# Лекции по математическому анализу: многообразия, криволинейные и поверхностные интегралы, введение в векторный анализ.

18 мая 2019 г.

**Аннотация**

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Внимание! Записки не подвергались редактуре, поэтому, возможно, содержат множество неточностей, опечаток и смысловых ошибок.

# Содержание


**1 Многообразия** **3**
- 1.1 Многообразия без края . . . 3
- 1.2 Многообразия с краем . . . 6
- 1.3 Касательное и нормальное пространства . . . 10
- 1.4 Задача на условный экстремум . . . 13
- 1.5 Площадь поверхности . . . 15
- 1.6 Площадь графика функции . . . 19

**2 Криволинейные интегралы** **21**
- 2.1 Криволинейные интегралы I-рода . . . 21
- 2.2 Объем шара и площадь сферы . . . 22
- 2.3 Формула коплощади . . . 23

**3 Введение в векторный анализ** **25**
- 3.1 Дифференциальные формы . . . 25
- 3.2 Ориентация . . . 27
- 3.3 Интеграл 1-формы по кривой . . . 30
- 3.4 Внешние формы второго порядка . . . 41
- 3.5 Внешний дифференциал 1-формы . . . 43
- 3.6 Ротация векторного поля . . . 44
- 3.7 Внешние формы высших порядков . . . 45
  - 3.7.1 Замена переменной в $k$-форме . . . 47
  - 3.7.2 Интеграл $k$-формы по ориентированному $k$-мерному многообразию . . . 48
- 3.8 25.04.19 . . . 54
- 3.9 Дивергенция векторного поля . . . 57

# 1 Многообразия

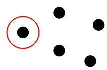
## 1.1 Многообразия без края

**Определение 1.1.** Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется $C^r$-гладким $k$-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует $U$ — окрестность $x_0$ и существует $C^r$-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где $V$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$.

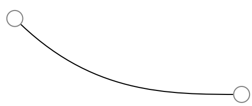
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

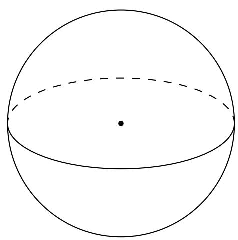
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



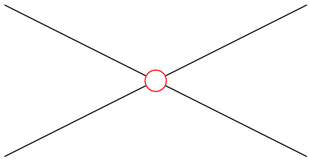
3. Поверхности ($k = 2$).



**Пример 1.2.**

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания $k$-мерных многообразий.

**Теорема 1.3.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, тогда $U$ является $n$-мерным многообразием.*

*Доказательство.* Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка $x_0$ лежит в некоторой окрестности.
Отображение $\Phi$ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ — сдвиг в ноль, переводит окрестность $x_0$ в окрестность нуля. $\square$

**Теорема 1.4** (О графике)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ — $C^r$-гладкое $n$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

*Доказательство.* Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение $\Phi$ является $C^r$-диффеоморфизмом и $\Phi(x,f(x)) = (x, 0)$, т. е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$. $\square$

**Теорема 1.5** (О локальном вложении)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U$ и $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, то существует $V$-окрестность $t^0$, такая что $f(V)$ является $C^r$-гладким $k$-мерным многообразием.*

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_k), \\ \ldots \\ x_n = f_n(t_1, \ldots, t_k). \end{cases}$$

*Доказательство.* Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \ldots + s_n v_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует $W$ — окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \to \Phi(W)$ — $C^r$-диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что $V$ — окрестность $x_0$ в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$. $\square$

**Определение 1.6.** Пусть $x^0$ — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда $x^0$ называется регулярным, если $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

**Теорема 1.7** (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r$ $\forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

*представляет собой $C^r$-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.*

*Доказательство.* Пусть $x^0$ — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из $n$ столбцов, где $k$ из них линейно независимы.

$f(x_1, \ldots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots x_n) = f(x, y) = 0$. Существует окрестность $V$ такая, что $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ тогда по теореме о неявной функции $y = g(x)$.

В некоторой окрестности $x^0$:

$$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}),$$
$$\dots$$
$$x_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$x_1 = x_1,$$
$$\dots$$
$$x_{n-k} = x_{n-k},$$
$$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}),$$
$$\dots$$
$$x_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k}). \qquad \square$$

## 1.2 Многообразия с краем

**Определение 1.8.** $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$ — верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$ — нижнее полупространство).

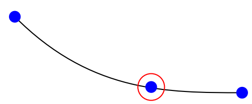
**Определение 1.9.** Пусть $V \subseteq R^k$ — окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

**Определение 1.10.** Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется $C^r$-гладким $k$-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует $U$ — окрестность $x_0$ и существует $C^r$-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда $x_0$ — внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда $x_0$ — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$.

2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

**Определение 1.11.** Пусть $M$ — многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ — краевая точка $M\}$ — множество краевых точек многообразия $M$.

**Теорема 1.12** (О крае)**.** *Пусть $M$ — $C^r$-гладкое $k$-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек $\partial M$ является $C^r$-гладким $(k-1)$-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

*Доказательство.* Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$.

Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ — краевая точка. Отображение $\Phi$ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание — $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ — выполнено определение многообразия. □

**Теорема 1.13** (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \ \forall\, i \leq k+1$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

*представляет собой $C^r$-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение $(k+1)$ уравнений).*

*Доказательство.* Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

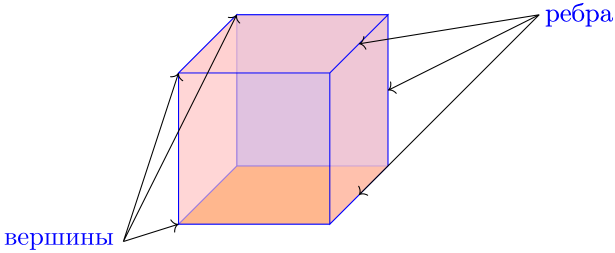
$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает $(k-1)$ мерную поверхность — край многообразия. □

**Определение 1.14.** Множество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется $k$-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. $M$ — $k$-мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ — гладкое $k$-мерное многообразие, а $Z_i$ — кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k-1$.

**Пример 1.15.** Куб.




**Теорема 1.16.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – открытое множество, $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+l$ и* rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

*представляет собой $C^r$-кусочно-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем.*

**Пример 1.17.** Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

*Решение.* Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если $x = 0$ или $y = 0$. Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно $\operatorname{rank} \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$ и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

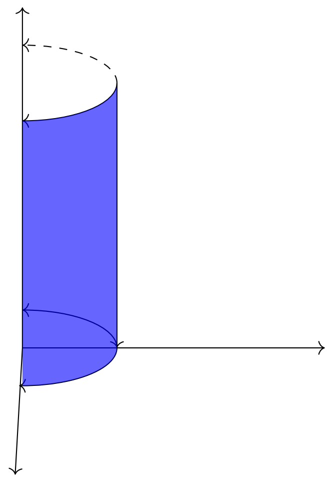
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: $0, 1, 1, 1, 2, 2, 2$ (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий). $\square$

**Пример 1.18.** в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

## 1.3 Касательное и нормальное пространства

**Определение 1.19.** Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой $\gamma$.

**Определение 1.20.** Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в $M$, т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к $M$ в точке $x_0$ обозначается $T_{x_0}M$.

**Задача 1.21.** *Пусть $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ – параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – $C^1$-диффеоморфизм. Показать, что если $v$ – вектор скорости кривой $\gamma$ в точке $t_0 \in (a,b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v\rangle$ – вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке $t_0$.*

*Решение.* Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0)\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v\rangle. \qquad \square$$

**Лемма 1.22.** *Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0\ \lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.*

*Доказательство.* По условию, существует кривая $\gamma \subset M$, для которой $\vec{v}$ является вектором скорости. Зададим кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ и проверим, что вектор $\lambda\vec{v}$ является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda\vec{v}$$

□

**Теорема 1.23** (О множестве касательных векторов)**.** *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — $C^1$-гладкое $k$-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*
2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

*Доказательство.* По определению $k$-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует $U$ — окрестность $x_0$ и существует $C^r$-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где $V$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$.

Под действием $\Phi$ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_k'(t), 0, \ldots, 0)$.

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$ — линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - $k$-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

**Определение 1.24.** Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке $x_0$ – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

**Лемма 1.25.** *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда если $\dim M = k$ то, $\dim T_{x_0}M = k$ и $\dim N_{x_0}M = n - k$.*

**Теорема 1.26** (О базисе касательного пространства)**.** *Пусть многообразие $M$ задано параметрически:*

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_k), \\ \ldots \\ x_n = f_n(t_1, \ldots, t_k). \end{cases}$$

*, где $(t_1, \ldots, t_k) \in U$.*

*Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $t^0 \in U$. Тогда, если $M = f(U)$ – многообразие и $\operatorname{rank} Df = k$, то $\{\frac{\partial f}{\partial t_1}(t^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t^0)\}$ – базис в $T_{f(t^0)}M$.*

*Доказательство.* Пусть $t^0 \in U$, определим $\Gamma_j = t^0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ — кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке $t^0$: $\gamma_j'(t^0) = \frac{d}{dt} f(t^0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t^0) \in T_{f(t^0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. $\square$

**Теорема 1.27.** *Пусть многообразие $M$ задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k. \end{cases}$$

*и $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall i \le k$ , $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а так же $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений*

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0, \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

*задает $T_{x_0}M$, а $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.*

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

## 1.4 Задача на условный экстремум

**Определение 1.28.** Пусть $M, N$ — дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке $x_0$, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

**Теорема 1.29** (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — дифференцируема и $x_0$ — её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

Для $f\mid_\gamma$ $x_0$ - экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. □

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ — $k$-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f\mid_M$.

