Лекции по математическому анализу: многообразия, криволинейные и поверхностные интегралы, введение в векторный анализ.

13 мая 2019 г.

Аннотация

Записки создавались студентами Механико-математического факультета НГУ с лекций, прочитанных С. Г. Басалаевым.

Внимание! Записки не подвергались редактуре, поэтому, возможно, содержат множество неточностей, опечаток и смысловых ошибок.

Содержание

1 Многообразия

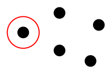
1.1 Многообразия без края

Определение 1.1. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием без края, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$.

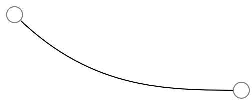
При $r = 0$ многообразие называется топологическим, при $r > 0$ многообразие называется дифференцируемым.

Примеры многообразий:

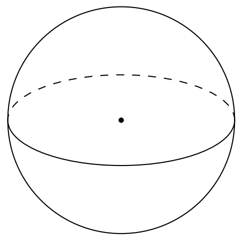
1. Набор изолированных точек ($k = 0$).



2. Набор кривых, в том числе с выколотыми концами, а также замкнутые ($k = 1$).



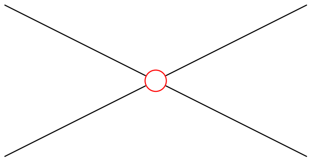
3. Поверхности ($k = 2$).



Пример 1.2.

- Пара параллельных прямых — многообразие,
- Пара непересекающихся плоскостей — многообразие,

- Плоскость и прямая — не многообразие, так как их размерности не совпадают,
- Пара пересекающихся прямых с выколотой точкой пересечения – многообразие.



Теперь рассмотрим способы задания k-мерных многообразий.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, тогда U является n-мерным многообразием.*

Доказательство. Напомним, что множество называется *открытым*, если для любая его точка x_0 лежит в некоторой окрестности.
Отображение Φ можно определить следующим образом: $\Phi(x) = x - x_0$ — сдвиг в ноль, переводит окрестность x_0 в окрестность нуля. $\square$

Теорема 1.4 (О графике). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^r$, тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ — C^r-гладкое n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство. Определим отображение $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$, тогда:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y - f(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad |D\Phi| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отображение Φ является C^r-диффеоморфизмом и $\Phi(x, f(x)) = (x, 0)$, т. е. $\Phi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$. $\square$

Теорема 1.5 (О локальном вложении). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $k \leq n$. Тогда, если $t^0 \in U$ и $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, то существует V-окрестность t^0, такая что $f(V)$ является C^r-гладким k-мерным многообразием.*

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_k), \\ \ldots \\ x_n = f_n(t_1, \ldots, t_k). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} Df(t^0) = k$, следовательно набор векторов $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\}$ является линейно независимым, т.е. его можно дополнить до базиса $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$.

Определим $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ так, что $\Phi(t_1, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_k) + s_{k+1}v_{k+1} + \ldots + s_n v_n$.

$D\Phi = [\frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n]$, следовательно $\det D\Phi \neq 0$.

По теореме об обратной функции существует W — окрестность $(t_0, 0)$, такая что $\Phi : W \to \Phi(W)$ — C^r-диффеоморфизм. Выберем $V \times (-h, h) \in W$, так что V — окрестность x_0 в $\mathbb{R}^k$, тогда $\Phi^{-1}(f(V)) = V \times \{0\}^{n-k}$. $\square$

Определение 1.6. Пусть x^0 — решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

тогда x^0 называется регулярным, если $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k$.

Теорема 1.7 (О решении системы уравнений)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$ и $f_i \in C^r$ $\forall i \leq k$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть x^0 — регулярное решение, тогда:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^0).$$

Матрица состоит из n столбцов, где k из них линейно независимы.

$f(x_1, \ldots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots x_n) = f(x, y) = 0$. Существует окрестность V такая, что $\det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ тогда по теореме о неявной функции $y = g(x)$.

В некоторой окрестности x^0:

$$
\begin{aligned}
x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\
&\dots \\
x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).
\end{aligned}
$$

Множество решений по теореме о локальном вложении является многообразием:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1, \\
&\dots \\
x_{n-k} &= x_{n-k}, \\
x_{n-k+1} &= g_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k}), \\
&\dots \\
x_n &= g_n(x_1, \dots, x_{n-k}).
\end{aligned}
\qquad \square
$$

1.2 Многообразия с краем

Определение 1.8. $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \geq 0\}$ — верхнее полупространство ($\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, \dots, x_k) : x_k \leq 0\}$ — нижнее полупространство).

