Лекции по математическому анализу: многообразия, дифференциальные формы

27 марта 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Содержание

1 Многообразия

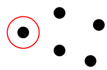
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

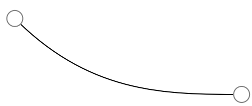
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

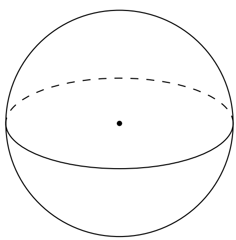
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



3. Поверхности ($k = 2$).

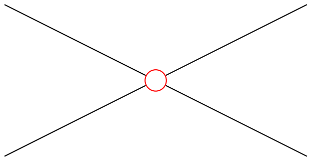


Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,

- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания k-мерных многообразий.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, тогда U является n-мерным многообразием.*

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.
Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ — сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. $\square$

Теорема 1.4 (О графике). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ — C^r-гладкое n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение Φ является C^r-диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т. е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$. $\square$

Теорема 1.5 (О локальном вложении). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \le n$. Тогда, если $t^0 \in U$ и* $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, *то существует U-окрестность t^0, такая что $f(U)$ является C^r-гладким k-мерным многообразием.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \ldots + s_n v_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W — окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \to \Phi(W)$ — C^r-диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V — окрестность x_0 в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$. $\square$

Определение 1.6. Пусть x^0 — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r$ $\forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

$f(x_1, \ldots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots x_n) = f(x, y) = 0$. Существует окрестность V такая, что $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ тогда по теореме о неявной функции $y = g(x)$.

В некоторой окрестности x^0:

$$\begin{aligned} x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \\ &\ldots \\ x_n &= g_n(x_1, \ldots, x_{n-k}). \end{aligned}$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ &\ldots \\ x_{n-k} &= x_{n-k}, \\ x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \\ &\ldots \\ x_n &= g_n(x_1, \ldots, x_{n-k}). \end{aligned} \qquad \square$$

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_k \geq 0\}$ — верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_k \leq 0\}$ — нижнее полупространство).

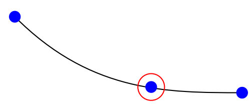
Определение 1.9. Пусть $V \subseteq R^k$ — окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$.

2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M — многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ — краевая точка $M\}$ — множество краевых точек многообразия M.

Теорема 1.12 (О крае)**.** *Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r-гладким $(k-1)$-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$.

Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ — краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание — $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ — выполнено определение многообразия. $\square$

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+1$ и* rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение $(k+1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

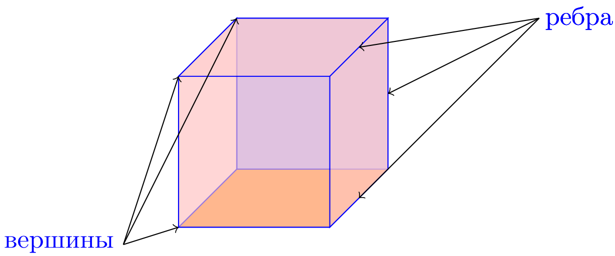
задает $(k-1)$ мерную поверхность — край многообразия. $\square$

Определение 1.14. Множество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется k-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M — k-мерное топологическое многообразие.

2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ - гладкое k-мерное многообразие, а Z_i - кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k-1$.

Пример 1.15. Куб.



Теорема 1.16. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – открытое множество, $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{k+l}$: $U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+l$ и* $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \ldots \\ f_{k+l}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем.

Пример 1.17. Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

Решение. Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если $x = 0$ или $y = 0$. Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно rank $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$ и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

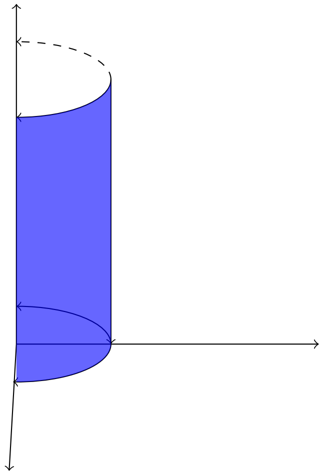
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: $0, 1, 1, 1, 2, 2, 2$ (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий). □

Пример 1.18. в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.19. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ.

