

Лекции
по математическому анализу:
многообразия, криволинейные и
поверхностные интегралы,
введение в векторный анализ.

2 мая 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Внимание! Записки не подвергались редактуре, поэтому, возможно, содержат множество неточностей, опечаток и смысловых ошибок.

Содержание

1	Многообразия	3
1.1	Многообразия без края	3
1.2	Многообразия с краем	6
1.3	Касательное и нормальное пространства	10
1.4	Задача на условный экстремум	13
1.5	Площадь поверхности	15
1.6	Площадь графика функции	19
2	Криволинейные интегралы	21
2.1	Криволинейные интегралы I-рода	21
2.2	Объем шара и площадь сферы	22
2.3	Формула коплощади	23
3	Введение в векторный анализ	25
3.1	Дифференциальные формы	25
3.2	Ориентация	27
3.3	Интеграл 1-формы по кривой	30
3.4	Внешние формы второго порядка	41
3.5	Внешний дифференциал 1-формы	42
3.6	Ротация векторного поля	44
3.7	25.04.19	49
3.8	Дивергенция векторного поля	52

1 Многообразия

1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в \mathbb{R}^k .

При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

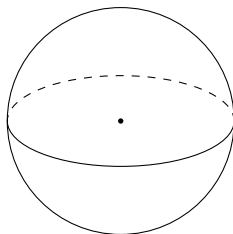
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



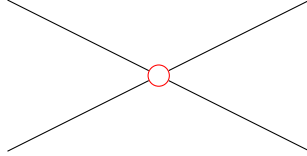
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения — многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания k -мерных многообразий.

Теорема 1.3. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, тогда U является n -мерным многообразием.

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.

Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ — сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. \square

Теорема 1.4 (О графике). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ — C^r -гладкое n -мерное многообразие в \mathbb{R}^{n+1} .

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение Φ является C^r -диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т. е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$. \square

Теорема 1.5 (О локальном вложении). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U$ и $\text{rank } Df(t^0) = k$, то существует V -окрестность t^0 , такая что $f(V)$ является C^r -гладким k -мерным многообразием.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\text{rank } Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса \mathbb{R}^n .

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ — базис в \mathbb{R}^n .

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \dots + s_nv_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}, v_{k+1}, \dots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W — окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \rightarrow \Phi(W)$ — C^r -диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V — окрестность x_0 в \mathbb{R}^k , тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$. \square

Определение 1.6. Пусть x^0 — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r \forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n - k)$ -мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

$f(x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) = f(x, y) = 0$. Существует окрестность V такая, что $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ тогда по теореме о неявной функции $y = g(x)$.

В некоторой окрестности x^0 :

$$\begin{aligned}x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\&\dots \\x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).\end{aligned}$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1, \\&\dots \\x_{n-k} &= x_{n-k}, \\x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\&\dots \\x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).\end{aligned}$$

□

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$ — верхнее полупространство ($\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$ — нижнее полупространство).

Определение 1.9. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^k$ — окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}_+^k$ называется полукрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$ -мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}_+^k) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$.
2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M — многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x \text{ — краевая точка } M\}$ — множество краевых точек многообразия M .

Теорема 1.12 (О крае). Пусть M — C^r -гладкое k -мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r -гладким $(k - 1)$ -мерным многообразием без края ($\partial \partial M = \emptyset$).

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$.

Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ — краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k - 1)$ -мерную плоскость (основание полупространства). Основание — $(k - 1)$ -мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ — выполнено определение многообразия. \square

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_{k+1} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k + 1$ и $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + 1$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n - k)$ -мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение $(k + 1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

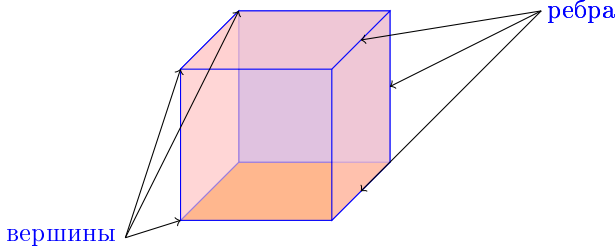
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает $(k - 1)$ мерную поверхность — край многообразия. \square

Определение 1.14. Множество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется k -мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M — k -мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$, такое что \tilde{M} — гладкое k -мерное многообразие, а Z_i — кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k - 1$.

Пример 1.15. Куб.



Теорема 1.16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k + l$ и $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + l$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой C^r -кусочно-гладкое $(n - k)$ -мерное многообразие с краем.

Пример 1.17. Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

Решение. Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если $x = 0$ или $y = 0$. Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно $\text{rank} \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$ и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

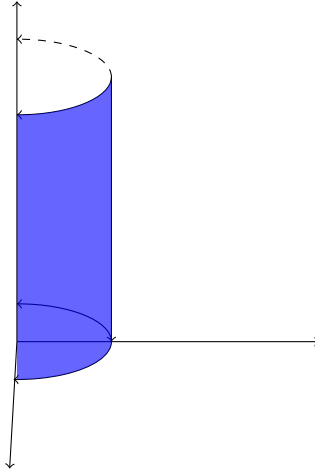
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases} & & \end{array}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2 (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий). \square

Пример 1.18. в \mathbb{R}^3 . $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.19. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ .

Определение 1.20. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M , т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.21. Пусть $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – C^1 -диффеоморфизм. Показать, что если v – вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a, b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v \rangle$ – вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0 .

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0 \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0) \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v \rangle. \quad \square$$

Лемма 1.22. Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0 \lambda \vec{v} \in T_{x_0}M$.

Доказательство. По условию, существует кривая $\gamma \subset M$, для которой \vec{v} является вектором скорости. Зададим кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ и проверим, что вектор $\lambda \vec{v}$ является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda \vec{v}$$

□

Теорема 1.23 (О множестве касательных векторов). *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкое k -мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.
2. Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}_+^k$.

Доказательство. По определению k -мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в \mathbb{R}^k .

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$$\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t), 0, \dots, 0).$$

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$ — линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ — k -мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.24. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 — это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.25. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда если $\dim M = k$ то, $\dim T_{x_0}M = k$ и $\dim N_{x_0}M = n - k$.

Теорема 1.26 (О базисе касательного пространства). Пусть многообразие M задано параметрически:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

, где $(t_1, \dots, t_k) \in U$.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $t^0 \in U$. Тогда, если $M = f(U)$ — многообразие и $\text{rank } Df = k$, то $\{\frac{\partial f}{\partial t_1}(t^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t^0)\}$ — базис в $T_{f(t^0)}M$.

