Лекции
по математическому анализу:
многообразия, дифференциальные формы

4 марта 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Содержание

1 Многообразия

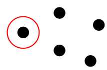
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

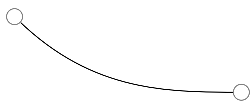
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Виды многообразий:

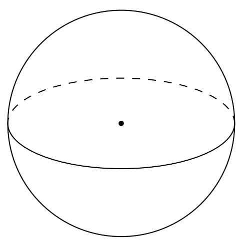
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



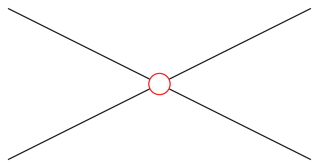
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых – многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей – многообразие,

- Плоскость и прямая – не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания $k-$мерных многообразий.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – окрытое множество, тогда U является n-мерным многообразием.*

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.
Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ – сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. $\square$

Теорема 1.4 (О графике)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}, f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ - C^r-гладкое n-мерное многообразие в R^{n+1}.*

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Отображение Φ является C^r-диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т.е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$ $\square$

Теорема 1.5 (О локальном вложении)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U \operatorname{rank} Df(t^0)) = k$, то существует U-окрестность t^0, такая что $f(U)$ является C^r-гладким k-мерным многообразием.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ - базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \ldots + s_n v_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k} v_{k+1}, \ldots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W - окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \to \Phi(W) - C^r$-диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V - окрестность x_0 в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times 0^{n-k}$.

□

Определение 1.6. Пусть x^0 - решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 - регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0)$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

В некоторой окрестности x^0:

$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \ldots, x_{n-k})$

$\ldots$

$x + n = g_n(x_1, \ldots, x_{n-k})$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$x_1 = x_1$
$\dots$
$x_k = x_k$
$x_{n-k+1} = g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k})$
$\dots$
$x + n = g_n(x_1, \dots, x_{n-k})$

$\square$

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k > 0\}$ - верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k < 0\}$ - нижнее полупространство).

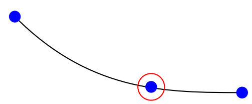
Определение 1.9. Пусть $V \subseteq R^k$ - окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - внутреняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 - крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$

2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) - это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окресности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M- многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ - краевая точка $M\}$ - множество краевых точек многообразия M.

Теорема 1.12 (О крае)**.** *Пусть M - C^r-гладкое k-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r-гладким k-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, 0, \dots, 0)$. Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ - краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание - $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ - выполнено определение многообразия. $\square$

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *- открытое множество,* $f_1, \dots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$*,* $f_i \in C^r \ \forall i \leq k$ *и* $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k + 1$*, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1} \end{cases}$$

представляет собой C^r*-гладкое* $(n-k)$*-мерное многообразием с краем (внутрение точки - решение строгого неравенства, край - решение* $(k+1)$ *уравнений).*

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = a_{k+1} \end{cases}$$

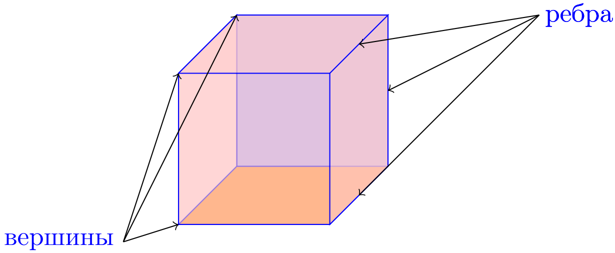
задает $(k-1)$ мерную поверхность - край многообразия. $\square$

Определение 1.14. Множество $M \in \mathbb{R}^k$ называется k-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. $M - k$-мерное топологическое многообразие.

2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ - гладкое k-мерное многообразие, а Z_i - кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k - 1$.

Пример 1.15. Куб.

