

Лекции  
по математическому анализу:  
многообразия, дифференциальные формы

21 марта 2019 г.

**Аннотация**

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

# Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Многообразия</b>                             | <b>3</b>  |
| 1.1      | Многообразия без края . . . . .                 | 3         |
| 1.2      | Многообразия с краем . . . . .                  | 6         |
| 1.3      | Касательное и нормальное пространства . . . . . | 9         |
| 1.4      | Задача на условный экстремум . . . . .          | 11        |
| 1.5      | Площадь поверхности . . . . .                   | 13        |
| 1.6      | Площадь графика функции . . . . .               | 17        |
| <b>2</b> | <b>Криволинейные интегралы</b>                  | <b>19</b> |
| 2.1      | Криволинейные интегралы I-рода . . . . .        | 19        |
| 2.2      | Объем шара и площадь сферы . . . . .            | 20        |
| 2.3      | Формула коплощади . . . . .                     | 21        |
| <b>3</b> | <b>Введение в векторный анализ</b>              | <b>23</b> |
| 3.1      | Дифференциальные формы . . . . .                | 23        |

# 1 Многообразия

## 1.1 Многообразия без края

**Определение 1.1.** Множество  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием без края, если для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  — окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ , где  $V$  — окрестность нуля в  $\mathbb{R}^n$ .

При  $r = 0$  многообразие называется топологическим, при  $r > 0$  многообразие называется дифференцируемым.

Виды многообразий:

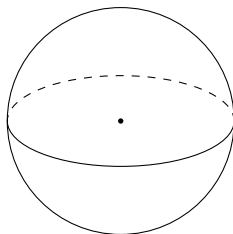
1. Набор изолированных точек ( $k = 0$ ).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ( $k = 1$ ).



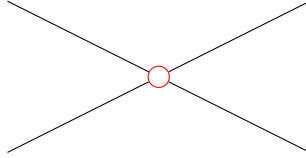
3. Поверхности ( $k = 2$ ).



### Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения — многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания  $k$ -мерных многообразий.

**Теорема 1.3.** Пусть  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество, тогда  $U$  является  $n$ -мерным многообразием.

*Доказательство.* Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка  $x_0$  лежит в некоторой окрестности.

Отображение  $\Phi$  можно определить следующим образом:  $\Phi(x) = x - x_0$  — сдвиг в ноль, переводит окрестность  $x_0$  в окрестность нуля.  $\square$

**Теорема 1.4** (О графике). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^r$ , тогда график этой функции  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$  —  $C^r$ -гладкое  $n$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Доказательство.* Определим отображение  $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$  следующим образом:  $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$ , тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение  $\Phi$  является  $C^r$ -диффеоморфизмом и  $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$ , т. е.  $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ .  $\square$

**Теорема 1.5** (О локальном вложении). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r$  и  $k \leq n$ . Тогда, если  $t^0 \in U$  и  $\text{rank } Df(t^0) = k$ , то существует  $U$ -окрестность  $t^0$ , такая что  $f(U)$  является  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием.

*Доказательство.* Так как  $\text{rank } Df(t^0) = k$ , следовательно набор векторов  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}$  является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \dots, v_n \right\}$  — базис в  $\mathbb{R}^n$ .

Определим  $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  так, что  $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \dots + s_nv_n$ .

$D\Phi = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \dots, v_n \right]$ , следовательно  $\det D\Phi \neq 0$ .

По теореме об обратной функции существует  $W$  — окрестность  $(t_0, 0)$ , такая что  $\Phi : W \rightarrow \Phi(W)$  —  $C^r$ -диффеоморфизм. Выберем  $V \times (-h, h) \in W$ , так что  $V$  — окрестность  $x_0$  в  $\mathbb{R}^k$ , тогда  $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$ .  $\square$

**Определение 1.6.** Пусть  $x^0$  — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда  $x^0$  называется регулярным, если  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$ .

**Теорема 1.7** (О решении системы уравнений). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_i \in C^r \forall i \leq k$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -гладкое  $(n - k)$ -мерное многообразие.

