Лекции
по математическому анализу:
многообразия, дифференциальные формы

14 марта 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Содержание

1 Многообразия

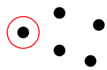
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

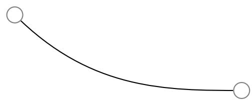
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Виды многообразий:

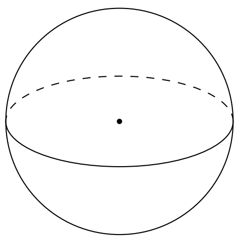
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



3. Поверхности ($k = 2$).

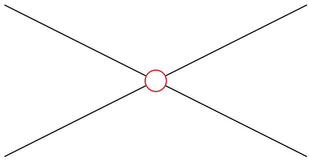


Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых – многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей – многообразие,

- Плоскость и прямая – не многообразие, так как их размерности не совпадают,

- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания $k-$мерных многообразий.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – окрытое множество, тогда U является n-мерным многообразием.*

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.
Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ – сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. $\square$

Теорема 1.4 (О графике). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}, f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ - C^r-гладкое n-мерное многообразие в R^{n+1}.*

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Отображение Φ является C^r-диффеоморфизмом и $\Phi(x,f(x)) = (x, 0)$, т.е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ $\square$

Теорема 1.5 (О локальном вложении). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U \operatorname{rank} Df(t^0)) = k$, то существует U-окрестность t^0, такая что $f(U)$ является C^r-гладким k-мерным многообразием.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_k}\, v_{k+1},\dots,v_n\}$ - базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U\times\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1,\dots,t_k,s_{k+1},\dots,s_n) = f(t_1,\dots,t_k)+s_{k+1}v_{k+1}+\dots+s_nv_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_k}\, v_{k+1},\dots,v_n]$, следовательно $\det D\Phi\neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W - окрестность $(t_0,0)$, такая что $\Phi : W\to\Phi(W)-C^r$-диффеоморфизм. Выберем $V\times(-h,h)\in W$, так что V - окрестность x_0 в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V\times 0^{n-k}$.

□

Определение 1.6. Пусть x^0 - решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = a_1\\ \dots\\ f_k(x_1,\dots,x_n) = a_k\end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\operatorname{rank}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U\subset\mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1,\dots,f_k : U\to\mathbb{R}$ и $f_i\in C^r\ \forall\, i\le k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = a_1\\ \dots\\ f_k(x_1,\dots,x_n) = a_k\end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 - регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}(x^0)$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

В некоторой окрестности x^0:

$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1,\dots,x_{n-k})$

$\dots$

$x+n = g_n(x_1,\dots,x_{n-k})$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$x_1 = x_1$
$\dots$
$x_k = x_k$
$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$
$\dots$
$x + n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$

$\square$

1.2 Многообразия с краем

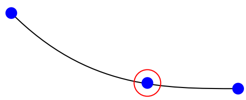
Определение 1.8. $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k > 0\}$ - верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k < 0\}$ - нижнее полупространство).

Определение 1.9. Пусть $V \subseteq R^k$ - окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - внутреняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$
2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) - это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окресности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M- многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ - краевая точка $M\}$ - множество краевых точек многообразия M.

Теорема 1.12 (О крае)**.** *Пусть M - C^r-гладкое k-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r-гладким k-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, 0, \dots, 0)$. Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ - краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание - $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ - выполнено определение многообразия. $\square$

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \dots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall i \le k$ и* rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \ge a_{k+1} \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем (внутрение точки - решение строгого неравенства, край - решение $(k+1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1} \end{cases}$$

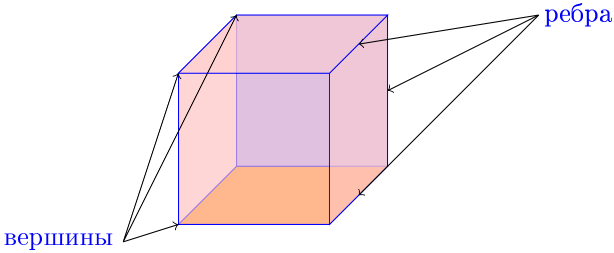
задает $(k-1)$ мерную поверхность - край многообразия. $\square$

Определение 1.14. Множество $M \in \mathbb{R}^k$ называется k-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M – k-мерное топологическое многообразие.