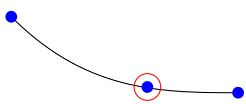
Определение 1.9. Пусть $V \subseteq R^k$ — окрестность нуля, тогда $V \cap \mathbb{R}^k_+$ называется полуокрестностью нуля. В ее основании лежит $(k-1)$-мерная окрестность нуля.

Определение 1.10. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется C^r-гладким k-мерным многообразием с краем, если для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и, либо $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — внутренняя точка), либо $\Phi(U \cap M) = (V \cap \mathbb{R}^k_+) \times \{0\}^{n-k}$ (тогда x_0 — крайняя точка).

Примеры многообразий с краем:

1. Края нет при $k = 0$.

2. Край незамкнутой кривой ($k = 1$) — это ее концевые точки. У замкнутых и неограниченных кривых края нет.



3. При $k = 2$, внутренними точками поверхности являются те, которые лежат внутри нее вместе со своей некоторой окрестности, остальные являются краевыми.

Определение 1.11. Пусть M — многообразие, тогда $\partial M = \{x \mid x$ — краевая точка $M\}$ — множество краевых точек многообразия M.

Теорема 1.12 (О крае)**.** *Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие с краем, тогда множество его краевых точек ∂M является C^r-гладким $(k-1)$-мерным многообразием без края ($\partial\partial M = \emptyset$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Phi(U \cap M)$, тогда $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$.

Если $x_k = 0$, то $x \in \partial M$ — краевая точка. Отображение Φ переводит все краевые точки $U \cap M$ в $(k-1)$-мерную плоскость (основание полупространства). Основание — $(k-1)$-мерная окрестность нуля, следовательно $\Phi(U \cap \partial M) = W \times \{0\} \times \{0\}^{n-k}$ — выполнено определение многообразия. □

Теорема 1.13 (О решении системы уравнений и неравенства)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ - открытое множество, $f_1, \ldots, f_{k+1} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+1$ и* rank $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+1$, *тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1}, \end{cases}$$

представляет собой C^r-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем (внутренние точки — решение строгого неравенства, край — решение $(k+1)$ уравнений).

Доказательство. Решение неравенства $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) > a_{k+1}$ является открытым множеством, и по теореме 1.3 задает многообразие.

Решение системы уравнений

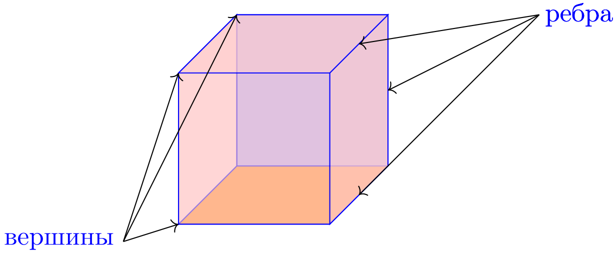
$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = a_{k+1}, \end{cases}$$

задает $(k-1)$ мерную поверхность — край многообразия. □

Определение 1.14. Множество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется k-мерным кусочно-гладким многообразием, если:

1. M — k-мерное топологическое многообразие.
2. Существует разбиение $M = \tilde{M} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} Z_i)$, такое что $\tilde{M}$ — гладкое k-мерное многообразие, а Z_i — кусочно гладкие многообразия размерности $l \leq k-1$.

Пример 1.15. Куб.



Теорема 1.16. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – открытое множество, $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{k+l} : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall\, i \leq k+l$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = k+l$, тогда множество регулярных решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \\ f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+1}, \\ \ldots \\ f_{k+l}(x_1, \ldots, x_n) \geq a_{k+l}, \end{cases}$$

представляет собой C^r-кусочно-гладкое $(n-k)$-мерное многообразием с краем.

Пример 1.17. Является ли многообразием множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 \leq 16 \\ x^2 y^2 \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

Решение. Проверим условия теоремы выше.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг этой матрицы был максимальным, достаточно, чтобы $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 4xy(x^2 + y^2)$$

Это выражение равно нулю, если $x = 0$ или $y = 0$. Подставив их в исходную систему, убедимся, что они не являются ее решением. Следовательно $\operatorname{rank} \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 3$ и множество решений системы является кусочно-гладким многообразием с краем размерности 3.

