

Лекции
по математическому анализу:
многообразия, криволинейные и
поверхностные интегралы,
введение в векторный анализ.

21 мая 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Внимание! Записки не подвергались редактуре, поэтому, возможно, содержат множество неточностей, опечаток и смысловых ошибок.

Содержание

1	Многообразия	3
1.1	Многообразия без края	3
1.2	Многообразия с краем	6
1.3	Касательное и нормальное пространства	10
1.4	Задача на условный экстремум	13
1.5	Площадь поверхности	15
1.6	Площадь графика функции	20
2	Криволинейные интегралы	22
2.1	Криволинейные интегралы I-рода	22
2.2	Объем шара и площадь сферы	24
2.3	Формула коплощади	25
3	Введение в векторный анализ	27
3.1	Дифференциальные формы	27
3.2	Ориентация	30
3.3	Интеграл 1-формы по кривой	34
3.4	Внешние формы второго порядка	48
3.5	Внешний дифференциал 1-формы	50
3.6	Ротация векторного поля	51
3.7	Внешние формы высших порядков	53
3.7.1	Замена переменной в k -форме	54
3.7.2	Интеграл k -формы по ориентированному k -мерному многообразию	55
3.8	25.04.19	62
3.9	Дивергенция векторного поля	65
4	Билеты II потоковой	69
4.0.1	Вариант -2	69
4.0.2	Вариант -1	70

1 Многообразия

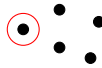
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в \mathbb{R}^k .

При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

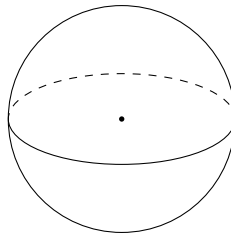
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



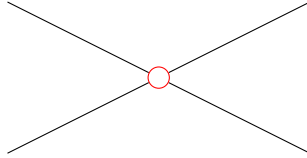
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения — многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания k -мерных многообразий.

Теорема 1.3. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, тогда U является n -мерным многообразием.

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.

Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ — сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. \square

Теорема 1.4 (О графике). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ — C^r -гладкое n -мерное многообразие в \mathbb{R}^{n+1} .

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение Φ является C^r -диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т. е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$. \square

Теорема 1.5 (О локальном вложении). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U$ и $\text{rank } Df(t^0) = k$, то существует V -окрестность t^0 , такая что $f(V)$ является C^r -гладким k -мерным многообразием.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\text{rank } Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса \mathbb{R}^n .

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ — базис в \mathbb{R}^n .

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \dots + s_nv_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}, v_{k+1}, \dots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W — окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \rightarrow \Phi(W)$ — C^r -диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V — окрестность x_0 в \mathbb{R}^k , тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$. \square

Определение 1.6. Пусть x^0 — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r \forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n - k)$ -мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

$f(x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) = f(x, y) = 0$. Существует окрестность V такая, что $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ тогда по теореме о неявной функции $y = g(x)$.

В некоторой окрестности x^0 :

$$\begin{aligned}x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\&\dots \\x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).\end{aligned}$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1, \\&\dots \\x_{n-k} &= x_{n-k}, \\x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\&\dots \\x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).\end{aligned}$$

□

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$ — верхнее полупространство ($\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$ — нижнее полупространство).

Определение 1.9. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^k$ — окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}_+^k$ называется полукрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$ -мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r -гладким k -мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}_+^k) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$.
2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M — многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x \text{ — краевая точка } M\}$ — множество краевых точек многообразия M .

Теорема 1.12 (О крае). Пусть M — C^r -гладкое k -мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r -гладким $(k - 1)$ -мерным многообразием без края ($\partial \partial M = \emptyset$).

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$.

Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ — краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k - 1)$ -мерную плоскость (основание полупространства). Основание — $(k - 1)$ -мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ — выполнено определение многообразия. \square

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства). Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_{k+1} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k + 1$ и $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + 1$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой C^r -гладкое $(n - k)$ -мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение $(k + 1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

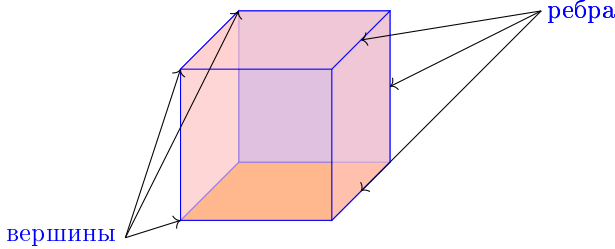
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает $(k - 1)$ мерную поверхность — край многообразия. \square

Определение 1.14. Множество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется k -мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M — k -мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)$, такое что \tilde{M} — гладкое k -мерное многообразие, а Z_i — кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k - 1$.

Пример 1.15. Куб.



Теорема 1.16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k + l$ и $\text{rank } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + l$, тогда множество регулярных решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой C^r -кусочно-гладкое $(n - k)$ -мерное многообразие с краем.

Пример 1.17. Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

Решение. Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если $x = 0$ или $y = 0$. Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно $\text{rank} \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$ и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

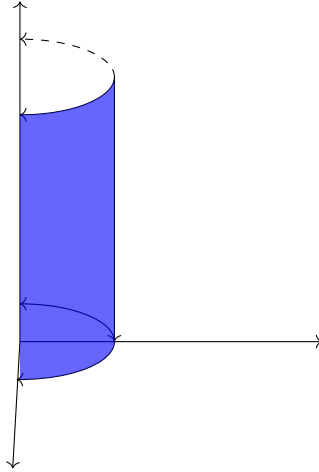
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases} & & \end{array}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2 (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий). \square

Пример 1.18. в \mathbb{R}^3 . $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.19. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ .

Определение 1.20. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M , т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.21. Пусть $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – C^1 -диффеоморфизм. Показать, что если v – вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a, b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v \rangle$ – вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0 .

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0 \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0) \rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v \rangle. \quad \square$$

Лемма 1.22. Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0 \lambda \vec{v} \in T_{x_0}M$.

Доказательство. По условию, существует кривая $\gamma \subset M$, для которой \vec{v} является вектором скорости. Зададим кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ и проверим, что вектор $\lambda \vec{v}$ является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda \vec{v}$$

□

Теорема 1.23 (О множестве касательных векторов). *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкое k -мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.
2. Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}_+^k$.

Доказательство. По определению k -мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r -диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в \mathbb{R}^k .

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$$\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t), 0, \dots, 0).$$

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$ — линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ — k -мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.24. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 — это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.25. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда если $\dim M = k$ то, $\dim T_{x_0}M = k$ и $\dim N_{x_0}M = n - k$.

Теорема 1.26 (О базисе касательного пространства). Пусть многообразие M задано параметрически:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

, где $(t_1, \dots, t_k) \in U$.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $t^0 \in U$. Тогда, если $M = f(U)$ — многообразие и $\text{rank } Df = k$, то $\{\frac{\partial f}{\partial t_1}(t^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t^0)\}$ — базис в $T_{f(t^0)}M$.

Доказательство. Пусть $t^0 \in U$, определим $\Gamma_j = t^0 + t \cdot \vec{e}_j$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ — кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t^0 : $\gamma'_j(t^0) = \frac{d}{dt}f(t^0 + t \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t^0) \in T_{f(t^0)}M$.

Набор векторов $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{i=1}^k$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. \square

Теорема 1.27. Пусть многообразие M задано системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k. \end{cases}$$

и $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \forall i \leq k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а так же $\text{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0, \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

задает $T_{x_0}M$, а $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

$$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle.$$

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \dots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_k(x_0)\}$ — базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. \square

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.28. Пусть M, N — дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \rightarrow N$ дифференцируема в точке x_0 , если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема и x_0 — её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f|_\gamma$ x_0 — экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}(\vec{v})$. \square

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $M \subseteq U$ — k -мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f|_M$.

Теорема 1.30 (Необходимое условие условного экстремума). Если $x_0 \in M$ — точка экстремума f , то $df|_{T_{x_0}M} = 0 \iff \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 — экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_{x_0}(\vec{v})$. \square

Теорема 1.31 (Метод множителей Лагранжа). Пусть $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 — условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \dots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ — функция Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ — решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \dots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x)$ — градиенты $\nabla \varphi_i$ — это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f — нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. \square

Лемма 1.32 (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $\gamma : [a, b] \rightarrow U \in C^2$ – кривая. Тогда

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f \circ \gamma)''(t) = (df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x(df_x \langle \vec{v} \rangle) = d^2 f(x) \langle \vec{v} \rangle$ и $d_{\vec{v}}(df_x \langle \vec{v} \rangle) = df_x$.

Отсюда имеем $(df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle)'_t = d^2 f_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + df_{\gamma(t)} \langle \gamma''(t) \rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.33 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, $\text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = k$ всюду, то. Определим функцию Лагранжа как $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x)$, тогда, если $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, то при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) > 0$ – x_0 – точка минимума, а при $d^2_x L(x_0, \lambda_0) < 0$ – точка максимума.

Доказательство. Пусть $dL(x_0, \lambda_0) = 0$, $d^2_x L(x_0, \lambda_0) |_{T_{x_0} M \times T_{x_0} M} > 0$.

$dL(x_0, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla \varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} |_{T_{x_0} M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \in C^2$, $\gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ , т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. По лемме 1.32 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t) \rangle$. $(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0} \langle \gamma'(0) \rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \dots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L(\gamma'(t), \gamma'(t)) + d_x L(\gamma''(t)).$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L(\gamma'(0), \gamma'(0)) + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \gamma)'(0) = 0$, $(f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0 . Следовательно, x_0 – точка минимума для $f|_M$. \square

Пример 1.34. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n -мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \dots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \dots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$ получаем: $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L |E| = |\det L| |E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E , мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int_E J_{\varphi(x)} dx$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.35 (Объем k -мерного параллелепипеда). Пусть $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. Тогда $|\Pi(v_1, \dots, v_k)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. Обозначив за $A = [v_1, \dots, v_k]$, это выражение можно записать в виде $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k -мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π .