Доказательство. Пусть $t^0 \in U$, определим $\Gamma_j = t^0 + t \cdot \vec{e}_j$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ — кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t^0 : $\gamma'_j(t^0) = \frac{d}{dt}f(t^0 + t \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t^0) \in T_{f(t^0)}M$.

Набор векторов $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{i=1}^k$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. \square

Теорема 1.27. Пусть многообразие M задано системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k. \end{cases}$$

и $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а так же $\text{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0, \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

задает $T_{x_0}M$, а $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

$$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle.$$

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ — базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. \square

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.28. Пусть M, N — дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \rightarrow N$ дифференцируема в точке x_0 , если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема и x_0 — её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f|_\gamma$ x_0 — экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}(\vec{v})$. \square

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $M \subseteq U$ — k -мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f|_M$.

Теорема 1.30 (Необходимое условие условного экстремума). Если $x_0 \in M$ — точка экстремума f , то $df|_{T_{x_0}M} = 0 \iff \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 — экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_{x_0}(\vec{v})$. \square

Теорема 1.31 (Метод множителей Лагранжа). Пусть $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 — условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ — функция Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ — решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x)$ — градиенты $\nabla \varphi_i$ — это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f — нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. \square

Лемма 1.32 (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $\gamma : [a, b] \rightarrow U \in C^2$ – кривая. Тогда

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f \circ \gamma)''(t) = (df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x(df_x \langle \vec{v} \rangle) = d^2 f(x) \langle \vec{v} \rangle$ и $d_{\vec{v}}(df_x \langle \vec{v} \rangle) = df_x$.

Отсюда имеем $(df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.33 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, $\text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = k$ всюду, то. Определим функцию Лагранжа как $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x)$, тогда, если $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, то при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) > 0$ – x_0 – точка минимума, а при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) < 0$ – точка максимума.

Доказательство. Пусть $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, $d^2_x L(x_0, \lambda_0) |_{T_{x_0} M \times T_{x_0} M} > 0$.

$dL(x_0, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} |_{T_{x_0} M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \in C^2$, $\gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ , т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. По лемме 1.32 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$. $(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0} \langle \gamma'(0) \rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L(\gamma'(t), \gamma'(t)) + d_x L(\gamma''(t)).$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L(\gamma'(0), \gamma'(0)) + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \gamma)'(0) = 0$, $(f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0 . Следовательно, x_0 – точка минимума для $f|_M$. \square

Пример 1.34. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n -мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \dots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \dots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$ получаем: $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L |E| = |\det L| |E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E , мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int_E J_{\varphi(x)} dx$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.35 (Объем k -мерного параллелепипеда). Пусть $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. Тогда $|\Pi(v_1, \dots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. Обозначив за $A = [v_1, \dots, v_n]$, это выражение можно записать в виде $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k -мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π .

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянута параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ где } \theta - k \times k \text{ матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.36. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов и $M(n, k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из i_1, i_2, \dots, i_k строк матрицы A .

Теорема 1.37 (Формула Бине-Коши). Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда $\det A^* A = \sum_{I \in M(n, k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$ -матрицы, тогда $\det A^* B = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \dots; u_n]$ и $B = [v_1, \dots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ???).

$$L_1\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle$$

□

Следствие 1.38. Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что $\text{rank } L = k \leq n$. Тогда для каждого измеримого множества A , $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^*L}$.

Следствие 1.39. Пусть Π - k -мерная плоскость в \mathbb{R}^n и $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi$ - C^1 -диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x) dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v \rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A , получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k -мерное C^1 -гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k) \in U$$

Определим меру k -мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M .

Определение 1.40. Пусть $E \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|\cdot|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int_E J_\varphi(t) dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t) D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.41. Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ - различные параметризации многообразия, такие что $\text{rank } D\varphi = \text{rank } D\psi = k$. Тогда $\int_U J_\varphi(t) dt = \int_V J_\psi(t) dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ — отображение между U и V .

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ — C^1 -диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\begin{aligned} \int_V \sqrt{\det D\psi^*(y) D\psi(y)} dy &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &= \int_U |\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx = \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &\quad \sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. \square

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k :

1. Счетная аддитивность.

Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ — не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup_i M_i) = \sum_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k .

Пример 1.42. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k .

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_n'^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

Определение 1.43. Мера угла – длина дуги единичной окружности с центром в начале угла.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n -мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \dots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx$$

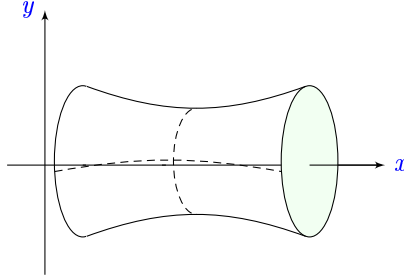
Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

Доказательство. TODO

□

Пример 1.44 (Вывод частной формулы из общей). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox .

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ) . Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \cos \varphi, \\ z = f(x) \sin \varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n -мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ – измеримая по S^k . Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x) dx$, получаем,

$$\int_M f(y) dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_M (\alpha f + \beta g) dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$

2. монотонность: если $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $f \leq g$, то

$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$

3. аддитивность по области определения: если $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то

$$\int_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int_{M_1} f dS^k + \int_{M_2} f dS^k.$$

4. ограниченность: если $f : M \rightarrow \mathbb{E}$, то

$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$

2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в \mathbb{R}^n :

$$u = \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_2 = r \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_3 = r \sin \varphi \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = u|_{r=\text{const}}$ - параметризация сферы.

Обозначим n -мерный шар радиуса r как B_r . Соответственно S_r - $(n - 1)$ -мерная сфера радиуса r .

Вычислим якобианы J_u и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \dots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r| |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} |u_r| &= 1 \\ |u_\varphi| &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_1}| &= r \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ &\dots \\ |u_{\theta_{n-3}}| &= r \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_{n-2}}| &= r \end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.

