□

**Теорема 3.28** (Критерий полного дифференциала). Пусть  $w$  — непрерывная 1-форма на множестве  $U$ . Тогда  $w$  является полным дифференциалом некоторой функции  $f \in C^1$  тогда и только тогда, когда  $\oint_{\gamma} w = 0$  для всех ориентированных замкнутых контуров  $\gamma \subset U$ .

*Доказательство.* Необходимость следует из 3.26.

Для доказательства достаточности построим функцию  $f$ .

Пусть  $U$  — открытое связное множество. Возьмем точку  $x_0 \in U$  и положим, что  $f(x_0) = C$ . Возьмем так же  $x \in U$  — другую точку и положим  $f(x) = f(x_0) + \int_{\gamma} w$ , где  $\gamma$  — кривая, соединяющая точки  $x$  и  $x_0$  (начало в  $x_0$ , конец в  $x$ ).

Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две кривые из  $x_0$  в  $x$ , то  $\gamma_1 - \gamma_2$  — замкнутый контур и

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w - \int_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути.

Продолжение следует ;)

□

**Определение 3.29.** Непрерывная дифференциальная форма  $w$  называется *точной*, если существует  $f \in C^1$  такая, что  $w = df$ .

**Определение 3.30.** Векторное поле  $\vec{v}$  называется *потенциальным*, если существует функция  $f \in C^1$  такая, что  $\vec{v} = \nabla f$ . В таком случае говорят, что  $f$  является *потенциалом*  $\vec{v}$ .

**Теорема 3.31** (Формула Грина). Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — компактная область с кусочной-гладкой границей, пусть  $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2) = C^1$ -гладкая 1-форма  $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ . Тогда

$$\oint_{\partial U} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_U \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x,y) & Q(x,y) \end{vmatrix} = \int_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

*Доказательство.* Доказательство проведем для криволинейной трапеции.

Пусть  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f \leq g$

□

**Пример 3.32.** Вычислить

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin(x))dx + xdy$$

где  $U$  задано равенством  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

*Решение.* Лайфхак от Сергея Геннадьевича: если вы видите задачу с «безумной функцией», то эта задача на формулу Грина.

Функция в задаче выглядит не очень, так что воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin x)dx + xdy = - \iint_W (1 - 0) dx dy = -\pi ab$$

где  $W$  задано неравенством  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

□

**Определение 3.33.** 1-формами площади называются специальные 1-формы, интегралы от которых дают площадь.

$$xdy, \quad -ydx, \quad \frac{xdy - ydx}{2}$$

Проинтегрировав любую из этих форм по области, вы получите площадь области:

$$\oint_{\partial U} xdy = \int_U (1 - 0) dx dy = |U|$$

**Пример 3.34.** Вычислите площадь ветки циклоиды, полученной движением круга радиуса  $a$ .

$$\begin{cases} x = at - a \sin t \\ y = a - a \cos t \end{cases}$$

*Решение.* Из прошлого семестра, мы знаем, что площадь можно посчитать с помощью двойного интеграла. Для этого нам нужно найти пределы интегрирования. Переменная  $x$  меняется от 0 до  $2\pi a$ , однако, когда мы попытаемся найти пределы интегрирования по  $y$ , мы столкнемся с проблемой:  $t$  нельзя выразить через  $x$  в явном виде. Следовательно, старый способ вычисления площади тут не сработает.

Воспользуемся 1-формами площади. Заметим, что область ветки ограничена кривой циклоиды и осью  $Ox$ . Обозначим за  $C$  и  $I$  циклоиду и ось  $Ox$  соответственно, по формуле Грина получим:

$$S = \oint_{C+I} ydx = \int_C ydx + \int_I ydx$$

Так как  $y = 0$  во втором интеграле, получаем:

$$\begin{aligned} \int_C ydx &= \int_0^{2\pi} a(1 + \cos t)d(at - a \sin t) = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \frac{6x - 8 \sin x + \sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

□

У нас уже был критерий полного дифференциала, но он не годится для непосредственной проверки того, является ли 1-форма дифференциалом некоторой функции. Поставим перед собой задачу: по 1-форме определить полный дифференциал ли это и, если да, то какой функции?

**Теорема 3.35** (Необходимое условие полного дифференциала). Пусть  $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$  и  $w \in C^1$ . Тогда, если  $w = df$ , то

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

*Доказательство.* Заметим, что, если  $w = df$  и  $w \in C^1$ , то  $f \in C^2$ , т.е. существуют вторые частные производные функции  $f$  и дифференциал  $f$  можно записать в координатном представлении.

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Так как  $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , получаем, что

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□

Сейчас мы убедимся, что данное условие не является достаточным.

**Определение 3.36.** Формой Гаусса  $\Theta$  (в декартовых координатах) называется форма

$$\Theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{dom } \Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Не сложно убедиться в том, что для формы Гаусса выполняются необходимые условия полного дифференциала.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Однако, если мы возьмем за замкнутый контур единичную окружность и вычислим интеграл по замкнутому контуру, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

То есть, критерий полного дифференциала не выполняется и форма Гаусса не является полным дифференциалом.