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \dots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ где } \theta - k \times k \text{ матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.36. Пусть A — матрица, имеющая из n строк и k столбцов и $M(n, k) = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ — множество мультииндексов. Тогда A_I — минор, составленный из i_1, i_2, \dots, i_k строк матрицы A .

Теорема 1.37 (Формула Бине-Коши). Пусть A — матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда $\det A^* A = \sum_{I \in M(n, k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$ -матрицы, тогда $\det A^* B = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \dots; u_n]$ и $B = [v_1, \dots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2 \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n, k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ???).

$$L_1 \langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2 \langle e_{i1}, \dots, e_{ik}, e_{j1}, \dots, e_{jk} \rangle$$

□

Следствие 1.38. Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, такое, что $\text{rank } L = k \leq n$. Тогда для каждого измеримого множества A , $L(A)$ — измеримо и $|L(A)|_k = J_L |A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^* L}$.

Следствие 1.39. Пусть Π — k -мерная плоскость в \mathbb{R}^n и $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi$ — C^1 -диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ — измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x) dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x) D\varphi(x)}$.

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v \rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A , получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — k -мерное C^1 -гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k), \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k) \in U$$

Определим меру k -мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M .

Определение 1.40. Пусть $E \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$ — измеримо по $|\cdot|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int_E J_\varphi(t) dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t) D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.41. Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — различные параметризации многообразия, такие что $\text{rank } D\varphi = \text{rank } D\psi = k$. Тогда $\int_U J_\varphi(t) dt = \int_V J_\psi(t) dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ — отображение между U и V .

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ — C^1 -диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\begin{aligned} \int_V \sqrt{\det D\psi^*(y) D\psi(y)} dy &= \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &= \int_U |\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx = \int_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))} \\ &\quad \sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. \square

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k :

1. Счетная аддитивность.

Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ — не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup_i M_i) = \sum_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k .

Пусть M — кусочно-гладкое многообразие размерности k , тогда, из того что, $\dim Z_i < k$ следует $S^k(Z_i) = 0$, получаем

$$S^k(M) = S^k(\tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^n Z_i)) = S^k(\tilde{M}) + \sum_{i=0}^n S^k(Z_i) = S^k(\tilde{M})$$

Пример 1.42. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k .

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{x'^2_1 + \dots + x'^2_n} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

Определение 1.43. Мера угла — длина дуги единичной окружности с центром в начале угла.

Пример 1.44. Многообразие какой размерности задаёт параметрическая система

$$\begin{cases} x = t \cos \theta, & t \in (0, 2), \\ y = t \sin \theta, & \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ z = \theta? \end{cases}$$

Вычислите площадь этого многообразия.

Решение. В силу теоремы 1.5 размерность многообразия, задаваемого системой будет равна 2.

Теперь вычислим площадь этого многообразия, используя определение 1.40. Для этого найдем $J_\varphi(t)$.

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta & t \cos \theta \\ \cos \theta & -t \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D\varphi^*(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ t \cos \theta & -t \sin \theta & 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 + 1 \end{pmatrix}^{1/2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

и, следовательно,

$$\int_E \sqrt{t^2 + 1} = \int_0^2 dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2 + 1} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1} dt$$

сделаем замену $t = \tan p$, $dt = \frac{dp}{\cos^2(p)}$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\arctan(2)} \sqrt{\tan^2(p) + 1} \frac{dp}{\cos^2(p)}$$

так как $\sqrt{\tan^2(p) + 1} = \frac{1}{\cos(p)}$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \int_0^{\arctan(2)} \frac{dp}{\cos^3(p)} &= \frac{\pi}{4} \left(t\sqrt{t^2 + 1} + \operatorname{arcsinh}(t) \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2\sqrt{5} + \operatorname{arcsinh}(2) \right) \end{aligned}$$

Как мы видим, ответ получился довольно страшный, тем не менее задача решена.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n -мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \dots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx$$

Свойство формулы 1.40:

•

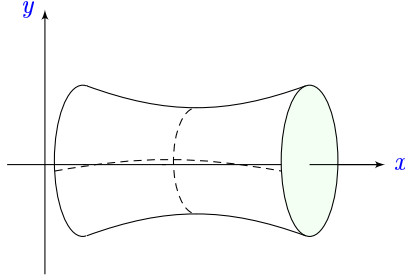
$$S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M) \quad (1.1)$$

Доказательство. Пусть ψ — параметризация многообразия M , то есть $\psi(V) = M$. Тогда $\lambda M = \lambda\psi(V)$.

$$\begin{aligned} S^k(\lambda M) &= S^k(\lambda\psi(V)) = \int_V J_{\lambda\psi}(t) dt = \int_V \sqrt{\det D(\lambda\varphi(t))^* D(\lambda\varphi(t))} dt = \\ &= \int_V \sqrt{\lambda^{2k} \det D(\varphi(t))^* D(\varphi(t))} dt = \lambda^k \int_V \sqrt{\det D(\varphi(t))^* D(\varphi(t))} dt = \\ &= \lambda^k S^k(M) \end{aligned}$$

□

Пример 1.45 (Вывод частной формулы из общей). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox .

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ) . Воспользуемся цилиндрической системой координат $\varphi(x, \varphi) : U \rightarrow M$:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \cos \varphi, \\ z = f(x) \sin \varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f' \cos \varphi & -f \sin \varphi \\ f' \sin \varphi & f \cos \varphi \end{pmatrix} \quad D\varphi^* = \begin{pmatrix} 1 & f' \cos \varphi & f' \sin \varphi \\ 0 & -f \sin \varphi & f \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det(D\varphi \cdot D\varphi^*)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + (f')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{f^2(1 + (f')^2)} = f \sqrt{f^2(1 + (f')^2)} \quad (1.2)$$

Отсюда получаем формулу площади поверхности тела вращения

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b f \sqrt{f^2(1 + (f')^2)} dx d\varphi = 2\pi \int_a^b f \sqrt{f^2(1 + (f')^2)} dx$$

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n -мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ – измеримая по S^k . Тогда интегралом по

поверхности назовем

$$\int_M f dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x) dx$, получаем,

$$\int_M f(y) dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. корректность: интеграл не зависит от параметризации многообразия

Доказательство. Пусть $M = \varphi(U) = \phi(V)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_M f dS^k &= \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi^{-1} \circ \psi \\ dx = J_{\varphi^{-1} \circ \psi} = J_{\varphi^{-1}} \cdot J_\psi = J_\varphi^{-1} \cdot J_\psi dy \end{array} \right] \\ &\int_V f(\varphi(\varphi^{-1} \circ \psi)(y)) \cdot J_\varphi J_\varphi^{-1} \cdot J_\psi dy = \int_V f(\psi(y)) J_\psi dy \end{aligned}$$

□

2. линейность: если $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_M (\alpha f + \beta g) dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$

3. монотонность: если $f, g : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $f \leq g$, то

$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$

4. аддитивность по области определения: если $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то

$$\int_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int_{M_1} f dS^k + \int_{M_2} f dS^k.$$

5. ограниченность: если $f : M \rightarrow \mathbb{E}$, то

$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$

2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в \mathbb{R}^n :

$$u = \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_2 = r \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ x_3 = r \sin \varphi \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = u|_{r=\text{const}}$ - параметризация сферы.

Обозначим n -мерный шар радиуса r как B_r . Соответственно S_r - $(n-1)$ -мерная сфера радиуса r .

Вычислим якобианы J_u и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \dots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r| |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi| |u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} |u_r| &= 1 \\ |u_\varphi| &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_1}| &= r \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \\ &\dots \\ |u_{\theta_{n-3}}| &= r \cos \theta_{n-2} \\ |u_{\theta_{n-2}}| &= r \end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.

Теперь мы можем записать конкретное выражение для J_u :

$$J_u = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_u d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\bar{u}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\bar{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int_0^R S^{n-1}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержатся. Так же площадь сферы можно представить в виде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы $\nabla \varphi \neq 0$ (т. е. $\text{rank } D\varphi = k$ максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в U . Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla \varphi|(x) dx$$

Теорема 2.2 (Формула коплощади). Пусть $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$, такая, что $\text{rank}(D\varphi) = k$, тогда верна формула коплощади

$$\int_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

где

$$J_\varphi(x) = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\text{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$ — максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть k линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это k последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует C^1 -диффеоморфизм $\Phi : V \rightarrow W$, где V - окрестность x_0 , W - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\begin{aligned} \int_U f(x, y) J_\varphi(x, y) dx dy &= \int_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx \end{aligned}$$

Заметим, что $\Phi_{z(x)}^{-1} = \Phi^{-1}(x, z)$ при фиксированном z является поверхностью. Возьмем $s = \Phi_z^{-1}(x)$, тогда

$$\int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int_{\varphi(U) \cap \mathbb{R}_z^{n-k}} g(\Phi_z^{-1}(x)) J_{\Phi_z^{-1}}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x, z)) J_\varphi(\Phi(x, z)) J_{\Phi(x, z)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} dz \int_{U \cap \varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует)

□

Для проекции $P_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ формула коплощади превращается в формулу Фубини:

$$\int_U f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} dt \int_{\mathbb{R}_t^{n-k}} f(y) dy$$

где $\mathbb{R}_t^{n-k} = \{(y, s) : s = t\}$ - $(n - k)$ -мерная плоскость.