Теперь мы можем записать конкретное выражение для J_u :

$$J_u = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_u d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\bar{u}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\bar{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_R| = \int_0^R S^{n-1}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержатся. Так же площадь сферы можно представить в виде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы $\nabla\varphi \neq 0$ (т. е. $\text{rank } D\varphi = k$ максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в U . Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

Теорема 2.2 (Формула коплощади). Пусть $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$, такая, что $\text{rank}(D\varphi) = k$, тогда верна формула коплощади

$$\int_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

, где

$$J_\varphi(x) = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\text{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$ - максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть k линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это k последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует C^1 -диффеоморфизм $\Phi : V \rightarrow W$, где V - окрестность x_0 , W - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\begin{aligned} \int_U f(x, y) J_\varphi(x, y) dx dy &= \int_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что $\Phi_{z(x)}^{-1} = \Phi^{-1}(x, z)$ при фиксированном z является поверхностью. Возьмем $s = \Phi_z^{-1}(x)$, тогда

$$\int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int_{\varphi(U) \cap \mathbb{R}_z^{n-k}} g(\Phi_z^{-1}(x)) J_{\Phi_z^{-1}}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует)

□

Для проекции $P_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ формула коплощади превращается в формулу Фубини:

$$\int_U f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\mathbb{R}_t^{n-k}} f(y)dy$$

где $\mathbb{R}_t^{n-k} = \{(y, s) : s = t\}$ - $(n - k)$ -мерная плоскость.

3 Введение в векторный анализ

3.1 Дифференциальные формы

Определение 3.1. Векторным полем на многообразии M называется функция $F : M \rightarrow F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

Определение 3.2. Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ - C^1 -диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем φ^* и определим результат его действия на функцию $f : V \rightarrow \mathbb{E}$ как функцию $\varphi^* f : U \rightarrow \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \rightarrow TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \rightarrow TU$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)} \langle v(\varphi(x)) \rangle$.

Свойства оператора переноса:

1. линейность: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g$ - функции $\forall u, v$ - векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^* f + \beta \varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^* u + \beta \varphi^* v$$

2. мультипликативность: пусть $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v : V \rightarrow TV$, $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \rightarrow V$ - C^1 -диффеоморфизм, то $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.
3. перенос композиции является произведением переносов: пусть $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : U \rightarrow V$ - C^1 -диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \psi^*$.
4. перестановочность с дифференциалом: $\varphi^* d = d\varphi^*$.

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - линейное отображение. Рассмотрим действие L на вектор v :

$$L\langle v \rangle = L\langle v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \rangle = v_1 L\langle e_1 \rangle + \dots + v_n L\langle e_n \rangle = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v \rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \dots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v \rangle = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени k над \mathbb{R}^n . В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Определение 3.3. Дифференциальной формой степени k (сокращенно k -формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 3.4. Существует так называемый дуализм между 1-формами и векторными полями, так как каждая 1-форма изоморфна некоторому векторному полю.

Доказательство. Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u \rangle = v(x) \cdot u$. \square

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

Пример 3.5. $w = xdy$ - 1-форма, но не дифференциал.

Доказательство. Допустим, что $w = df = f_x dx + f_y dy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. \square

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = xdy$. Пусть $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, тогда $\varphi^* w = r \cos \varphi d(r \sin \varphi) = r \cos \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r \sin \varphi \cos \varphi dr + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi$.

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

Определение 3.6. Пусть w - 1-форма на V . Пусть $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1 -диффеоморфизм. Тогда φ^*w - 1-форма на U и $\varphi^*w(x)\langle v \rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle$.

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

Лемма 3.7 (Четвертое свойство оператора переноса). Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ - C^1 -диффеоморфизм, $f : V \rightarrow \mathbb{E} \in C^1$, тогда $\varphi^*(d\varphi) = d(\varphi^*f)$. Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.

Доказательство. Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi^*(df)(x)\langle v \rangle &= df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v \rangle = \\ &= d(f \circ \varphi)(x)\langle v \rangle = d(\varphi^*f)(x)\langle v \rangle\end{aligned}$$

□

Пример 3.8 (Работа векторного поля вдоль кривой). Рассмотрим одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g\langle l \rangle$. А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x)dl(x)$.

3.2 Ориентация

Определение 3.9. Пусть V — конечномерное векторное пространство, в нем определены два базиса u_1, \dots, u_n и v_1, \dots, v_n связанные между собой матрицей перехода A такой, что $v_j = Au_j$ и $\det A \neq 0$. Базисы назовем *сориентированными* если $\det A > 0$, и *противоположено ориентированными* если $\det A < 0$.

Ориентация — класс сориентированных базисов.

Определение 3.10. Пусть \mathfrak{B}^n — множество базисов в \mathbb{R}^n *ориентацией* на \mathfrak{B}^n назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}^n \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

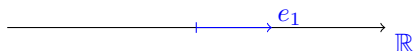
1. Θ — непрерывная,

2. Θ – кососимметричная.

то есть, если $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ – перестановка, то $\Theta(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n}) \rightarrow \text{sgn } \sigma \cdot \Theta(v_1, \dots, v_n)$

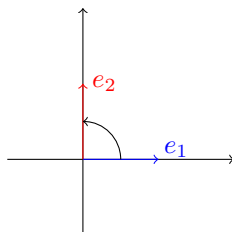
Теперь приведем примеры стандартных ориентаций. Они существуют для пространств \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

- ориентация в \mathbb{R}^1



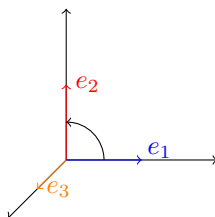
т.е. стандартная ориентация направлена по возрастанию.

- ориентация в \mathbb{R}^2



т.е. стандартная ориентация получается вращением от вектора e_1 к вектору e_2 против часовой стрелки.

- ориентация в \mathbb{R}^3



т.е. если вектор e_2 получен вращением вектора e_1 против часовой стрелки, то вектор e_3 должен смотреть «на нас».

Теперь определим ориентацию на многообразии.

Определение 3.11. Пусть M — k -мерное многообразие и $\mathfrak{B}M := \{(x, v_1, \dots, v_k) : x \in M, v_1, \dots, v_k \text{ — базис } T_x M\}$

ориентацией на многообразии M назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}M \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

1. Θ — непрерывная,
2. Θ — кососимметричная.

Оказывается, что не на всяком многообразии можно задать ориентацию. Таким многообразием, к примеру, является лента Мёбиуса: если мы возьмем стандартный базис \mathbb{R}^2 и «протащим» его по ленте на один оборот, то он «зеркально отразится». Таким образом, на ленте Мёбиуса не существует функции, удовлетворяющей определению 3.11.

Определение 3.12. Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию. В противном случае оно называется *неориентируемым*.

Определение 3.13. Ориентированное многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация.