*Доказательство.* Пусть  $x^0$  — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из  $n$  столбцов, где  $k$  из них линейно независимы. В некоторой окрестности  $x^0$ :

$$\begin{aligned} x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\ &\dots \\ x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}). \end{aligned}$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1, \\
 &\dots \\
 x_k &= x_k, \\
 x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\
 &\dots \\
 x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).
 \end{aligned}$$

□

## 1.2 Многообразия с краем

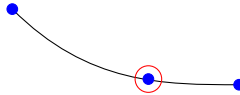
**Определение 1.8.**  $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$  — верхнее полупространство ( $\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$  — нижнее полупространство).

**Определение 1.9.** Пусть  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  — окрестность нуля, тогда  $V \cap \mathbb{R}_+^k$  называется полукрестностью нуля. В ее основании лежит  $(k-1)$ -мерная окрестность нуля.

**Определение 1.10.** Множество  $M \in \mathbb{R}^n$  называется  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием с краем, если для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  — окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и, либо  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$  (тогда  $x_0$  — внутренняя точка), либо  $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}_+^k) \times \{0\}^{n-k}$  (тогда  $x_0$  — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при  $k = 0$ .
2. Край незамкнутой кривой ( $k = 1$ ) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При  $k = 2$ , внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

**Определение 1.11.** Пусть  $M$  — многообразие, тогда  $\partial M = \{x \mid x \text{ — крайняя точка } M\}$  — множество краевых точек многообразия  $M$ .

**Теорема 1.12** (О крае). Пусть  $M$  —  $C^r$ -гладкое  $k$ -мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек  $\partial M$  является  $C^r$ -гладким  $k$ -мерным многообразием без края ( $\partial\partial M = \emptyset$ ).

*Доказательство.* Пусть  $x \in \Phi(U \cap M)$ , тогда  $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, 0, \dots, 0)$ . Если  $x_k = 0$ , то  $x \in \partial M$  — краевая точка. Отображение  $\Phi$  переводит все краевые точки  $U \cap M$  в  $(k-1)$ -мерную плоскость (основание полупространства). Основание —  $(k-1)$ -мерная окрестность нуля, следовательно  $\Phi(U \cap M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$  — выполнено определение многообразия.  $\square$

**Теорема 1.13** (О решении системы уравнений и неравенства). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f_1, \dots, f_{k+1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \ \forall i \leq k$  и  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -гладкое  $(n-k)$ -мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение  $(k+1)$  уравнений).

*Доказательство.* Решение неравенства  $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$  является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

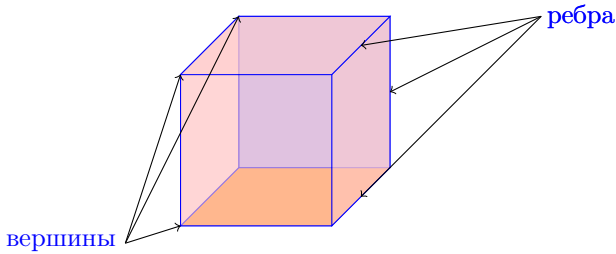
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает  $(k-1)$  мерную поверхность — край многообразия.  $\square$

**Определение 1.14.** Множество  $M \in \mathbb{R}^k$  называется  $k$ -мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1.  $M$  —  $k$ -мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение  $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$ , такое что  $\tilde{M}$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие, а  $Z_i$  — кусочно гладкие многообразия размерности  $l \leq k-1$ .

**Пример 1.15.** Куб.

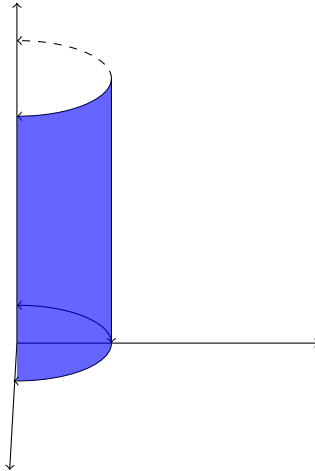


**Теорема 1.16.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  - открытое множество,  $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \ \forall i \leq k+l$  и  $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$ , тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой  $C^r$ -гладкое  $(n-k)$ -мерное многообразие с краем.

**Пример 1.17.** в  $\mathbb{R}^3$ .  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.



### 1.3 Касательное и нормальное пространства

**Определение 1.18.** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ , тогда вектор  $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$  называется вектором скорости кривой  $\gamma$ .

