Лекции
по математическому анализу:
многообразия, дифференциальные формы

27 февраля 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Содержание

1 Многообразия

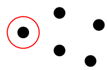
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

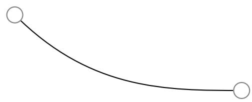
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Виды многообразий:

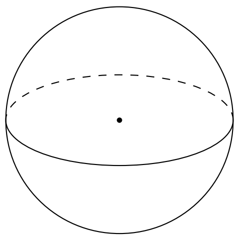
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



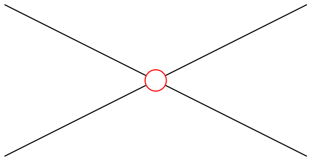
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых – многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей – многообразие,

- Плоскость и прямая – не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания $k-$мерных многообразий.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – окрытое множество, тогда U является n-мерным многообразием.*

Первый способ

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.
Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ – сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. $\square$

Теорема 1.4 (О графике)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}, f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ - C^r-гладкое n-мерное многообразие в R^{n+1}.*

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Отображение Φ является C^r-диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т.е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ $\square$

Теорема 1.5 (О локальном вложении)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U \operatorname{rank} Df(t^0)) = k$, то существует U-окрестность t^0, такая что $f(U)$ является C^r-гладким k-мерным многообразием.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ - базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \ldots + s_n v_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\, v_{k+1}, \dots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W - окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \to \Phi(W) - C^r$-диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V - окрестность x_0 в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times 0^{n-k}$.

$\square$

Определение 1.6. Пусть x^0 - решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r\ \forall\, i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 - регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0)$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

В некоторой окрестности x^0:

$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$

$\dots$

$x + n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$x_1 = x_1$

$\dots$

$x_k = x_k$

$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$

$\dots$

$x + n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$

$\square$

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k > 0\}$ - верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k < 0\}$ - нижнее полупространство).

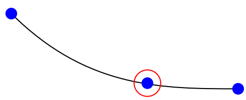
Определение 1.9. Пусть $V \subseteq R^k$ - окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - внутреняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$

2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) - это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окресности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M- многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ - краевая точка $M\}$ - множество краевых точек многообразия M.

Теорема 1.12 (О крае)**.** *Пусть M - C^r-гладкое k-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r-гладким k-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, 0, \ldots, 0)$. Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ - краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание - $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ - выполнено определение многообразия. □

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \le k$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \ge a_{k+1} \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем (внутрение точки - решение строгого неравенства, край - решение $(k+1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = a_{k+1} \end{cases}$$

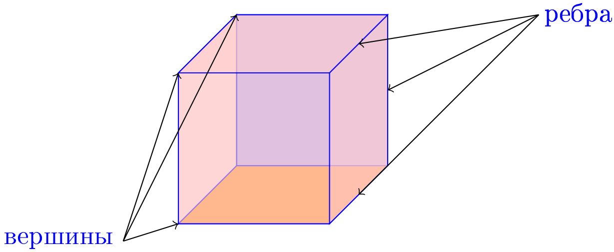
задает $(k-1)$ мерную поверхность - край многообразия. □

Определение 1.14. Множество $M \in \mathbb{R}^k$ называется k-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M – k-мерное топологическое многообразие.

2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ - гладкое k-мерное многообразие, а Z_i - кусочно гладкие многообразия размерности $l \le k-1$.

Пример 1.15. Куб.

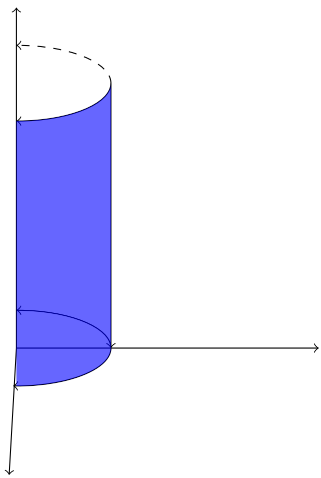


Теорема 1.16. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{k+l} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+l$ и* rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1} \\ \ldots \\ f_{k+l}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+l} \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем.

Пример 1.17. в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.18. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Колинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.

Теорема 1.19 (О множестве касательных векторов). *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-гладкое k-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*
2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. По определению k-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \implies \Gamma'(t) == (x'_1(t), \ldots, x'_k(t), 0, \ldots, 0)$.

$\Gamma'(t) = \Phi(\gamma(t)) = D\Phi_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$ - линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.20. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.21. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда $\dim M = k$, $\dim T_{x_0}M = k$, $\dim N_{x_0}M = n - k$.*

Теорема 1.22 (О базисе касательного пространства). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^k$, $f \in C^r$. Тогда, если $M = f(U)$ - многообразие и $\operatorname{rank} Df = k$, то $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0)\}$ - базис в $T_{f(t_0)}M$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in U$, определим $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ - кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t_0: $\gamma'_j(t_0) = \frac{d}{dt}f(t_0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. $\square$

Теорема 1.23. *Пусть многообразие M задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n)=a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n)=a_k \end{cases}$$

и $f_1,\ldots,f_k : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r\ \forall\, i \le k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а так же $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

задает $T_{f(t_0)}M$, а $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle = \nabla f_j(x_0)\cdot\vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.24. Пусть M, N – дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(t_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.25 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ - дифференцируема и x_0 - её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \Longleftrightarrow \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f \mid_\gamma x_0$ - экструмум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ - k-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f \mid_M$.

Теорема 1.26 (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f, то $df \mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \Longleftrightarrow \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Теорема 1.27 (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 - условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. $\square$

Лемма 1.28 (Правило дифференцирования вдоль кривой)**.**

Пусть $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $\gamma : [a, b] \to U \in C^2$ – кривая. Тогда

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f\circ\gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = d^2f(x)\langle\vec{v}\rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t = d^2f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – уравнения связи, то $x\in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\varphi_1(x) = 0,\\ \ldots\\ \varphi_n(x) = 0.\end{cases}$$

Теорема 1.29 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). *Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$, $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_k : U\to\mathbb{R}\in C^2$, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$ – всюду, то функция Лагранжа $L(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(x)$ если $dL(x_0,\lambda_0) = 0$, то при $d^2_xL(x_0,\lambda_0) > 0$ – достигает минимума, при $d^2_xL(x_0,\lambda_0) < 0$ – максимума.*

Доказательство. Пусть $dL(x_0,\lambda_0) = 0, d^2_xL(x_0,\lambda_0)\mid_{T_xM\times T_xM} > 0$.

$dL(x_0,\lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k\lambda_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k\lambda_j\nabla\varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0\in M$. Следовательно, $\nabla f(x)\in N_{x_0}M \iff df_{x_0}\mid_{T_{x_0}M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\to M\in C^2, \gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f\circ\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$. По лемме 1.28 $(f\circ\gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$. $(f\circ\gamma)'(0) = df_{x_0}\langle\gamma'(0)\rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x\in M \iff \begin{cases}\varphi_1(\gamma(t))\equiv 0,\\ \ldots\\ \varphi_k(\gamma(t))\equiv 0.\end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x,\lambda)$, получим

$$L(\gamma(t),\lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1\varphi_1(\gamma(t)) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + d_x L\langle \gamma''(t)\rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle \gamma'(0), \gamma'(0)\rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f \circ \gamma)'(0) = 0, (f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0. Следовательно, x_0 – точка минимума для $f\mid_M$. □

Пример 1.30. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.