2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ - гладкое k-мерное многообразие, а Z_i - кусочно гладкие многообразия размерности $l \le k-1$.

Пример 1.15. Куб.

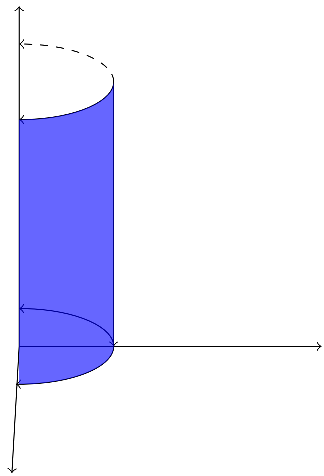


Теорема 1.16. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *- открытое множество,* $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{k+l}: U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall i \le k+l$ *и* $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + l$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \ge a_{k+1} \\ \ldots \\ f_{k+l}(x_1, \ldots, x_n) \ge a_{k+l} \end{cases}$$

представляет собой C^r*-гладкое* $(n-k)$*-мерное многообразием с краем.*

Пример 1.17. в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, z \ge 0, z \le 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.18. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ.

Определение 1.19. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M, т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.20. *Пусть $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ - параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - C^1-диффеоморфизм. Показать, что если v - вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a,b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v\rangle$ - вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0.*

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0)\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v\rangle$$

□

Лемма 1.21. *Колинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall\lambda > 0$ $\lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.*

Доказательство. TODO □

Теорема 1.22 (О множестве касательных векторов)**.** *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-гладкое k-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*

2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. По определению k-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \implies \Gamma'(t) == (x'_1(t), \ldots, x'_k(t), 0, \ldots, 0)$.

$\Gamma'(t) = \Phi(\gamma(t)) = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t)\rangle$ - линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.23. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.24. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^n$ *и* $x_0 \in M$*, тогда* $\dim M = k$*,* $\dim T_{x_0}M = k$*,* $\dim N_{x_0}M = n - k$*.*

Теорема 1.25 (О базисе касательного пространства)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *- открытое множество,* $f : U \to \mathbb{R}^k$*,* $f \in C^r$*. Тогда, если* $M = f(U)$ *- многообразие и* $\operatorname{rank} Df = k$*, то* $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0)\}$ *- базис в* $T_{f(t_0)}M$*.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in U$, определим $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ - кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t_0: $\gamma_j'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. □

Теорема 1.26. *Пусть многообразие* M *задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

и $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$*,* $f_i \in C^r \; \forall\, i \le k$ *,* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество, а так же* $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$*, тогда система уравнений*

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

задает $T_{f(t_0)}M$*, а* $\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_k(x_0)\}$ *базис в* $N_{x_0}M$*.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle = \nabla f_j(x_0)\cdot\vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.27. Пусть M, N – дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(t_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.28 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ - дифференцируема и x_0 - её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f\mid_\gamma$ x_0 - экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ - k-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f\mid_M$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f, то $df\mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Теорема 1.30 (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 - условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1\nabla\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k\nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. $\square$

Лемма 1.31 (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество и* $\gamma : [a, b] \to U \in C^2$ *– кривая. Тогда*

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle,$

2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle.$

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f\circ\gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = d^2 f(x)\langle\vec{v}\rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$. □

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \ldots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.32 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$*,* $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R} \in C^2$*,* $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$ *– всюду, то функция Лагранжа* $L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(x)$ *если* $dL(x_0,\lambda_0) = 0$*, то при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) > 0$ *– достигает минимума, при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) < 0$ *– максимума.*

Доказательство. Пусть $dL(x_0,\lambda_0) = 0, d_x^2 L(x_0, \lambda_0) \mid_{T_x M\times T_x M} > 0$.

$dL(x_0,\lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla\varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0}M \iff df_{x_0} \mid_{T_{x_0}M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \in C^2, \gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. По лемме 1.31 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.

$(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0}\langle\gamma'(0)\rangle = 0.$

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1\varphi_1(\gamma(t)) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + d_x L\langle\gamma''(t)\rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle\gamma'(0), \gamma'(0)\rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f\circ\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f\circ\gamma)'(0) = 0, (f\circ\gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0. Следовательно, x_0 – точка минимума для $f\,|_M$. $\square$

Пример 1.33. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1v_1 + \ldots, t_nv_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \ldots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \ldots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j\rangle)_{ij} = A^TA$ получаем: $\det A^TA = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L|E| = |\det L||E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r\to 0} \frac{|\varphi(Q(x,r))|}{|Q(x,r))|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E, мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int\limits_E J_{\varphi(x)}$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.34 (Объем k-мерного параллепипеда). *Пусть* $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. *Тогда* $|\Pi(v_1, \dots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. *Обозначив за* $A = [v_1, \dots, v_n]$*, это выражение можно записать ввиде* $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k-мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π.