3 Введение в векторный анализ

3.1 Дифференциальные формы

Определение 3.1. Векторным полем на многообразии M называется функция $F : M \rightarrow F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

Определение 3.2. Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ - C^1 -диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем φ^* и определим результат его действия на функцию $f : V \rightarrow \mathbb{E}$ как функцию $\varphi^* f : U \rightarrow \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \rightarrow TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \rightarrow TV$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)} \langle v(\varphi(x)) \rangle$.

Свойства оператора переноса:

Свойство 1°. ЛИНЕЙНОСТЬ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g$ — функции $\forall u, v$ — векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^* f + \beta \varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^* u + \beta \varphi^* v$$

Свойство 2°. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ

пусть $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v : V \rightarrow TV$, $(f \circ v)(g) = f(g) \vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \rightarrow V$ — C^1 -диффеоморфизм, то $\varphi^*(f \vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.

Свойство 3°. ПЕРЕНОС КОМПОЗИЦИИ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОЗИЦИЕЙ ПЕРЕНОСОВ

Пусть $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W$ — C^1 -диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^*w = \varphi^*(\psi^*w)$.

Свойство 4°. ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ С ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$\varphi^*d = d\varphi^*.$$

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — линейное отображение. Рассмотрим действие L на вектор v :

$$L\langle v \rangle = L\langle v_1e_1 + \dots + v_ne_n \rangle = v_1L\langle e_1 \rangle + \dots + v_nL\langle e_n \rangle = v_1a_1 + \dots + v_na_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v \rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \dots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v \rangle = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = a_1dx_1 + \dots + a_ndx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени k над \mathbb{R}^n . В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Определение 3.3. Дифференциальной формой степени k (сокращенно k -формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 3.4. Существует так называемый дуализм между 1-формами и векторными полями, так как каждая 1-форма изоморфна некоторому векторному полю.

Доказательство. Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u \rangle = v(x) \cdot u$. \square

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

Пример 3.5. $w = xdy$ — 1-форма, но не дифференциал.

Доказательство. От противного. Допустим, что $w = df = f_x dx + f_y dy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. \square

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = x dy$. Пусть $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, тогда $\varphi^* w = r \cos \varphi d(r \sin \varphi) = r \cos \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r \sin \varphi \cos \varphi dr + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi$.

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

Определение 3.6. Пусть w — 1-форма на V . Пусть $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ — C^1 -диффеоморфизм. Тогда $\varphi^* w$ — 1-форма на U и $\varphi^* w(x) \langle v \rangle = w(\varphi(x)) \langle d\varphi(x) \langle v \rangle \rangle$.

Пусть $w(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ и φ задано в виде

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

тогда оператор переноса можно записать в координатном виде,

$$\varphi^* w(y) = \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(y)) d\varphi_i(y) \quad (3.1)$$

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

Лемма 3.7 (Четвертое свойство оператора переноса). Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ — C^1 -диффеоморфизм, $f : V \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$, тогда $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$. Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.

Доказательство. Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \varphi^*(df)(x) \langle v \rangle &= df(\varphi(x)) \langle d\varphi(x) \langle v \rangle \rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x) \langle v \rangle = \\ &= d(f \circ \varphi)(x) \langle v \rangle = d(\varphi^* f)(x) \langle v \rangle \end{aligned}$$

\square

Пример 3.8 (Работа векторного поля вдоль кривой). Рассмотрим одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = \vec{F} \cdot \vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g \langle l \rangle$. А теперь представим,

что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x) dl(x)$.

3.2 Ориентация

Определение 3.9. Пусть V — конечномерное векторное пространство, в нем определены два базиса u_1, \dots, u_n и v_1, \dots, v_n связанные между собой матрицей перехода A такой, что $v_j = Au_j$ и $\det A \neq 0$. Базисы назовем *сориентированными* если $\det A > 0$, и *противоположесно ориентированными* если $\det A < 0$.

Ориентация — класс сориентированных базисов.

Определение 3.10. Пусть \mathfrak{B}^n — множество базисов в \mathbb{R}^n . *Ориентацией* на \mathfrak{B}^n назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}^n \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

1. Θ — непрерывная,
2. Θ — кососимметричная.

то есть, если $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ — перестановка, то $\Theta(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n}) \rightarrow \text{sgn } \sigma \cdot \Theta(v_1, \dots, v_n)$

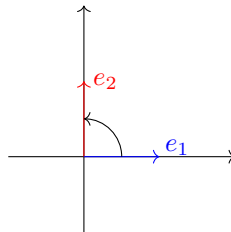
Теперь приведем примеры стандартных ориентаций. Они существуют для пространств $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ и \mathbb{R}^3 .

- ориентация в \mathbb{R}^1



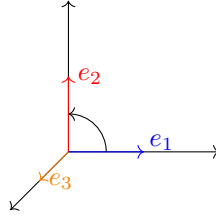
т.е. стандартная ориентация направлена по возрастанию.

- ориентация в \mathbb{R}^2



т.е. стандартная ориентация получается вращением от вектора e_1 к вектору e_2 против часовой стрелки.

- ориентация в \mathbb{R}^3



т.е. если вектор e_2 получен вращением вектора e_1 против часовой стрелки, то вектор e_3 должен смотреть «на нас».

Теперь определим ориентацию на многообразии.

Определение 3.11. Пусть M — k -мерное многообразие и $\mathfrak{B}M := \{(x, v_1, \dots, v_k) : x \in M, v_1, \dots, v_k \text{ — базис } T_x M\}$

ориентацией на многообразии M назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}M \rightarrow \{-1, 1\}$$

такую что:

1. Θ — непрерывная,
2. Θ — кососимметричная.

Оказывается, что не на всяком многообразии можно задать ориентацию. Таким многообразием, к примеру, является лента Мёбиуса: если мы возьмем стандартный базис \mathbb{R}^2 и «протащим» его по ленте на один оборот, то он «зеркально отразится». Таким образом, на ленте Мёбиуса не существует функции, удовлетворяющей определению 3.11.

Определение 3.12. Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию. В противном случае оно называется *неориентируемым*.

Определение 3.13. Ориентируемое многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация.

Лемма 3.14. Если многообразие задано параметрически, то оно ориентируемое.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $k \leq n$.

$$M = f(U) \iff \begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \dots, t_k), \\ \dots \\ x_n = f_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

Поскольку в U есть ориентация k -мерного пространства $\Theta(u_1, \dots, u_k)$, определим на M ориентацию $\tilde{\Theta}(x, v_1, \dots, v_k)$ следующим образом: $x = f(t)$, $v_1 = df_x \langle u_1 \rangle, \dots, v_k = df_x \langle u_k \rangle$. \square

Лемма 3.15. Многообразие заданное системой уравнений всегда ориентируемое.

Доказательство. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ и $\text{rank } D\varphi = k$ всюду для всякого $k \leq n$.

x — точка на многообразии M тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$. В свою очередь

$$\varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

тогда $\nabla \varphi_1(x), \dots, \nabla \varphi_k(x)$ — нормали к многообразию M в точке x . Определим ориентацию следующим образом:

$$x \in M, \tau_1, \dots, \tau_{n-k} \in T_x M \implies$$

$$\tilde{\Theta}(x, \tau_1, \dots, \tau_{n-k}) = \Theta(\nabla \varphi_1(x), \dots, \nabla \varphi_k(x), \tau_1, \dots, \tau_{n-k}).$$

\square

Рассмотрим примеры ориентируемых многообразий и ориентаций на них.

- $k = 0$. 0-мерное многообразие — набор точек.

$$\begin{array}{ccc} & \bullet -1 & \bullet +1 \\ +1 \bullet & & \\ & \bullet +1 & \\ & \bullet -1 & \end{array}$$

— просто приписываем $\{-1, +1\}$ к точкам.

- $k = 2, n = 3$. Поверхность в \mathbb{R}^3 .

Ориентация задается нормалью.

Определение 3.16. Параметризация φ кривой $\gamma \in C^1$ называется *согласованной с ориентацией* Θ , если $\Theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$.

Определение 3.17. Параметризации φ, ψ называются *сорIENTированными*, если $(\psi \circ \varphi)' > 0$.

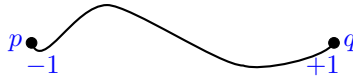
Индукцированная ориентация края

Определение 3.18. Пусть M — ориентированное многообразие с краем, Θ_M — ориентация на этом многообразии, т.е. $\Theta_M(x, v_1, \dots, v_k) = \pm 1$, где $v_1, \dots, v_k \in T_x M$. Определим *ориентацию края* $\Theta_{\partial M}$ следующим образом:

Пусть $x \in \partial M$ и $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$. Выберем вектор $w \in T_x M \setminus T_x \partial M$ так, чтобы он «смотрел наружу».

Тогда $\Theta_{\partial M}(x, v_1, \dots, v_{k-1}) := \Theta_M(x, w, v_1, \dots, v_{k-1})$.

Пример 3.19. Рассмотрим случай при $k = 1$ — кривая. Пусть γ — ориентированная кривая, край кривой — две точки: начальная и конечная. Обозначим их как p и q соответственно.



Тогда $\partial\gamma = \{-p, q\}$ и верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p) = \int_{\partial\gamma} f.$$

Пример 3.20. Какое направление обхода края индуцирует нижняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ и почему?

Краем этого многообразия является окружность. Нижняя сторона полусферы задает положительное направление обхода, так как при обходе область остается слева.

(!!! Это решение не является надежным, принимайте его на веру на свой страх и риск)

3.3 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть $\gamma - C^1$ -гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ и $\psi : [c, d] \rightarrow \gamma$. Тогда $\psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] \in C^1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$.

Определение 3.21. Две параметризации φ, ψ называются сорентированными (противоположно ориентированными), если $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ ($(\psi^{-1} \circ \varphi)' < 0$).

Определение 3.22. Параметризация φ кривой γ называется согласованной с ориентацией θ , если $\theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$.

