

Лекции
по математическому анализу:
многообразия, дифференциальные формы

28 февраля 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Содержание

1	Многообразия	3
1.1	Многообразия без края	3
1.2	Многообразия с краем	6
1.3	Касательное и нормальное пространства	9
1.4	Задача на условный экстремум	11
1.5	Площадь поверхности	13

1 Многообразия

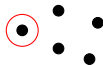
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в \mathbb{R}^n .

При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Виды многообразий:

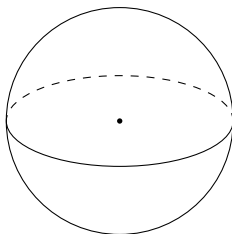
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



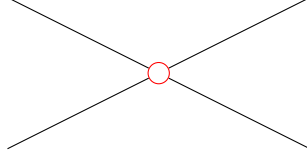
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых – многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей – многообразие,

- Плоскость и прямая – не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания k -мерных многообразий.

Теорема 1.3. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, тогда U является n -мерным многообразием.

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.

Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ – сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. \square

Теорема 1.4 (О графике). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ – C^r -гладкое n -мерное многообразие в \mathbb{R}^{n+1} .

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ следующим образом $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Отображение Φ является C^r -диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т.е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ \square

Теорема 1.5 (О локальном вложении). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U$ $\text{rank } Df(t^0) = k$, то существует U -окрестность t^0 , такая что $f(U)$ является C^r -гладким k -мерным многообразием.

Доказательство. Так как $\text{rank } Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса \mathbb{R}^n .

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \dots, v_n\}$ - базис в \mathbb{R}^n .

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \dots + s_nv_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \dots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W - окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \rightarrow \Phi(W) - C^r$ -диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V - окрестность x_0 в \mathbb{R}^k , тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times 0^{n-k}$.

□

Определение 1.6. Пусть x^0 - решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r \forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n - k)$ -мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 - регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0)$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

В некоторой окрестности x^0 :

$$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$$

...

$$x_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$x_1 = x_1$$

...

$$x_k = x_k$$

$$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$$

...

$$x + n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$$

□

1.2 Многообразия с краем

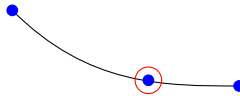
Определение 1.8. $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k > 0\}$ - верхнее полупространство ($\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k < 0\}$ - нижнее полупространство).

Определение 1.9. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^k$ - окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}_+^k$ называется полукрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$ -мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}_+^k) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$
2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) - это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M - многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x \text{ - краевая точка } M\}$ - множество краевых точек многообразия M .

Теорема 1.12 (О крае). Пусть M - C^r -гладкое k -мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r -гладким k -мерным многообразием без края ($\partial \partial M = \emptyset$).

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, 0, \dots, 0)$. Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ - краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$ -мерную плоскость (основание полупространства). Основание - $(k-1)$ -мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ - выполнено определение многообразия. \square

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \dots, f_{k+1} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \ \forall i \leq k$ и $\text{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1} \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n-k)$ -мерное многообразие с краем (внутренние точки - решение строгого неравенства, край - решение $(k+1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

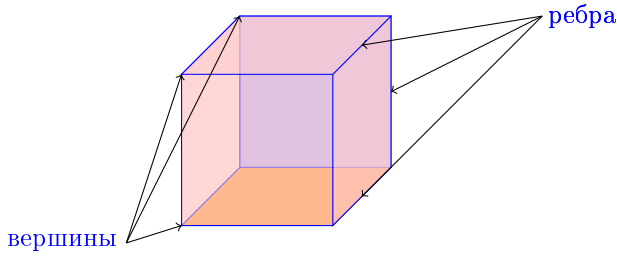
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1} \end{cases}$$

задает $(k-1)$ мерную поверхность - край многообразия. \square

Определение 1.14. Множество $M \in \mathbb{R}^k$ называется k -мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M - k -мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$, такое что \tilde{M} - гладкое k -мерное многообразие, а Z_i - кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k-1$.

Пример 1.15. Куб.

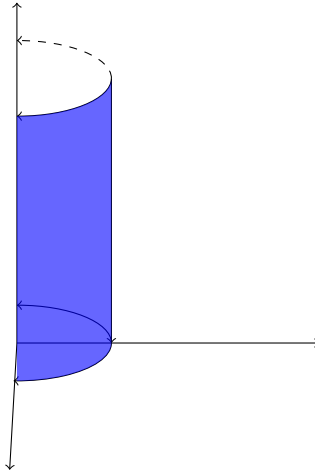


Теорема 1.16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k+l$ и $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1} \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l} \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n-k)$ -мерное многообразие с краем.

Пример 1.17. в \mathbb{R}^3 . $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.18. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ .

Определение 1.19. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M , т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.20. Пусть $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ - параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - C^1 -диффеоморфизм. Показать, что если v - вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a, b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v \rangle$ - вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0 .