Внутренностью этого многообразия является решение системы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим теперь что является краем этого многообразия. Набор систем, перечисленный ниже задает компоненты края.

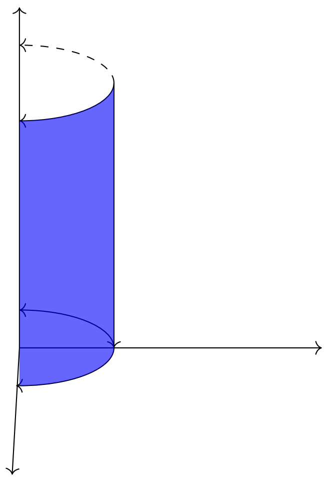
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 < 16 \\ x^2y^2 = 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 16 \\ x^2y^2 > 1 \\ z > 1 \end{cases}$$

Край кусочно-гладкий, размерности компонент края в порядке по строкам: $0, 1, 1, 1, 2, 2, 2$ (каждая компонента - многообразие, размерность которых можно вычислить используя формулировки соответствующих теорем о задании многообразий). $\square$

Пример 1.18. в $\mathbb{R}^3$. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, z \leq 1$



– грань тела, 2-мерное многообразие.

1.3 Касательное и нормальное пространства

Определение 1.19. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$, тогда вектор $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ называется вектором скорости кривой γ.

Определение 1.20. Вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ называется касательным к множеству $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in M$, если это вектор скорости некоторой кривой, лежащей в M, т.е. существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Множество касательных векторов к M в точке x_0 обозначается $T_{x_0}M$.

Задача 1.21. *Пусть $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ – параметризованная кривая, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^1-диффеоморфизм. Показать, что если v – вектор скорости кривой γ в точке $t_0 \in (a,b)$, то $d\Psi_{\gamma(t_0)}\langle v\rangle$ – вектор скорости кривой $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ в точке t_0.*

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования композиции:

$$d(\Psi \circ \gamma)\langle t_0\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle\gamma(t_0)\rangle = d(\Psi_{\gamma(t_0)})\langle v\rangle. \qquad \square$$

Лемма 1.22. *Коллинеарный касательному вектору так же является касательным вектором, т.е. если $\vec{v} \in T_{x_0}M$, то $\forall\lambda > 0$ $\lambda\vec{v} \in T_{x_0}M$.*

Доказательство. По условию, существует кривая $\gamma \subset M$, для которой $\vec{v}$ является вектором скорости. Зададим кривую $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ и проверим, что вектор $\lambda\vec{v}$ является ее вектором скорости. Действительно

$$\tilde{\gamma}'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda\vec{v}$$

$\square$

Теорема 1.23 (О множестве касательных векторов)**.** *Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — C^1-гладкое k-мерное многообразие, $x_0 \in M$, тогда:*

1. *Если $x_0 \in M \setminus \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k$.*

2. *Если $x_0 \in \partial M$, то $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. По определению k-мерного многообразия, для каждого $x_0 \in M$ существует U — окрестность x_0 и существует C^r-диффеоморфизм $\Phi : U \to \Phi(U)$, такой что $\Phi(x_0) = 0$ и $\Phi(U \cap M) = V \times \{0\}^{n-k}$, где V — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$.

Под действием Φ кривая перейдет в кривую.

$\gamma : [0, \varepsilon] \to M \implies \Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \implies \Gamma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_k'(t), 0, \ldots, 0)$.

$\Gamma'(t) = (\Phi(\gamma(t)))' = D\Phi_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$ — линейное отображение, такое, что $\det D\Phi \neq 0$.

$T_{x_0}M = D\Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \implies T_{x_0}M$ - k-мерная плоскость (т.к. дифференциал переводит плоскость в плоскость). $\square$

Определение 1.24. Нормальное пространство $N_{x_0}M$ к дифференцируемому многообразию в точке x_0 – это ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{x_0}M$.