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{kj}, 0, \dots, 0)^T$.

Заметим, что ортагональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{где } \theta - k \times k \text{матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det (QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.35. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцоц и $M(n,k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из $i_1, i_2, \dots, i_k$ строк матрицы A.

Теорема 1.36 (Формула Бине-Коши). *Пусть A – матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда* $\det A^* A = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$-матрицы, тогда $\det A^* B = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \dots; u_n]$ и $B = [v_1, \dots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k\rangle = \sum_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ????).

$$L_1\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk}\rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk}\rangle$$

□

Следствие 1.37. *Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что* $\operatorname{rank} L = k \leq n$. *Тогда для каждого измеримого множества A, $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L |A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^* L}$.*

Следствие 1.38. *Пусть Π – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^k \to \Pi$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x)dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x) D\varphi(x)}$.*

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v\rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A, получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k-мерное C^1-гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots & (t_1, \dots, t_k) \in U \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

Определим меру k-мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M.

Определение 1.39. Пусть $E \subseteq U \to \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|.|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int\limits_E J_\varphi(t)dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.40. *Пусть* $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *и* $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *- различные параметризации многообразия, такие что* $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} D\psi = k$. *Тогда* $\int\limits_U J_\varphi(t)dt = \int\limits_V J_\psi(t)dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ - отображение между U и V.

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ – C^1-диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\int\limits_V \sqrt{\det D\psi^*(y)D\psi(y)}dy = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$|\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)|dx = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$\sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)}dx$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. $\square$

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k:

1. Счетная аддитивность.

   Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ – не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup M_i) = \sum\limits_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k.

Пример 1.41. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k и формулы Бине-Коши.

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t) D\gamma(t)} = \sqrt{{x'}_1^2 + \ldots + {x'}_n^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

Определение 1.42. Мера угла – длина дуги окружности с центром в начале угла.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n-мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}\right)_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

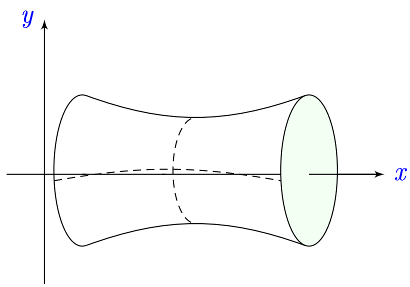
$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx$$

Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

Доказательство. TODO □

Пример 1.43 (Вывод частной формулы из общей)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox.

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ). Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \\ z = f(x)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \to \mathbb{E}$ – измеримая по S^k. Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f\ dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x)dx$, получаем,

$$\int_M f(y)dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то
$$\int_M (\alpha f + \beta g)dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$
2. монотонность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $f \leq g$, то
$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$
3. аддитивность по области определения: если $f : M \to \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то
$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int\limits_{M_1} f dS^k + \int\limits_{M_2} f dS^k.$$
4. ограниченность: если $f : M \to \mathbb{E}$, то
$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$

2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сфеерическую систему координат в $\mathbb{R}^k$:

$$u = \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_3 = r\sin\varphi\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ r\geq 0 \quad \varphi\in[0,2\pi] \quad \theta_i\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) = u|_{r=const}$ - параметризация сферы.

Обозначим n-мерный шар радиуса r как B_r. Соотвественно S_r - $(n-1)$-мерная сфера радиуса r.