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0 \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0) \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v \rangle$$

□

Лемма 1.21. Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0 \lambda \vec{v} \in T_{x_0}M$.

Доказательство. TODO

□

Теорема 1.22 (О множестве касательных векторов). Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1 -гладкое k -мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:

1. Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.

2. Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}_+^k$.

Доказательство. По определению k -мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в \mathbb{R}^k .

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$$\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t), 0, \dots, 0).$$

$\Gamma'(t) = \Phi(\gamma(t)) = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$ - линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k -мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость).

□

Определение 1.23. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.24. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда $\dim M = k$, $\dim T_{x_0}M = k$, $\dim N_{x_0}M = n - k$.

Теорема 1.25 (О базисе касательного пространства). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in C^r$. Тогда, если $M = f(U)$ – многообразие и $\text{rank } Df = k$, то $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0) \right\}$ – базис в $T_{f(t_0)}M$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in U$, определим $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e}_j$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ – кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t_0 : $\gamma'_j(t_0) = \frac{d}{dt}f(t_0 + t \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$.

Набор векторов $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{i=1}^k$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. \square

Теорема 1.26. Пусть многообразие M задано системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

и $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а так же $\text{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

задает $T_{f(t_0)}M$, а $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

$$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle.$$

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. \square

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.27. Пусть M, N – дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \rightarrow N$ дифференцируема в точке x_0 , если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(t_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.28 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируема и x_0 – её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f|_\gamma x_0$ – экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle$. \square

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ – k -мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f|_M$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие условного экстремума). Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f , то $df|_{T_{x_0}M} = 0 \iff \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 – экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)} \langle \gamma'(0) \rangle = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle$. \square

Теорема 1.30 (Метод множителей Лагранжа). Пусть $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 – условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla \varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. \square

Лемма 1.31 (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{E} \in C^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $\gamma : [a, b] \rightarrow U \in C^2$ – кривая. Тогда

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f \circ \gamma)''(t) = (df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x(df_x \langle \vec{v} \rangle) = d^2 f(x) \langle \vec{v} \rangle$ и $d_{\vec{v}}(df_x \langle \vec{v} \rangle) = df_x$.

Отсюда имеем $(df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.32 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, $\text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = k$ – всюду, то функция Лагранжа $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x)$ если $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, то при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) > 0$ – достигает минимума, при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) < 0$ – максимума.

Доказательство. Пусть $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, $d^2_x L(x_0, \lambda_0) |_{T_{x_0} M \times T_{x_0} M} > 0$.

$dL(x_0, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} |_{T_{x_0} M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \in C^2$, $\gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ , т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. По лемме 1.31 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$. $(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0} \langle \gamma'(0) \rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L(\gamma'(t), \gamma'(t)) + d_x L(\gamma''(t)).$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L(\gamma'(0), \gamma'(0)) + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \gamma)'(0) = 0$, $(f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0 . Следовательно, x_0 – точка минимума для $f|_M$. \square

Пример 1.33. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n -мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \dots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грама, полагая $A = [v_1, \dots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$ получаем: $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L |E| = |\det L| |E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E , мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int_E J_{\varphi(x)} dx$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.34 (Объем k -мерного параллелепипеда). Пусть $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. Тогда $|\Pi(v_1, \dots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. Обозначив за $A = [v_1, \dots, v_n]$, это выражение можно записать в виде $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k -мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π .

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянута параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ где } \theta - k \times k \text{ матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.35. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов и $M(n, k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из i_1, i_2, \dots, i_k строк матрицы A .

Теорема 1.36 (Формула Бине-Коши). Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда $\det A^* A = \sum_{I \in M(n, k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$ -матрицы, тогда $\det A^* B = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \dots; u_n]$ и $B = [v_1, \dots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ???).

$$L_1\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle$$

□

Следствие 1.37. Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что $\text{rank } L = k \leq n$. Тогда для каждого измеримого множества A , $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^*L}$.

Следствие 1.38. Пусть Π - k -мерная плоскость в \mathbb{R}^n и $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi$ - C^1 -диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x) dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v \rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A , получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k -мерное C^1 -гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k) \in U$$

Определим меру k -мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M .

Определение 1.39. Пусть $E \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|\cdot|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int_E J_\varphi(t) dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t) D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.40. Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ - различные параметризации многообразия, такие что $\text{rank } D\varphi = \text{rank } D\psi = k$. Тогда $\int_U J_\varphi(t) dt = \int_V J_\psi(t) dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ - отображение между U и V .

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ - C^1 -диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\begin{aligned} \int_V \sqrt{\det D\psi^*(y) D\psi(y)} dy &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ |\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &\quad \sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. \square

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k :

1. Счетная аддитивность.

Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ - не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup_i M_i) = \sum_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k .

Пример 1.41. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k и формулы Бине-Коши.

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{x'^2_1 + \dots + x'^2_n} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□