Определение 1.20. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M, т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.21. *Пусть $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ – параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^1-диффеоморфизм. Показать, что если v – вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a,b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v\rangle$ – вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0.*

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle \gamma(t_0)\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v\rangle. \qquad \square$$

Лемма 1.22. *Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall \lambda > 0\ \lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.*

Доказательство. По условию, существует кривая $\gamma \subset M$, для которой $\vec{v}$ является вектором скорости. Зададим кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ и проверим, что вектор $\lambda\vec{v}$ является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda\vec{v}$$

□

Теорема 1.23 (О множестве касательных векторов)**.** *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — C^1-гладкое k-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*

2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. По определению k-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U - окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V - окрестность нуля в R^n.

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_k(t), 0, \dots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_k'(t), 0, \dots, 0)$.

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$ — линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). □

Определение 1.24. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.25. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда* $\dim M = k$, $\dim T_{x_0}M = k$, $\dim N_{x_0}M = n - k$.

Теорема 1.26 (О базисе касательного пространства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^k$, $f \in C^r$. Тогда, если $M = f(U)$ – многообразие и* $\operatorname{rank} Df = k$, *то $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(t_0)\}$ – базис в $T_{f(t_0)}M$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in U$, определим $\Gamma_j = t_0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ - кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t_0: $\gamma_j'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0) \in T_{f(t_0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. $\square$

Теорема 1.27. *Пусть многообразие M задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = a_1 \\ \ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) = a_k \end{cases}$$

и $f_1,\ldots,f_k : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а так же $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

задает $T_{f(t_0)}M$, а $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle\vec{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle = \nabla f_j(x_0)\cdot\vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0),\ldots,\nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.28. Пусть M, N – дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0,\varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ - дифференцируема и x_0 - её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f\mid_\gamma x_0$ - экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ - k-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f\mid_M$.

Теорема 1.30 (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f, то $df\mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. $\square$

Теорема 1.31 (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 - условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1\nabla\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k\nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. $\square$

Лемма 1.32 (Правило дифференцирования вдоль кривой)**.**

Пусть $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $\gamma : [a, b] \to U \in C^2$ – кривая. Тогда

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f\circ\gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = d^2f(x)\langle\vec{v}\rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t = d^2f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – уравнения связи, то $x\in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=0,\\ \ldots\\ \varphi_n(x)=0.\end{cases}$$

Теорема 1.33 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа)**.** *Пусть* $U\subset\mathbb{R}^n$*,* $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_k : U\to\mathbb{R}\in C^2$*,* $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)=k$ *всюду, то функция Лагранжа* $L(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x)-\lambda_1\varphi_1(x)-\ldots-\lambda_k\varphi_k(x)$ *если* $dL(x_0,\lambda_0)=0$*, то при* $d^2_xL(x_0,\lambda_0)>0$ *– достигает минимума, при* $d^2_xL(x_0,\lambda_0)<0$ *– максимума.*

Доказательство. Пусть $dL(x_0,\lambda_0)=0, d^2_xL(x_0,\lambda_0)\mid_{T_xM\times T_xM}>0$.

$dL(x_0,\lambda_0)=0 \iff \frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\sum_{j=1}^k\lambda_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0 \iff \nabla f(x_0)=\sum_{j=1}^k\lambda_j\nabla\varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x}=0=-\varphi_j \iff x_0\in M$. Следовательно, $\nabla f(x)\in N_{x_0}M \iff df_{x_0}\mid_{T_{x_0}M}=0$.