Лемма 1.25. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in M$, тогда если $\dim M = k$ то, $\dim T_{x_0}M = k$ и $\dim N_{x_0}M = n - k$.*

Теорема 1.26 (О базисе касательного пространства)**.** *Пусть многообразие M задано параметрически:*

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_k), \\ \ldots \\ x_n = f_n(t_1, \ldots, t_k). \end{cases}$$

, где $(t_1, \ldots, t_k) \in U$.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ и $t^0 \in U$. Тогда, если $M = f(U)$ – многообразие и $\operatorname{rank} Df = k$, то $\{\frac{\partial f}{\partial t_1}(t^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t^0)\}$ – базис в $T_{f(t^0)}M$.

Доказательство. Пусть $t^0 \in U$, определим $\Gamma_j = t^0 + t \cdot \vec{e_j}$, тогда $\gamma_j(t) = f(\Gamma_j(t))$ — кривая на многообразии.

Найдем её касательный вектор в точке t^0: $\gamma_j'(t^0) = \frac{d}{dt} f(t^0 + t \cdot \vec{e_j}) = \frac{\partial f}{\partial t_j}(t^0) \in T_{f(t^0)}M$.

Набор векторов $\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\}_{i=1}^{k}$ является линейно независимым и их количество равно размерности касательного пространства. $\square$

Теорема 1.27. *Пусть многообразие M задано системой уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k. \end{cases}$$

и $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$ $\forall i \leq k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а так же $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = k$, тогда система уравнений

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0, \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

задает $T_{x_0}M$, а $\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_k(x_0)\}$ базис в $N_{x_0}M$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Возьмем вектор $\vec{v} \in T_{f(t_0)}M$, тогда по определению существует кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma_t'(0) = \vec{v}$.

$f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = f(\gamma(t))' = df_{f(t)}\langle \gamma'(t) \rangle$.

Подставим $t = 0 \implies 0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle$. Из этого равенства следует, что:

$$\begin{cases} df_1(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \\ \ldots \\ df_k(x_0)\langle \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $0 = df_{x_0}\langle \vec{v} \rangle = \nabla f_j(x_0) \cdot \vec{v}$, из чего получаем, что $\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_k(x_0)\}$ – базис в $N_{x_0}M$, т.к. $T_{f(t_0)}M \perp N_{x_0}M$. $\square$

1.4 Задача на условный экстремум

Определение 1.28. Пусть M, N — дифференцируемые многообразия, тогда $f : M \to N$ дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $L : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$, такое что для каждой кривой $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma \in C^1$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v} \in T_{x_0}M$, выполняется $f(\gamma(t)) = f(x_0) + tL(\vec{v}) + o(t)$.

Теорема 1.29 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — дифференцируема и x_0 — её экстремум, тогда $df(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Для $f\mid_\gamma$ x_0 - экстремум, следовательно $f(\gamma(t))'(0) = 0 = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. □

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $M \subseteq U$ — k-мерное многообразие. Ставится задача: найти экстремум на многообразии $f\mid_M$.

Теорема 1.30 (Необходимое условие условного экстремума)**.** *Если $x_0 \in M$ – точка экстремума f, то $df\mid_{T_{x_0}M} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in T_{x_0}M \iff \exists$ кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, такая что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'_t(0) = \vec{v}$.

Тогда x_0 - экстремум $f(\gamma(t))$ и $f(\gamma(0)) = 0$. Заметим, что $f(\gamma(t)) = df_{\gamma(0)}\langle\gamma'(0)\rangle = df_{x_0}\langle\vec{v}\rangle$. □

Теорема 1.31 (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, если x_0 — условный экстремум при условиях $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\bar{x}) = 0$, то $dL(x_0) = 0$, где $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\bar{x}) - \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\bar{x})$ – функция Лагранжа.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\bar{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x) = -\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow x$ – решение системы уравнений.

Возьмем частную производную L по x_j:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(x) - \ldots - \lambda_k \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(x) = 0,$$

отсюда $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_k \nabla\varphi_k(x)$ – градиенты $\nabla\varphi_i$ – это нормали, следовательно, их линейная комбинация тоже нормаль. Таким образом, ∇f – нормаль к поверхности и выполнено необходимое условие условного экстремума. □

Лемма 1.32 (Правило дифференцирования вдоль кривой)**.**

Пусть $f : U \to \mathbb{E} \in C^2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *– открытое множество и* $\gamma : [a, b] \to U \in C^2$ *– кривая. Тогда*

1. $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$,
2. $(f \circ \gamma)''(t) = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

Есть два способа доказательства, здесь будет приведен самый оптимальный. Другой способ вы сможете найти в своих лекциях ;-)

Доказательство. $(f\circ\gamma)''(t) = \left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t$ – дифференцирование сложной функции.