Заметим так же, что если бы мы воспользовались формулой Грина для проверки критерия, мы бы получили другой ответ:

$$\oint \Theta = \int 0 dx dy = 0$$

Но тут нет противоречия, ведь форма Гаусса не гладкая в нуле, следовательно, нельзя применять формулу Грина.

Рассмотрим представление формы Гаусса в полярных координатах

$$\Theta = d\varphi$$

**Лемма 3.37.** Пусть  $\gamma$  — кривая, не проходящая через 0, с началом в  $p$  и концом в  $q$ . Тогда

$$\int_{\gamma} = \varphi(q) - \varphi(p)$$

— разность углов с осью  $Ox$  радиус векторов  $v$  из начала координат в начальную и конечную точку.

**Лемма 3.38.**  $\Theta = d\varphi$  будет полным дифференциалом, если выколоть некоторый луч исходящий из нуля (т.к. никакая кривая не сможет полностью обойти 0).

**Определение 3.39.** Две кривые  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  называются гомотопными, если существует функция  $f : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая, что  $f$  — непрерывная и  $f(x, 0) = \gamma_0(x)$  и  $f(x, 1) = \gamma_1(x)$

**Определение 3.40.** Множество  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется односвязным, если всякий замкнутый контур  $\gamma \subseteq M$  гомотопен точке.

Примеры односвязных множеств

1.  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , сфера — односвязные множества.
2.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{прямая}\}$ , тор — не являются односвязным множеством.

**Теорема 3.41** (Гипотеза Пуанкаре). Всякое  $n$ -мерное компактное односвязное многообразие без края гомеоморфно  $n$ -мерной сфере.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Теорема 3.42** (Достаточное условие полного дифференциала). Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое и односвязное множество,  $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \in C^1$ ,  $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$  и  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$  для всех  $i, j = 1, \dots, n$ , тогда существует функция  $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$  такая, что  $w = df$ .

*Доказательство.* Проведем для  $\mathbb{R}^2$ .

Пусть  $w = adx + bdy$ ,  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$  и пусть  $\gamma \subseteq U$  — кусочно гладкий контур,  $\gamma \subseteq \partial D$  где  $D \subseteq U$ . Тогда по формуле Грина:

$$\oint_{\gamma} w = \pm \int_D \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dxdy$$

следовательно, выполнен критерий полного дифференциала, тогда существует функция  $f \in C^1$  такая, что  $w = df \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$ .  $\square$

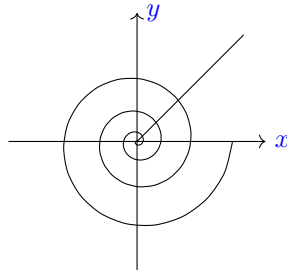
Допустим, нам дана 1-форма  $w$  и известно, что  $w = df$ . Возникает естественный вопрос: как найти такую функцию  $f$ ?

- выберем  $x_0 \in U$  и определим, что  $f(x_0) := C$ .
- возьмем  $x \in U$  такую, что  $x \neq x_0$  и выберем путь  $\gamma \subseteq U$  из  $x_0$  в  $x$  тогда

$$f(x) := f(x_0) + \int_{\gamma} w.$$

Сейчас рассмотрим восстановление функции по 1-форме в случае, если она является полным дифференциалом некоторой функции.

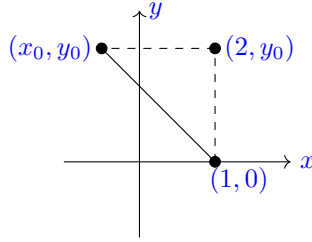
**Пример 3.43.** Рассмотрим дифференциальную форму  $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ .



— плоскость без луча. Если область не односвязная, ее надо сделать односвязной добавлением «связей», линий, соединяющих элементы области.

Восстановим функцию в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0, y = 0\}$ .





Выберем точку в области определения. Пусть  $f(1,0) = C$ .

$$\int_{(1,0)}^{(2,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y_0,$$

$$\int_{(1,y_0)}^{(x_0,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_1^{x_0} -\frac{y_0 dy}{x^2 + y_0^2} = \begin{cases} y_0 = 0 : 0, \\ y_0 \neq 0 : -\frac{1}{y} \int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} = \left[ t = \frac{x}{y_0}, dt = \frac{1}{y_0} dx \right] \Rightarrow \int_{\frac{1}{y_0}}^{\frac{x_0}{y_0}} \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan \frac{1}{y_0} - \arctan \frac{x_0}{y_0}$$

Таким образом:

$$f(x, y) = f(1, 0) + \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y < 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

— где  $f(1, 0)$  — задается.