**Определение 1.19.** Вектор  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  называется касательным к множеству  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  в точке  $x_0 \in M$ , если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в  $M$ , т.е. существует кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Множество касательных векторов к  $M$  в точке  $x_0$  обозначается  $T_{x_0}M$ .

**Задача 1.20.** Пусть  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  - параметризованная кривая,  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Показать, что если  $v$  - вектор скорости кривой  $\gamma$  в точке  $t_0 \in (a, b)$ , то  $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v \rangle$  - вектор скорости кривой  $\Gamma = \Psi \circ \gamma$  в точке  $t_0$ .

*Решение.* Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0 \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0) \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v \rangle. \quad \square$$

**Лемма 1.21.** Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если  $\vec{v} \in T_{x_0}M$ , то  $\forall \lambda > 0 \ \lambda \vec{v} \in T_{x_0}M$ .

*Доказательство.* TODO □

**Теорема 1.22** (О множестве касательных векторов). Если  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  -  $C^1$ -гладкое  $k$ -мерное многообразие,  $x_0 \in M$ , тогда:

1. Если  $x_0 \in M \setminus \partial M$ , то  $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$ .
2. Если  $x_0 \in \partial M$ , то  $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}_+^k$ .

*Доказательство.* По определению  $k$ -мерного многообразия, для каждого  $x_0 \in M$  существует  $U$  - окрестность  $x_0$  и существует  $C^r$ -диффеоморфизм  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ , такой что  $\Phi(x_0) = 0$  и  $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ , где  $V$  - окрестность нуля в  $\mathbb{R}^k$ .

Под действием  $\Phi$  кривая перейдет в кривую.

$$\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t), 0, \dots, 0).$$

$\Gamma'(t) = \Phi(\gamma(t)) = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$  - линейное отображение, такое, что  $\det D\Phi \neq 0$ .

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$  -  $k$ -мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

**Определение 1.23.** Нормальное пространство  $N_{x_0}M$  к дифференцируемому многообразию в точке  $x_0$  – это ортогональное дополнение к касательному пространству  $T_{x_0}M$ .

**Лемма 1.24.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $x_0 \in M$ , тогда  $\dim M = k$ ,  $\dim T_{x_0}M = k$ ,  $\dim N_{x_0}M = n - k$ .

**Теорема 1.25** (О базисе касательного пространства). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$  – открытое множество,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f \in C^r$ . Тогда, если  $M = f(U)$  – многообразие и  $\text{rank } Df = k$ , то  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0) \right\}$  – базис в  $T_{f(t_0)}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $t_0 \in U$ , определим  $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e}_j$ , тогда  $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$  – кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке  $t_0$ :  $\gamma'_j(t_0) = \frac{d}{dt}f(t_0 + t \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$ .

Набор векторов  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{i=1}^k$  является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства.  $\square$

**Теорема 1.26.** Пусть многообразию  $M$  задано системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

и  $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^r \forall i \leq k$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое множество, а так же  $\text{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = k$ , тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

задает  $T_{f(t_0)}M$ , а  $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$  базис в  $N_{x_0}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in M$ . Возьмем вектор  $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$ , тогда по определению существует кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

$$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle.$$

Подставим  $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$ . Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $0 = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$ , из чего получаем, что  $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$  – базис в  $N_{x_0}M$ , т.к.  $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$ .  $\square$

## 1.4 Задача на условный экстремум

**Определение 1.27.** Пусть  $M, N$  – дифференцируемые многообразия, тогда  $f : M \rightarrow N$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если существует линейное отображение  $L : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(t_0)}N$ , такое что для каждой кривой  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такой что  $\gamma \in C^1$ ,  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$ , выполняется  $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$ .

**Теорема 1.28** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  – дифференцируема и  $x_0$  – её экстремум, тогда  $df(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$  кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Для  $f|_\gamma x_0$  – экстремум, следовательно  $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle$ .  $\square$

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое множество,  $M \subseteq U$  –  $k$ -мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии  $f|_M$ .