Лемма 3.14. Если многообразие задано параметрически, то оно ориентируемое.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $k \leq n$.

$$M = f(U) \iff \begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_r = f_r(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

Поскольку в U есть ориентация k -мерного пространства $\Theta(u_1, \dots, u_k)$, определим на M ориентацию $\tilde{\Theta}(x, v_1, \dots, v_k)$ следующим образом: $x = f(t)$, $v_1 = df_x \langle u_1 \rangle, \dots, df_x \langle u_k \rangle$. \square

Лемма 3.15. Многообразие заданное системой уравнений всегда ориентируемое.

Доказательство. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ и $\text{rank } D\varphi = k$ всюду для всякого $k \leq n$.

x — точка на многообразии M тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$. В свою очередь

$$\varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

тогда $\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_k(x)$ — нормали к многообразию M в точке x . Определим ориентацию следующим образом:

$$x \in M, \tau_1, \dots, \tau_{n-k} \in T_x M \implies$$

$$\tilde{\Theta}(x, \tau_1, \dots, \tau_{n-k}) = \Theta(\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_k(x), \tau_1, \dots, \tau_{n-k}).$$

□

Рассмотрим примеры ориентируемых многообразий и ориентаций на них.

- $k = 0$. 0-мерное многообразие — набор точек.

$$\begin{array}{ccc} & \bullet -1 & \bullet +1 \\ +1 \bullet & & \\ & \bullet +1 & \\ & \bullet -1 & \end{array}$$

— просто приписываем $\{-1, +1\}$ к точкам.

- $k = 2, n = 3$. Поверхность в \mathbb{R}^3 .

Ориентация задается нормалью.

3.3 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть $\gamma - C^1$ -гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации. Тогда $\psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] \in C^1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$.

Определение 3.16. Две параметризации φ, ψ называются сориентированными (противоположно ориентированными), если $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ ($(\psi^{-1} \circ \varphi)' < 0$).

Определение 3.17. Параметризация φ кривой γ называется согласованной с ориентацией θ , если $\theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$.

Определение 3.18. Пусть $w : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ - непрерывная 1-форма и $\gamma \subset U$ - C^1 -гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется $\int_{\gamma} w = \int_a^b w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt$, где $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ - параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

Пример 3.19. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y .

Решение. Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - (1 - t)^2 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Тогда $dx = -dt$, $dy = 2(1 - t)dt$. Подставим эти выражения в формулу:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xdy + ydx &= \int_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt = \\ &= \int_0^1 2(1 - t)^2 dt - (4 - (1 - t)^2)dt = \int_0^1 [3(1 - t)^2 - 4]dt = \\ &= \int_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3 \Big|_0^1 = -3 \end{aligned}$$

□

Свойства интеграла 1-формы

1. Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$, $\psi : [c, d] \rightarrow \gamma \in C^1$ - параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)$ - монотонно возрастает, следовательно $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$.

$$\int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle = \int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s)))) \langle \psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) \rangle (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) ds$$

Так как $w(\psi(s))$ - линейный оператор, можем внести $(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)$ как множитель аргумента. Имеем $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)$ как производную композиции.

$$\int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s)))) \langle \psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) \rangle (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) ds = \int_a^b w(\varphi(s)) \langle \varphi'(s) \rangle ds$$

□

2. антисимметричность

Пусть γ - ориентированная кривая, тогда $-\gamma$ та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int_{-\gamma} w = - \int_{\gamma} w$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, T] \rightarrow \gamma$ - параметризация кривой γ , согласованная с ориентацией, тогда $\psi(t) = \varphi(T-t)$ - параметризация кривой $-\gamma$, согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_0^T w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\varphi^{-1} \circ \psi)(s)$. Тогда $\psi(0) = T$ и $\psi(T) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^T w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle &= \int_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s)))) \langle \varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s))) \rangle (\varphi^{-1} \circ \psi)'(s) ds = \\ &= \int_T^0 w(\psi(s)) \langle \psi^{-1}(s) \rangle ds = - \int_0^T w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle = - \int_{-\gamma} w \end{aligned}$$

□

3. Линейность

$\forall w_1, w_2$ - формы, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \int_{\gamma} w_1 + \beta \int_{\gamma} w_2$$

4. Аддитивность

Пусть $\varphi : [p, q] \rightarrow \gamma$ - параметризация кривой γ , возьмем $r \in [p, q]$ и определим $\varphi_{pr} : [p, r] \rightarrow \gamma_{pr}$ и $\varphi_{rq} : [r, q] \rightarrow \gamma_{rq}$, тогда

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma_{pr}} + \int_{\gamma_{rq}}$$

Замечание 3.20. Если кривая замкнута, тогда вместо $\int_{\gamma} w$ используют обозначение $\oint_{\gamma} w$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Пример 3.21 (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой). Пусть \vec{v} - векторное поле, γ - ориентированная кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой γ вычисляется как ($\vec{\tau}$ - касательный вектор к кривой)

$$\int_{\gamma} v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$$

Теорема 3.22 (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть $w = df$ - полный дифференциал, γ - ориентированная кривая с начальной точкой p и конечной точкой q , тогда справедлива формула

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ - параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда $\varphi(a) = p$ - начальная точка кривой и $\varphi(b) = q$ - конечная точка кривой.

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\varphi(t)) \langle \varphi^{-1}(t) \rangle dt = \int_a^b [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t)) \Big|_a^b = f(q) - f(p)$$

□

Следствие 3.23. Если $w = df$, то $\int_{\gamma} w$ не зависит от пути γ , а только от начальной и конечной точки.

Следствие 3.24.

$$\oint_{\gamma} df = 0$$

Пример 3.25. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y .

Решение. Заметим, что w - полный дифференциал функции $f = xy$, а так же, что начальная точка параболы это $(1, 3)$, а конечная $(0, 4)$.

$$\int_{\gamma} xdy + ydx = \int_{\gamma} d(xy) = xy \Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

□

Теорема 3.26 (Критерий полного дифференциала). Пусть w - непрерывная 1-форма на множестве U . Тогда w является полным дифференциалом некоторой функции $f \in C^1$ тогда и только тогда, когда $\oint_{\gamma} w = 0$ для всех ориентированных замкнутых контуров $\gamma \subset U$.

Доказательство. Необходимость следует из 3.24.

Для доказательства достаточности построим функцию f .