Определение 3.23. Пусть $w : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — непрерывная 1-форма и $\gamma \subset U - C^1$ -гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt$$

где $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ — параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

Пример 3.24. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y .

Решение. Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 4 - (1 - t)^2, \\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда $dx = -dt$, $dy = 2(1 - t)dt$. Подставим эти выражения в формулу:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} xdy + ydx &= \int_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt = \\
&= \int_0^1 2(1-t)^2dt - (4 - (1-t)^2)dt = \int_0^1 [3(1-t)^2 - 4]dt = \\
&= \int_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3 \Big|_0^1 = -3
\end{aligned}$$

□

Свойства интеграла 1-формы

Свойство 1°. КОРРЕКТНОСТЬ

Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma, \psi : [c, d] \rightarrow \gamma \in C^1$ — параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)$ — монотонно возрастает, следовательно $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$.

$$\int_c^d w(\psi(t)) \langle \psi'(t) \rangle = \int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s)))) \langle \psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) \rangle (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) ds$$

Так как $w(\psi(s))$ — линейный оператор, можем внести $(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)$ как множитель аргумента. Имеем $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s))) (\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)$ как производную композиции.

$$\int_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1}\circ\varphi)'(s)ds = \int_a^b w(\varphi(s))\langle\varphi(s)\rangle ds$$

□

Свойство 2°. Антисимметричность

Пусть γ — ориентированная кривая, тогда $-\gamma$ та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int_{-\gamma} w = - \int_{\gamma} w$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, T] \rightarrow \gamma$ — параметризация кривой γ , согласованная с ориентацией, тогда $\psi(t) = \varphi(T - t)$ — параметризация кривой $-\gamma$, согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int_{\gamma} w = \int_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle dt$$

Проведем замену переменных $t = (\varphi^{-1} \circ \psi)(s)$. Тогда $\psi(0) = T$ и $\psi(T) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle &= \int_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s))))\langle\varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s)))\rangle(\varphi^{-1}\circ\psi)'(s)ds = \\ &= \int_T^0 w(\psi(s))\langle\psi^{-1}(s)\rangle ds = - \int_0^T w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = - \int_{-\gamma} w \end{aligned}$$

□

Свойство 3°. Линейность

$\forall w_1, w_2$ — формы, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \int_{\gamma} w_1 + \beta \int_{\gamma} w_2$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ — параметризация согласованная с ориентацией. Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) &= \int_a^b (\alpha w_1 + \beta w_2)(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx = \\
 &= \int_a^b (\alpha w_1(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle + \beta w_2(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle) dx = \\
 &= \alpha \int_a^b w_1(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx + \beta \int_a^b w_2(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx = \\
 &= \alpha \int_{\gamma} w_1 + \beta \int_{\gamma} w_2.
 \end{aligned}$$

□

Свойство 4°. Аддитивность

Пусть $\varphi : [p, q] \rightarrow \gamma$ — параметризация кривой γ , возьмем $r \in [p, q]$ и определим $\varphi_{pr} : [p, r] \rightarrow \gamma_{pr}$ и $\varphi_{rq} : [r, q] \rightarrow \gamma_{rq}$, тогда

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma_{pr}} w + \int_{\gamma_{rq}} w$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} w &= \int_p^q w(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx = \\
 &= \int_p^r w(\varphi_{pr}(x)) \langle \varphi'_{pr}(x) \rangle dx + \int_r^q w(\varphi_{rq}(x)) \langle \varphi'_{rq}(x) \rangle dx = \\
 &= \int_{\gamma_{pr}} w + \int_{\gamma_{rq}} w
 \end{aligned}$$

□

Замечание 3.25. Если кривая замкнута, тогда вместо $\int_{\gamma} w$ используют обозначение $\oint_{\gamma} w$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Пример 3.26 (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой). Пусть \vec{v} — векторное поле, γ — ориентированная кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой γ вычисляется как ($\vec{\tau}$ — касательный вектор к кривой)

$$\int_{\gamma} v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$$

Теорема 3.27 (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть $w = df$ — полный дифференциал, γ — ориентированная кривая с начальной точкой p и конечной точкой q , тогда справедлива формула

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ — параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда $\varphi(a) = p$ — начальная точка кривой и $\varphi(b) = q$ — конечная точка кривой.

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t)) \Big|_a^b = f(q) - f(p)$$

□

Следствие 3.28. Если $w = df$, то $\int_{\gamma} w$ не зависит от пути γ , а только от начальной и конечной точки.

Следствие 3.29.

$$\oint_{\gamma} df = 0$$

Пример 3.30. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y .

Решение. Заметим, что w — полный дифференциал функции $f = xy$, а так же, что начальная точка параболы это $(1, 3)$, а конечная $(0, 4)$.

$$\int_{\gamma} xdy + ydx = \int_{\gamma} d(xy) = xy \Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

□

Теорема 3.31 (Критерий полного дифференциала). Пусть w — непрерывная 1-форма на множестве U . Тогда w является полным дифференциалом некоторой функции $f \in C^1$ тогда и только тогда, когда $\oint_{\gamma} w = 0$ для всех ориентированных замкнутых контуров $\gamma \subset U$.

Доказательство. Необходимость следует из 3.29.

Для доказательства достаточности построим функцию f .

Пусть U — открытое связное множество. Возьмем точку $x_0 \in U$ и положим, что $f(x_0) = C$. Возьмем так же $x \in U$ — другую точку и положим $f(x) = f(x_0) + \int_{\gamma} w$, где γ — кривая, соединяющая точки x и x_0 (начало в x_0 , конец в x).

Если γ_1 и γ_2 — две кривые из x_0 в x , то $\gamma_1 - \gamma_2$ — замкнутый контур и

$$0 = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w + \int_{-\gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w - \int_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути. Таким образом, построим функцию $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ с точностью до константы.

Если кривая начинается в x_1 и заканчивается в x_2 , то

$$\int_{\gamma_{x_1 x_2}} w = \int_{\gamma_{x_1 x_0}} w + \int_{\gamma_{x_0 x_2}} w = f(x_2) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

Продолжение следует ;)

□

Определение 3.32. Непрерывная дифференциальная форма w называется *точной*, если существует $f \in C^1$ такая, что $w = df$.

Определение 3.33. Векторное поле \vec{v} называется *потенциальным*, если существует функция $f \in C^1$ такая, что $\vec{v} = \nabla f$. В таком случае говорят, что f является *потенциалом* \vec{v} .

Теорема 3.34 (Формула Грина). Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактная область с кусочно-гладкой границей, пусть $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ — C^1 -гладкая 1-форма $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда

$$\oint_{\partial U} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_U \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x,y) & Q(x,y) \end{vmatrix} = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Доказательство. Доказательство проведем для криволинейной трапеции.

Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \leq g$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций f и g , и параметризуем ее стороны

$$L : \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \\ x \in [a, b], \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = b, \\ y = y, \\ y \in [f(b), g(b)], \end{cases}$$

$$H : \begin{cases} x = x, \\ y = g(x), \\ y \in [b, a], \end{cases} \quad A : \begin{cases} x = a, \\ y = f(x), \\ y \in [g(b), f(b)]. \end{cases}$$

Распишем исходный интеграл как сумму интегралов и вычислим отдельно слагаемые

$$\oint_{\partial U} Pdx + Qdy = \oint_{\partial U} Pdx + \oint_{\partial U} Qdy$$

Первое слагаемое равно приращению функции P .

$$\begin{aligned} \oint_{\partial U} Pdx &= \oint_L Pdx + \oint_B Pdx + \oint_H Pdx + \oint_A Pdx = \\ &= \int_a^b P(x, f(x))dx + 0 + \int_b^a P(x, g(x))dx + 0 = \int_a^b \left[P(x, f(x)) - P(x, g(x)) \right] dx \end{aligned}$$

По формуле Ньютона-Лейбница, приращение функции — интеграл ее производной

$$\int_a^b \left[P(x, f(x)) - P(x, g(x)) \right] dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy$$

Из чего по формуле Фубини получаем,

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = - \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \iint_U \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

Второе слагаемое, в свою очередь

$$\begin{aligned} \oint_{\partial U} Q dy &= \oint_L Q dy + \oint_B Q dy + \oint_H Q dy + \oint_A Q dy = \\ &= \int_a^b Q(x, f(x)) f'(x) dx + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy + \int_b^a Q(x, g(x)) g'(x) dx + \int_{g(a)}^{f(a)} Q(b, y) dy = \\ &= \int_a^b \left[Q(x, f(x)) f'(x) - Q(x, g(x)) g'(x) \right] dx + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(b, y) dy \end{aligned}$$

Из того, что по формуле Ньютона-Лейбница

$$\frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy = Q(x, f(x)) f'(x) - Q(x, g(x)) g'(x),$$

получаем

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[Q(x, f(x)) f'(x) - Q(x, g(x)) g'(x) \right] dx + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(b, y) dy = \\ &= \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy - \frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy \right] + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(b, y) dy = \\ &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx \mp \left(\int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy \right) \Big|_a^b = \iint_U \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

□

Пример 3.35. Вычислить

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin(x)) dx + x dy$$

где U задано равенством $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Лайфхак от Сергея Геннадьевича: если вы видите задачу с «безумной функцией», то эта задача на формулу Грина.