**Теорема 1.30** (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума $f$, то $df\mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

*Доказательство.* Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

Тогда $x_0$ - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. □

**Теорема 1.31** (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если $x_0$ — условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

*Доказательство.* Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную $L$ по $x_j$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1\nabla\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k\nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, $\nabla f$ – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. □

**Лемма 1.32** (Правило дифференцирования вдоль кривой)**.**

*Пусть* $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество и* $\gamma : [a,b] \to U \in C^2$ *– кривая. Тогда*

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)}\langle \gamma''(t) \rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

*Доказательство.* $(f \circ \gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle \vec{v} \rangle\right) = d^2 f(x)\langle \vec{v} \rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle \vec{v} \rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle\right)'_t = d^2 f_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)}\langle \gamma''(t) \rangle$. □

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \ldots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

**Теорема 1.33** (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R} \in C^2$, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$ *всюду, т.о. Определим функцию Лагранжа как* $L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(x)$, *тогда, если* $dL(x_0,\lambda_0) = 0$, *то при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) > 0$ *–* $x_0$ *— точка минимума, а при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) < 0$ *— точка максимума.*

*Доказательство.* Пусть $dL(x_0,\lambda_0) = 0, d_x^2 L(x_0, \lambda_0) \mid_{T_x M \times T_x M} > 0$.

$dL(x_0,\lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} \mid_{T_{x_0} M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \in C^2, \gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция $f$ на кривой $\gamma$, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. По лемме 1.32 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$.

$(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0}\langle \gamma'(0) \rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1\varphi_1(\gamma(t)) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + d_x L\langle\gamma''(t)\rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle\gamma'(0), \gamma'(0)\rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f\circ\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f\circ\gamma)'(0) = 0, (f\circ\gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, $x_0$ – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через $x_0$. Следовательно, $x_0$ – точка минимума для $f\,|_M$ . $\square$

**Пример 1.34.** Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

## 1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что $n$-мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1v_1 + \ldots, t_nv_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \ldots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \ldots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j\rangle)_{ij} = A^TA$ получаем: $\det A^TA = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L|E| = |\det L||E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r\to 0} \frac{|\varphi(Q(x,r))|}{|Q(x,r))|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества $E$, мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int\limits_E J_{\varphi(x)}$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

**Теорема 1.35** (Объем k-мерного параллепипеда)**.** *Пусть* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$*. Тогда* $|\Pi(v_1, \ldots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$*. Обозначив за* $A = [v_1, \ldots, v_n]$*, это выражение можно записать ввиде* $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$*.*

*Доказательство.* Пусть $k$-мерная гиперплоскость $L$ содержит в себе параллелепипед $\Pi$.

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{kj}, 0, \ldots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \ldots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{где } \theta - k \times k \text{матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det (QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

**Определение 1.36.** Пусть $A$ - матрица, имеющая из $n$ строк и $k$ столбцов и $M(n,k) = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда $A_I$ - минор, составленный из $i_1, i_2, \ldots, i_k$ строк матрицы $A$.

**Теорема 1.37** (Формула Бине-Коши)**.** *Пусть $A$ – матрица, имеющая из $n$ строк и $k$ столбцов, тогда* $\det A^* A = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det^2 A_I$*.*

*Доказательство.* Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$-матрицы, тогда $\det A^* B = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \ldots; u_n]$ и $B = [v_1, \ldots, v_n]$, определим отображения $L_1$ и $L_2$ следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k\rangle = \sum_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что $L_1$ и $L_2$ линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ????).

$$L_1\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk}\rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk}\rangle$$

□

**Следствие 1.38.** *Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что $\operatorname{rank} L = k \leq n$. Тогда для каждого измеримого множества $A$, $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^* L}$.*

**Следствие 1.39.** *Пусть $\Pi$ – $k$-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^k \to \Pi$ - $C^1$-диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x)dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.*

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за $A$ некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v\rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы $A$, получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - $k$-мерное $C^1$-гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots & (t_1, \dots, t_k) \in U \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

Определим меру $k$-мерной площади $S^k$ на параметрически заданном многообразии $M$.

**Определение 1.40.** Пусть $E \subseteq U \to \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|.|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по $S^k$ и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int\limits_E J_\varphi(t)dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

**Лемма 1.41.** *Пусть* $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *и* $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *- различные параметризации многообразия, такие что* $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} D\psi = k$*. Тогда* $\int\limits_U J_\varphi(t)dt = \int\limits_V J_\psi(t)dt$*.*

*Доказательство.* Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ — отображение между $U$ и $V$.

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ – $C^1$-диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\int\limits_V \sqrt{\det D\psi^*(y)D\psi(y)}dy = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$
$$|\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)|dx = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$
$$\sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)}dx$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. □

Рассмотрим некоторые свойства меры $S^k$:

1. Счетная аддитивность.

   Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ – не более чем счетный дизъюнктный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup M_i) = \sum\limits_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше $k$ равна нулю в мере $S^k$.

**Пример 1.42.** Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с помощью меры $S^k$.

*Решение.*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t) D\gamma(t)} = \sqrt{x_1'^2 + \ldots + x_n'^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

**Определение 1.43.** Мера угла – длина дуги единичной окружности с центром в начале угла.

## 1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – $n$-мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти $S^k$ надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

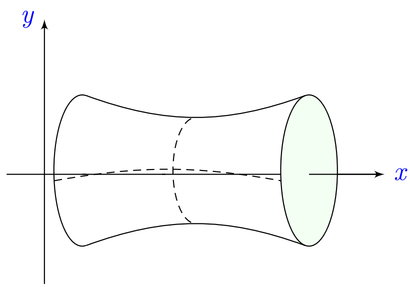
$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx$$

Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

*Доказательство.* TODO □

**Пример 1.44** (Вывод частной формулы из общей)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$




– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси $Ox$.

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра $(x, \varphi)$. Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \\ z = f(x)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

# 2 Криволинейные интегралы

## 2.1 Криволинейные интегралы I-рода

**Определение 2.1.** Пусть $M$ – $n$-мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \to \mathbb{E}$ – измеримая по $S^k$. Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f \, dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x)dx$, получаем,

$$\int_M f(y)dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то
$$\int_M (\alpha f + \beta g)dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$
2. монотонность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $f \le g$, то
$$\int_M f dS^k \le \int_M g dS^k.$$
3. аддитивность по области определения: если $f : M \to \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то
$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int\limits_{M_1} f dS^k + \int\limits_{M_2} f dS^k.$$
4. ограниченность: если $f : M \to \mathbb{E}$, то
$$\left| \int_M f dS^k \right| \le \int_M |f| dS^k.$$

## 2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в $\mathbb{R}^n$:

$$u = \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_3 = r\sin\varphi\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}) = u|_{r=const}$ - параметризация сферы.

Обозначим $n$-мерный шар радиуса $r$ как $B_r$. Соответственно $S_r$ - $(n-1)$-мерная сфера радиуса $r$.

Вычислим якобианы $J_u$ и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \ldots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r||u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} &|u_r| = 1 \\ &|u_\varphi| = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_1}| = r\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &\cdots \\ &|u_{\theta_{n-3}}| = r\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_{n-2}}| = r \end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.

Теперь мы можем записать конкретное выражение для $J_u$:

$$J_u = r^{n-1}\cos\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^{n-2}\theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_u d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\tilde{u}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\tilde{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int\limits_0^R S^{n-1}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержаться. Так же площадь сферы можно представить ввиде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

## 2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы $\nabla\varphi \neq 0$ (т. е. $\operatorname{rank} D\varphi = k$ максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в $U$. Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int\limits_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int\limits_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

**Теорема 2.2** (Формула коплощади)**.** *Пусть* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \in C^1$*, такая, что* $\operatorname{rank}(D\varphi) = k$*, тогда верна формула коплощади*

$$\int\limits_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

*где*

$$J_{\varphi(x)} = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\mathrm{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$ - максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть $k$ линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это $k$ последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует $C^1$-диффеоморфизм $\varPhi : V \to W$, где $V$ - окрестность $x_0$, $W$ - окрестность нуля, такая что:

$$\varPhi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\int\limits_U f(x,y) J_\varphi(x,y) dxdy = \int\limits_{\varPhi^{-1}(U)} f(\varPhi(x,z)) J_\varphi(\varPhi(x,z)) J_{\varPhi(x,z)} dxdy =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\varPhi(x,z)) J_\varphi(\varPhi(x,z)) J_{\varPhi(x,z)} dx$$

Заметим, что $\varPhi^{-1}_{z(x)} = \varPhi^{-1}(x,z)$ при фиксированном $z$ является поверхностью. Возьмем $s = \varPhi_z^{-1}(x)$, тогда

$$\int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int\limits_{\varphi(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}_z} g(\varPhi_z^{-1}(x)) J_{\varPhi_z^{-1}}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\varPhi(x,z)) J_\varphi(\varPhi(x,z)) J_{\varPhi(x,z)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\varPhi}{J_{\varPhi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\varPhi}{J_{\varPhi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) $\square$

Для проекции $P_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ формула коплощади превращается в формулу Фубини:

$$\int\limits_U f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}_t} f(y)dy$$

где $\mathbb{R}^{n-k}_t = \{(y,s) : s = t\}$ - $(n-k)$-мерная плоскость.