Возьмем произвольную $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\in C^2, \gamma(0)=x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$. По лемме 1.32 $(f\circ\gamma)'(t)=df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$. $(f\circ\gamma)'(0)=df_{x_0}\langle\gamma'(0)\rangle=0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t)=x\in M \iff \begin{cases}\varphi_1(\gamma(t))\equiv 0,\\ \ldots\\ \varphi_k(\gamma(t))\equiv 0.\end{cases}$$

Подставим $\gamma(t)=x$ в $L(x,\lambda)$, получим

$$L(\gamma(t),\lambda)=f(\gamma(t))-\lambda_1\varphi_1(\gamma(t))-\ldots-\lambda_k\varphi_k(\gamma(t))=f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + d_x L\langle \gamma''(t)\rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle \gamma'(0), \gamma'(0)\rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f \circ \gamma)'(0) = 0, (f \circ \gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0. Следовательно, x_0 – точка минимума для $f\,|_M$. ☐

Пример 1.34. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1 v_1 + \ldots, t_n v_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \ldots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \ldots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j\rangle)_{ij} = A^T A$ получаем: $\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L|E| = |\det L||E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r \to 0} \frac{|\varphi(Q(x,r))|}{|Q(x,r))|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E, мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int\limits_E J_{\varphi(x)}$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.35 (Объем k-мерного параллепипеда)**.** *Пусть* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \leq n$. *Тогда* $|\Pi(v_1, \ldots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}$. *Обозначив за* $A = [v_1, \ldots, v_n]$*, это выражение можно записать ввиде* $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k-мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π.

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{kj}, 0, \ldots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \ldots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{где } \theta - k \times k\text{матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det (QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.36. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов и $M(n,k) = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из $i_1, i_2, \ldots, i_k$ строк матрицы A.

Теорема 1.37 (Формула Бине-Коши)**.** *Пусть A – матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда* $\det A^* A = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$-матрицы, тогда $\det A^* B = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \ldots; u_n]$ и $B = [v_1, \ldots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2 \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \rangle = \sum_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ????).

$$L_1 \langle e_{i1}, \ldots, e_{ik}, e_{j1}, \ldots, e_{jk} \rangle = \delta_{IJ} = L_2 \langle e_{i1}, \ldots, e_{ik}, e_{j1}, \ldots, e_{jk} \rangle$$

$\square$

Следствие 1.38. *Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что* $\operatorname{rank} L = k \leq n$. *Тогда для каждого измеримого множества A, $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^* L}$.*

Следствие 1.39. *Пусть Π – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^k \to \Pi$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x)dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.*

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v\rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A, получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k-мерное C^1-гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_k) \end{cases} \qquad (t_1, \ldots, t_k) \in U$$

Определим меру k-мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M.

Определение 1.40. Пусть $E \subseteq U \to \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|.|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int\limits_E J_\varphi(t)dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t)D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.41. *Пусть* $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *и* $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *- различные параметризации многообразия, такие что* $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} D\psi = k$. *Тогда* $\int\limits_U J_\varphi(t)dt = \int\limits_V J_\psi(t)dt$.

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ - отображение между U и V.

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ – C^1-диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\int\limits_V \sqrt{\det D\psi^*(y) D\psi(y)} dy = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$
$$|\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$
$$\sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. □

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k:

1. Счетная аддитивность.

   Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ – не более чем счетный дизъюнктивный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup M_i) = \sum\limits_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k.

Пример 1.42. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k и формулы Бине-Коши.

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t)D\gamma(t)} = \sqrt{{x'}_1^2 + \ldots + {x'}_n^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|dt$$

$\square$

Определение 1.43. Мера угла – длина дуги окружности с центром в начале угла.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n-мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x)dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

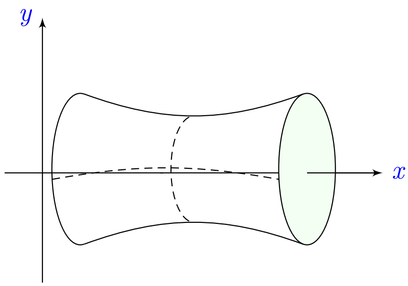
$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\ dx$$

Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

  Доказательство. TODO $\square$

Пример 1.44 (Вывод частной формулы из общей)**.** Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox.

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ). Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \\ z = f(x)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \to \mathbb{E}$ – измеримая по S^k. Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f\ dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x)dx$, получаем,

$$\int_M f(y)dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то
$$\int_M (\alpha f + \beta g)dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$
2. монотонность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $f \le g$, то
$$\int_M f dS^k \le \int_M g dS^k.$$
3. аддитивность по области определения: если $f : M \to \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то
$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int\limits_{M_1} f dS^k + \int\limits_{M_2} f dS^k.$$
4. ограниченность: если $f : M \to \mathbb{E}$, то
$$\left| \int_M f dS^k \right| \le \int_M |f| dS^k.$$

2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в $\mathbb{R}^k$:

$$u = \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_3 = r\sin\varphi\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ r \ge 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}) = u|_{r=const}$ - параметризация сферы.