**Теорема 1.29** (Необходимое условие условного экстремума). Если  $x_0 \in M$  – точка экстремума  $f$ , то  $df|_{T_{x_0}M} = 0 \iff \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$  кривая  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , такая что  $\gamma(0) = x_0$  и  $\gamma'_t(0) = \vec{v}$ .

Тогда  $x_0$  – экстремум  $f(\gamma(t))$  и  $f(\gamma(0)) = 0$ . Заметим, что  $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)} \langle \gamma'(0) \rangle = df_{x_0} \langle \vec{v} \rangle$ .  $\square$

**Теорема 1.30** (Метод множителей Лагранжа). Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда, если  $x_0$  – условный экстремум при условиях  $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$ , то  $dL(x_0) = 0$ , где  $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\bar{x})$  – функция Лагранжа.

*Доказательство.* Рассмотрим  $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ .  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$  – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную  $L$  по  $x_j$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда  $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x)$  – градиенты  $\nabla \varphi_i$  – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом,  $\nabla f$  – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума.  $\square$

**Лемма 1.31** (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{E} \in C^2$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое множество и  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \in C^2$  – кривая. Тогда

1.  $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$ ,
2.  $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$ .

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

*Доказательство.*  $(f \circ \gamma)''(t) = (df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t$  – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что  $d_x(df_x \langle \vec{v} \rangle) = d^2 f(x) \langle \vec{v} \rangle$  и  $d_{\vec{v}}(df_x \langle \vec{v} \rangle) = df_x$ .

Отсюда имеем  $(df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$ .

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – уравнения связи, то  $x \in M$  (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

**Теорема 1.32** (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ ,  $\text{rank} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = k$  – всюду, то функция Лагранжа  $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x)$  если  $dL(x_0, \lambda_0) = 0$ , то при  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) > 0$  – достигает минимума, при  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) < 0$  – максимума.

*Доказательство.* Пусть  $dL(x_0, \lambda_0) = 0$ ,  $d^2_x L(x_0, \lambda_0) |_{T_{x_0} M \times T_{x_0} M} > 0$ .

$dL(x_0, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$ . Кроме того,  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$ . Следовательно,  $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} |_{T_{x_0} M} = 0$ .

Возьмем произвольную  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \in C^2$ ,  $\gamma(0) = x_0$ . Посмотрим, как ведет себя функция  $f$  на кривой  $\gamma$ , т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . По лемме 1.31  $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$ .  $(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0} \langle \gamma'(0) \rangle = 0$ .

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим  $\gamma(t) = x$  в  $L(x, \lambda)$ , получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L(\gamma'(t), \gamma'(t)) + d_x L(\gamma''(t)).$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L(\gamma'(0), \gamma'(0)) + 0 > 0.$$

Имеем, что  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ ,  $(f \circ \gamma)''(0) > 0$ . Следовательно,  $t = 0$  является точкой минимума для  $f \circ \gamma$ .

Таким образом,  $x_0$  – точка минимума для любой кривой  $\gamma \subseteq M$ , проходящей через  $x_0$ . Следовательно,  $x_0$  – точка минимума для  $f|_M$ .  $\square$

**Пример 1.33.** Найти экстремумы функции  $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$  на  $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$ .

## 1.5 Площадь поверхности

Пусть  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Из прошлого семестра, мы знаем, что  $n$ -мерный объем параллелепипеда  $\Pi(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$ , натянутого на набор векторов  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  может быть вычислен по формуле  $|\Pi| = |\det[v_1, \dots, v_n]|$ . Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая  $A = [v_1, \dots, v_n]$ , из  $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$  получаем:  $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$ .

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества  $E \subseteq \mathbb{R}^k$ , мера его образа вычисляется по формуле  $|L(E)| = J_L |E| = |\det L| |E|$ .

Если же отображение  $\varphi \in C^1$  не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества  $E$ , мера его образа вычисляется по формуле  $|\varphi(E)| = \int_E J_{\varphi(x)} dx$ .

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

**Теорема 1.34** (Объем  $k$ -мерного параллелепипеда). Пусть  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$ . Тогда  $|\Pi(v_1, \dots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$ . Обозначив за  $A = [v_1, \dots, v_n]$ , это выражение можно записать в виде  $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $k$ -мерная гиперплоскость  $L$  содержит в себе параллелепипед  $\Pi$ .