Пусть U - открытое связное множество. Возьмем точку $x_0 \in U$ и положим, что $f(x_0) = C$. Возьмем так же $x \in U$ - другую точку и положим $f(x) = f(x_0) + \int_{\gamma} w$, где γ - кривая, соединяющая точки x и x_0 (начало в x_0 , конец в x).

Если γ_1 и γ_2 - две кривые из x_0 в x , то $\gamma_1 - \gamma_2$ - замкнутый контур и

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w - \int_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути.

Продолжение следует ;)

□

Определение 3.27. Непрерывная дифференциальная форма w называется *точной*, если существует $f \in C^1$ такая, что $w = df$.

Определение 3.28. Векторное поле \vec{v} называется *потенциальным*, если существует функция $f \in C^1$ такая, что $\vec{v} = \nabla f$. В таком случае говорят, что f является *потенциалом* \vec{v} .

Теорема 3.29 (Формула Грина). Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ - компактная область с кусочной-гладкой границей, пусть $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ - C^1 -гладкая 1-форма $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда

$$\oint_{\partial U} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_U \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x,y) & Q(x,y) \end{array} \right| = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Доказательство. Доказательство проведем для криволинейной трапеции.

Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \leq g$

□

Пример 3.30. Вычислить

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin(x)) dx + x dy$$

где U задано равенством $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Лайфхак от Сергея Геннадьевича: если вы видите задачу с «безумной функцией», то эта задача на формулу Грина.

Функция в задаче выглядит не очень, так что воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin x) dx + x dy = - \iint_U (1 - 0) dx dy = -\pi ab$$

□

Определение 3.31. 1-формами площади называются специальные 1-формы, интегралы от которых дают площадь.

$$x dy, \quad -y dx, \quad \frac{x dy - y dx}{2}$$

Проинтегрировав любую из этих форм по области, вы получите площадь области:

$$\oint_{\partial U} x dy = \iint_U (1 - 0) dx dy = |U|$$

Пример 3.32. Вычислите площадь ветки циклоиды, полученной движением круга радиуса a .

$$\begin{cases} x = at - a \sin t \\ y = a - a \cos t \end{cases}$$

Решение. Из прошлого семестра, мы знаем, что площадь можно посчитать с помощью двойного интеграла. Для этого нам нужно найти пределы интегрирования. Переменная x меняется от 0 до $2\pi a$, однако, когда мы попытаемся найти пределы интегрирования по y , мы столкнемся с проблемой: t нельзя выразить через x в явном виде. Следовательно, старый способ вычисления площади тут не сработает.

Воспользуемся 1-формами площади. Заметим, что область ветки ограничена кривой циклоиды и осью Ox . Обозначим за C и I циклоиду и ось Ox соответственно, по формуле Грина получим:

$$S = \oint_{C+I} y dx = \int_C y dx + \int_I y dx$$

Так как $y = 0$ во втором интеграле, получаем:

$$\begin{aligned}\int_C y dx &= \int_0^{2\pi} a(1 + \cos t) d(at - a \sin t) = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \frac{6x - 8 \sin x + \sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2\end{aligned}$$

□

У нас уже был критерий полного дифференциала, но он не годится для непосредственной проверки того, является ли 1-форма дифференциалом некоторой функции. Поставим перед собой задачу: по 1-форме определить полный дифференциал ли это и, если да, то какой функции?

Теорема 3.33 (Необходимое условие полного дифференциала). Пусть $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ и $w \in C^1$. Тогда, если $w = df$, то

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

Доказательство. Заметим, что, если $w = df$ и $w \in C^1$, то $f \in C^2$, т.е. существуют вторые частные производные функции f и дифференциал f можно записать в координатном представлении.

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Так как $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, получаем, что

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□

Сейчас мы убедимся, что данное условие не является достаточным.

Определение 3.34. Формой Гаусса Θ (в декартовых координатах) называется форма

$$\Theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{dom } \Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Не сложно убедиться в том, что для формы Гаусса выполняются необходимые условия полного дифференциала.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Однако, если мы возьмем за замкнутый контур единичную окружность и вычислим интеграл по замкнутому контуру, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

То есть, критерий полного дифференциала не выполняется и форма Гаусса не является полным дифференциалом.

Заметим так же, что если бы мы воспользовались формулой Грина для проверки критерия, мы бы получили другой ответ:

$$\oint \Theta = \int 0 dx dy = 0$$

Но тут нет противоречия, ведь форма Гаусса не гладкая в нуле, следовательно, нельзя применять формулу Грина.

Рассмотрим представление формы Гаусса в полярных координатах

$$\Theta = d\varphi$$

Лемма 3.35. Пусть γ — кривая, не проходящая через 0, с началом в p и концом в q . Тогда

$$\int_{\gamma} = \varphi(q) - \varphi(p)$$

— разность углов с осью Ox радиус векторов v из начала координат в начальную и конечную точку.

Лемма 3.36. $\Theta = d\varphi$ будет полным дифференциалом, если выколоть некоторый луч исходящий из нуля (т.е. никакая кривая не сможет полностью обойти 0).

Определение 3.37. Две кривые $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются гомотопными, если существует функция $f : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, такая, что f — непрерывная и $f(x, 0) = \gamma_0(x)$ и $f(x, 1) = \gamma_1(x)$

Определение 3.38. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется односвязным, если всякий замкнутый контур $\gamma \subseteq M$ гомотопен точке.

Примеры односвязных множеств

1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, сфера — односвязные множества.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{прямая}\}$, тор — не являются односвязным множеством.

Теорема 3.39 (Гипотеза Пуанкаре). *Всякое n -мерное компактное односвязное многообразие без края гомеоморфно n -мерной сфере.*

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 3.40 (Достаточное условие полного дифференциала). *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое и односвязное множество, $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \in C^1$, $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, тогда существует функция $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ такая, что $w = df$.*

Доказательство. Проведем для \mathbb{R}^2 .

Пусть $w = adx + bdy$, $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ и пусть $\gamma \subseteq U$ — кусочно гладкий контур, $\gamma \subseteq \partial D$ где $D \subseteq U$. Тогда по формуле Грина:

$$\oint_{\gamma} w = \pm \int_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy$$

следовательно, выполнен критерий полного дифференциала, тогда существует функция $f \in C^1$ такая, что $w = df \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$. □

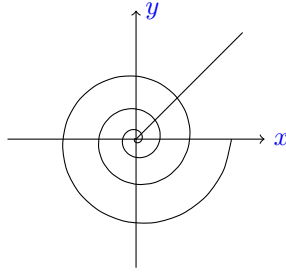
Допустим, нам дана 1-форма w и известно, что $w = df$. Возникает естественный вопрос: как найти такую функцию f ?