Обозначим n-мерный шар радиуса r как B_r. Соответственно S_r - $(n-1)$-мерная сфера радиуса r.

Вычислим якобианы J_u и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \ldots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r||u_\varphi||u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi||u_\theta| \cdots |u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned}
&|u_r| = 1 \\
&|u_\varphi| = r\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-2} \\
&|u_{\theta_1}| = r\cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-2} \\
&\ldots \\
&|u_{\theta_{n-3}}| = r\cos\theta_{n-2} \\
&|u_{\theta_{n-2}}| = r
\end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.

Теперь мы можем записать конкретное выражение для J_u:

$$J_u = r^{n-1}\cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \cdots \cos^{n-2}\theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\tilde{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int\limits_0^R S^{n-2}(S_r)dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержаться. Так же площадь сферы можно представить ввиде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to R$. Потребуем, чтобы $\nabla\varphi \neq 0$ (т. е. $\operatorname{rank} D\varphi = k$ - максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в U. Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int\limits_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t))dt = \int\limits_U J_\varphi(x)dx = \int_U |\nabla\varphi|(x)dx$$

Теорема 2.2 (Формула коплощади)**.** *Пусть* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \in C^1$*, такая, что* $\operatorname{rank}(D\varphi) = k$*, тогда верна формула коплощади*

$$\int\limits_U f(x)J_\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t))dS^{k-1}$$

, где

$$J_{\varphi(x)} = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\rangle)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\operatorname{rank}(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}) = k$ - максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть k линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это k последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует C^1-диффеоморфизм $\Phi : V \to W$, где V - окрестность x_0, W - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\int\limits_U f(x,y)J_\varphi(x,y)dxdy = \int\limits_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x,z))J_\varphi(\Phi(x,z))J_{\Phi(x,z)}dxdy =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z))J_\varphi(\Phi(x,z))J_{\Phi(x,z)}dx$$

Заметим, что $\Phi^{-1}_{z(x)} = \Phi^{-1}(x,z)$ при фиксированном z является поверхностью. Возьмем $s = \Phi_z^{-1}(x)$, тогда

$$\int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} g(s)dS^{n-k} = \int\limits_{\varphi(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}_z} g(\Phi_z^{-1}(x))J_{\Phi_z^{-1}}(x)dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U)\cap\mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z))J_\varphi(\Phi(x,z))J_{\Phi(x,z)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{U\cap\varphi^{-1}(z)} f(s)\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi_z^{-1}}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) $\square$

Следствие 2.3. *Если $P_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ - проекция, тогда*

$$\int\limits_U f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}_t} f(y)dy$$

, где $\mathbb{R}^{n-k}_t = \{(y,s) : s = t\}$ - $(n-k)$-мерная плоскость (TODO: а это точно следствие?).

3 Введение в векторный анализ

3.1 Дифференциальные формы

Определение 3.1. Векторным полем на многообразии M называется функция $F : M \to F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

Определение 3.2. Пусть $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем φ^* и определим результат его действия на функцию $f : V \to \mathbb{E}$ как функцию $\varphi^* f : U \to \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \to TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \to TU$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)}\langle v(\varphi(x))\rangle$.

Свойства оператора переноса:

1. линейность: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall f$,g - функции $\forall u$,v - векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi^* f + \beta\varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi^* u + \beta\varphi^* v$$

2. мультипликативность: пусть $f : V \to \mathbb{R}$, $v : V \to TV$, $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм, то $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.

3. перенос композиции является произведением переносов: пусть $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \psi^*$.

4. перестановочность с дифференциалом: $\varphi^* d = d\varphi^*$.