### 3.4 Внешние формы второго порядка

Рассмотрим для примера как происходит замена переменной в плоском случае. Пусть  $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$  — 2-форма, такая что  $w = f(x, y)dx \wedge dy$ . Проведем замену переменных  $\varphi$ :

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \end{cases}$$

Вычислим оператор переноса:

$$\begin{aligned}\varphi^* w(t, s) &= (f \circ \varphi)(t, s)(x_t dt + x_s ds) \wedge (y_t dt + y_s ds) = \\ &= (f \circ \varphi)(t, s) \cdot \det \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} dt \wedge ds\end{aligned}$$

В операторе переноса возник коэффициент искажения. Заметим, что в отличие от коэффициента искажения при замене переменных в интеграле, в операторе переноса коэффициент искажения возникает без модуля. Его знак зависит от того, меняет ли замена переменных ориентацию (он отрицательный, если замена переменных меняет ориентацию).

**Определение 3.44.** Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  — открытое множество и  $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$  — непрерывная 2-форма. Тогда выражение

$$\int_U w = \iint_U f(x, y) dx \wedge dy := \theta(e_x, e_y) \int_U f(x, y) dx dy$$

называется *интегралом 2-формы* в  $\mathbb{R}^2$ , где  $\theta(e_x, e_y) = \pm 1$  — ориентация плоскости ( $e_x, e_y$  — орты, соответствующие направлению).

**Определение 3.45.** Пусть  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  — двумерное  $C^1$ -гладкое ориентированное многообразие и  $w : M \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$  — непрерывная 2-форма. Тогда, если  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  — параметризация, то

$$\int_M w := \int_U \varphi^* w = \int_U w(\varphi(t, s)) \langle \varphi_t(t, s), \varphi_s(t, s) \rangle dt \wedge ds$$

будем называть *интегралом 2-формы по поверхности*.

Если  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  — поверхность, то соответствующие касательные векторы в каждой точке образуют касательную плоскость, а векторы нормали, в свою очередь, образуют прямую. Следовательно, ориентацию можно задать нормалью.

В  $\mathbb{R}^3$  задано правило Буравчика (если поворачиваем от 1 к 2, то 3 смотрит на нас) — ориентация  $\theta\langle u, v, w \rangle$ . То есть, если на поверхности есть  $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ , то  $\theta_M(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = \theta\langle \vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle$ .

Очевидно, что  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$ . Следовательно,  $(a, b, c) \simeq ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = w$ . Отсюда  $w\langle u, v \rangle = (a, b, c)(u \times v)$ .

Получим формулу потока векторного поля через поверхность, где  $(a, b, c) \cdot \langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle$  — поток вектора  $(a, b, c)$  через параллелограмм  $\Pi(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ .

$$\begin{aligned}
\int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_M w \langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle dS = \\
&= \int_M (a, b, c) \cdot \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle dS = \int_M (a, b, c) \cdot \vec{n} dS
\end{aligned}$$

**Определение 3.46.** Форма Гаусса в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Theta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Лемма 3.47.** В сферических координатах форма Гаусса имеет вид

$$\Theta = d\theta \wedge d\varphi.$$

*Доказательство.* Проверяется непосредственной подстановкой сферической замены и остается в качестве упражнения читателю.  $\square$

Геометрическая интерпретация формы Гаусса  $\int_M \Theta$  — телесный угол под которым видна поверхность из начала координат.

### 3.5 Внешний дифференциал 1-формы

Пусть  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция. Тогда  $df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  — линейная функция, а  $df : x \mapsto df(x)$  — 1-форм. напомним, что  $d^2 f(x) \langle u, v \rangle = d(df(x))$  — билинейная симметричная форма, такая что  $d^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ .

В свою очередь, при  $w : U \rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ ,  $dw$  так же является билинейной формой, но не обязательно симметричной.

$$dw \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = d(w \langle \vec{u} \rangle) \langle \vec{v} \rangle = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} w \langle \vec{u} \rangle$$

Форма  $w$  в координатном представлении имеет вид  $w = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$ , следовательно

$$dw(x) \langle u \rangle = \sum_{i=1}^n da_i(x) u_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i dx_j$$

Из этого следует, что

$$dw(x)\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i v_j = \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u}$$

То есть, всякая билинейная форма есть сумма симметричной и кососимметричной (первое и второе слагаемые соответственно), где  $l^T \langle u, v \rangle = l \langle v, u \rangle$ :

$$l = \frac{l + l^T}{2} + \frac{l - l^T}{2}$$

**Определение 3.48.** *Внешним дифференциалом 1-формы* называется кососимметричная часть полного дифференциала, то есть  $du$  сопоставляет 1-форме — 2-форму.

$$d : C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow C^r(U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

**Лемма 3.49.** *Если  $w = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ , то*

$$dw = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

Теперь рассмотрим запись формулы Грина и формулы Ньютона-Лейбница в терминах внешнего дифференциала.