Напомним, что $d_x\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = d^2 f(x)\langle\vec{v}\rangle$ и $d_{\vec{v}}\left(df_x\langle\vec{v}\rangle\right) = df_x$.

Отсюда имеем $\left(df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle\right)'_t = d^2 f_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + df_{\gamma(t)}\langle\gamma''(t)\rangle$.

□

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие экстремума.

Перед доказательством заметим, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – уравнения связи, то $x \in M$ (лежит в многообразии) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.33 (Достаточное условие экстремума в методе множителей Лагранжа)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \to \mathbb{R} \in C^2$, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$ *всюду, то. Определим функцию Лагранжа как* $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(x)$, *тогда, если* $dL(x_0,\lambda_0) = 0$, *то при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) > 0$ *–* x_0 *— точка минимума, а при* $d_x^2 L(x_0, \lambda_0) < 0$ *— точка максимума.*

Доказательство. Пусть $dL(x_0,\lambda_0) = 0, d_x^2 L(x_0, \lambda_0) \mid_{T_x M \times T_x M} > 0$.

$dL(x_0,\lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \iff \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla\varphi_j$. Кроме того, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = -\varphi_j \iff x_0 \in M$. Следовательно, $\nabla f(x) \in N_{x_0}M \iff df_{x_0} \mid_{T_{x_0}M} = 0$.

Возьмем произвольную $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \in C^2, \gamma(0) = x_0$. Посмотрим, как ведет себя функция f на кривой γ, т.е. ограничение функции на эту кривую.

Рассмотрим $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. По лемме 1.32 $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}\langle\gamma'(t)\rangle$.

$(f \circ \gamma)'(0) = df_{x_0}\langle\gamma'(0)\rangle = 0$.

Поскольку образ кривой лежит в многообразии

$$\gamma(t) = x \in M \iff \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)) \equiv 0, \\ \dots \\ \varphi_k(\gamma(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

Подставим $\gamma(t) = x$ в $L(x, \lambda)$, получим

$$L(\gamma(t), \lambda) = f(\gamma(t)) - \lambda_1\varphi_1(\gamma(t)) - \ldots - \lambda_k\varphi_k(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$$

далее,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (L(\gamma(t), \lambda))'_{tt} = d_x^2 L\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + d_x L\langle\gamma''(t)\rangle.$$

подставим ноль

$$(f \circ \gamma)''(0) = d_x^2 L\langle\gamma'(0), \gamma'(0)\rangle + 0 > 0.$$

Имеем, что $f\circ\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, (f\circ\gamma)'(0) = 0, (f\circ\gamma)''(0) > 0$. Следовательно, $t = 0$ является точкой минимума для $f \circ \gamma$.

Таким образом, x_0 – точка минимума для любой кривой $\gamma \subseteq M$, проходящей через x_0. Следовательно, x_0 – точка минимума для $f\,|_M$. $\square$

Пример 1.34. Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - z^2$ на $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

1.5 Площадь поверхности

Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Из прошлого семестра, мы знаем, что n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n) = \{t_1v_1 + \ldots, t_nv_n : t_i \in [0, 1]\}$, натянутого на набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ может быть вычислен по формуле $|\Pi| = |\det[v_1, \ldots, v_n]|$. Так же он может быть вычислен с помощью определителя матрицы Грамма, полагая $A = [v_1, \ldots, v_n]$, из $(\langle v_i, v_j\rangle)_{ij} = A^TA$ получаем: $\det A^TA = \det A^T \det A = (\det A)^2 = (|\Pi|)^2$.

Вспомним так же, как изменяется мера при отображениях.

Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение. Мы знаем, что для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^k$, мера его образа вычисляется по формуле $|L(E)| = J_L|E| = |\det L||E|$.

Если же отображение $\varphi \in C^1$ не является линейным, мы можем приблизить его линейным и получить формулу локального искажения меры:

$$J_{\varphi(x)} = \lim_{r\to 0} \frac{|\varphi(Q(x,r))|}{|Q(x,r))|} = |\det D\varphi(x)|$$

Из чего мы получаем, что для каждого измеримого множества E, мера его образа вычисляется по формуле $|\varphi(E)| = \int\limits_E J_{\varphi(x)}$.