Существует ортогональное преобразование  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что  $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ . Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянута параллелепипед:  $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^T$ .

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ где } \theta - k \times k \text{ матрица}$$

Используя равенство  $(QA)^* QA = \theta^* \theta$ , получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

**Определение 1.35.** Пусть  $A$  - матрица, имеющая из  $n$  строк и  $k$  столбцов и  $M(n, k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$  - множество мультииндексов. Тогда  $A_I$  - минор, составленный из  $i_1, i_2, \dots, i_k$  строк матрицы  $A$ .

**Теорема 1.36** (Формула Бине-Коши). Пусть  $A$  - матрица, имеющая из  $n$  строк и  $k$  столбцов, тогда  $\det A^* A = \sum_{I \in M(n, k)} \det^2 A_I$ .

*Доказательство.* Докажем более общее утверждение: пусть  $A, B = (n, k)$ -матрицы, тогда  $\det A^* B = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$ .

Пусть  $A = [u_1; \dots; u_n]$  и  $B = [v_1, \dots, v_n]$ , определим отображения  $L_1$  и  $L_2$  следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что  $L_1$  и  $L_2$  линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что  $L_1 = L_2$  достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ???).

$$L_1\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle$$

□

**Следствие 1.37.** Пусть  $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  - линейное отображение, такое, что  $\text{rank } L = k \leq n$ . Тогда для каждого измеримого множества  $A$ ,  $L(A)$  - измеримо и  $|L(A)|_k = J_L|A|_k$ , где  $J_L = \sqrt{\det L^*L}$ .

**Следствие 1.38.** Пусть  $\Pi$  -  $k$ -мерная плоскость в  $\mathbb{R}^n$  и  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого  $E \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Pi(E)$  - измеримо и  $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x) dx$ , где  $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$ .

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за  $A$  некоторый вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ , можно получить:

$$v^T v = \langle v, v \rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы  $u, v \in \mathbb{R}^3$  в столбцы матрицы  $A$ , получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  -  $k$ -мерное  $C^1$ -гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что  $\varphi \in C^1$  и  $M = \varphi(U)$ .

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k) \in U$$

Определим меру  $k$ -мерной площади  $S^k$  на параметрически заданном многообразии  $M$ .

**Определение 1.39.** Пусть  $E \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}^k$  - измеримо по  $|\cdot|_k$ , тогда  $\varphi(E)$  назовем измеримым по  $S^k$  и будем вычислять его меру как  $S^k(\varphi(E)) := \int_E J_\varphi(t) dt$ , где  $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$ .

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

**Лемма 1.40.** Пусть  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  - различные параметризации многообразия, такие что  $\text{rank } D\varphi = \text{rank } D\psi = k$ . Тогда  $\int_U J_\varphi(t) dt = \int_V J_\psi(t) dt$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\psi^{-1} \circ \varphi$  - отображение между  $U$  и  $V$ .

Очевидно, что  $\psi^{-1} \circ \varphi$  является биекцией и  $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$ . Следовательно,  $\psi^{-1} \circ \varphi$  -  $C^1$ -диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных  $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$  в интеграле:

$$\begin{aligned} \int_V \sqrt{\det D\psi^*(y)D\psi(y)} dy &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ |\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &\quad \sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл.  $\square$

Рассмотрим некоторые свойства меры  $S^k$ :

1. Счетная аддитивность.

Пусть  $\{M_i\}_{i \in N}$  - не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда  $S^k(\bigcup_i M_i) = \sum_i S^k(M_i)$ .

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше  $k$  равна нулю в мере  $S^k$ .



**Пример 1.41.** Вывести формулу длины кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с помощью меры  $S^k$  и формулы Бине-Коши.

*Решение.*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_n'^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

**Определение 1.42.** Мера угла – длина дуги окружности с центром в начале угла.

## 1.6 Площадь графика функции

Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ , где  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  её график –  $n$ -мерное многообразие  $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ .

Чтобы найти  $S^k$  надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \dots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда  $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$ .

Посчитаем  $D\varphi$ .