**Теорема 3.50** (Формула Грина в терминах внешнего дифференциала). *Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  — область с кусочно-гладкой границей и  $w \in C^1(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$ . Тогда верна формула Грина*

$$\oint_{\partial U} w = \int_U d_{\text{внешний}} w$$

формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\partial \gamma} f = f(q) - f(p) = \int_{\gamma} df$$

### 3.6 Ротация векторного поля

**Определение 3.51.** Пусть  $\bar{v}$  — векторное поле в плоскости. Ротация (вихрь) векторного поля  $\bar{v}$  в точке  $(x_0, y_0)$

$$\mathbf{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C/\pi r^2} \bar{v} d\bar{r}, \text{ где } C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

**Лемма 3.52.** Для  $C^1$ -гладкого векторного поля  $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$  верно, что

$$\mathbf{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Доказательство.* Пусть  $C := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ,  $S := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ .

$$\oint_C \bar{v} d\bar{r} = \oint_C (a, b)(dx, dy) = \oint_C a dx + b dy =$$

воспользуемся формулой Грина

$$\begin{aligned} &= \iint_S \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ &= \iint_S \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + o(1) \right] dx dy = \\ &= \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right)(x_0, y_0) \pi r^2 + \iint_B o(1) dx dy \end{aligned}$$

**Определение 3.53** (формула Грина).

$$\oint_{\partial U} \bar{v} d\bar{r} = \iint_U \mathbf{rot}_{x,y} \bar{v} dx dy.$$

□

**Свойства ротации.**

**Свойство 1°.** ЛИНЕЙНОСТЬ

пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{u}, \bar{v}$  — векторные поля в плоскости, тогда  $\mathbf{rot}_{x,y}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \mathbf{rot}_{x,y} \bar{u} + \beta \mathbf{rot}_{x,y} \bar{v}$ .

**Свойство 2°.** АНТИСИММЕТРИЧНОСТЬ

пусть  $\bar{v}$  — векторное поле в плоскости, тогда  $\mathbf{rot}_{x,y} \bar{v} = -\mathbf{rot}_{y,x} \bar{v}$ .

### 3.7 Внешние формы высших порядков

**Определение 3.54.** Внешней алгебраической формой порядка  $k \in \mathbb{N}$  над  $\mathbb{R}^k$  называется функция  $l : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

1.  $l$  —  $k$ -линейная функция (т.е. линейна по каждому из  $k$  аргументов),
2.  $l$  — кососимметричная функция, т.е. если  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  — перестановка, то  $l\langle u_{\sigma_1}, \dots, u_{\sigma_k} \rangle = \text{sgn } \sigma \cdot l\langle u_1, \dots, u_k \rangle$

Пространство алгебраических форм порядка  $k$  над  $\mathbb{R}^n$  будем обозначать как  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 3.55.** Пусть даны  $k$  штук 1-форм  $l_1, \dots, l_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  результат их внешнего произведения будет являться  $k$ -формой

$$(l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_k)\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \det \begin{pmatrix} l_1\langle u_1 \rangle & l_1\langle u_2 \rangle & \dots & l_1\langle u_k \rangle \\ l_2\langle u_1 \rangle & l_2\langle u_2 \rangle & \dots & l_2\langle u_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_k\langle u_1 \rangle & l_k\langle u_2 \rangle & \dots & l_k\langle u_k \rangle \end{pmatrix}$$

На пространстве  $k$ -форм над  $\mathbb{R}^n$   $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  можно ввести базис:  $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

Размерность пространства  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  это число перестановок из  $n$  по  $k$ :  $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k$ .

Для упрощения записи введем специальное обозначение

**Определение 3.56.** «Шапкой-невидимкой» называется операция  $\widehat{\phantom{x}}$  определенная как

$$dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Стандартный базис  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  это  $\{(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n\}_{j=1, \dots, n}$  — базис для  $(n-1)$ -форм.

К примеру для  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  базисом будет набор  $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ .

#### Мультииндексные обозначения

Для упрощения записей будем использовать мультииндексные обозначения. Определим  $M(n, k) := \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ , число элементов  $M(n, k)$  равняется  $C_n^k$ .

Тогда  $k$ -форма  $l$  будет записываться как  $l = \sum_{I \in M(n, k)} a_I dx_I$ , где  $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ .

С помощью мультииндексных обозначений доопределим внешнее произведение внешних форм

$$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

Пусть  $w^k = \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I$  и  $w^l = \sum_{J \in M(n,l)} b_J dx_J$ . Тогда  $w^k \wedge w^l = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$ .

**Пример 3.57.** Пусть даны две формы  $2dx + 3dy + 4dz$  и  $5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy$ . Тогда

$$\begin{aligned} (2dx + 3dy + 4dz) \wedge (5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy) = \\ 0 + 0 + 15dy \wedge dz \wedge dx + 0 + 0 + 24dz \wedge dx \wedge dy = \\ 39dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

т.к.  $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Свойства внешнего произведения  $\wedge$ .**

**Свойство 1°.** ЛИНЕЙНОСТЬ

**Свойство 2°.** КОСОСИММЕТРИЧНОСТЬ

Для любых  $w^k, w^l$  выполнено  $w^k \wedge w^l = (-1)^{kl} \cdot w^l \wedge w^k$ .