# 3 Введение в векторный анализ

## 3.1 Дифференциальные формы

**Определение 3.1.** Векторным полем на многообразии $M$ называется функция $F : M \to F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

**Определение 3.2.** Пусть $\varphi : U \to V$ - $C^1$-диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем $\varphi^*$ и определим результат его действия на функцию $f : V \to \mathbb{E}$ как функцию $\varphi^* f : U \to \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \to TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \to TU$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)}\langle v(\varphi(x))\rangle$.

**Свойства оператора переноса:**

**Свойство 1°**. Линейность

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall f, g$ — функции $\forall u, v$ – векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi^* f + \beta\varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi^* u + \beta\varphi^* v$$

**Свойство 2°**. мультипликативность

пусть $f : V \to \mathbb{R}$, $v : V \to TV$, $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \to V$ — $C^1$-диффеоморфизм, то $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.

**Свойство 3°**. перенос композиции является композицией переносов

пусть $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ — $C^1$-диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

**Свойство 4°**. перестановочность с дифференциалом

$\varphi^* d = d\varphi^*$.

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейное отображение. Рассмотрим действие $L$ на вектор $v$:

$$L\langle v\rangle = L\langle v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n\rangle = v_1 L\langle e_1\rangle + \ldots + v_n L\langle e_n\rangle = v_1 a_1 + \ldots + v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v\rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \ldots, dx_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \ldots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v\rangle = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени $k$ над $\mathbb{R}^n$. В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

**Определение 3.3.** Дифференциальной формой степени $k$ (сокращенно $k$-формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

**Лемма 3.4.** *Существует так называемый дуализм между* 1*-формами и векторными полями, так как каждая* 1*-форма изоморфна некоторому векторному полю.*

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u\rangle = v(x) \cdot u$. □

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

**Пример 3.5.** $w = xdy$ – 1-форма, но не дифференциал.

*Доказательство.* Допустим, что $w = df = f_x dx + f_y dy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. □

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = xdy$. Пусть $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, тогда $\varphi^* w = r\cos\varphi d(r\sin\varphi) = r\cos\varphi(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = r\sin\varphi\cos\varphi dr + r^2\cos^2\varphi d\varphi$.

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

**Определение 3.6.** Пусть $w$ – 1-форма на $V$. Пусть $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ — $C^1$-диффеоморфизм. Тогда $\varphi^* w$ - 1-форма на $U$ и $\varphi^* w(x)\langle v\rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle$.

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

**Лемма 3.7** (Четвертое свойство оператора переноса)**.** *Пусть $\varphi : U \to V$ - $C^1$-диффеоморфизм, $f : V \to \mathbb{E} \in C^1$, тогда $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$. Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.*

*Доказательство.* Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi^*(df)(x)\langle v\rangle = df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v\rangle = \\ = d(f \circ \varphi)(x)\langle v\rangle = d(\varphi^* f)(x)\langle v\rangle\end{aligned}$$

$\square$

**Пример 3.8** (Работа векторного поля вдоль кривой)**.** Рассмотри одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = \vec{(F)} \cdot \vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g\langle l\rangle$. А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int\limits_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x) dl(x)$.

## 3.2 Ориентация

**Определение 3.9.** Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство, в нем определены два базиса $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ связанные между собой матрицей перехода $A$ такой, что $v_j = Au_j$ и $\det A \neq 0$. Базисы назовем *сориентированными* если $\det A > 0$, и *противоположено ориентированными* если $det A < 0$.

Ориентация — класс сориентированных базисов.

**Определение 3.10.** Пусть $\mathfrak{B}^n$ — множество базисов в $\mathbb{R}^n$ *ориентацией* на $\mathfrak{B}^n$ назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}^n \to \{-1, 1\}$$

такую что:

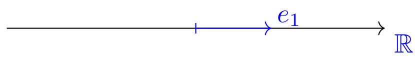
1. $\Theta$ – непрерывная,

2. $\Theta$ – кососимметричная.

то есть, если $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ – перестановка, то $\Theta(v_{\sigma_1},\ldots,v_{\sigma_n}) \to \operatorname{sgn}\sigma \cdot \Theta(v_1,\ldots,v_n)$

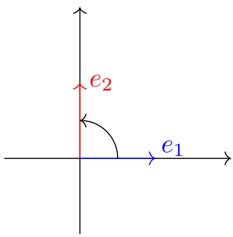
Теперь приведем примеры стандартных ориентаций. Они существуют для пространств $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

- ориентация в $\mathbb{R}^1$



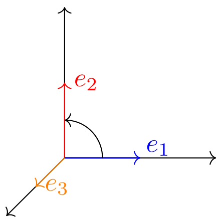

т.е. стандартная ориентация направлена по возрастанию.

- ориентация в $\mathbb{R}^2$




т.е. стандартная ориентация получается вращением от вектора $e_1$ к вектору $e_2$ против часовой стрелки.

- ориентация в $\mathbb{R}^3$




т.е. если вектор $e_2$ получен вращением вектора $e_1$ против часовой стрелки, то вектор $e_3$ должен смотреть «на нас».

Теперь определим ориентацию на многообразии.

**Определение 3.11.** Пусть $M$ — $k$-мерное многообразие и $\mathfrak{B}M := \{(x,v_1,\ldots,v_k) : x \in M, v_1,\ldots,v_k$ – базис $T_xM\}$

ориентацией на многообразии $M$ назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}M \to \{-1,1\}$$

такую что:

1. $\Theta$ – непрерывная,
2. $\Theta$ – кососимметричная.

Оказывается, что не на всяком многообразии можно задать ориентацию. Таким многообразием, к примеру, является лента Мёбиуса: если мы возьмем стандартный базис $\mathbb{R}^2$ и «протащим» его по ленте на один оборот, то он «зеркально отразится». Таким образом, на ленте Мёбиуса не существует функции, удовлетворяющей определению 3.11.

**Определение 3.12.** Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию. В противном случае оно называется *неориентируемым.*

**Определение 3.13.** Ориентируемое многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация.

**Лемма 3.14.** *Если многообразие задано параметрически, то оно ориентируемое.*

*Доказательство.* Пусть $U \subset \mathbb{R}^k, f : U \to \mathbb{R}^n$ при $k \leq n$.

$$M = f(U) \iff \begin{cases} x_1 = f_1(t_1,\ldots,t_k), \\ \ldots \\ x_n = f_n(t_1,\ldots,t_k). \end{cases}$$

Поскольку в $U$ есть ориентация $k$-мерного пространства $\Theta(u_1,\ldots,u_k)$, определим на $M$ ориентацию $\tilde{\Theta}(x,v_1,\ldots,v_k)$ следующим образом: $x = f(t), v_1 = df_x\langle u_1\rangle,\ldots, v_k = df_x\langle u_k\rangle$. $\square$

**Лемма 3.15.** *Многообразие заданное системой уравнений всегда ориентируемое.*

*Доказательство.* Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi : U \to \mathbb{R}^k \in C^1$ и $\operatorname{rank} D\varphi = k$ всюду для всякого $k \le n$.

$x$ — точка на многообразии $M$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$. В свою очередь

$$\varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

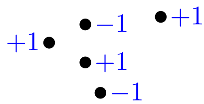
тогда $\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_k(x)$ — нормали к многообразию $M$ в точке $x$. Определим ориентацию следующим образом:

$x \in M, \tau_1, \dots, \tau_{n-k} \in T_x M \implies$

$\tilde{\Theta}(x, \tau_1, \dots, \tau_{n-k}) = \Theta(\nabla\varphi_1(x), \dots \nabla\varphi_k(x), \tau_1, \dots, \tau_{n-k}).$ $\square$

Рассмотрим примеры ориентируемых многообразий и ориентаций на них.

- $k = 0$. 0-мерное многообразие — набор точек.




  – просто приписываем $\{-1, +1\}$ к точкам.

- $k = 2, n = 3$. Поверхность в $\mathbb{R}^3$.

  Ориентация задается нормалью.

## 3.3 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть $\gamma - C^1$-гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации $\varphi : [a, b] \to \gamma$ и $\psi : [c, d] \to \gamma$. Тогда $\psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \to [c, d] \in C^1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$.