Функция в задаче выглядит не очень, так что воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_U x^2 \arctan(x^2 + \sin x) dx + x dy = - \iint_W (1 - 0) dx dy = -\pi ab$$

где W задано неравенством $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. □

Определение 3.36. 1-формами площади называются специальные 1-формы, интегралы от которых дают площадь.

$$x dy, \quad -y dx, \quad \frac{x dy - y dx}{2}$$

Проинтегрировав любую из этих форм по области, вы получите площадь области:

$$\oint_{\partial U} x dy = \iint_U (1 - 0) dx dy = |U|$$

Пример 3.37. Вычислите площадь ветки циклоиды, полученной движением круга радиуса a .

$$\begin{cases} x = at - a \sin t \\ y = a - a \cos t \end{cases}$$

Решение. Из прошлого семестра, мы знаем, что площадь можно посчитать с помощью двойного интеграла. Для этого нам нужно найти пределы интегрирования. Переменная x меняется от 0 до $2\pi a$, однако, когда мы попытаемся найти пределы интегрирования по y , мы столкнемся с проблемой: t нельзя выразить через x в явном виде. Следовательно, старый способ вычисления площади тут не сработает.

Воспользуемся 1-формами площади. Заметим, что область ветки ограничена кривой циклоиды и осью Ox . Обозначим за C и I циклоиду и ось Ox соответственно, по формуле Грина получим:

$$S = \oint_{C+I} ydx = \int_C ydx + \int_I ydx$$

Так как $y = 0$ во втором интеграле, получаем:

$$\begin{aligned} \int_C ydx &= \int_0^{2\pi} a(1 + \cos t)d(at - a \sin t) = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \frac{6x - 8 \sin x + \sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

□

У нас уже был критерий полного дифференциала, но он не годится для непосредственной проверки того, является ли 1-форма дифференциалом некоторой функции. Поставим перед собой задачу: по 1-форме определить полный дифференциал ли это и, если да, то какой функции?

Теорема 3.38 (Необходимое условие полного дифференциала). Пусть $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ и $w \in C^1$. Тогда, если $w = df$, то

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

Доказательство. Заметим, что, если $w = df$ и $w \in C^1$, то $f \in C^2$, т.е. существуют вторые частные производные функции f и дифференциал f можно записать в координатном представлении.

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Так как $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, получаем, что

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□

Сейчас мы убедимся, что данное условие не является достаточным.

Определение 3.39. Формой Гаусса Θ (в декартовых координатах) называется форма

$$\Theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{dom } \Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Не сложно убедиться в том, что для формы Гаусса выполняются необходимые условия полного дифференциала.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Однако, если мы возьмем за замкнутый контур единичную окружность и вычислим интеграл по замкнутому контуру, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

То есть, критерий полного дифференциала не выполняется и форма Гаусса не является полным дифференциалом.

Заметим так же, что если бы мы воспользовались формулой Грина для проверки критерия, мы бы получили другой ответ:

$$\oint \Theta = \int 0 dx dy = 0$$

Но тут нет противоречия, ведь форма Гаусса не гладкая в нуле, следовательно, нельзя применять формулу Грина.

Рассмотрим представление формы Гаусса в полярных координатах

$$\Theta = d\varphi$$

Лемма 3.40. Пусть γ — кривая, не проходящая через 0 , с началом в p и концом в q . Тогда

$$\int_{\gamma} \Theta = \varphi(q) - \varphi(p)$$

— разность углов с осью Ox радиус векторов v из начала координат в начальную и конечную точку.

Лемма 3.41. $\Theta = d\varphi$ будет полным дифференциалом, если выколоть некоторый луч исходящий из нуля (т.к. никакая кривая не сможет полностью обойти 0).

Определение 3.42. Две кривые $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются *гомотопными*, если существует функция $f : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, такая, что f — непрерывная и $f(x, 0) = \gamma_0(x)$ и $f(x, 1) = \gamma_1(x)$

Определение 3.43. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *односвязным*, если всякий замкнутый контур $\gamma \subseteq M$ гомотопен точке.

Примеры односвязных множеств

1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, сфера — односвязные множества.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{прямая}\}$, тор — не являются односвязным множеством.

Теорема 3.44 (Гипотеза Пуанкаре). *Всякое n -мерное компактное односвязное многообразие без края гомеоморфно n -мерной сфере.*

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 3.45 (Достаточное условие полного дифференциала). *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое и односвязное множество, $w : U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \in C^1$, $w = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, тогда существует функция $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ такая, что $w = df$.*

Доказательство. Проведем для \mathbb{R}^2 .

Пусть $w = adx + bdy$, $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ и пусть $\gamma \subseteq U$ — кусочно гладкий контур, $\gamma \subseteq \partial D$ где $D \subseteq U$. Тогда по формуле Грина:

$$\oint_{\gamma} w = \pm \int_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy$$

следовательно, выполнен критерий полного дифференциала, тогда существует функция $f \in C^1$ такая, что $w = df \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$. □

Допустим, нам дана 1-форма w и известно, что $w = df$. Возникает естественный вопрос: как найти такую функцию f ?

- выберем $x_0 \in U$ и определим, что $f(x_0) := C$.

- возьмем $x \in U$ такую, что $x \neq x_0$ и выберем путь $\gamma \subseteq U$ из x_0 в x тогда

$$f(x) := f(x_0) + \int_{\gamma} w.$$

Алгоритм восстановления функции двух переменных по дифференциалу

Допустим нам нужно найти функцию, такую что ее дифференциал равен w требуемому и в некоторой точке она принимает значение C . При этом функция определена на некотором множестве U .

1. Выбрать точку x_0 из области определения, такая что $f(x_0) = C$.
2. Взять точку x , такую, что $x \neq x_0$ и путь γ , соединяющий x и x_0 лежит в множестве U .
3. Тогда функция F , полученная вычислением криволинейного интеграла второго рода, является искомой

$$F(x) = f(x_0) + \int_{\gamma} w$$

Замечание 3.46. В двумерном случае удобно использовать частный случай этой формулы.

Пусть $w = Pdx + Qdy$ и $x_0 = (x^0, y^0)$ тогда

$$F(x, y) = C + \int_{x^0}^x P(x, y^0)dx + \int_{y^0}^y Q(x, y)dy$$

Замечание 3.47. Для проверки себя, можно восстановить функцию решив дифференциальное уравнение в полных дифференциалах (в потоковой этот метод, скорее всего, не подойдет).

Пример 3.48. Найти функцию $f(x, y)$ такую, что $f(0, 0) = 1$ и

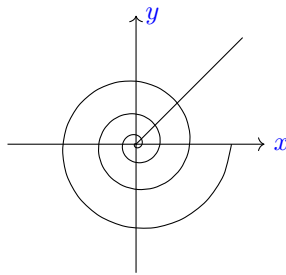
$$df = (x^2 + y^2)dx + (y^2 + 2xy)dy$$

Возьмем за x_0 точку $(0, 0)$, а за x — произвольную точку из области определения.

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= 1 + \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = \int_0^x (x^2)dx + \int_0^y (y^2 + 2xy)dy = \\
 &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(\frac{y^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_0^y = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + xy^2 + 1
 \end{aligned}$$

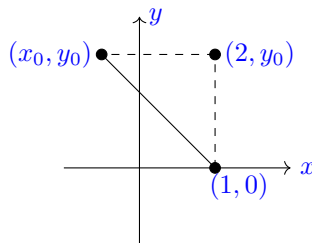
Сейчас рассмотрим восстановление функции по 1-форме в случае, если она является полным дифференциалом некоторой функции.

Пример 3.49. Рассмотрим дифференциальную форму $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.



— плоскость без луча. Если область не односвязная, ее надо сделать односвязной добавлением «связей», линий, соединяющих элементы области.

Восстановим функцию в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0, y = 0\}$.



Выберем точку в области определения. Пусть $f(1, 0) = C$.

$$\int_{(1,0)}^{(2,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y_0,$$

$$\int_{(1,y_0)}^{(x_0,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_1^{x_0} -\frac{y_0 dy}{x^2 + y_0^2} = \begin{cases} y_0 = 0 : 0, \\ y_0 \neq 0 : -\frac{1}{y} \int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\int_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} = \left[t = \frac{x}{y_0}, dt = \frac{1}{y_0} dx \right] \Rightarrow \int_{\frac{1}{y_0}}^{\frac{x_0}{y_0}} \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan \frac{1}{y_0} - \arctan \frac{x_0}{y_0}$$

Таким образом:

$$f(x, y) = f(1, 0) + \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}, & y < 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

— где $f(1, 0)$ — задается.

3.4 Внешние формы второго порядка

Рассмотрим для примера как происходит замена переменной в плоском случае. Пусть $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n) - 2$ -форма, такая что $w = f(x, y)dx \wedge dy$. Проведем замену переменных φ :

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \end{cases}$$

Вычислим оператор переноса:

$$\begin{aligned} \varphi^* w(t, s) &= (f \circ \varphi)(t, s)(x_t dt + x_s ds) \wedge (y_t dt + y_s ds) = \\ &= (f \circ \varphi)(t, s) \cdot \det \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} dt \wedge ds \end{aligned}$$

В операторе переноса возник коэффициент искажения. Заметим, что в отличие от коэффициента искажения при замене переменных в интеграле, в операторе переноса коэффициент искажение возникает без модуля. Его знак зависит от того, меняет ли замена переменных ориентацию (он отрицательный, если замена переменных меняет ориентацию).

Определение 3.50. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда выражение

$$\int_U w = \iint_U f(x, y) dx \wedge dy := \theta(e_x, e_y) \int_U f(x, y) dx dy$$

называется *интегралом 2-формы* в \mathbb{R}^2 , где $\theta(e_x, e_y) = \pm 1$ — ориентация плоскости (e_x, e_y — орты, соответствующие направлению).

Определение 3.51. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — двумерное C^1 -гладкое ориентированное многообразие и $w : M \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда, если $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ — параметризация, то

$$\int_M w := \int_U \varphi^* w = \int_U w(\varphi(t, s)) \langle \varphi_t(t, s), \varphi_s(t, s) \rangle dt \wedge ds$$

будем называть *интегралом 2-формы по поверхности*.