- выберем $x_0 \in U$ и определим, что $f(x_0) := C$.
- возьмем $x \in U$ такую, что $x \neq x_0$ и выберем путь $\gamma \subseteq U$ из x_0 в x тогда

$$f(x) := f(x_0) + \int_{\gamma} w.$$

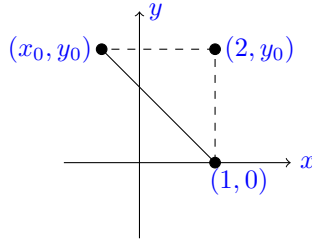
Сейчас рассмотрим восстановление функции по 1-форме в случае, если она является полным дифференциалом некоторой функции.

Пример 3.41. Рассмотрим дифференциальную форму $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.



— плоскость без луча. Если область не односвязная, ее надо сделать односвязной добавлением «связей», линий, соединяющих элементы области.

Восстановим функцию в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0, y = 0\}$.



Выберем точку в области определения. Пусть $f(1,0) = C$.

$$\int_{(1,0)}^{(2,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y_0,$$

$$\int_{(1,y_0)}^{(x_0,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_1^{x_0} -\frac{y_0 dy}{x^2 + y_0^2} = \begin{cases} y_0 = 0 : 0, \\ y_0 \neq 0 : -\frac{1}{y} \int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} = \left[t = \frac{x}{y_0}, dt = \frac{1}{y_0} dx \right] \Rightarrow \int_{\frac{1}{y_0}}^{\frac{x_0}{y_0}} \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan \frac{1}{y_0} - \arctan \frac{x_0}{y_0}$$

Таким образом:

$$f(x, y) = f(1, 0) + \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y < 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

— где $f(1, 0)$ — задается.

3.4 Внешние формы второго порядка

Рассмотрим для примера как происходит замена переменных в плоском случае. Пусть $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ — 2-форма, такая что $w = f(x, y)dx \wedge dy$. Проведем замену переменных φ :

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \end{cases}$$

Вычислим оператор переноса:

$$\begin{aligned} \varphi^* w(t, s) &= (f \circ \varphi)(t, s)(x_t dt + x_s ds) \wedge (y_t dt + y_s ds) = \\ &= (f \circ \varphi)(t, s) \cdot \det \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} dt \wedge ds \end{aligned}$$

В операторе переноса возник коэффициент искажения. Заметим, что в отличие от коэффициента искажения при замене переменных в интеграле, в операторе переноса коэффициент искажения возникает без модуля. Его знак зависит от того, меняет ли замена переменных ориентацию (он отрицательный, если замена переменных меняет ориентацию).

Определение 3.42. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда выражение

$$\int_U w = \iint_U f(x, y) dx \wedge dy := \theta(e_x, e_y) \int_U f(x, y) dx dy$$

называется *интегралом 2-формы* в \mathbb{R}^2 , где $\theta(e_x, e_y) = \pm 1$ — ориентация плоскости (e_x, e_y — орты, соответствующие направлению).

Определение 3.43. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — двумерное C^1 -гладкое ориентированное многообразие и $w : M \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда, если $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ — параметризация, то

$$\int_M := \int_U \varphi^* w = \int_U w(\varphi(t, s)) \langle \varphi_t(t, s), \varphi_s(t, s) \rangle dt \wedge ds$$

будем называть *интегралом 2-формы по поверхности*.

Если $M \subseteq \mathbb{R}^3$ — поверхность, то соответствующие касательные векторы в каждой точке образуют касательную плоскость, а векторы нормали, в свою очередь, образуют прямую. Следовательно, ориентацию можно задать нормалью.

В \mathbb{R}^3 задано правило Буравчика (если поворачиваем от 1 к 2, то 3 смотрит на нас) — ориентация $\theta\langle u, v, w \rangle$. То есть, если на поверхности есть $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$, то $\theta_M(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = \theta(\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$.

Очевидно, что $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$. Следовательно, $(a, b, c) \simeq ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = w$. Отсюда $w\langle u, v \rangle = (a, b, c)(u \times v)$.

Получим формулу потока векторного поля через поверхность, где $(a, b, c) \cdot \langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle$ — поток вектора (a, b, c) через параллелограмм $\Pi(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$.

$$\begin{aligned} \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_M w\langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle dS = \\ &= \int_M (a, b, c) \cdot \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle dS = \int_M (a, b, c) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Определение 3.44. Форма Гаусса в \mathbb{R}^3 :

$$\Theta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Лемма 3.45. В сферических координатах форма Гаусса имеет вид

$$\Theta = d\theta \wedge d\varphi.$$

Геометрическая интерпретация формы Гаусса $\int_M \Theta$ — телесный угол под которым видна поверхность из начала координат.

3.5 Внешний дифференциал 1-формы

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Тогда $df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — линейная функция, а $df : x \mapsto df(x)$ — 1-форм. напомним, что $d^2 f(x)\langle u, v \rangle = d(df(x))$ — билинейная симметричная форма, такая что $d^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

В свою очередь, при $w : U \rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^n$, dw так же является билинейной формой, но не обязательно симметричной.

$$dw\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = d(w\langle \vec{u} \rangle)\langle \vec{v} \rangle = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} w\langle \vec{u} \rangle$$

Форма w в координатном представлении имеет вид $w = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$, следовательно

$$dw(x)\langle u \rangle = \sum_{i=1}^n da_i(x)u_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i dx_j$$

Из этого следует, что

$$dw(x)\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i v_j = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u}$$

То есть, всяка билинейная форма есть сумма симметричной и кососимметричной (первое и второе слагаемые соответственно), где $l^T \langle u, v \rangle = l \langle v, u \rangle$:

$$l = \frac{l + l^T}{2} + \frac{l - l^T}{2}$$

Определение 3.46. Внешним дифференциалом 1-формы называется кососимметричная часть полного дифференциала, то есть du сопоставляет 1-форме — 2-форму.

$$d : C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow C^r(U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

Лемма 3.47. Если $w = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, то

$$dw = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

Теорема 3.48 (Формула Грина в терминах внешнего дифференциала). Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — область с кусочно-гладкой границей и $w \in C^1(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$. Тогда верна формула Грина

$$\oint_{\partial U} w = \int_U d_{\text{внешний}} w$$

3.6 Ротация векторного поля

Определение 3.49. Пусть \bar{v} — векторное поле в плоскости. Ротация (вихрь) векторного поля \bar{v} в точке (x_0, y_0)

$$\text{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_C \bar{v} d\bar{r}, \text{ где } C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Лемма 3.50. Для C^1 -гладкого векторного поля $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$ верно, что

$$\text{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. Пусть $C := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, S := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.