**Определение 3.16.** Две параметризации $\varphi, \psi$ называются сориентированными (противоположно ориентированными), если $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ $((\psi^{-1} \circ \varphi)' < 0)$.

**Определение 3.17.** Параметризация $\varphi$ кривой $\gamma$ называется согласованной с ориентацией $\theta$, если $\theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$.

**Определение 3.18.** Пусть $w : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ - непрерывная 1-форма и $\gamma \subset U$ - $C^1$-гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется $\int\limits_\gamma w = \int\limits_a^b w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle dt$, где $\varphi : [a, b] \to \gamma$ - параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

**Пример 3.19.** Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл $w$ по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания $y$.

*Решение.* Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - (1 - t)^2 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Тогда $dx = -dt$, $dy = 2(1-t)dt$. Подставим эти выражения в формулу:

$$\int\limits_\gamma xdy + ydx = \int\limits_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int\limits_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 2(1 - t)^2 dt - (4 - (1 - t)^2)dt = \int\limits_0^1 [3(1 - t)^2 - 4]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3 \Big|_0^1 = -3$$

□

Свойства интеграла 1-формы

**Свойство 1°**. Корректность

Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

*Доказательство.* Пусть $\varphi : [a, b] \to \gamma, \psi : [c, d] \to \gamma \in C^1$ - параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)$ - монотонно возрастает, следовательно $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_{c}^{d} w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$.

$$\int\limits_{c}^{d} w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = \int\limits_{a}^{b} w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)ds$$

Так как $w(\psi(s))$ - линейный оператор, можем внести $(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)$ как множитель аргумента. Имеем $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(s) = \varphi(s)$ как производную композиции.

$$\int\limits_{a}^{b} w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)ds = \int\limits_{a}^{b} w(\varphi(s))\langle\varphi^{-1}(s)\rangle ds$$

$\square$

**Свойство 2°**. Антисимметричность

Пусть $\gamma$ - ориентированная кривая, тогда $-\gamma$ та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int\limits_{-\gamma} w = -\int\limits_{\gamma} w$$

*Доказательство.* Пусть $\varphi : [0, T] \to \gamma$ - параметризация кривой $\gamma$, согласованная с ориентацией, тогда $\psi(t) = \varphi(T - t)$ - параметризация кривой $-\gamma$, согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_{0}^{T} w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\varphi^{-1} \circ \psi)(s)$. Тогда $\psi(0) = T$ и $\psi(T) = 0$.

$$\int\limits_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle = \int\limits_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s))))\langle\varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s)))\rangle(\varphi^{-1}\circ\psi)'(s)ds =$$

$$= \int\limits_T^0 w(\psi(s))\langle\psi^{-1}(s)\rangle ds = -\int\limits_0^T w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = -\int\limits_{-\gamma} w$$

$\square$

**Свойство 3°**. Линейность
$\forall w_1, w_2$ - формы, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\int\limits_\gamma(\alpha w_1+\beta w_2) = \alpha\int\limits_\gamma w_1 + \beta\int\limits_\gamma w_2$$

**Свойство 4°**. Аддитивность
Пусть $\varphi : [p, q] \to \gamma$ - параметризация кривой $\gamma$, возьмем $r \in [p, q]$ и определим $\varphi_{pr} : [p, r] \to \gamma_{pr}$ и $\varphi_{pr} : [r, q] \to \gamma_{rq}$, тогда

$$\int\limits_\gamma w = \int\limits_{\gamma_{pr}} + \int\limits_{\gamma_{rq}}$$

**Замечание 3.20.** Если кривая замкнута, тогда вместо $\int\limits_\gamma w$ используют обозначение $\oint\limits_\gamma w$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

**Пример 3.21** (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой)**.** Пусть $\vec{v}$ - векторное поле, $\gamma$ - ориентированная кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой $\gamma$ вычисляется как ($\vec{\tau}$ - касательный вектор к кривой)

$$\int\limits_\gamma v_1dx_1 + \ldots + v_ndx_n = \int\limits_\gamma \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$$

**Теорема 3.22** (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $w = df$ - полный дифференциал, $\gamma$ - ориентированная кривая с начальной точкой $p$ и конечной точкой $q$, тогда справедлива формула*

$$\int\limits_\gamma df = f(q) - f(p)$$

*Доказательство.* Пусть $\varphi : [a, b] \to \gamma$ - параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда $\varphi(a) = p$ - начальная точка кривой и $\varphi(b) = q$ - конечная точка кривой.

$$\int\limits_\gamma df = \int\limits_a^b df(\varphi(t))\langle\varphi^{-1}(t)\rangle dt = \int\limits_a^b [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t))\Big|_a^b = f(q) - f(p)$$

□

**Следствие 3.23.** *Если $w = df$, то $\int\limits_\gamma w$ не зависит от пути $\gamma$, а только от начальной и конечной точки.*

**Следствие 3.24.**

$$\oint\limits_\gamma df = 0$$

**Пример 3.25.** Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл $w$ по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания $y$.

*Решение.* Заметим, что $w$ - полный дифференциал функции $f = xy$, а так же, что начальная точка параболы это $(1, 3)$, а конечная $(0, 4)$.

$$\int\limits_\gamma xdy + ydx = \int\limits_\gamma d(xy) = xy\Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

□

**Теорема 3.26** (Критерий полного дифференциала)**.** *Пусть $w$ - непрерывная 1-форма на множестве $U$. Тогда $w$ является полным дифференциалом некоторой функции $f \in C^1$ тогда и только тогда, когда $\oint\limits_\gamma w = 0$ для всех ориентированных замкнутых контуров $\gamma \subset U$.*

*Доказательство.* Необходимость следует из 3.24.

Для доказательства достаточности построим функцию $f$.

Пусть $U$ - открытое связное множество. Возьмем точку $x_0 \in U$ и положим, что $f(x_0) = C$. Возьмем так же $x \in U$ - другую точку и положим $f(x) = f(x_0) + \int\limits_\gamma w$, где $\gamma$ - кривая, соеденяющая точки $x$ и $x_0$ (начало в $x_0$, конец в $x$).

Если $\gamma_1$ и $\gamma_2$ - две кривые из $x_0$ в $x$, то $\gamma_1 - \gamma_2$ - замкнутый контур и

$$0 = \int\limits_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int\limits_{\gamma_1} w - \int\limits_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути.

Продолжение следует ; ) $\square$

**Определение 3.27.** Непрерывная дифференциальная форма $w$ называется *точной*, если существует $f \in C^1$ такая, что $w = df$.

**Определение 3.28.** Векторное поле $\vec{v}$ называется *потенциальным*, если существует функция $f \in C^1$ такая, что $\vec{v} = \nabla f$. В таком случае говорят, что $f$ является *потенциалом* $\vec{v}$.

**Теорема 3.29** (Формула Грина)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактная область с кусочной-гладкой границей, пусть $w : U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ — $C^1$-гладкая 1-форма $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial U} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_U \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x,y) & Q(x,y) \end{vmatrix} = \int\limits_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

*Доказательство.* Доказательство проведем для криволинейной трапеции.

Пусть $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f \leq g$ $\square$

**Пример 3.30.** Вычислить

$$\oint\limits_U x^2 \arctan(x^2 + \sin(x))dx + xdy$$

где $U$ задано равенством $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

*Решение.* Лайфхак от Сергея Геннадьевича: если вы видите задачу с «безумной функцией», то эта задача на формулу Грина.

Функция в задаче выглядит не очень, так что воспользуемся формулой Грина:

$$\oint\limits_U x^2 \arctan(x^2 + \sin x)dx + xdy = -\iint\limits_U (1-0)dxdy = -\pi ab$$

$\square$

**Определение 3.31.** 1-формами площади называются специальные 1-формы, интегралы от которых дают площадь.

$$xdy, \qquad -ydx, \qquad \frac{xdy - ydx}{2}$$

Проинтегрировав любую из этих форм по области, вы получите площадь области:

$$\oint\limits_{\partial U} xdy = \iint\limits_U (1-0)dxdy = |U|$$

**Пример 3.32.** Вычислите площадь ветки циклоиды, полученной движением круга радиуса $a$.

$$\begin{cases} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{cases}$$

*Решение.* Из прошлого семестра, мы знаем, что площадь можно посчитать с помощью двойного интеграла. Для этого нам нужно найти пределы интегрирования. Переменная $x$ меняется от 0 до $2\pi a$, однако, когда мы попытаемся найти пределы интегрирования по $y$, мы столкнемся с проблемой: $t$ нельзя выразить через $x$ в явном виде. Следовательно, старый способ вычисления площади тут не сработает.

Воспользуемся 1-формами площади. Заметим, что область ветки ограничена кривой циклоиды и осью $Ox$. Обозначим за $C$ и $I$ циклоиду и ось $Ox$ соотвественно, по формуле Грина получим:

$$S = \oint\limits_{C+I} ydx = \int\limits_C ydx + \int\limits_I ydx$$

Так как $y = 0$ во втором интеграле, получаем:

$$\int\limits_C ydx = \int\limits_0^{2\pi} a(1+\cos t)d(at - a\sin t) = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \frac{6x - 8\sin x + \sin 2x}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

□

У нас уже был критерий полного дифференциала, но он не годится для непосредственной проверки того, является ли 1-форма дифференциалом некоторой функции. Поставим перед собой задачу: по 1-форме определить полный дифференциал ли это и, если да, то какой функции?