Если $M \subseteq \mathbb{R}^3$ — поверхность, то соответствующие касательные векторы в каждой точке образуют касательную плоскость, а векторы нормали, в свою очередь, образуют прямую. Следовательно, ориентацию можно задать нормалью.

В \mathbb{R}^3 задано правило Буравчика (если поворачиваем от 1 к 2, то 3 смотрит на нас) — ориентация $\theta\langle u, v, w \rangle$. То есть, если на поверхности есть $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$, то $\theta_M(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = \theta\langle \vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle$.

Очевидно, что $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$. Следовательно, $(a, b, c) \simeq ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = w$. Отсюда $w\langle u, v \rangle = (a, b, c)(u \times v)$.

Получим формулу потока векторного поля через поверхность, где $(a, b, c) \cdot \langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle$ — поток вектора (a, b, c) через параллелограмм $\Pi(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$.

$$\begin{aligned} \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_M w\langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \rangle dS = \\ &= \int_M (a, b, c) \cdot \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle dS = \int_M (a, b, c) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Определение 3.52. Форма Гаусса в \mathbb{R}^3 :

$$\Theta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Лемма 3.53. В сферических координатах форма Гаусса имеет вид

$$\Theta = d\theta \wedge d\varphi.$$

Доказательство. Проверяется непосредственной подстановкой сферической замены и остается в качестве упражнения читателю. \square

Геометрическая интерпретация формы Гаусса $\int \Theta$ — телесный угол под которым видна поверхность из начала координат.

3.5 Внешний дифференциал 1-формы

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Тогда $df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — линейная функция, а $df : x \mapsto df(x)$ — 1-форм. напомним, что $d^2 f(x) \langle u, v \rangle = d(df(x))$ — билинейная симметричная форма, такая что $d^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

В свою очередь, при $w : U \rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^n$, dw так же является билинейной формой, но не обязательно симметричной.

$$dw \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = d(w \langle \vec{u} \rangle) \langle \vec{v} \rangle = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} w \langle \vec{u} \rangle$$

Форма w в координатном представлении имеет вид $w = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$, следовательно

$$dw(x) \langle u \rangle = \sum_{i=1}^n da_i(x) u_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i dx_j$$

Из этого следует, что

$$dw(x) \langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} u_i v_j = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \vec{u}$$

То есть, всякая билинейная форма есть сумма симметричной и кососимметричной (первое и второе слагаемые соответственно), где $l^T \langle u, v \rangle = l \langle v, u \rangle$:

$$l = \frac{l + l^T}{2} + \frac{l - l^T}{2}$$

Определение 3.54. Внешним дифференциалом 1-формы называется кососимметричная часть полного дифференциала, то есть du сопоставляет 1-форме — 2-форму.

$$d : C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow C^r(U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

Лемма 3.55. Если $w = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, то

$$dw = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

Теперь рассмотрим запись формулы Грина и формулы Ньютона-Лейбница в терминах внешнего дифференциала.

Теорема 3.56 (Формула Грина в терминах внешнего дифференциала). Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — область с кусочно-гладкой границей и $w \in C^1(U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$. Тогда верна формула Грина

$$\oint_{\partial U} w = \int_U d_{\text{внешний}} w$$

формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\partial \gamma} f = f(q) - f(p) = \int_{\gamma} df$$

3.6 Ротация векторного поля

Определение 3.57. Пусть \bar{v} — векторное поле в плоскости. Ротация (вихрь) векторного поля \bar{v} в точке (x_0, y_0)

$$\text{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_C \bar{v} d\bar{r}, \text{ где } C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Лемма 3.58. Для C^1 -гладкого векторного поля $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$ верно, что

$$\text{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. Пусть $C := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $S := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.

$$\oint_C \bar{v} d\bar{r} = \oint_C (a, b)(dx, dy) = \oint_C a dx + b dy =$$

воспользуемся формулой Грина

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \left(\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\
&= \iint_S \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + o(1) \right] dx dy = \\
&= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \pi r^2 + \iint_B o(1) dx dy
\end{aligned}$$

Определение 3.59 (формула Грина).

$$\oint_{\partial U} \bar{v} d\vec{r} = \iint_U \mathbf{rot}_{x,y} \bar{v} dx dy.$$

□

Как известно, для функций одной переменной у нас есть обычная производная. А вот для функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — производных уже невероятное количество, по всем направлениям и, чтобы «обуздать» эту силу мы ввели специальный оператор $df(x_0) : \vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$. Прделаем то же самое с многомерным векторным полем.

Пусть \vec{v} — векторное поле на $U \subseteq \mathbb{R}^n$, если $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n$ и $l_1 \nparallel l_2$ определим,

$$\mathbf{rot}_{e_1, e_2} \vec{v}(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \vec{v} d\vec{r}$$

где $\gamma_r = \{x_0 + r \cos t \cdot l_1 + r \sin t \cdot l_2, t \in [0, 2\pi]\}$.

Определение 3.60. Формой ротора назовем функцию

$$\mathbf{rot} \vec{v}(x_0) : e_1, e_2 \mapsto \mathbf{rot}_{e_1, e_2} \vec{v}(x_0)$$

— кососимметричная билинейная форма.

Свойства ротации.

Свойство 1°. Линейность

пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, \bar{u}, \bar{v} — векторные поля в плоскости, тогда $\mathbf{rot}_{x,y}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \mathbf{rot}_{x,y} \bar{u} + \beta \mathbf{rot}_{x,y} \bar{v}$.

Свойство 2°. Антисимметричность

пусть \bar{v} — векторное поле в плоскости, тогда $\mathbf{rot}_{x,y} \bar{v} = -\mathbf{rot}_{y,x} \bar{v}$.

3.7 Внешние формы высших порядков

Определение 3.61. Внешней алгебраической формой порядка $k \in \mathbb{N}$ над \mathbb{R}^k называется функция $l : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

1. l — k -линейная функция (т.е. линейна по каждому из k аргументов),
2. l — кососимметричная функция, т.е. если $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ — перестановка, то $l\langle u_{\sigma_1}, \dots, u_{\sigma_k} \rangle = \text{sgn } \sigma \cdot l\langle u_1, \dots, u_k \rangle$

Пространство алгебраических форм порядка k над \mathbb{R}^n будем обозначать как $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.62. Пусть даны k штук 1-форм $l_1, \dots, l_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ результат их внешнего произведения будет являться k -формой

$$(l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_k)\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \det \begin{pmatrix} l_1\langle u_1 \rangle & l_1\langle u_2 \rangle & \dots & l_1\langle u_k \rangle \\ l_2\langle u_1 \rangle & l_2\langle u_2 \rangle & \dots & l_2\langle u_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_k\langle u_1 \rangle & l_k\langle u_2 \rangle & \dots & l_k\langle u_k \rangle \end{pmatrix}$$

На пространстве k -форм над \mathbb{R}^n $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ можно ввести базис: $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Размерность пространства $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ это число перестановок из n по k : $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k$.

Для упрощения записи введем специальное обозначение

Определение 3.63. «Шапкой-невидимкой» называется операция $\widehat{}$ определенная как

$$dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Стандартный базис $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ это $\{(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n\}_{j=1, \dots, n}$ — базис для $(n-1)$ -форм.

К примеру для $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ базисом будет набор $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$.

Мультииндексные обозначения

Для упрощения записей будем использовать мультииндексные обозначения. Определим $M(n, k) := \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$, число элементов $M(n, k)$ равняется C_n^k .

Тогда k -форма l будет записываться как $l = \sum_{I \in M(n, k)} a_I dx_I$, где $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

С помощью мультииндексных обозначений доопределим внешнее произведение внешних форм

$$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

Пусть $w^k = \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I$ и $w^l = \sum_{J \in M(n,l)} b_J dx_J$. Тогда $w^k \wedge w^l = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$.

Пример 3.64. Пусть даны две формы $2dx + 3dy + 4dz$ и $5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy$. Тогда

$$\begin{aligned} (2dx + 3dy + 4dz) \wedge (5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy) = \\ 0 + 0 + 15dy \wedge dz \wedge dx + 0 + 0 + 24dz \wedge dx \wedge dy = \\ 39dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

т.к. $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Свойства внешнего произведения \wedge .

Свойство 1°. ЛИНЕЙНОСТЬ

Свойство 2°. КОСОСИММЕТРИЧНОСТЬ

Для любых w^k, w^l выполнено $w^k \wedge w^l = (-1)^{kl} \cdot w^l \wedge w^k$.

Определение 3.65. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, функция $w^k : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ называется внешней дифференциальной формой порядка k (k -формой).

3.7.1 Замена переменной в k -форме

Определение 3.66. Пусть $w : V \rightarrow \Lambda^k, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\varphi : U \rightarrow V$ – C^1 -диффеоморфизм, тогда *операция переноса*

$$\varphi^* : (V \rightarrow \Lambda^k) \rightarrow (U \rightarrow \Lambda^k)$$

определяется следующим образом:

$$(\varphi^* w)(x) \langle u_1, \dots, u_k \rangle = w(\varphi(x)) \langle D\varphi_x \langle u_1 \rangle, \dots, D\varphi_x \langle u_k \rangle \rangle$$

то есть

$$w(y) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in M(n,k)} a_I(y) dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

замена $y = \varphi(x)$

$$\varphi^*(w)(x) = \sum_{I \in M(n,k)} a_I(\varphi(x)) dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x)$$

Свойства операции переноса φ^* .

Свойство 1°. ЛИНЕЙНОСТЬ для любых форм w_1, w_2 и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что $\varphi^*(\alpha_1 w_1 + \beta w_2) = \alpha_1 \varphi^* w_1 + \beta \varphi^* w_2$

Свойство 2°.