**Определение 3.58.** Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , функция  $w^k : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  называется внешней дифференциальной формой порядка  $k$  ( $k$ -формой).

### 3.7.1 Замена переменной в $k$ -форме

**Определение 3.59.** Пусть  $w : V \rightarrow \Lambda^k, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое множество,  $\varphi : U \rightarrow V$  –  $C^1$ -диффеоморфизм, тогда *операция переноса*

$$\varphi^* : (V \rightarrow \Lambda^k) \rightarrow (U \rightarrow \Lambda^k)$$

определяется следующим образом:

$$(\varphi^* w)(x) \langle u_1, \dots, u_k \rangle = w(\varphi(x)) \langle D\varphi_x \langle u_1 \rangle, \dots, D\varphi_x \langle u_n \rangle \rangle$$

то есть

$$w(y) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in M(n,k)} a_I(y) dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

замена  $y = \varphi(x)$

$$\varphi^*(w)(x) = \sum_{I \in M(n,k)} a_I(\varphi(x)) dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x)$$

**Свойства операции переноса  $\varphi^*$ .**

**Свойство 1°.** ЛИНЕЙНОСТЬ для любых форм  $w_1, w_2$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  верно, что  $\varphi^*(\alpha_1 w_1 + \beta w_2) = \alpha_1 \varphi^* w_1 + \beta \varphi^* w_2$

**Свойство 2°.**

пусть  $\psi^*$  и  $\varphi^*$  — операции переноса. Тогда  $\psi^* \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*$

**Свойства внешнего произведения  $\wedge$ .**

**Свойство 3°.**

пусть  $\varphi^*$  — операция переноса,  $w^k, w^l$  — формы. Тогда  $\varphi^*(w^k \wedge w^l) = \varphi^* w^k \wedge \varphi^* w^l$ .

Рассмотрим  $n$ -форму над  $\mathbb{R}^n$   $w^n = f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$ , пусть  $y = \varphi(x)$ . Тогда  $\varphi^* w^n = f(\varphi(x)) \det D\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

Теперь выясним, как интегрировать  $n$ -форму по области в  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $\Theta$  — ориентация в  $\mathbb{R}^n$ ,  $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$  — непрерывна,  $w(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Положим

$$\int_U w = \int_U f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \Theta(l_1, \dots, l_n) \int_U f(x) dx_1 \dots dx_n$$

### 3.7.2 Интеграл $k$ -формы по ориентированному $k$ -мерному многообразию

TODO

**Определение 3.60.** Пусть  $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \in C^1$  и  $w(x) = \sum_{I \in H(n,k)} a_I(x) dx_I$

внешним дифференциалом  $k$ -формы  $w$  назовем дифференциальную  $(k+1)$ -форму  $dw : U \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$  определяемую следующим образом:

- при  $k = 0$  это дифференциал функции (1-форма),
- при  $k > 0$  определим покомпонентно

$$dw(x) = d \left( \sum_I a_I(x) dx_I \right) := \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

**Свойства внешнего дифференциала.**

**Свойство 1°.** ЛИНЕЙНОСТЬ

Для любых  $w_1, w_2, \alpha, \beta$  выполнено



$$d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha dw_1 + \beta dw_2$$

**Свойство 2°.**

$$d(w^k \wedge w^l) = dw^k \wedge w^l + (-1)^k w^k \wedge dw^l$$

*Доказательство.* Пусть  $w^k$  и  $w^l$ , такие, что

$$\begin{aligned} w^k &= \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I & w^l &= \sum_{I \in M(n,l)} a_I dx_I \\ w^k \wedge w^l &= \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(w^k \wedge w^l) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} (a_I db_J + b_J da_I) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

Осталось заметить, что первое слагаемое это в точности

$$(-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J = (-1)^k \wedge dw^l$$

А второе, в свою очередь, в точности

$$\sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge (b_J dx_J) = dw^k \wedge w^l$$

□

**Свойство 3°.** ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ С ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

*Доказательство.* Для 0,1-форм уже доказано. Докажем для форм высшего порядка по индукции. Пусть для  $k$ -форм утверждение выполнено, докажем для  $(k+1)$ -форм.