**Теорема 3.33** (Необходимое условие полного дифференциала)**.** *Пусть* $w = a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n$ *и* $w \in C^1$*. Тогда, если* $w = df$*, то*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

*Доказательство.* Заметим, что, если $w = df$ и $w \in C^1$, то $f \in C^2$, т.е. существуют вторые частные производные функции $f$ и дифференциал $f$ можно записать в координатном представлении.

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Так как $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, получаем, что

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□

Сейчас мы убедимся, что данное условие не является достаточным.

**Определение 3.34.** Формой Гаусса $\Theta$ (в декартовых координатах) называется форма

$$\Theta = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \quad dom\,\Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Не сложно убедится в том, что для формы Гаусса выполняются необходимые условия полного дифференциала.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Однако, если мы возьмем за замкнутый контур единичную окружность и вычислим интеграл по замкнутому контуру, мы получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

То есть, критерий полного дифференциала не выполняется и форма Гаусса не является полным дифференциалом.

Заметим так же, что если бы мы воспользовались формулой Грина для проверки критерия, мы бы получили другой ответ:

$$\oint \Theta = \int 0 dxdy = 0$$

Но тут нет противоречия, ведь форма Гаусса не гладкая в нуле, следовательно, нельзя применять формулу Грина.

Рассмотрим представление формы Гаусса в полярных координатах

$$\Theta = d\varphi$$

**Лемма 3.35.** *Пусть $\gamma$ — кривая, не проходящая через 0, с началом в $p$ и концом в $q$. Тогда*

$$\int\limits_\gamma = \varphi(q) - \varphi(p)$$

*— разность углов с осью $Ox$ радиус векторов в из начала координат в начальную и конечную точку.*

**Лемма 3.36.** $\Theta = d\varphi$ *будет полным дифференциалом, если выколоть некоторый луч исходящий из нуля (т.к. никакая кривая не сможет полностью обойти* 0*).*

**Определение 3.37.** Две кривые $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называются гомотопными, если существует функция $f : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, такая, что $f$ — непрерывная и $f(x, 0) = \gamma_0(x)$ и $f(x, 1) = \gamma_1(x)$

**Определение 3.38.** Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется односвязным, если всякий замкнутый контур $\gamma \subseteq M$ гомотопен точке.

Примеры односвязных множеств

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, сфера — односвязные множества.

2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{прямая}\}$, тор — не являются односвязным множеством.

**Теорема 3.39** (Гипотеза Пуанкаре)**.** *Всякое $n$-мерное компактное односвязное многообразие без края гомеоморфно $n$-мерной сфере.*

*Доказательство.* Очевидно. □

**Теорема 3.40** (Достаточное условие полного дифференциала)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое и односвязное множество, $w : U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \in C^1$, $w = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ для всех $i, j = 1, \ldots n$, тогда существует функция $f : U \to \mathbb{R} \in C^2$ такая, что $w = df$.*

*Доказательство.* Проведем для $\mathbb{R}^2$.

Пусть $w = adx + bdy$, $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ и пусть $\gamma \subseteq U$ — кусочно гладкий контур, $\gamma \subseteq \partial D$ где $D \subseteq U$. Тогда по формуле Грина:

$$\oint\limits_{\gamma} w = \pm \int\limits_{D} \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dxdy$$

следовательно, выполнен критерий полного дифференциала, тогда существует функция $f \in C^1$ такая, что $w = df \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$. □

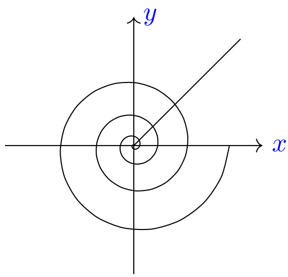
Допустим, нам дана 1-форма $w$ и известно, что $w = df$. Возникает естественный вопрос: как найти такую функцию $f$?

- выберем $x_0 \in U$ и определим, что $f(x_0) := C$.

- возьмем $x \in U$ такую, что $x \neq x_0$ и выберем путь $\gamma \subseteq U$ из $x_0$ в $x$ тогда
$$f(x) := f(x_0) + \int\limits_{\gamma} w.$$

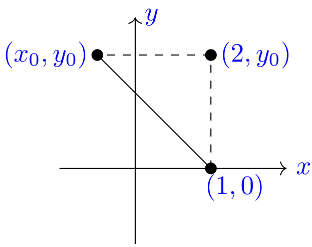
Сейчас рассмотрим восстановление функции по 1-форме в случае, если она является полным дифференциалом некоторой функции.

**Пример 3.41.** Рассмотрим дифференциальную форму $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.




— плоскость без луча. Если область не односвязная, ее надо сделать односвязной добавлением «связей», линий, соединяющих элементы области.

Восстановим функцию в $\mathbb{R}^2 \backslash \{x \le 0, y = 0\}$.




Выберем точку в области определения. Пусть $f(1{,}0) = C$.

$$\int\limits_{(1,0)}^{(2,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{y_0} \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y_0,$$

$$\int\limits_{(1,y_0)}^{(x_0,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_1^{x_0} -\frac{y_0 dy}{x^2+y_0^2} = \begin{cases} y_0 = 0 : 0, \\ y_0 \ne 0 : -\frac{1}{y} \int\limits_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\int\limits_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} = \left[ t = \frac{x}{y_0}, dt = \frac{1}{y_0} dx \right] \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{y_0}}^{\frac{x_0}{y_0}} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan \frac{1}{y_0} - \arctan \frac{x_0}{y_0}$$

Таким образом:

$$f(x,y) = f(1,0) + \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y < 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

— где $f(1,0)$ – задается.

## 3.4 Внешние формы второго порядка

Рассмотрим для примера как происходит замена переменной в плоском случае. Пусть $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ — 2-форма, такая что $w = f(x,y)dx \wedge dy$. Проведем замену переменных $\varphi$:

$$\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \end{cases}$$

Вычислим оператор переноса:

$$\varphi^* w(t,s) = (f \circ \varphi)(t,s)(x_t dt + x_s ds) \wedge (y_t dt + y_s ds) = \\ = (f \circ \varphi)(t,s) \cdot \det \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_y & y_s \end{pmatrix} dt \wedge ds$$

В операторе переноса возник коэффициент искажения. Заметим, что в отличие от коэффициента искажения при замене переменных в интеграле, в операторе переноса коэффициент искажение возникает без модуля. Его знак зависит от того, меняет ли замена переменных ориентацию (он отрицательный, если замена переменных меняет ориентацию).

**Определение 3.42.** Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда выражение

$$\int\limits_U w = \iint\limits_U f(x,y)dx \wedge dy := \theta(e_x, e_y) \int\limits_U f(x,y)dxdy$$

называется *интегралом 2-формы* в $\mathbb{R}^2$, где $\theta(e_x, e_y) = \pm 1$ — ориентация плоскости ($e_x, e_y$ — орты, соответствующие направлению).

**Определение 3.43.** Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - двумерное $C^1$-гладкое ориентированное многообразие и $w : M \to \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда, если $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ — параметризация, то

$$\int\limits_M w := \int\limits_U \varphi^* w = \int\limits_U w(\varphi(t,s))\langle \varphi_t(t,s), \varphi_s(t,s)\rangle dt \wedge ds$$

будем называть *интегралом 2-формы по поверхности.*

Если $M \subseteq \mathbb{R}^3$ — поверхность, то соответствующие касательные векторы в каждой точке образуют касательную плоскость, а векторы нормали, в свою очередь, образуют прямую. Следовательно, ориентацию можно задать нормалью.

В $\mathbb{R}^3$ задано правило Буравчика (если поворачиваем от 1 к 2, то 3 смотрит на нас) — ориентация $\theta\langle u, v, w\rangle$. То есть, если на поверхности есть $\vec{n}, \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}$, то $\theta_M(\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}) = \theta\langle \vec{n}, \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle$.

Очевидно, что $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$. Следовательно, $(a,b,c) \simeq ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = w$. Отсюда $w\langle u, v\rangle = (a,b,c)(u \times v)$.

Получим формулу потока векторного поля через поверхность, где $(a,b,c)\cdot \langle \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle$ — поток вектора $(a,b,c)$ через параллелограмм $\Pi(\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2})$.

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_M w\langle \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle dS =$$
$$= \int\limits_M (a,b,c)\cdot\langle \tau_1 \times \tau_2\rangle dS = \int\limits_M (a,b,c)\cdot \vec{n} dS$$

**Определение 3.44.** Форма Гаусса в $\mathbb{R}^3$:

$$\Theta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Лемма 3.45.** *В сферических координатах форма Гаусса имеет вид*

$$\Theta = d\theta \wedge d\varphi.$$

*Доказательство.* Проверяется непосредственной подстановкой сферической замены и остается в качестве упражнения читателю. $\square$

Геометрическая интерпретация формы Гаусса $\int\limits_M \Theta$ — телесный угол под которым видна поверхность из начала координат.