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - линейное отображение. Рассмотрим действие L на вектор v:

$$L\langle v\rangle = L\langle v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n\rangle = v_1 L\langle e_1\rangle + \ldots + v_n L\langle e_n\rangle = v_1 a_1 + \ldots v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v\rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \ldots, dx_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \ldots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v\rangle = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени k над $\mathbb{R}^n$. В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Определение 3.3. Дифференциальной формой степени k (сокращенно k-формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 3.4. *Существует так называемый дуализм между* 1*-формами и векторными полями, так как каждая* 1*-форма изоморфна некоторому векторному полю.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u\rangle = v(x) \cdot u$. $\square$

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

Пример 3.5. $w = xdy$ - 1-форма, но не дифференциал.

Доказательство. Допустим, что $w = df = f_x dx + f_y dy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. $\square$

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = xdy$. Пусть $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, тогда $\varphi^* w = r\cos\varphi d(r\sin\varphi) = r\cos\varphi(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = r\sin\varphi\cos\varphi dr + r^2\cos^2\varphi d\varphi$.

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

Определение 3.6. Пусть w - 1-форма на V. Пусть $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда $\varphi^* w$ - 1-форма на U и $\varphi^* w(x)\langle v\rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle$.

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

Лемма 3.7 (Четвертое свойство оператора переноса)**.** *Пусть $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм, $f : V \to \mathbb{E} \in C^1$, тогда $\varphi^*(d\varphi) = d(\varphi^* f)$. Заметим так же, что слева от равенства стоит* 1*-форма, а справа* 0*-форма.*

Доказательство. Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\varphi^*(df)(x)\langle v\rangle = df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle = df(\varphi(x))\circ d\varphi(x)\langle v\rangle =$$
$$= d(f\circ\varphi)(x)\langle v\rangle = d(\varphi^* f)(x)\langle v\rangle$$

□

Пример 3.8 (Работа векторного поля вдоль кривой)**.** Рассмотри одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = (\vec{F})\cdot\vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g\langle l\rangle$. А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int\limits_\gamma \vec{g}(x)\cdot\vec{r}(x)dl(x)$.

Тут должна быть лекция за 19.03.19

3.2 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть $\gamma - C^1$-гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации. Тогда $\psi^{-1}\circ\varphi : [a,b]\to[c,d]\in C^1$ и $\psi^{-1}\circ\varphi\neq 0$.

Определение 3.9. Две параметризации φ,ψ называются сориентированными (противоположно ориентированными), если $(\psi^{-1}\circ\varphi)' > 0$ $((\psi^{-1}\circ\varphi)' < 0)$.

Определение 3.10. Параметризация φ кривой γ называется согласованной с ориентацией θ, если $\theta(\varphi(t),\varphi'(t)) > 0$.

Определение 3.11. Пусть $w : U\subseteq\mathbb{R}^n\to\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ - непрерывная 1-форма и $\gamma\subset U$ - C^1-гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется $\int\limits_\gamma w = \int\limits_a^b w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle dt$, где $\varphi : [a,b]\to\gamma$ - параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

Пример 3.12. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y.

Решение. Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - (1-t)^2 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Тогда $dx = -dt$, $dy = 2(1-t)dt$. Подставим эти выражения в формулу:

$$\int\limits_\gamma xdy + ydx = \int\limits_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int\limits_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 2(1-t)^2dt - (4-(1-t)^2)dt = \int\limits_0^1 [3(1-t)^2 - 4]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3\Big|_0^1 = -3$$

$\square$

Свойства интеграла 1-формы

1. Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

   Доказательство. Пусть $\varphi : [a,b] \to \gamma, \psi : [c,d] \to \gamma \in C^1$ - параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)$ - монотонно возрастает, следовательно $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$.