С одной стороны для  $w^{k+1}(y) = a(y)dy_i \wedge dy_J$  имеем

$$\begin{aligned}\varphi^* dw^{k+1} &= \varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J - a(y)dy_i \wedge d(dy_J)) = \\ &= \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}d(\varphi^* w^{k+1}) &= d(\varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J)) = d(\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J) = \\ &= d\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge d(\varphi^* dy_J)\end{aligned}$$

Применив предположение индукции, получим

$$\varphi^*(d(a(y)dy_i)) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^*(d(dy_J)) = \varphi^*(d(a(y)) \wedge dy_i \wedge dy_J)$$

□

**Определение 3.61.**  $k$ -мерное многообразие называется *замкнутым*, если это компакт без края.

Если  $M$  —  $k$ -мерное замкнутое многообразие и  $w^k$  —  $k$ -форма на  $M$ , то

$$\oint_{\partial M} w^k := \int_M w^k$$

**Теорема 3.62** (Формула Стокса-Пуанкаре). Пусть  $M$  — кусочно-гладкое  $k$ -мерное компактное ориентированное многообразие,  $w$  —  $C^1$ -гладкая  $(k-1)$ -форма на  $M$ , тогда

$$\oint_{\partial M} w = \int_M dw$$

*Доказательство.* Разобьем доказательство данной формулы на два шага. Для начала докажем ее для случая куба в  $\mathbb{R}^n$ , потом, имея доказательство для куба, обобщим его на случай произвольного многообразия.

**Шаг 1.** Проведем доказательство для куба в  $\mathbb{R}^n$ . Зададим куб как  $[-a, a]^n$  и заметим, что он является  $n$ -мерным многообразием в  $\mathbb{R}^n$  и у него есть  $2n$   $(n-1)$ -мерных граней

$$\begin{cases} -a \leq x_1 \leq a \\ -a \leq x_2 \leq a \\ \dots \\ -a \leq x_n \leq a \end{cases}$$

Пусть  $w$  —  $(n-1)$ -форма, заданная на кубе, тогда

$$w(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dw(x) &= \sum_{j=1}^n da_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} (-1)^{j+1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Вычислим интеграл от  $dw$  по кубу

$$\int_{[-a,a]^k} dw = \int_{[-a,a]^k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

С другой стороны

$$\int_{x_j=a} w = \int_{x_j=a} \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Что равно

$$\begin{aligned}
& \int_{x_j=a} a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\
& = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = \\
& = - \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, -a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{x_j=a} w + \int_{x_j=-a} w = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left( a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a} \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n$$

Следовательно

$$a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a} = \int_{-a}^a \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) dx_j$$

ШАГ 2. Пусть  $x \in M$  тогда существует  $U_x$  – окрестность точки  $x$  и существует  $C^1$ -диффеоморфизм  $\varphi_x : U_x \rightarrow \varphi_x(U_x)$  на окрестность нуля в  $\mathbb{R}^n$ , такой что  $\varphi_x(x) = 0$  и

$$\varphi_x(U \cap M) = \begin{cases} \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{n-k}), \\ \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\}^{n-k}). \end{cases}$$

Причем  $U_x$  мы выберем квадратной, так как если существует какая-либо окрестность точки, то в нее всегда можно вписать квадрат.

Пусть  $Q_x \subset \varphi(U_x)$  – открытый  $k$ -мерный куб с центром в нуле. Для любого такого куба формула уже доказана в силу 1 шага. Все многообразие  $M$  покрывается  $\varphi_x^{-1}(Q_x)$ , т.е. образами кубов. Следовательно, существует конечный набор  $Q_1, \dots, Q_m$  соответствующий  $x_1, \dots, x_m$ , такой что  $\varphi_1^{-1}(Q_1), \dots, \varphi_m^{-1}(Q_m)$  – покрывает  $M$ .

Используем «разбиение единицы». Пусть существует набор гладких функций  $\psi_1, \dots, \psi_m : M \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $\psi_j(x) > 0$  тогда и только тогда,

когда  $x \in \varphi_j(Q_j)$  и  $\sum_{j=1}^m \psi_j(x) \equiv 1$ . Такой набор всегда существует, потому что мы можем его построить.

Построим «разбиение единицы»:

Существует функция  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$  определенная как

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(x) > 0, & |x| < a, \\ \chi(x) = 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Тогда  $\chi^k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  это  $\chi^k(x_1, \dots, x_k) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \dots \cdot \chi(x_k)$  Имеем

$$\chi^k(x) = \begin{cases} \chi^k(x) > 0, & |x|_\infty < a, \\ \chi^k(x) = 0, & |x|_\infty \geq a. \end{cases}$$

Переносом системы координат получим эту функцию, заданную на многообразии:  $\varphi_j^* \chi^k : M \rightarrow \mathbb{R}$  при этом  $\chi^k(x) > 0 \iff x \in \varphi_j^{-1}(Q_j)$ . Получаем, что сумма  $\varphi_j$  неотрицательна, осталось нормировать.