## 3.5 Внешний дифференциал 1-формы

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Тогда $df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — линейная функция, а $df : x \mapsto df(x)$ — 1-форм. напомним, что $d^2f(x)\langle u, v\rangle = d(df(x))$ - билинейная симметричная форма, такая что $d^2f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

В свою очередь, при $w : U \to \Lambda^1\mathbb{R}^n$, $dw$ так же является билинейной формой, но не обязательно симметричной.

$$dw\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = d(w\langle\vec{u}\rangle)\langle\vec{v}\rangle = \frac{\partial}{\partial\vec{v}}w\langle\vec{u}\rangle$$

Форма $w$ в координатном представлении имеет вид $w = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \ldots + a_ndx_n$, следовательно

$$dw(x)\langle u\rangle = \sum_{i=1}^{n} da_i(x)u_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}u_i dx_j$$

Из этого следует, что

$$dw(x)\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}u_i v_j = (\frac{\partial a_i}{\partial x_j})\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T(\frac{\partial a_i}{\partial x_j})\vec{u}$$

То есть, всякая билинейная форма есть сумма симметричной и кососимметричной (первое и второе слагаемые соответственно), где $l^T\langle u, v\rangle = l\langle v, u\rangle$:

$$l = \frac{l + l^T}{2} + \frac{l - l^T}{2}$$

**Определение 3.46.** *Внешним дифференциалом 1-формы* называется кососимметричная часть полного дифференциала, то есть $du$ сопоставляет 1-форме — 2-форму.

$$d : C^{r+1}(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \to C^r(U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

**Лемма 3.47.** *Если* $w = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i dx_i$, *то*

$$dw = \sum_{i=1}^{n} da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

Теперь рассмотрим запись формулы Грина и формулы Ньютона-Лейбница в терминах внешнего дифференциала.

**Теорема 3.48** (Формула Грина в терминах внешнего дифференциала). *Пусть* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *— область с кусочно-гладкой границей и* $w \in C^1(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$. *Тогда верна формула Грина*

$$\oint\limits_{\partial U} w = \int\limits_{U} d_{\text{внешний}} w$$

формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{\partial\gamma} f = f(q) - f(p) = \int\limits_{\gamma} df$$

## 3.6 Ротация векторного поля

**Определение 3.49.** Пусть $\bar{v}$ — векторное поле в плоскости. Ротация (вихрь) векторного поля $\bar{v}$ в точке $(x_0, y_0)$

$$\operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \lim_{r \to 0} \oint\limits_{C} \bar{v} d\bar{r}, \text{ где } C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

**Лемма 3.50.** *Для* $C^1$*-гладкого векторного поля* $\bar{v}(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}$ *верно, что*

$$\operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Доказательство.* Пусть $C := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, S := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.

$$\oint\limits_{C} \bar{v} d\bar{r} = \oint\limits_{C} (a, b)(dx, dy) = \oint\limits_{C} a dx + b dy =$$

воспользуемся формулой Грина

$$= \iint\limits_{S} \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dx dy =$$

$$= \iint\limits_{S} \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + o(1) \right] dx dy =$$

$$= \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \pi r^2 + \iint\limits_{B} o(1) dx dy$$

**Определение 3.51** (формула Грина)**.**

$$\oint\limits_{\partial U} \bar{v} d\bar{r} = \iint\limits_{U} \operatorname{rot}_{x,y} \bar{v} dx dy.$$

$\square$

**Свойства ротации.**

**Свойство 1°**. Линейность
пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\bar{u}, \bar{v}$ — векторные поля в плоскости, тогда $\operatorname{rot}_{x,y}(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha \operatorname{rot}_{x,y} \bar{u} + \beta \operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}$.

**Свойство 2°**. Антисимметричность
пусть $\bar{v}$ — векторное поле в плоскости, тогда $\operatorname{rot}_{x,y} \bar{v} = -\operatorname{rot}_{y,x} \bar{v}$.

## 3.7 Внешние формы высших порядков

**Определение 3.52.** Внешней алгебраической формой порядка $k \in \mathbb{N}$ над $\mathbb{R}^k$ называется функция $l : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $l$ — $k$-линейная функция (т.е. линейна по каждому из $k$ аргументов),
2. $l$ — кососимметричная функция, т.е. если $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ – перестановка, то $l\langle u_{\sigma_1}, \ldots, u_{\sigma_k}\rangle = \operatorname{sgn} \sigma \cdot l\langle u_1, \ldots u_k\rangle$

Пространство алгебраических форм порядка $k$ над $\mathbb{R}^n$ будем обозначать как $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

**Определение 3.53.** Пусть даны $k$ штук 1-форм $l_1, \ldots, l_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ результат их внешнего произведение будет являться $k$-формой

$$(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k)\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle = \det \begin{pmatrix} l_1\langle u_1\rangle & l_1\langle u_2\rangle & \ldots & l_1\langle u_k\rangle \\ l_2\langle u_1\rangle & l_2\langle u_2\rangle & \ldots & l_2\langle u_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_k\langle u_1\rangle & l_k\langle u_2\rangle & \ldots & l_k\langle u_k\rangle \end{pmatrix}$$

На пространстве $k$-форм над $\mathbb{R}^n$ $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ можно ввести базис: $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq k$.

Размерность пространства $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ это число перестановок из $n$ по $k$: $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k$.

Для упрощение записи введем специальной обозначение

**Определение 3.54.** «Шапкой-невидимкой» называется операция $\widehat{\ }$ определенная как

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Стандартный базис $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ это $\{(-1)^{j+1}dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\ldots\wedge dx_n\}_{j=1,\ldots,n}$ – базис для $(n-1)$-форм.

К примеру для $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ базисом будет набор $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$.

**Мультииндексные обозначения**

Для упрощения записей будем использовать мультииндексные обозначения. Определим $M(n,k) := \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$, число элементов $M(n,k)$ равняется $C_n^k$.

Тогда $k$-форма $l$ будет записываться как $l = \sum\limits_{I \in M(n,k)} a_I dx_I$, где $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

С помощью мультииндексных обозначений доопределим внешнее произведение внешних форм

$$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

Пусть $w^k = \sum\limits_{I \in M(n,k)} a_I dx_I$ и $w^l = \sum\limits_{J \in M(n,l)} b_J dx_J$. Тогда $w^k \wedge w^l = \sum\limits_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$.

**Пример 3.55.** Пусть даны две формы $2dx+3dy+4dz$ и $5dz\wedge dx+6dx\wedge dy$.

Тогда

$$\begin{aligned}(2dx + 3dy + 4dz) \wedge (5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy) &= \\ 0 + 0 + 16dy \wedge dz \wedge dx + 0 + 0 + 24dz \wedge dx \wedge dy &= \\ 39dx \wedge dy \wedge dz&\end{aligned}$$

т.к. $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

**Свойства внешнего произведения $\wedge$.**

**Свойство 1°**. Линейность

**Свойство 2°**. Кососимметричность

Для любых $w^k, w^l$ выполнено $w^k \wedge w^l = (-1)^{kl} \cdot w^l \wedge w^k$.

**Определение 3.56.** Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, функция $w^k : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ называется внешней дифференциальной формой порядка $k$ ($k$-формой).

### 3.7.1 Замена переменной в $k$-форме

**Определение 3.57.** Пусть $w : V \to \Lambda^k, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\varphi : U \to V$ – $C^1$-диффеоморфизм, тогда *операция переноса*

$$\varphi^* : (V \to \Lambda^k) \to (U \to \Lambda^k)$$

определяется следующим образом:

$$(\varphi^* w)(x)\langle u_1, \dots, u_k\rangle = w(\varphi(x))\langle D\varphi_x\langle u_1\rangle, \dots, D\varphi_x\langle u_n\rangle\rangle$$

то есть

$$w(y) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in M(n,k)} a_I(y)dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

замена $y = \varphi(x)$

$$\varphi^*(w)(x) = \sum_{I\in M(n,k)} a_I(\varphi(x))dx\varphi_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(x)$$

**Свойства операции переноса $\varphi^*$.**

**Свойство 1°**. Линейность для любых форм $w_1, w_2$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что $\varphi^*(\alpha_1 w_1 + \beta w_2) = \alpha_1 \varphi^* w_1 + \beta \varphi^* w_2$

**Свойство 2°**.
пусть $\psi^*$ и $\varphi^*$ — операции переноса. Тогда $\psi^*\varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*$
**Свойства внешнего произведения $\wedge$.**

**Свойство 3°**.
пусть $\varphi^*$ – операция переноса, $w^k, w^l$ – формы. Тогда $\varphi^*(w^k \wedge w^l) = \varphi^* w^k \wedge \varphi^* w^l$.