пусть ψ^* и φ^* — операции переноса. Тогда $\psi^* \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*$

Свойства внешнего произведения \wedge .

Свойство 3°.

пусть φ^* — операция переноса, w^k, w^l — формы. Тогда $\varphi^*(w^k \wedge w^l) = \varphi^* w^k \wedge \varphi^* w^l$.

Рассмотрим n -форму над \mathbb{R}^n $w^n = f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$, пусть $y = \varphi(x)$. Тогда $\varphi^* w^n = f(\varphi(x)) \det D\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Теперь выясним, как интегрировать n -форму по области в \mathbb{R}^n .

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, Θ — ориентация в \mathbb{R}^n , $w : U \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ — непрерывна, $w(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Положим

$$\int_U w = \int_U f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \Theta(l_1, \dots, l_n) \int_U f(x) dx_1 \dots dx_n$$

3.7.2 Интеграл k -формы по ориентированному k -мерному многообразию

TODO

Определение 3.67. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — k -мерное C^1 -гладкое ориентированное многообразие, а $w : M \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ — непрерывная k -форма. Тогда, если $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ — параметризация M , тогда интеграл k -формы по ориентированному k -мерному многообразию вычисляется как

$$\int_M w := \int_U \varphi^* w$$

Определение 3.68. Пусть $w : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \in C^1$ и $w(x) = \sum_{I \in H(n,k)} a_I(x) dx_I$

внешним дифференциалом k -формы w назовем дифференциальную $(k+1)$ -форму $dw : U \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ определяемую следующим образом:

- при $k = 0$ это дифференциал функции (1-форма),

- при $k > 0$ определим покоординатно

$$dw(x) = d\left(\sum_I a_I(x)dx_I\right) := \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Свойства внешнего дифференциала.

Свойство 1°. ЛИНЕЙНОСТЬ

Для любых w_1, w_2, α, β выполнено

$$d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha dw_1 + \beta dw_2$$

Свойство 2°.

$$d(w^k \wedge w^l) = dw^k \wedge w^l + (-1)^k w^k \wedge dw^l$$

Доказательство. Пусть w^k и w^l , такие, что

$$\begin{aligned} w^k &= \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I & w^l &= \sum_{I \in M(n,l)} a_I dx_I \\ w^k \wedge w^l &= \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(w^k \wedge w^l) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} (a_I db_J + b_J da_I) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

Осталось заметить, что первое слагаемое это в точности

$$(-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J = (-1)^k \wedge dw^l$$

А второе, в свою очередь, в точности

$$\sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge (b_J dx_J) = dw^k \wedge w^l$$

□

Свойство 3°. ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ С ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

Доказательство. Для 0,1-форм уже доказано. Докажем для форм высшего порядка по индукции. Пусть для k -форм утверждение выполнено, докажем для $(k+1)$ -форм.

С одной стороны для $w^{k+1}(y) = a(y)dy_i \wedge dy_J$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^* dw^{k+1} &= \varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J - a(y)dy_i \wedge d(dy_J)) = \\ &= \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}d(\varphi^* w^{k+1}) &= d(\varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J)) = d(\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J) = \\ &= d\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge d(\varphi^* dy_J)\end{aligned}$$

Применив предположение индукции, получим

$$\varphi^*(d(a(y)dy_i)) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^*(d(dy_J)) = \varphi^*(d(a(y)) \wedge dy_i \wedge dy_J)$$

□

Определение 3.69. k -мерное многообразие называется *замкнутым*, если это компакт без края.

Если M — k -мерное замкнутое многообразие и w^k — k -форма на M , то

$$\oint_{\partial M} w^k := \int_M w^k$$

Теорема 3.70 (Формула Стокса-Пуанкаре). Пусть M — кусочно-гладкое k -мерное компактное ориентированное многообразие, w — C^1 -гладкая $(k-1)$ -форма на M , тогда

$$\oint_{\partial M} w = \int_M dw$$

Доказательство. Разобьем доказательство данной формулы на два шага. Для начала докажем ее для случая куба в \mathbb{R}^n , потом, имея доказательство для куба, обобщим его на случай произвольного многообразия.

ШАГ 1. Проведем доказательство для куба в \mathbb{R}^n . Зададим куб как $[-a, a]^n$ и заметим, что он является n -мерным многообразием в \mathbb{R}^n и у него есть $2n(n-1)$ -мерных граней

$$\begin{cases} -a \leq x_1 \leq a \\ -a \leq x_2 \leq a \\ \dots \\ -a \leq x_n \leq a \end{cases}$$

Пусть w — $(n-1)$ -форма, заданная на кубе, тогда

$$w(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dw(x) &= \sum_{j=1}^n da_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} (-1)^{j+1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Вычислим интеграл от dw по кубу

$$\int_{[-a, a]^k} dw = \int_{[-a, a]^k} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

С другой стороны

$$\int_{x_j=a} w = \int_{x_j=a} \sum_{j=1}^n a_j(x) (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Что равно

$$\begin{aligned}
 \int_{x_j=a} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\
 = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = \\
 = - \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, -a, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{x_j=a} w + \int_{x_j=-a} w = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a} \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n$$

Следовательно

$$a_j \Big|_{x_j=a} - a_j \Big|_{x_j=-a} = \int_{-a}^a \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) dx_j$$

ШАГ 2. Пусть $x \in M$ тогда существует U_x – окрестность точки x и существует C^1 -диффеоморфизм $\varphi_x : U_x \rightarrow \varphi_x(U_x)$ на окрестность нуля в \mathbb{R}^n , такой что $\varphi_x(x) = 0$ и

$$\varphi_x(U \cap M) = \begin{cases} \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{n-k}), \\ \varphi_x(U) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\}^{n-k}). \end{cases}$$

Причем U_x мы выберем квадратной, так как если существует какая-либо окрестность точки, то в нее всегда можно вписать квадрат.

Пусть $Q_x \subset \varphi(U_x)$ – открытый k -мерный куб с центром в нуле. Для любого такого куба формула уже доказана в силу 1 шага. Все многообразие M покрывается $\varphi_x^{-1}(Q_x)$, т.е. образами кубов. Следовательно, существует конечный набор Q_1, \dots, Q_m соответствующий x_1, \dots, x_m , такой что $\varphi_1^{-1}(Q_1), \dots, \varphi_m^{-1}(Q_m)$ – покрывает M .

Используем «разбиение единицы». Пусть существует набор гладких функций $\psi_1, \dots, \psi_m : M \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $\psi_j(x) > 0$ тогда и только тогда,

когда $x \in \varphi_j(Q_j)$ и $\sum_{j=1}^m \psi_j(x) \equiv 1$. Такой набор всегда существует, потому что мы можем его построить.

Построим «разбиение единицы»:

Существует функция $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ определенная как

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(x) > 0, & |x| < a, \\ \chi(x) = 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Тогда $\chi^k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ это $\chi^k(x_1, \dots, x_k) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \dots \cdot \chi(x_k)$ Имеем

$$\chi^k(x) = \begin{cases} \chi^k(x) > 0, & |x|_\infty < a, \\ \chi^k(x) = 0, & |x|_\infty \geq a. \end{cases}$$

Переносом системы координат получим эту функцию, заданную на многообразии: $\varphi_j^* \chi^k : M \rightarrow \mathbb{R}$ при этом $\chi^k(x) > 0 \iff x \in \varphi_j^{-1}(Q_j)$. Получаем, что сумма φ_j неотрицательна, осталось нормировать.

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi_j^* \chi^k(x)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i^* \chi^k(x)}$$

$\varphi_j : \varphi_j^{-1}(Q_j) \rightarrow Q_j$ — перенос образа куба в куб.

$$\begin{aligned} \int_M dw &= \int_M 1dw = \int_M \sum_{j=1}^m \psi_j(x) dw(x) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j(x) dw(x) = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw). \end{aligned}$$

Используем доказанную ранее формулу Стокса для случая куба:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w &= \int_{\partial Q_j} \varphi_j^*(\psi_j w) = \int_{Q_j} d\varphi_j^*(\psi_j w) = \int_{Q_j} \psi_j^* d(\psi_j w) = \\ &= \int_{Q_j} \varphi_j^*(d\psi_j \wedge w + \psi_j dw) = \int_{Q_j} \psi_j^*(d\psi_j \wedge w) + \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw) = \\ &= \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw$$

При этом левая часть этого выражения равна

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \sum_{j=1}^m \int_{\partial \varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j w = \int_{\partial M} w$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w = \sum_{j=1}^m \int_M d\psi_j \wedge w = \int_M d1 \wedge w \equiv 0$$

Второе слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw = \sum_{j=1}^m \int_M \psi_j dw = \int_M dw$$

Следовательно,

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

□

Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре:

1. Если $k = 1$, то M — кривая, а w — функция и формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Ньютона-Лейбница.
2. Если $n = 2$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Грина.
3. Если $n = 3$ и $k = 3$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Гаусса-Остроградского.
4. Если $n = 3$ и $k = 2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Кельвина-Стокса.

3.8 25.04.19

Пусть поверхность S окружает тело V в \mathbb{R}^3 . Тогда объем тела V можно вычислить проинтегрировав по внешней стороне поверхности одну из форм:

$$x dy \wedge dz \quad y dz \wedge dx \quad z dx \wedge dy$$

По формуле Стокса

$$\oint_S x dy \wedge dz = \int_V dx \wedge dy \wedge dz = \pm |V|$$

Чтобы значение было положительно, нужно согласовать ориентацию так, чтобы она определялась с помощью нормали по внешней стороне.

В общем случае, формами объема в \mathbb{R}^n являются формы вида

$$(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \quad j = 1 \dots n$$

А так же форма

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Определение 3.71. Непрерывная k -форма называется *точной*, если она является внешним дифференциалом некоторой C^1 -гладкой $(k-1)$ -формы θ , т.е. $w = d\theta$.