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы  $\det D\varphi^* D\varphi$ . Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx$$

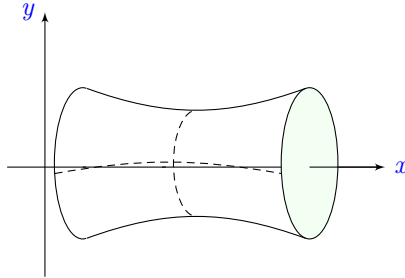
Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

*Доказательство.* TODO

□

**Пример 1.43** (Вывод частной формулы из общей). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси  $Ox$ .

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра  $(x, \varphi)$ . Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \cos \varphi, \\ z = f(x) \sin \varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

## 2 Криволинейные интегралы

### 2.1 Криволинейные интегралы I-рода

**Определение 2.1.** Пусть  $M$  –  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие, задана функция  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$  – измеримая по  $S^k$ . Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию  $M = \varphi(U)$ , то  $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x) dx$ , получаем,

$$\int_M f(y) dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если  $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то

$$\int_M (\alpha f + \beta g) dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$

2. монотонность: если  $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $f \leq g$ , то

$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$

3. аддитивность по области определения: если  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$  и  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , то

$$\int_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int_{M_1} f dS^k + \int_{M_2} f dS^k.$$

4. ограниченность: если  $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ , то

$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$

## 2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в  $\mathbb{R}^k$ :

$$u = \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_2 = r \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_3 = r \sin \varphi \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что  $u(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  - параметризация шара, а  $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = u|_{r=\text{const}}$  - параметризация сферы.

Обозначим  $n$ -мерный шар радиуса  $r$  как  $B_r$ . Соответственно  $S_r$  -  $(n-1)$ -мерная сфера радиуса  $r$ .

Вычислим якобианы  $J_u$  и  $J_{\tilde{u}}$  этих параметризаций. Нам известно, что  $J_u = |\det Du|$  и  $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$ .

Рассмотрим набор векторов  $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \dots, u_{\theta_{n-2}}\}$ , где  $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$ . Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r| |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} |u_r| &= 1 \\ |u_\varphi| &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_1}| &= r \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ &\dots \\ |u_{\theta_{n-3}}| &= r \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_{n-2}}| &= r \end{aligned}$$

Из того, что  $|u_r| = 1$  следует, что  $J_u = J_{\tilde{u}}$ .

Теперь мы можем записать конкретное выражение для  $J_u$ :

$$J_u = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2}$$

Так как  $J_u = J_{\tilde{u}}$ , можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int_0^R S^{n-2}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержатся. Так же площадь сферы можно представить в виде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

### 2.3 Формула коплощади

Пусть  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow R$ . Потребуем, чтобы  $\nabla\varphi \neq 0$  (т. е.  $\text{rank } D\varphi = k$  - максимальный).

Уравнение  $\varphi(x) = 0$  задает поверхность в  $U$ . Эту поверхность можно так же задать как  $\varphi^{-1}(0)$ . Из этого получаем:

$$\int_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

**Теорема 2.2** (Формула коплощади). Пусть  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ , такая, что  $\text{rank}(D\varphi) = k$ , тогда верна формула коплощади

$$\int_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

, где

$$J_{\varphi(x)} = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in U$ . Мы знаем, что  $\text{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$  - максимальный. Следовательно, в матрице  $D\varphi$  есть  $k$  линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это  $k$  последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует  $C^1$ -диффеоморфизм  $\Phi : V \rightarrow W$ , где  $V$  - окрестность  $x_0$ ,  $W$  - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\begin{aligned} \int_U f(x, y) J_\varphi(x, y) dx dy &= \int_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что  $\Phi_{z(x)}^{-1} = \Phi^{-1}(x, z)$  при фиксированом  $z$  является поверхностью. Возьмем  $s = \Phi_z^{-1}(x)$ , тогда

$$\int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int_{\varphi(U) \cap \mathbb{R}_z^{n-k}} g(\Phi_z^{-1}(x)) J_{\Phi_z^{-1}}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) □

**Следствие 2.3.** Если  $P_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  - проекция, тогда

$$\int_U f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\mathbb{R}_t^{n-k}} f(y) dy$$

, где  $\mathbb{R}_t^{n-k} = \{(y, s) : s = t\}$  -  $(n - k)$ -мерная плоскость (TODO: а это точно следствие?).