$$\oint_C \bar{v} d\bar{r} = \oint_C (a, b)(dx, dy) = \oint_C a dx + b dy =$$

воспользуемся формулой Грина

$$\begin{aligned} &= \iint_S \left(\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + o(1) \right] dx dy = \\ &= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right)(x_0, y_0) \pi r^2 + \iint_B o(1) dx dy \end{aligned}$$

Определение 3.51 (формула Грина).

$$\oint_{\partial U} \bar{v} d\bar{r} = \iint_U \text{rot}_{x,y} \bar{v} dx dy.$$

□

Свойства ротации:

1. линейность: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{u}, \bar{v}$ — векторные поля в плоскости, тогда $\text{rot}_{x,y}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \text{rot}_{x,y} \bar{u} + \beta \text{rot}_{x,y} \bar{v}$.

2. антисимметричность: пусть \bar{v} — векторное поле в плоскости, тогда $\text{rot}_{x,y} \bar{v} = -\text{rot}_{y,x} \bar{v}$.

Свойства внешнего дифференциала.

Свойство 1°. ЛИНЕЙНОСТЬ

Для любых w_1, w_2, α, β выполнено

$$d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha dw_1 + \beta dw_2$$

Свойство 2°.

$$d(w^k \wedge w^l) = dw^k \wedge w^l + (-1)^k w^k \wedge dw^l$$

Доказательство. Пусть w^k и w^l , такие, что

$$w^k = \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I \quad w^l = \sum_{I \in M(n,l)} a_I dx_I$$

$$w^k \wedge w^l = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

$$\begin{aligned} d(w^k \wedge w^l) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} (a_I db_J + b_J da_I) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

Осталось заметить, что первое слагаемое это в точности

$$(-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J = (-1)^k \wedge dw^l$$

А второе, в свою очередь, в точности

$$\sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge (b_J dx_J) = dw^k \wedge w^l$$

□

Свойство 3°. ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ С ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

Доказательство. Для 0,1-форм уже доказано. Докажем для форм высшего порядка по индукции. Пусть для k -форм утверждение выполнено, докажем для $(k+1)$ -форм.

С одной стороны для $w^{k+1}(y) = a(y)dy_i \wedge dy_J$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^* dw^{k+1} &= \varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J - a(y)dy_i \wedge d(dy_J)) = \\ &= \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}d(\varphi^* w^{k+1}) &= d(\varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J)) = d(\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J) = \\ &= d\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_J) \wedge d(\varphi^* dy_J)\end{aligned}$$

Применив предположение индукции, получим

$$\varphi^*(d(a(y)dy_i)) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^*(d(dy_J)) = \varphi^*(d(a(y)) \wedge dy_i \wedge dy_J)$$

□

Определение 3.52. k -мерное многообразие называется *замкнутым*, если это компакт без края.

Если M — k -мерное замкнутое многообразие и w^k — k -форма на M , то

$$\oint_{\partial M} w^k := \int_M w^k$$

Теорема 3.53 (Формула Стокса-Пуанкаре). Пусть M — кусочно-гладкое k -мерное компактное ориентированное многообразие, w — C^1 -гладкая $(k-1)$ -форма на M , тогда

$$\oint_{\partial M} w = \int_M dw$$

Доказательство. Проведем доказательство для куба в \mathbb{R}^n . Зададим куб как $[-a, a]^n$ и заметим, что он является n -мерным многообразием в \mathbb{R}^n и у него есть $2n$ $(n-1)$ -мерных граней

$$\begin{cases} -a \leq x_1 \leq a \\ -a \leq x_2 \leq a \\ \dots \\ -a \leq x_n \leq a \end{cases}$$

Пусть w — $(n-1)$ -форма, заданная на кубе, тогда

$$w(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dw(x) &= \sum_{j=1}^n da_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} (-1)^{j+1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Вычислим интеграл от dw по кубу

$$\int_{[-a,a]^k} dw = \int_{[-a,a]^k} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

С другой стороны

$$\int_{x_j=a} w = \int_{x_j=a} \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Что равно

$$\begin{aligned}
\int_{x_j=a} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\
= \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = \\
= - \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, -a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{x_j=a} w + \int_{x_j=-a} w = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a (a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a}) \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n$$

Следовательно

$$a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a} = \int_{-a}^a \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) dx_j$$

□

Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре:

1. Если $k = 1$, то M — кривая, а w — функция и формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Ньютона-Лейбница.
2. Если $n = 2$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Грина.
3. Если $n = 3$ и $k = 3$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Гаусса-Остроградского.
4. Если $n = 3$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Кельвина-Стокса.

3.7 25.04.19

Пусть поверхность S окружает тело V в \mathbb{R}^2 . Тогда объем тела V можно вычислить проинтегрировав по внешней стороне поверхности одну из форм:

$$x dy \wedge dz \quad y dz \wedge dx \quad z dx \wedge dy$$

По формуле Стокса

$$\oint_S x dy \wedge dz = \int_V dx \wedge dy \wedge dz = \pm |V|$$

Чтобы значение было положительно, нужно согласовать ориентацию так, чтобы она определялась с помощью нормали по внешней стороне.

В общем случае, формами объема в \mathbb{R}^n являются формы вида

$$(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \quad j = 1 \dots n$$

А так же форма

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Определение 3.54. Непрерывная k -форма называется *точной*, если она является внешним дифференциалом некоторой C^1 -гладкой $(k-1)$ -формы θ , т.е. $w = d\theta$.

Определение 3.55. C^1 -гладкая форма w называется *замкнутой*, если $dw = 0$.

Как мы знаем, первообразную можно восстановить с точностью до константы. В случае с формами роль констант выполняют замкнутые формы, т.е. форму можно восстановить по дифференциалу с точностью до замкнутой формы.

Теорема 3.56 (Первая теорема Пуанкаре). *Все (гладкие) точные формы являются замкнутыми, т.е. если w — C^1 -гладкая точная форма, то $dw = 0$. Так же это утверждение можно переформулировать как $d \circ dw = 0$, т.е. внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

Доказательство. Так как дифференциал линеен, достаточно доказать только для одного из слагаемых.