Рассмотрим $n$-форму над $\mathbb{R}^n$ $w^n = f(y_1, \dots, y_n)dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$, пусть $y = \varphi(x)$. Тогда $\varphi^* w^n = f(\varphi(x)) \det D\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Теперь выясним, как интегрировать $n$-форму по области в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\Theta$ – ориентация в $\mathbb{R}^n$, $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ – непрерывна, $w(x) = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Положим

$$\int_U w = \int_U f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \Theta(l_1, \dots, l_n) \int_U f(x)dx_1 \dots dx_n$$

### 3.7.2 Интеграл $k$-формы по ориентированному $k$-мерному многообразию

TODO

**Определение 3.58.** Пусть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \in C^1$ и $w(x) = \sum\limits_{I\in H(n,k)} a_I(x)dx_I$ внешним дифференциалом $k$-формы $w$ назовем дифференциальную $(k+1)$-форму $dw : U \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ определяемую следующим образом:

- при $k = 0$ это дифференциал функции (1-форма),
- при $k > 0$ определим покоординатно

$$dw(x) = d\left(\sum_I a_I(x)dx_I\right) := \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

**Свойства внешнего дифференциала.**

**Свойство 1°**. Линейность
Для любых $w_1, w_2, \alpha, \beta$ выполнено

$$d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha dw_1 + \beta dw_2$$

**Свойство 2°**.

$$d(w^k \wedge w^l) = dw^k \wedge w^l + (-1)^k w^k \wedge dw^l$$

*Доказательство.* Пусть $w^k$ и $w^l$, такие, что

$$w^k = \sum_{I\in M(n,k)} a_I dx_I \quad w^l = \sum_{I\in M(n,l)} a_I dx_I$$

$$w^k \wedge w^l = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

$$d(w^k \wedge w^l) = \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} (a_I db_J + b_J da_I) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$= \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Осталось заметить, что первое слагаемое это в точности

$$(-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J = (-1)^k \wedge dw^l$$

А второе, в свою очередь, в точности

$$\sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge (b_J dx_J) = dw^k \wedge w^l$$

$\square$

**Свойство 3°**. Перестановочность с заменой переменных

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

*Доказательство.* Для 0,1-форм уже доказано. Докажем для форм высшего порядка по индукции. Пусть для $k$-форм утверждение выполнено, докажем для $(k+1)$-форм.

С одной стороны для $w^{k+1}(y) = a(y)dy_i \wedge dy_J$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^* dw^{k+1} = \varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J - a(y)dy_i \wedge d(dy_J)) = \\ = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}d(\varphi^* w^{k+1}) = d(\varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J)) = d(\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J) = \\ = d\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_J) \wedge d(\varphi^* dy_J)\end{aligned}$$

Применив предположение индукции, получим

$$\varphi^*(d(a(y)dy_i)) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^*(d(d(y_J)) = \varphi^*(d(a(y)) \wedge dy_i \wedge dy_J)$$

$\square$

**Определение 3.59.** $k$-мерное многообразие называется *замкнутым*, если это компакт без края.

Если $M$ — $k$-мерное замкнутое многообразие и $w^k$ — $k$-форма на $M$, то

$$\oint\limits_{\partial M} w^k := \int\limits_{M} w^k$$

**Теорема 3.60** (Формула Стокса-Пуанкаре)**.** *Пусть $M$ — кусочно-гладкое $k$-мерное компактное ориентированное многообразие, $w$ — $C^1$-гладкая $(k-1)$-форма на $M$, тогда*

$$\oint\limits_{\partial M} w = \int\limits_{M} dw$$

*Доказательство.* Разобьем доказательство данной формулы на два шага. Для начала докажем ее для случая куба в $\mathbb{R}^n$, потом, имея доказательство для куба, обобщим его на случай произвольного многообразия.

Шаг 1. Проведем доказательство для куба в $\mathbb{R}^n$. Зададим куб как $[-a,a]^n$ и заметим, что он является $n$-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$ и у него есть $2n$ $(n-1)$-мерных граней

$$\begin{cases} -a \leq x_1 \leq a \\ -a \leq x_2 \leq a \\ \dots \\ -a \leq x_n \leq a \end{cases}$$

Пусть $w$ — $(n-1)$-форма, заданная на кубе, тогда

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Дифференциал этой формы равен

$$dw(x) = \sum_{j=1}^{n} da_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} (-1)^{j+1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Вычислим интеграл от $dw$ по кубу

$$\int\limits_{[-a,a]^k} dw = \int\limits_{[-a,a]^k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{-a}^{a} \ldots \int\limits_{-a}^{a} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

С другой стороны

$$\int\limits_{x_j=a} w \quad = \quad \int\limits_{x_j=a} \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \widehat{dx_j} \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ dx_n$$

Что равно

$$\int\limits_{x_j=a} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \ldots \int\limits_{-a}^{a} a_j(x1, \ldots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \ldots, x_n) dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n =$$

$$= -\int\limits_{-a}^{a} \ldots \int\limits_{-a}^{a} a_j(x1, \ldots, x_{j-1}, -a, x_{j+1}, \ldots, x_n) dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n$$

Отсюда

$$\int\limits_{x_j=a} w + \int\limits_{x_j=-a} w = \int\limits_{-a}^{a} \ldots \int\limits_{-a}^{a} \left( a_j\Big|_{x_j=a} - a_j\Big|_{x_j=-a}\right) dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n$$

Следовательно

$$a_j\Big|_{x_j=a} - a_j\Big|_{x_j=-a} = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) dx_j$$

Шаг 2. Пусть $x \in M$ тогда существует $U_x$ – окрестность точки $x$ и существует $C^1$-диффеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x)$ на окрестность нуля в

$\mathbb{R}^n$, такой что $\varphi_x(x) = 0$ и

$$\varphi_x(U \cap M) = \begin{cases} \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{n-k}), \\ \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}^n_+ \times \{0\}^{n-k}). \end{cases}$$

Причем $U_x$ мы выберем квадратной, так как если существует какая-либо окрестность точки, то в нее всегда можно вписать квадрат.

Пусть $Q_x \subset \varphi(U_x)$ – открытый $k$-мерный куб с центром в нуле. Для любого такого куба формула уже доказана в силу 1 шага. Все многообразие $M$ покрывается $\varphi_x^{-1}(Q_x)$, т.е. образами кубов. Следовательно, существует конечный набор $Q_1, \dots, Q_m$ соответствующий $x_1, \dots, x_m$, такой что $\varphi_1^{-1}(Q_1), \dots, \varphi_m^{-1}(Q_m)$ – покрывает $M$.

Используем «разбиение единицы». Пусть существует набор гладких функций $\psi_1, \dots, \psi_m : M \to \mathbb{R}$, таких что $\psi_j(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \varphi_j(Q_j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \psi_j(x) \equiv 1$. Такой набор всегда существует, потому что мы можем его построить.

Построим «разбиение единицы»:

Существует функция $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^\infty$ определенная как

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(x) > 0, & |x| < a, \\ \chi(x) = 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Тогда $\chi^k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ это $\chi^k(x_1, \dots, x_k) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi(x_k)$ Имеем

$$\chi^k(x) = \begin{cases} \chi^k(x) > 0, & |x|_\infty < a, \\ \chi^k(x) = 0, & |x|_\infty \geq a. \end{cases}$$

Переносом системы координат получим эту функцию, заданную на многообразии: $\varphi_j^*\chi^k : M \to \mathbb{R}$ при этом $\chi^k(x) > 0 \iff x \in \varphi_j^{-1}(Q_j)$. Получаем, что сумма $\varphi_j$ неотрицательна, осталось нормировать.

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi_j^*\chi^k(x)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i^*\chi^k(x)}$$

$\varphi_j : \varphi_j^{-1}(Q_j) \to Q_j$ — перенос образа куба в куб.

$$\int_M dw = \int_M 1 dw = \int_M \sum_{j=1}^m \psi_j(x) dw(x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j(x) dw(x) =$$

$$\sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw).$$

Используем доказанную ранее формулу Стокса для случая куба:

$$\int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \int\limits_{\partial Q_j} \varphi_j^*(\psi_j w) = \int\limits_{Q_j} d\varphi_j^*(\psi_j w) = \int\limits_{Q_j} \psi_j^* d(\psi_j w) =$$

$$\int\limits_{Q_j} \varphi_j^* \left(d\psi_j \wedge w + \psi_j dw\right) = \int\limits_{Q_j} \psi_j^*(d\psi_j \wedge w) + \int\limits_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw) =$$

$$\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw$$

При этом левая часть этого выражения равна

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\partial \varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j w = \int\limits_{\partial M} w$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{M} d\psi_j \wedge w = \int\limits_{M} d1 \wedge w \equiv 0$$

Второе слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{M} \psi_j dw = \int\limits_{M} dw$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial M} w = \int\limits_{M} dw$$

□

Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре:

1. Если $k = 1$, то $M$ — кривая, а $w$ — функция и формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Ньютона-Лейбница.

2. Если $n = 2$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Грина.

3. Если $n = 3$ и $k = 3$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Гаусса-Остроградского.

4. Если $n = 3$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Кельвина-Стокса.