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi_j^* \chi^k(x)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i^* \chi^k(x)}$$

$\varphi_j : \varphi_j^{-1}(Q_j) \rightarrow Q_j$  — перенос образа куба в куб.

$$\begin{aligned} \int_M dw &= \int_M 1dw = \int_M \sum_{j=1}^m \psi_j(x) dw(x) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j(x) dw(x) = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw). \end{aligned}$$

Используем доказанную ранее формулу Стокса для случая куба:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w &= \int_{\partial Q_j} \varphi_j^*(\psi_j w) = \int_{Q_j} d\varphi_j^*(\psi_j w) = \int_{Q_j} \psi_j^* d(\psi_j w) = \\ &= \int_{Q_j} \varphi_j^*(d\psi_j \wedge w + \psi_j dw) = \int_{Q_j} \psi_j^*(d\psi_j \wedge w) + \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw) = \\ &= \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw$$

При этом левая часть этого выражения равна

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^m \int_{\partial \varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j w = \int_{\partial M} w$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w = \sum_{j=1}^m \int_M d\psi_j \wedge w = \int_M d1 \wedge w \equiv 0$$

Второе слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw = \sum_{j=1}^m \int_M \psi_j dw = \int_M dw$$

Следовательно,

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

□

Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре:

1. Если  $k = 1$ , то  $M$  — кривая, а  $w$  — функция и формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Ньютона-Лейбница.
2. Если  $n = 2$  и  $k = 2$ , то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Грина.
3. Если  $n = 3$  и  $k = 3$ , то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Гаусса-Остроградского.
4. Если  $n = 3$  и  $k = 2$ , то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Кельвина-Стокса.

### 3.8 25.04.19

Пусть поверхность  $S$  окружает тело  $V$  в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда объем тела  $V$  можно вычислить проинтегрировав по внешней стороне поверхности одну из форм:

$$x dy \wedge dz \quad y dz \wedge dx \quad z dx \wedge dy$$

По формуле Стокса

$$\oint_S x dy \wedge dz = \int_V dx \wedge dy \wedge dz = \pm |V|$$

Чтобы значение было положительно, нужно согласовать ориентацию так, чтобы она определялась с помощью нормали по внешней стороне.

В общем случае, формами объема в  $\mathbb{R}^n$  являются формы вида

$$(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \quad j = 1 \dots n$$

А так же форма

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

**Определение 3.63.** Непрерывная  $k$ -форма называется *точной*, если она является внешним дифференциалом некоторой  $C^1$ -гладкой  $(k-1)$ -формы  $\theta$ , т.е.  $w = d\theta$ .

**Определение 3.64.**  $C^1$ -гладкая форма  $w$  называется *замкнутой*, если  $dw = 0$ .

Как мы знаем, первообразную можно восстановить с точностью до константы. В случае с формами роль констант выполняют замкнутые формы, т.е. форму можно восстановить по дифференциалу с точностью до замкнутой формы.

**Теорема 3.65** (Первая теорема Пуанкаре). *Все (гладкие) точные формы являются замкнутыми, т.е. если  $w$  –  $C^1$ -гладкая точная форма, то  $dw = 0$ . Так же это утверждение можно переформулировать как  $d \circ dw = 0$ , т.е. внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

*Доказательство.* Так как дифференциал линеен, достаточно доказать только для одного из слагаемых.

Пусть  $\theta = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = adx_I$ . Тогда

$$d\theta = d(adx_I) = da \wedge dx_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Отсюда

$$d(d\theta) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

Если  $i = j$ , то слагаемые вида  $dx_i \wedge dx_i$  равны нулю, с другой стороны, если  $i \neq j$ , то  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  и это слагаемое равно симметричному слагаемому с противоположным знаком, так как

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}$$

Следовательно,  $d(d\theta) = 0$ .  $\square$

**Определение 3.66.** Множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  называется  $k$ -связным, если каждое замкнутое многообразие, порядок которого меньше или равен  $k$ , можно стянуть в точку.

В частности, 0-связное множество представляет собой набор точек, каждую пару которых можно соединить кривой. Так же вводят понятие  $(-1)$ -связного множества, что обозначает, что она не является  $k$ -связным ни для какого  $k$ .

**Определение 3.67.** Множество  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *звездным* относительно некоторой точки  $x_0$ , если любую точку  $x \in U$  можно соединить с  $x_0$  отрезком.

Очевидно, что, если множество  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  звездное, то оно  $k$ -связное для любого  $k = 1 \dots n$ .

**Определение 3.68.** Пусть  $U$  — звездное множество. Определим оператор  $I : C^r(U \rightarrow \Lambda^k) \rightarrow C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^{k-1})$ , так, что каждой форме  $w = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  сопоставляется

$$I(w) = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$



**Определение 3.69.** Форма  $w$  называется коточной, если существует форма  $\theta$ , такая что  $w = I\theta$ .

**Теорема 3.70.** Для всякой  $C^1$ -гладкой  $k$ -формы  $w$  на звездной области выполнено

$$w = dIw + Idw$$

*Доказательство.* Пусть  $w = a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , вычислим все выражения, которые есть в теореме.