Пусть $\theta = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = adx_I$. Тогда

$$d\theta = d(adx_I) = da \wedge dx_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Отсюда

$$d(d\theta) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

Если $i = j$, то слагаемые вида $dx_i \wedge dx_i$ равны нулю, с другой стороны, если $i \neq j$, то $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ и это слагаемое равно симметричному слагаемому с противоположным знаком, так как

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}$$

Следовательно, $d(d\theta) = 0$. \square

Определение 3.57. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется k -связным, если каждое замкнутое многообразие, порядок которого меньше или равен k , можно стянуть в точку.

В частности, 0-связное множество представляет собой набор точек, каждую пару которых можно соединить кривой. Так же вводят понятие (-1) -связного множества, что обозначает, что она не является k -связным ни для какого k .

Определение 3.58. Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно некоторой точки x_0 , если любую точку $x \in U$ можно соединить с x_0 отрезком.

Очевидно, что, если множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ звездное, то оно k -связное для любого $k = 1 \dots n$.

Определение 3.59. Пусть U — звездное множество. Определим оператор $I : C^r(U \rightarrow \Lambda^k) \rightarrow C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^{k-1})$, так, что каждой форме $w = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ сопоставляется

$$I(w) = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Определение 3.60. Форма w называется кочотной, если существует форма θ , такая что $w = I\theta$.

Теорема 3.61. Для всякой C^1 -гладкой k -формы w на звездной области выполнено

$$w = dIw + Idw$$

Доказательство. Пусть $w = a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, вычислим все выражения, которые есть в теореме.

$$\begin{aligned} Iw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dIw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} + x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n x_{i_\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dw &= da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ Idw &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Если мы сложим $I dw$ и $dI w$, двойные суммы сократятся, и проинтегрировав по частям и применив формулу Ньютона-Лейбница, мы получим

$$\begin{aligned} dI w + I dw &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \left(\int_0^1 \left[k t^{k-1} a(tx) + \sum_{i=1}^n t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j \right] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t^k a(tx) \right] dt \right) = w \end{aligned}$$

□

Следствие 3.62 (Вторая теорема Пуанкаре). *В звездной области всякая замкнутая форма точна.*

3.8 Дивергенция векторного поля

Пусть в \mathbb{R}^n задана $(n-1)$ -мерная ориентированная поверхность M . Тогда поток векторного поля \vec{v} через поверхность M вычисляется как

$$\Phi = \int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1}$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к M в точке x , согласованный с ориентацией.

Эту задачу можно решить используя дифференциальные формы. Для начала, рассмотрим для примера случай в \mathbb{R}^3 . Как известно, $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

$$e_1 \simeq dy \wedge dz$$

$$e_2 \simeq dz \wedge dx$$

$$e_3 \simeq dx \wedge dy$$

Пусть $\vec{v}(x, y, z)$ — векторное поле, такое, что

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Phi = \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

Убедимся, что это выражение совпадает с исходным. Пусть $\varphi : U \rightarrow M$ — параметризация поверхности M , такая что

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

Пусть φ_1, φ_2 — касательные векторы, тогда

$$\begin{aligned} \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_U (ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \\ &= \int_U \det \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ b & y_1 & y_2 \\ c & z_1 & z_2 \end{pmatrix} dt ds = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} \cdot J_\varphi(t, s) dt \wedge ds \end{aligned}$$

Проведя обратную замену, получим, что

$$\int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} dS^2$$

В пространстве \mathbb{R}^n , $e_j \simeq (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$. Из этого получаем выражение в общем случае при $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)$

$$\int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_M \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Напомним, что через S_r и B_r мы обозначаем сферу и шар радиуса r соответственно.

Определение 3.63. Дивергенция векторного поля \vec{v} в точке x определяется как

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} dS^{n-1}$$

где, при вычислении потока \vec{v} через сферу S_r , интеграл берется по внешней стороне сферы.

Лемма 3.64 (Оператор дивергенции в декартовых координатах). *Для C^1 -гладкого векторного поля v имеет место формула*

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)$$

Доказательство. По формуле Стокса имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} &= \int_{S_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} da_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

□

Теорема 3.65 (Формула Гаусса-Остроградского). *Пусть V — тело (n -мерное компактное многообразие в \mathbb{R}^n), тогда*

$$\int_{\partial V} \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_V \operatorname{div} \vec{x}(x) dx$$

Определение 3.66. Векторное поле \vec{v} называется *бездивергентным*, если $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

$$\begin{aligned} Scal(\mathbb{R}^3) &\xrightarrow{grad} Vec(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{rot} Vec(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{grad} Scal(\mathbb{R}^3) \\ \{U \rightarrow \Lambda^0\} &\xrightarrow{d} \{U \rightarrow \Lambda^1\} \xrightarrow{d} \{U \rightarrow \Lambda^2\} \xrightarrow{d} \{U \rightarrow \Lambda^3\} \end{aligned}$$

То есть, на языке дифференциальных форма, каждой операции векторного анализа соответствует дифференциал.

В плоском случае можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} rot(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx \wedge dy = \nabla \wedge (a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix} \\ div(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx \wedge dy = \nabla \cdot (a, b) \end{aligned}$$

Определение 3.67. Пусть \vec{v} — векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда \vec{v} называют *вихревым*, если существует \vec{u} — векторное поле такое, что $\vec{v} = rot \vec{u}$. В этом случае, \vec{u} называют векторным потенциалом векторного поля \vec{v} .

Леммы ниже являются следствиями первой и второй теоремы Пуанкаре соответственно.

Лемма 3.68. *Вихревое векторное поле всегда бездивергентно, т.е. $div rot \vec{v} = 0$.*

Лемма 3.69. *Если векторное поле \vec{v} в звездной области в \mathbb{R}^3 бездивергентно, то она вихревое.*

Теорема 3.70. *В звездной области всякое трехмерное векторное поле \vec{v} раскладывается в сумму вихревого и потенциального.*

Доказательство. Следует из теоремы 3.61. □

Определение 3.71. Оператором Лапласа называется оператор $\Delta : Scal \rightarrow Scal$, такой, что

$$\Delta = \nabla^2 = div grad$$

В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = div\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Если $\Delta f > 0$, то $f(x)$ больше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x .

Если $\Delta f < 0$, то $f(x)$ меньше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x .

Если $\Delta f = 0$, то $f(x)$ приблизительно равна своему среднему значению на маленькой сфере с центром в точке x .