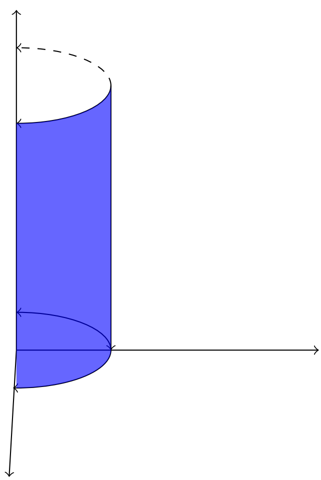


Теорема 1.16. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *- открытое множество,* $f_1, \dots, f_k, \dots, f_{k+l} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r \; \forall\, i \leq k+l$ *и* $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = a_k \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+1} \\ \dots \\ f_{k+l}(x_1, \dots, x_n) \geq a_{k+l} \end{cases}$$

представляет собой C^r*-гладкое* $(n-k)$*-мерное многообразием с краем.*

Пример 1.17. в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.18. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ.

Определение 1.19. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M, т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.20. *Пусть $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ - параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - C^1-диффеоморфизм. Показать, что если v - вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a,b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v\rangle$ - вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0.*

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0)\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v\rangle$$

□

Лемма 1.21. *Колинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0$ $\lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.*

Доказательство. TODO □

Теорема 1.22 (О множестве касательных векторов)**.** *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-гладкое k-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*
2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. По определению k-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \implies \Gamma'(t) == (x'_1(t), \ldots, x'_k(t), 0, \ldots, 0)$.

$\Gamma'(t) = \Phi(\gamma(t)) = D\Phi_{\gamma(t)}\langle \gamma'(t)\rangle$ - линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.23. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.24. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^n$ *и* $x_0 \in M$, *тогда* $\dim M = k$, $\dim T_{x_0}M = k$, $\dim N_{x_0}M = n - k$.

Теорема 1.25 (О базисе касательного пространства)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *- открытое множество,* $f : U \to \mathbb{R}^k$, $f \in C^r$. *Тогда, если* $M = f(U)$ *- многообразие и* $\operatorname{rank} Df = k$, *то* $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0)\}$ *- базис в* $T_{f(t_0)}M$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in U$, определим $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ - кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t_0: $\gamma_j'(t_0) = \frac{d}{dt}f(t_0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. □

Теорема 1.26. *Пусть многообразие* M *задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

и $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \le k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество, а так же* $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, *тогда система уравнений*

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

задает $T_{f(t_0)}M$, *а* $\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_k(x_0)\}$ *базис в* $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle = \nabla f_j(x_0)\cdot\vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.27. Пусть M, N – дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(t_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.28 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ - дифференцируема и x_0 - её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f\mid_\gamma x_0$ - экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ - k-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f\mid_M$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f, то $df\mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Теорема 1.30 (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 - условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1\nabla\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k\nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. $\square$

Лемма 1.31 (Правило дифференцирования вдоль кривой).

Пусть $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество и* $\gamma : [a, b] \to U \in C^2$ *– кривая. Тогда*

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f\circ\gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = d^2 f(x)\langle\vec{v}\rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$. □

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.32 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа). *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \to \mathbb{R} \in C^2$, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$ *– всюду, то функция Лагранжа* $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \dots - \lambda_k\varphi_k(x)$ *если* $dL(x_0,\lambda_0) = 0$, *то при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) > 0$ *– достигает минимума, при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) < 0$ *– максимума.*

Доказательство. Пусть $dL(x_0,\lambda_0) = 0, d_x^2 L(x_0, \lambda_0) \mid_{T_x M\times T_x M} > 0$.