## 3.8 25.04.19

Пусть поверхность $S$ окружает тело $V$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда объем тела $V$ можно вычислить проинтегрировав по внешней стороне поверхности одну из форм:

$$xdy \wedge dz \quad ydz \wedge dx \quad zdx \wedge dy$$

По формуле Стокса

$$\oint\limits_S xdy \wedge dz = \int\limits_V dx \wedge dy \wedge dz = \pm|V|$$

Чтобы значение было положительно, нужно согласовать ориентацию так, чтобы она определялась с помощью нормали по внешней стороне.

В общем случае, формами объема в $\mathbb{R}^n$ являются формы вида

$$(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad j = 1 \ldots n$$

А так же форма

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1} n(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

**Определение 3.61.** Непрерывная $k$-форма называется *точной*, если она является внешним дифференциалом некоторой $C^1$-гладкой $(k-1)$-формы $\theta$, т.е. $w = d\theta$.

**Определение 3.62.** $C^1$-гладкая форма $w$ называется *замкнутой*, если $dw = 0$.

Как мы знаем, первообразную можно восстановить с точностью до константы. В случае с формами роль констант выполняют замкнутые формы, т.е. форму можно восстановить по дифференциалу с точностью до замкнутой формы.

**Теорема 3.63** (Первая теорема Пуанкаре)**.** *Все (гладкие) точные формы являются замкнутыми, т.е. если* $w$ *–* $C^1$*-гладкая точная форма, то* $dw = 0$*. Так же это утверждение можно переформулировать как* $d \circ dw = 0$*, т.е. внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

*Доказательство.* Так как дифференциал линеен, достаточно доказать только для одного из слагаемых.

Пусть $\theta = adx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_{i_k} = adx_I$. Тогда

$$d\theta = d(adx_I) = da \wedge dx_I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Отсюда

$$d(d\theta) = \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I) = \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial a}{\partial x_i}) \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

Если $i = j$, то слагаемые вида $dx_i \wedge dx_i$ равны нулю, с другой стороны, если $i \neq j$, то $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ и это слагаемое равно симметричному слагаемому с противоположным знаком, так как

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}$$

Следовательно, $d(d\theta) = 0$. □

**Определение 3.64.** Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется $k$-связным, если каждое замкнутое многообразие, порядок которого меньше или равен $k$, можно стянуть в точку.

В частности, 0-связное множество представляет собой набор точек, каждую пару которых можно соединить кривой. Так же вводят понятие $(-1)$-связного множества, что обозначает, что она не является $k$-связным ни для какого $k$.

**Определение 3.65.** Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно некоторой точки $x_0$, если любую точку $x \in U$ можно соединить с $x_0$ отрезком.

Очевидно, что, если множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ звездное, то оно $k$-связное для любого $k = 1 \dots n$.

**Определение 3.66.** Пусть $U$ — звездное множество. Определим оператор $I : C^r(U \to \Lambda^k) \to C^{r+1}(U \to \Lambda^{k-1})$, так, что каждой форме $w = a dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ сопоставляется

$$I(w) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

**Определение 3.67.** Форма $w$ называется коточной, если существует форма $\theta$, такая что $w = I\theta$.

**Теорема 3.68.** *Для всякой $C^1$-гладкой $k$-формы $w$ на звездной области выполнено*

$$w = dIw + Idw$$

*Доказательство.* Пусть $w = a(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, вычислим все выражения, которые есть в теореме.

$$Iw = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$dIw = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} d\left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \; x_{i_\alpha} \right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} d\left[ \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \; dx_{i_\alpha} + x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) \right] \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} \left( \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{i_\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$dw = da \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$Idw = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha} \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_j dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Если мы сложим $Idw$ и $dIw$, двойные суммы сократятся, и проинтегрировав по частям и применив формулу Ньютона-Лейбница, мы получим

$$dIw+Idw = k\left( \int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j dt \right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \left( \int_0^1 \left[ kt^{k-1} a(tx) + \sum_{i=1}^{n} t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j \right] dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ t^k a(tx) \right] dt \right) = w$$

□

**Следствие 3.69** (Вторая теорема Пуанкаре)**.** *В звездной области всякая замкнутая форма точна.*

## 3.9 Дивергенция векторного поля

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана $(n-1)$-мерная ориентированная поверхность $M$. Тогда поток векторного поля $\vec{v}$ через поверхность $M$ вычисляется как

$$\Phi = \int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к $M$ в точке $x$, согласованный с ориентацией.

Эту задачу можно решить используя дифференциальные формы. Для начала, рассмотрим для примера случай в $\mathbb{R}^3$. Как известно, $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

$$e_1 \simeq dy \wedge dz$$
$$e_2 \simeq dz \wedge dx$$
$$e_3 \simeq dx \wedge dy$$

Пусть $\vec{v}(x, y, z)$ — векторное поле, такое, что

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Phi = \int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

Убедимся, что это выражение совпадает с исходным. Пусть $\varphi : U \to M$ — параметризация поверхности $M$, такая что

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2$ — касательные векторы, тогда

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_U (ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy)\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle =$$
$$= \int\limits_U \det \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ b & y_1 & y_2 \\ c & z_1 & z_2 \end{pmatrix} dtds = \int\limits_U (a, b, c) \cdot \vec{n} \cdot J_\varphi(t, s) dt \wedge ds$$

Проведя обратную замену, получим, что

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_U (a, b, c) \cdot \vec{n} dS^2$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $e_j \simeq (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Из этого получаем выражение в общем случае при $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\int\limits_M \vec{v}(x)\cdot\vec{n}(x)dS^{n-1} = \int\limits_M \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Напомним, что через $S_r$ и $B_r$ мы обозначаем сферу и шар радиуса $r$ соответственно.

**Определение 3.70.** Дивергенция векторного поля $\vec{v}$ в точке $x$ определяется как

$$\operatorname{div}\vec{v}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r|}\int\limits_{S_r}\vec{v}\cdot\vec{n}\; dS^{n-1}$$

где, при вычислении потока $\vec{v}$ через сферу $S_r$, интеграл берется по внешней стороне сферы.

**Лемма 3.71** (Оператор дивергенции в декартовых координатах)**.** *Для $C^1$-гладкого векторного поля $v$ имеет место формула*

$$\operatorname{div}\vec{v}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)$$

*Доказательство.* По формуле Стокса имеем

$$\int\limits_{S_r}\vec{v}\cdot\vec{n}\; dS^{n-1} = \int\limits_{S_r}\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{B_r}\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} da_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{B_r}\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{B_r}\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n$$

Отсюда

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r|}\int\limits_{S_r}\vec{v}\cdot\vec{n}\; dS^{n-1} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r|}\int\limits_{B_r}\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

□

**Теорема 3.72** (Формула Гаусса-Остроградского)**.** *Пусть $V$ — тело ($n$-мерное компактное многообразие в $\mathbb{R}^n$), тогда*

$$\int\limits_{\partial v} \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int\limits_{V} \operatorname{div} \vec{x}(x) dx$$

**Определение 3.73.** Векторное поле $\vec{v}$ называется *бездивергентным*, если $\operatorname{div} \ \vec{v} = 0$.

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

$$\begin{array}{ccccccc}
Scal(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & Vec(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & Vec(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & Scal(\mathbb{R}^3) \\
\Big| \simeq & & \Big| \simeq & & \Big| \simeq & & \Big| \simeq \\
\{U \to \Lambda^0\} & \xrightarrow{d} & \{U \to \Lambda^1\} & \xrightarrow{d} & \{U \to \Lambda^2\} & \xrightarrow{d} & \{U \to \Lambda^3\}
\end{array}$$

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

То есть, на языке дифференциальных форма, каждой операции векторного анализа соответствует дифференциал.

В плоском случае можно получить следующие выражения:

$$\operatorname{rot}(a, b) \simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \nabla \wedge (a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}(a, b) \simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \nabla \cdot (a, b)$$

**Определение 3.74.** Пусть $\vec{v}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда $\vec{v}$ называют *вихревым*, если существует $\vec{u}$ — векторное поле такое, что $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}$. В этом случае, $\vec{u}$ называют векторным потенциалом векторного поля $\vec{v}$.

Леммы ниже являются следствиями первой и второй теоремы Пуанкаре соответственно.

**Лемма 3.75.** *Вихревое векторное поле всегда бездивергентно, т.е.* $\operatorname{div} \ \operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

**Лемма 3.76.** *Если векторное поле $\vec{v}$ в звездной области в $\mathbb{R}^3$ бездивергентно, то она вихревое.*

**Теорема 3.77.** *В звездной области всякое трехмерное векторное поле $\vec{v}$ раскладывается в сумму вихревого и потенциального.*

*Доказательство.* Следует из теоремы 3.68. $\square$

**Определение 3.78.** Оператором Лапласа называется оператор $\Delta : Scal \to Scal$ такой, что

$$\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$$

В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Если $\Delta f > 0$, то $f(x)$ больше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке $x$.

Если $\Delta f < 0$, то $f(x)$ меньше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке $x$.

Если $\Delta f = 0$, то $f(x)$ приблизительно равна своему среднему значению на маленькой сфере с центром в точке $x$.