Вычислим якобианы J_u и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \ldots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s},\ldots,\frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r||u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} &|u_r| = 1 \\ &|u_\varphi| = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_1}| = r\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &\ldots \\ &|u_{\theta_{n-3}}| = r\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_{n-2}}| = r \end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.
Теперь мы можем записать конкретное выражение для J_u:

$$J_u = r^{n-1}\cos\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^{n-2}\theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\tilde{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int\limits_0^R S^{n-2}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержаться. Так же площадь сферы можно представить ввиде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to R$. Потребуем, чтобы $\nabla\varphi \neq 0$ (т. е. $\operatorname{rank} D\varphi = k$ - максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в U. Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int\limits_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int\limits_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

Теорема 2.2 (Формула коплощади). *Пусть* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \in C^1$, *такая, что* $\operatorname{rank}(D\varphi) = k$, *тогда верна формула коплощади*

$$\int\limits_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

, где

$$J_{\varphi(x)} = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\operatorname{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$ - максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть k линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это k последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует C^1-диффеоморфизм $\Phi : V \to W$, где V - окрестность x_0, W - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\int\limits_U f(x,y) J_\varphi(x,y) dxdy = \int\limits_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dxdy =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dx$$

Заметим, что $\Phi^{-1}_{z(x)} = \Phi^{-1}(x,z)$ при фиксированом z является поверхностью. Возьмем $s = \Phi^{-1}_z(x)$, тогда

$$\int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int\limits_{\varphi(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}_z} g(\Phi^{-1}_z(x)) J_{\Phi^{-1}_z}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi^{-1}_z}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi^{-1}_z}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) □

Следствие 2.3. *Если $P_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ - проекция, тогда*

$$\int\limits_U f(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}_t} f(y) dy$$

, где $\mathbb{R}^{n-k}_t = \{(y,s) : s = t\}$ - $(n-k)$-мерная плоскость (TODO: а это точно следствие?).

3 Введение в векторный анализ

3.1 Дифференциальные формы

Определение 3.1. Векторным полем на многообразии M называется функция $F : M \to F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

Определение 3.2. Пусть $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем φ^* и определим результат его действия на функцию $f : V \to \mathbb{E}$ как фукнцию $\varphi^* f : U \to \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \to TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \to TU$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)} \langle v(\varphi(x)) \rangle$.

Свойства оператора переноса:

1. линейность: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall f,g$ - функции $\forall u,v$ - векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^* f + \beta \varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^* u + \beta \varphi^* v$$

2. мультипликативность: пусть $f : V \to \mathbb{R}$, $v : V \to TV$, $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм, то $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.

3. перенос композиции является произведением переносов: пусть $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \psi^*$.

4. перестановочность с дифференциалом: $\varphi^* d = d\varphi^*$.

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - линейное отображение. Рассмотрим действие L на вектор v:

$$L\langle v \rangle = L\langle v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n \rangle = v_1 L\langle e_1 \rangle + \ldots + v_n L\langle e_n \rangle = v_1 a_1 + \ldots v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v\rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \ldots, dx_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \ldots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v\rangle = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени k над $\mathbb{R}^n$. В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Определение 3.3. Дифференциальной формой степени k (сокращенно k-формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 3.4. *Существует так называемый дуализм между* 1*-формами и векторными полями так как, каждая* 1*-форма изоморфна некоторому векторному полю.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u\rangle = v(x) \cdot u$. □

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что, стоит задасться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

Пример 3.5. $w = xdy$ - 1-форма, но не дифференциал.

Доказательство. Допустим, что $w = df = f_xdx + f_ydy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. □

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = xdy$. Пусть $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, тогда $\varphi^*w = r\cos\varphi d(r\sin\varphi) = r\cos\varphi(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = r\sin\varphi\cos\varphi dr + r^2\cos^2\varphi d\varphi$.

Опеределим теперь оператор переноса для 1-форм.

Определение 3.6. Пусть w - 1-форма на V. Пусть $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда φ^*w - 1-форма на U и $\varphi^*w(x)\langle v\rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle$.

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

Лемма 3.7 (Четвертое свойство оператора переноса)**.** *Пусть* $\varphi : U \to V$ *-* C^1*-диффеоморфизм,* $f : V \to \mathbb{E} \in C^1$*, тогда* $\varphi^*(d\varphi) = d(\varphi^* f)$*. Заметим так же, что слева от равенства стоит* 1*-форма, а справа* 0*-форма.*

Доказательство. Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\varphi^*(df)(x)\langle v\rangle = df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v\rangle = \\ = d(f \circ \varphi)(x)\langle v\rangle = d(\varphi^* f)(x)\langle v\rangle$$

□

Пример 3.8 (Работа векторного поля вдоль кривой)**.** Рассмотри одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = \vec{(F)} \cdot \vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g\langle l\rangle$. А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int\limits_\gamma \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x) dl(x)$.