   По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_\gamma w = \int\limits_c^d w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle$$

   Проведем замену переменных $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$.

$$\int\limits_c^d w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = \int\limits_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)ds$$

Так как $w(\psi(s))$ - линейный оператор, можем внести $(\psi^{-1}\circ\varphi)'(s)$ как множитель аргумента. Имеем $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))(\psi^{-1}\circ\varphi)'(s) = (\psi\circ\psi^{-1}\circ\varphi)(s) = \varphi(s)$ как производную композиции.

$$\int\limits_a^b w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1}\circ\varphi)'(s)ds = \int\limits_a^b w(\varphi(s))\langle\varphi^{-1}(s)\rangle ds$$

$\square$

2. Антисимметричность

Пусть γ - ориентированная кривая, тогда $-\gamma$ та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int\limits_{-\gamma} w = -\int\limits_{\gamma} w$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, T] \to \gamma$ - параметризация кривой γ, согласованная с ориентацией, тогда $\psi(t) = \varphi(T-t)$ - параметризация кривой $-\gamma$, согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\varphi^{-1}\circ\psi)(s)$. Тогда $\psi(0) = T$ и $\psi(T) = 0$.

$$\int\limits_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle = \int\limits_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s))))\langle\varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s)))\rangle(\varphi^{-1}\circ\psi)'(s)ds =$$

$$= \int\limits_T^0 w(\psi(s))\langle\psi^{-1}(s)\rangle ds = -\int\limits_0^T w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = -\int\limits_{-\gamma} w$$

$\square$

3. Линейность

   $\forall w_1, w_2$ - формы, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int\limits_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \int\limits_{\gamma} w_1 + \beta \int\limits_{\gamma} w_2$$

4. Аддитивность

   Пусть $\varphi : [p,q] \to \gamma$ - параметризация кривой γ, возьмем $r \in [p,q]$ и определим $\varphi_{pr} : [p,r] \to \gamma_{pr}$ и $\varphi_{pr} : [r,q] \to \gamma_{rq}$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_{\gamma_{pr}} + \int\limits_{\gamma_{rq}}$$

Замечание 3.13. Если кривая замкнута, тогда вместо $\int\limits_{\gamma} w$ используют обозначение $\oint\limits_{\gamma} w$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Пример 3.14 (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой)**.** Пусть $\vec{v}$ - векторное поле, γ - ориентированая кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой γ вычисляется как ($\vec{\tau}$ - касательный вектор к кривой)

$$\int\limits_{\gamma} v_1 dx_1 + \ldots + v_n dx_n = \int\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$$

Теорема 3.15 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $w = df$ - полный дифференциал, γ - ориентированная кривая с начальной точной p и конечной точкой q, тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [a,b] \to \gamma$ - параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда $\varphi(a) = p$ - начальная точка кривой и $\varphi(b) = q$ - конечная точка кривой.

$$\int\limits_{\gamma} df = \int\limits_{a}^{b} df(\varphi(t))\langle \varphi^{-1}(t) \rangle dt = \int\limits_{a}^{b} [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t))\Big|_a^b = f(q) - f(p)$$

$\square$

Следствие 3.16. *Если $w = df$, то $\int\limits_\gamma w$ не зависит от пути γ, а только от начальной и конечной точки.*

Следствие 3.17.

$$\oint\limits_\gamma df = 0$$

Пример 3.18. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y.

Решение. Заметим, что w - полный дифференциал функции $f = xy$, а так же, что начальная точка параболы это $(1, 3)$, а конечная $(0, 4)$.

$$\int\limits_\gamma xdy + ydx = \int\limits_\gamma d(xy) = xy\Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

$\square$

Теорема 3.19 (Критерий полного дифференциала)**.** *Пусть w - непрерывная 1-форма на множестве U. Тогда w является полным дифференциалом некоторой функции $f \in C^1$ тогда и только тогда, когда $\oint\limits_\gamma w = 0$ для всех ориентированных замкнутых контуров $\gamma \subset U$.*

Доказательство. Необходимость следует из 3.17.

Для доказательства достаточности построим функцию f.

Пусть U - открытое связное множество. Возьмем точку $x_0 \in U$ и положим, что $f(x_0) = C$. Возьмем так же $x \in U$ - другую точку и положим $f(x) = f(x_0) + \int\limits_\gamma w$, где γ - кривая, соеденяющая точки x и x_0 (начало в x_0, конец в x).

Если γ_1 и γ_2 - две кривые из x_0 в x, то $\gamma_1 - \gamma_2$ - замкнутый контур и

$$0 = \int\limits_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int\limits_{\gamma_1} w - \int\limits_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути.

Продолжение следует ;) $\square$