$$\begin{aligned} Iw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dIw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} + x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \left( \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n x_{i_\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dw &= da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ Idw &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Если мы сложим  $I dw$  и  $dI w$ , двойные суммы сократятся, и проинтегрировав по частям и применив формулу Ньютона-Лейбница, мы получим

$$\begin{aligned} dI w + I dw &= k \left( \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \left( \int_0^1 \left[ k t^{k-1} a(tx) + \sum_{i=1}^n t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j \right] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ t^k a(tx) \right] dt \right) = w \end{aligned}$$

□

**Следствие 3.71** (Вторая теорема Пуанкаре). *В звездной области всякая замкнутая форма точна.*

### 3.9 Дивергенция векторного поля

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задана  $(n-1)$ -мерная ориентированная поверхность  $M$ . Тогда поток векторного поля  $\vec{v}$  через поверхность  $M$  вычисляется как

$$\Phi = \int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1}$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к  $M$  в точке  $x$ , согласованный с ориентацией.

Эту задачу можно решить используя дифференциальные формы. Для начала, рассмотрим для примера случай в  $\mathbb{R}^3$ . Как известно,  $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ .

$$e_1 \simeq dy \wedge dz$$

$$e_2 \simeq dz \wedge dx$$

$$e_3 \simeq dx \wedge dy$$

Пусть  $\vec{v}(x, y, z)$  — векторное поле, такое, что

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Phi = \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

Убедимся, что это выражение совпадает с исходным. Пусть  $\varphi : U \rightarrow M$  — параметризация поверхности  $M$ , такая что

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  — касательные векторы, тогда

$$\begin{aligned} \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_U (ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \\ &= \int_U \det \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ b & y_1 & y_2 \\ c & z_1 & z_2 \end{pmatrix} dt ds = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} \cdot J_\varphi(t, s) dt \wedge ds \end{aligned}$$

Проведя обратную замену, получим, что

$$\int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} dS^2$$

В пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $e_j \simeq (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$ . Из этого получаем выражение в общем случае при  $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)$

$$\int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_M \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Напомним, что через  $S_r$  и  $B_r$  мы обозначаем сферу и шар радиуса  $r$  соответственно.

**Определение 3.72.** Дивергенция векторного поля  $\vec{v}$  в точке  $x$  определяется как

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} dS^{n-1}$$

где, при вычислении потока  $\vec{v}$  через сферу  $S_r$ , интеграл берется по внешней стороне сферы.

**Лемма 3.73** (Оператор дивергенции в декартовых координатах). Для  $C^1$ -гладкого векторного поля  $v$  имеет место формула

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)$$

*Доказательство.* По формуле Стокса имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} &= \int_{S_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} da_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

□

**Теорема 3.74** (Формула Гаусса-Остроградского). Пусть  $V$  — тело ( $n$ -мерное компактное многообразие в  $\mathbb{R}^n$ ), тогда

$$\int_{\partial V} \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_V \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$$

**Определение 3.75.** Векторное поле  $\vec{v}$  называется *бездивергентным*, если  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Scal}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \operatorname{Scal}(\mathbb{R}^3) \\ \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. \\ \{U \rightarrow \Lambda^0\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^1\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^2\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^3\} \end{array}$$

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

То есть, на языке дифференциальных форма, каждой операции векторного анализа соответствует дифференциал.

В плоском случае можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left( \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \nabla \wedge (a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix} \\ \mathbf{div}(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \nabla \cdot (a, b)\end{aligned}$$

**Определение 3.76.** Пусть  $\vec{v}$  — векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $\vec{v}$  называют *вихревым*, если существует  $\vec{u}$  — векторное поле такое, что  $\vec{v} = \mathbf{rot} \vec{u}$ . В этом случае,  $\vec{u}$  называют векторным потенциалом векторного поля  $\vec{v}$ .

Леммы ниже являются следствиями первой и второй теоремы Пуанкаре соответственно.

**Лемма 3.77.** Вихревое векторное поле всегда бездивергентно, т.е.  $\mathbf{div} \mathbf{rot} \vec{v} = 0$ .

**Лемма 3.78.** Если векторное поле  $\vec{v}$  в звездной области в  $\mathbb{R}^3$  бездивергентно, то она вихревое.

**Теорема 3.79.** В звездной области всякое трехмерное векторное поле  $\vec{v}$  раскладывается в сумму вихревого и потенциального.

*Доказательство.* Следует из теоремы 3.70. □

**Определение 3.80.** Оператором Лапласа называется оператор  $\Delta : Scal \rightarrow Scal$  такой, что

$$\Delta = \nabla^2 = \mathbf{div} \mathbf{grad}$$

В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = \mathbf{div} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Если  $\Delta f > 0$ , то  $f(x)$  больше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке  $x$ .

Если  $\Delta f < 0$ , то  $f(x)$  меньше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке  $x$ .

Если  $\Delta f = 0$ , то  $f(x)$  приблизительно равна своему среднему значению на маленькой сфере с центром в точке  $x$ .