## 3 Введение в векторный анализ

### 3.1 Дифференциальные формы

**Определение 3.1.** Векторным полем на многообразии  $M$  называется функция  $F : M \rightarrow F(x)$ , такая что  $F(x) \in T_x M$ .

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

**Определение 3.2.** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем  $\varphi^*$  и определим результат его действия на функцию  $f : V \rightarrow \mathbb{E}$  как функцию  $\varphi^* f : U \rightarrow \mathbb{E}$ , такую, что  $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$ .

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть  $v : V \rightarrow TV$  - векторное поле, тогда  $\varphi^* v : U \rightarrow TV$  и  $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)} \langle v(\varphi(x)) \rangle$ .

Свойства оператора переноса:

1. линейность:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g$  - функции  $\forall u, v$  - векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^* f + \beta \varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^* u + \beta \varphi^* v$$

2. мультипликативность: пусть  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : V \rightarrow TV$ ,  $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$ . Тогда, если  $\varphi : U \rightarrow V$  -  $C^1$ -диффеоморфизм, то  $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$ .

3. перенос композиции является произведением переносов: пусть  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\psi : U \rightarrow V$  -  $C^1$ -диффеоморфизмы, тогда  $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \psi^*$ .

4. перестановочность с дифференциалом:  $\varphi^* d = d\varphi^*$ .

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - линейное отображение. Рассмотрим действие  $L$  на вектор  $v$ :

$$L\langle v \rangle = L\langle v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \rangle = v_1 L\langle e_1 \rangle + \dots + v_n L\langle e_n \rangle = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором:  $L\langle v \rangle = a \cdot v$ .

Введем базис на пространстве линейных отображений  $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ .

Набор функций  $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , таких что  $dx_j(v_1, \dots, v_n) = v_j$ , является базисом в  $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Следовательно,  $L\langle v \rangle = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ .

Обозначим за  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  пространство алгебраических форм степени  $k$  над  $\mathbb{R}^n$ . В частности  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  и  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

**Определение 3.3.** Дифференциальной формой степени  $k$  (сокращенно  $k$ -формой) на  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  будем называть  $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$ .

**Лемма 3.4.** Существует так называемый дуализм между 1-формами и векторными полями, так как каждая 1-форма изоморфна некоторому векторному полю.

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую 1-форму  $w(x)$ , тогда  $w(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$ . Пусть  $v(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ , тогда  $w(x)\langle u \rangle = v(x) \cdot u$ .  $\square$

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

**Пример 3.5.**  $w = xdy$  - 1-форма, но не дифференциал.

*Доказательство.* Допустим, что  $w = df = f_x dx + f_y dy$ . Тогда  $f_x = 0$  и  $f_y = x$ . Из курса мы знаем, что для любой функции  $f_{xy} = f_{yx}$ . Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем  $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$ . Получили противоречие.  $\square$

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме  $w = xdy$ . Пусть  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ , тогда  $\varphi^* w = r \cos \varphi d(r \sin \varphi) = r \cos \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r \sin \varphi \cos \varphi dr + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi$ .

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

**Определение 3.6.** Пусть  $w$  - 1-форма на  $V$ . Пусть  $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  -  $C^1$ -диффеоморфизм. Тогда  $\varphi^* w$  - 1-форма на  $U$  и  $\varphi^* w(x)\langle v \rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle$ .

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.



**Лемма 3.7** (Четвертое свойство оператора переноса). Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  -  $C^1$ -диффеоморфизм,  $f : V \rightarrow \mathbb{E} \in C^1$ , тогда  $\varphi^*(d\varphi) = d(\varphi^*f)$ . Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.

*Доказательство.* Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi^*(df)(x)\langle v \rangle &= df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v \rangle \rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v \rangle = \\ &= d(f \circ \varphi)(x)\langle v \rangle = d(\varphi^*f)(x)\langle v \rangle\end{aligned}$$

□

**Пример 3.8** (Работа векторного поля вдоль кривой). Рассмотрим одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле  $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$ . То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму  $A = w_g \langle l \rangle$ . А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем  $A = \int_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x) dl(x)$ .