Определение 3.72. C^1 -гладкая форма w называется *замкнутой*, если $dw = 0$.

Как мы знаем, первообразную можно восстановить с точностью до константы. В случае с формами роль констант выполняют замкнутые формы, т.е. форму можно восстановить по дифференциалу с точностью до замкнутой формы.

Теорема 3.73 (Первая теорема Пуанкаре). *Все (гладкие) точные формы являются замкнутыми, т.е. если w — C^1 -гладкая точная форма, то $dw = 0$. Так же это утверждение можно переформулировать как $d \circ dw = 0$, т.е. внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

Доказательство. Так как дифференциал линеен, достаточно доказать только для одного из слагаемых.

Пусть $\theta = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = adx_I$. Тогда

$$d\theta = d(adx_I) = da \wedge dx_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Отсюда

$$d(d\theta) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

Если $i = j$, то слагаемые вида $dx_i \wedge dx_i$ равны нулю, с другой стороны, если $i \neq j$, то $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ и это слагаемое равно симметричному слагаемому с противоположным знаком, так как

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}$$

Следовательно, $d(d\theta) = 0$. \square

Определение 3.74. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется k -связным, если каждое замкнутое многообразие, порядок которого меньше или равен k , можно стянуть в точку.

В частности, 0-связное множество представляет собой набор точек, каждую пару которых можно соединить кривой. Так же вводят понятие (-1) -связного множества, что обозначает, что она не является k -связным ни для какого k .

Определение 3.75. Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно некоторой точки x_0 , если любую точку $x \in U$ можно соединить с x_0 отрезком.

Очевидно, что, если множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ звездное, то оно k -связное для любого $k = 1 \dots n$.

Определение 3.76. Пусть U — звездное множество. Определим оператор $I : C^r(U \rightarrow \Lambda^k) \rightarrow C^{r+1}(U \rightarrow \Lambda^{k-1})$, так, что каждой форме $w = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ сопоставляется

$$I(w) = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Определение 3.77. Форма w называется кочотной, если существует форма θ , такая что $w = I\theta$.

Теорема 3.78. Для всякой C^1 -гладкой k -формы w на звездной области выполнено

$$w = dIw + Idw$$

Доказательство. Пусть $w = a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, вычислим все выражения, которые есть в теореме.

$$\begin{aligned} Iw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dIw &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} d \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n x_{i_\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ dw &= da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ Idw &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} dt \right] x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Если мы сложим $I dw$ и $dI w$, двойные суммы сократятся, и проинтегрировав по частям и применив формулу Ньютона-Лейбница, мы получим

$$\begin{aligned} dI w + I dw &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \left(\int_0^1 \left[k t^{k-1} a(tx) + \sum_{i=1}^n t^k \frac{\partial a}{\partial x_j} x_j \right] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t^k a(tx) \right] dt \right) = w \end{aligned}$$

□

Следствие 3.79 (Вторая теорема Пуанкаре). *В звездной области всякая замкнутая форма точна.*

3.9 Дивергенция векторного поля

Пусть в \mathbb{R}^n задана $(n-1)$ -мерная ориентированная поверхность M . Тогда поток векторного поля \vec{v} через поверхность M вычисляется как

$$\Phi = \int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1}$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к M в точке x , согласованный с ориентацией.

Эту задачу можно решить используя дифференциальные формы. Для начала, рассмотрим для примера случай в \mathbb{R}^3 . Как известно, $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

$$e_1 \simeq dy \wedge dz$$

$$e_2 \simeq dz \wedge dx$$

$$e_3 \simeq dx \wedge dy$$

Пусть $\vec{v}(x, y, z)$ — векторное поле, такое, что

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Phi = \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

Убедимся, что это выражение совпадает с исходным. Пусть $\varphi : U \rightarrow M$ — параметризация поверхности M , такая что

$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

Пусть φ_1, φ_2 — касательные векторы, тогда

$$\begin{aligned} \int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy &= \int_U (ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \\ &= \int_U \det \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ b & y_1 & y_2 \\ c & z_1 & z_2 \end{pmatrix} dt ds = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} \cdot J_\varphi(t, s) dt \wedge ds \end{aligned}$$

Проведя обратную замену, получим, что

$$\int_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int_U (a, b, c) \cdot \vec{n} dS^2$$

В пространстве \mathbb{R}^n , $e_j \simeq (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$. Из этого получаем выражение в общем случае при $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)$

$$\int_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_M \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Напомним, что через S_r и B_r мы обозначаем сферу и шар радиуса r соответственно.

Определение 3.80. Дивергенция векторного поля \vec{v} в точке x определяется как

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} dS^{n-1}$$

где, при вычислении потока \vec{v} через сферу S_r , интеграл берется по внешней стороне сферы.

Лемма 3.81 (Оператор дивергенции в декартовых координатах). Для C^1 -гладкого векторного поля v имеет место формула

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)$$

Доказательство. По формуле Стокса имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} &= \int_{S_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} da_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

□

Теорема 3.82 (Формула Гаусса-Остроградского). Пусть V — тело (n -мерное компактное многообразие в \mathbb{R}^n), тогда

$$\int_{\partial V} \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int_V \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$$

Определение 3.83. Векторное поле \vec{v} называется *бездивергентным*, если $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Scal}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \operatorname{Scal}(\mathbb{R}^3) \\ \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. \\ \{U \rightarrow \Lambda^0\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^1\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^2\} & \xrightarrow{d} & \{U \rightarrow \Lambda^3\} \end{array}$$

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

То есть, на языке дифференциальных форма, каждой операции векторного анализа соответствует дифференциал.

В плоском случае можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \nabla \wedge (a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix} \\ \mathbf{div}(a, b) &\simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \nabla \cdot (a, b)\end{aligned}$$

Определение 3.84. Пусть \vec{v} — векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда \vec{v} называют *вихревым*, если существует \vec{u} — векторное поле такое, что $\vec{v} = \mathbf{rot} \vec{u}$. В этом случае, \vec{u} называют векторным потенциалом векторного поля \vec{v} .

Леммы ниже являются следствиями первой и второй теоремы Пуанкаре соответственно.

Лемма 3.85. Вихревое векторное поле всегда бездивергентно, т.е. $\mathbf{div} \mathbf{rot} \vec{v} = 0$.

Лемма 3.86. Если векторное поле \vec{v} в звездной области в \mathbb{R}^3 бездивергентно, то она вихревое.

Теорема 3.87. В звездной области всякое трехмерное векторное поле \vec{v} раскладывается в сумму вихревого и потенциального.

Доказательство. Следует из теоремы 3.78. □

Определение 3.88. Оператором Лапласа называется оператор $\Delta : Scal \rightarrow Scal$ такой, что

$$\Delta = \nabla^2 = \mathbf{div} \mathbf{grad}$$

В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = \mathbf{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Если $\Delta f > 0$, то $f(x)$ больше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x .

Если $\Delta f < 0$, то $f(x)$ меньше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x .

Если $\Delta f = 0$, то $f(x)$ приблизительно равна своему среднему значению на маленькой сфере с центром в точке x .

4 Билеты II потоковой

4.0.1 Вариант -2

1. Мера площади на многообразии.

- (а) Определите меру площади на гладком k -мерном многообразии.

Пояснение: [1.40](#).

- (b) Пусть M — гладкое k -мерное многообразие. Докажите, используя данное вами определение, что для всякого $\lambda > 0$ выполнено $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$.

Пояснение: [1.1](#)

- (c) Многообразие какой размерности задаёт параметрическая система

$$\begin{cases} x = t \cos \theta, & t \in (0, 2), \\ y = t \sin \theta, & \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ z = \theta? \end{cases}$$

Вычислите площадь этого многообразия.

Пояснение: [1.44](#).

2. Индуцированная ориентация края.

- (а) Сформулируйте понятие ориентации на многообразии и ориентируемого многообразия. Всякое ли многообразие ориентируемо? Как классы многообразий ориентируемы?

Пояснение: [3.11](#), [3.14](#), [3.15](#).

- (b) Сформулируйте определение индуцированной ориентации края ориентированного многообразия.

Пояснение: [3.18](#).

- (c) Изобразите верхнюю полусферу, заданную системой $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. Что из себя представляет край этой полусферы? Какое направление обхода края индуцирует нижняя сторона полусферы и почему?

Пояснение: [3.20](#).

4.0.2 Вариант -1

1. Ориентация на многообразии.

- (a) Сформулируйте понятие ориентации в \mathbb{R}^n . Сколько ориентаций существует в \mathbb{R}^n и почему? Как задаётся стандартная ориентация в \mathbb{R}^3 ?

Пояснение: 3.10.

- (b) Сформулируйте понятие ориентации на многообразии и ориентируемого многообразия. Всякое ли многообразие ориентируемо? Какие классы многообразий ориентируемы?

Пояснение: 3.11, 3.14, 3.15.

- (c) Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ (двумерная) гладкая ориентируемая поверхность, $x \in S$, и \vec{n} — заданная нормаль к S в точке x . Как задаётся ориентация S , согласованная с этой нормалью?

Пояснение: разбирайтесь сами.

2. Формула Ньютона — Лейбница.

- (a) Сформулируйте определение интеграла 1-формы по кривой. Докажите, что интеграл линеен.

Пояснение: 3.23, 3.3.

- (b) Сформулируйте и докажите формулу Ньютона — Лейбница для 1-форм.

Пояснение: 3.27.

- (c) Опишите алгоритм восстановления функции по дифференциалу. Найдите $f(x, y)$ такую, что $f(0, 0) = 1$ и

$$df = (x^2 + y^2)dx + (y^2 + 2xy)dy.$$

Пояснение: 3.46, 3.48.