$dL(x_0,\lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla\varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0} M \iff df_{x_0} \mid_{T_{x_0} M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \in C^2, \gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f\circ\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. По лемме 1.31 $(f\circ\gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.
$(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0}\langle\gamma'(0)\rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1 \varphi_1(\gamma(t)) - \ldots - \lambda_k \varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + d_x L \langle \gamma''(t) \rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f \circ \gamma)'(0) = 0, (f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0. Следовательно, x_0 – точка минимума для $f\,|_M$. $\square$

Пример 1.33. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1 v_1 + \ldots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \ldots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \ldots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} = A^T A$ получаем: $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L |E| = |\det L||E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \to 0} \frac{|\varphi(Q(x,r))|}{|Q(x,r))|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E, мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int\limits_E J_{\varphi(x)}$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.34 (Объем k-мерного параллепипеда)**.** *Пусть* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. *Тогда* $|\Pi(v_1, \ldots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. *Обозначив за* $A = [v_1, \ldots, v_n]$, *это выражение можно записать ввиде* $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k-мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π.

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{kj}, 0, \ldots, 0)^T$.

Заметим, что ортагональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \ldots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{где } \theta - k \times k \text{матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det(QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.35. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцоц и $M(n,k) = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из $i_1, i_2, \ldots, i_k$ строк матрицы A.

Теорема 1.36 (Формула Бине-Коши)**.** *Пусть* A *– матрица, имеющая из* n *строк и* k *столбцов, тогда* $\det A^* A = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$-матрицы, тогда $\det A^* B = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \ldots; u_n]$ и $B = [v_1, \ldots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k\rangle = \sum_{I\in M(n,k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ????).

$$L_1\langle e_{i1},\ldots,e_{ik},e_{j1},\ldots,e_{jk}\rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1},\ldots,e_{ik},e_{j1},\ldots,e_{jk}\rangle$$

□

Следствие 1.37. *Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что $\operatorname{rank} L = k \le n$. Тогда для каждого измеримого множества A, $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^*L}$.*

Следствие 1.38. *Пусть Π – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^k \to \Pi$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x)dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.*

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^Tv = \langle v,v\rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A, получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k-мерное C^1-гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1,\ldots,t_k) \\ \vdots & \qquad (t_1,\ldots,t_k) \in U \\ x_n = \varphi_n(t_1,\ldots,t_k) \end{cases}$$

Определим меру k-мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M.

Определение 1.39. Пусть $E \subseteq U \to \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|.|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int\limits_E J_\varphi(t)dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.40. *Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - различные параметризации многообразия, такие что* $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} D\psi = k$. *Тогда* $\int\limits_U J_\varphi(t)dt = \int\limits_V J_\psi(t)dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ - отображение между U и V.

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ – C^1-диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\int\limits_V \sqrt{\det D\psi^*(y)D\psi(y)}dy = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$|\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)|dx = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x))D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$\sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)}dx$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определитей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. $\square$

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k:

1. Счетная аддитивность.

   Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ – не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup M_i) = \sum\limits_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k.

Пример 1.41. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k и формулы Бине-Коши.

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t) D\gamma(t)} = \sqrt{{x'}_1^2 + \ldots + {x'}_n^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$\square$

Определение 1.42. Мера угла – длина дуги окружности с центром в начале угла.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n-мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}\right)_{n \times (n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

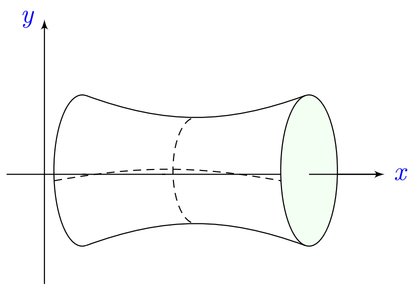
$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx$$

Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

Доказательство. TODO □

Пример 1.43 (Вывод частной формулы из общей)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox.

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ). Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \\ z = f(x)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \to \mathbb{E}$ – измеримая по S^k. Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f\, dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x)dx$, получаем,

$$\int_M f(y)dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то
$$\int_M (\alpha f + \beta g)dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$
2. монотонность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $f \leq g$, то
$$\int_M f dS^k \leq \int_M g dS^k.$$
3. аддитивность по области определения: если $f : M \to \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то
$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int\limits_{M_1} f dS^k + \int\limits_{M_2} f dS^k.$$
4. ограниченность: если $f : M \to \mathbb{E}$, то
$$\left| \int_M f dS^k \right| \leq \int_M |f| dS^k.$$