Поскольку мы работаем не со всем пространством, мы можем расширить эти определения.

Теорема 1.35 (Объем k-мерного параллепипеда)**.** *Пусть* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, k \le n$. *Тогда* $|\Pi(v_1, \ldots, v_n)|_k = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$. *Обозначив за* $A = [v_1, \ldots, v_n]$, *это выражение можно записать ввиде* $|\Pi| = \sqrt{\det A^* A}$.

Доказательство. Пусть k-мерная гиперплоскость L содержит в себе параллелепипед Π.

Существует ортогональное преобразование $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $Q(L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Применим это преобразование к набору векторов, на которые натянут параллелепипед: $Q(v_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{kj}, 0, \ldots, 0)^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование не меняет объем.

$$A = [v_1; \ldots; v_k] \quad QA = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{где } \theta - k \times k \text{матрица}$$

Используя равенство $(QA)^* QA = \theta^* \theta$, получаем требуемое утверждение:

$$|Q(\Pi)|_k = |\Pi|_k = |\det \theta| = \sqrt{\det \theta^* \theta} = \sqrt{\det (QA)^* QA} = \sqrt{\det A^* A}$$

□

Определение 1.36. Пусть A - матрица, имеющая из n строк и k столбцов и $M(n,k) = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n\}$ - множество мультииндексов. Тогда A_I - минор, составленный из $i_1, i_2, \ldots, i_k$ строк матрицы A.

Теорема 1.37 (Формула Бине-Коши)**.** *Пусть A – матрица, имеющая из n строк и k столбцов, тогда* $\det A^* A = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det^2 A_I$.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: пусть $A, B = (n, k)$-матрицы, тогда $\det A^* B = \sum\limits_{I \in M(n,k)} \det A_I \det B_I$.

Пусть $A = [u_1; \ldots; u_n]$ и $B = [v_1, \ldots, v_n]$, определим отображения L_1 и L_2 следующим образом:

$$L_1 \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \rangle = \det A^* B$$

$$L_2\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_k\rangle = \sum_{I\in M(n,k)} \det A_I \det B_I$$

Заметим, что L_1 и L_2 линейны по каждому аргументу, следовательно, чтобы доказать, что $L_1 = L_2$ достаточно доказать что они одинаково действуют на базис (TODO: ????).

$$L_1\langle e_{i1},\dots,e_{ik},e_{j1},\dots,e_{jk}\rangle = \delta_{IJ} = L_2\langle e_{i1},\dots,e_{ik},e_{j1},\dots,e_{jk}\rangle$$

$\square$

Следствие 1.38. *Пусть $L : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение, такое, что* $\operatorname{rank} L = k \leq n$. *Тогда для каждого измеримого множества A, $L(A)$ - измеримо и $|L(A)|_k = J_L|A|_k$, где $J_L = \sqrt{\det L^*L}$.*

Следствие 1.39. *Пусть Π – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^k \to \Pi$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда для каждого измеримого $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Pi(E)$ - измеримо и $|\varphi(E)|_k = \int_E J_\varphi(x)dx$, где $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^*(x)D\varphi(x)}$.*

Из формулы Коши-Бине так же можно получить выражения для скалярного и векторного произведения.

К примеру, взяв за A некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^n$, можно получить:

$$v^T v = \langle v, v\rangle = |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

Аналогично, если разместить векторы $u, v \in \mathbb{R}^3$ в столбцы матрицы A, получим (TODO: расписать это подробнее):

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = |u \times v|^2$$

Теперь мы готовы определить меру на многообразиях.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - k-мерное C^1-гладкое многообразие, заданное параметрически, т.е. существует $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi \in C^1$ и $M = \varphi(U)$.

$$\varphi = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1,\dots,t_k) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1,\dots,t_k) \end{cases} \qquad (t_1,\dots,t_k) \in U$$

Определим меру k-мерной площади S^k на параметрически заданном многообразии M.

Определение 1.40. Пусть $E \subseteq U \to \mathbb{R}^k$ - измеримо по $|.|_k$, тогда $\varphi(E)$ назовем измеримым по S^k и будем вычислять его меру как $S^k(\varphi(E)) := \int\limits_E J_\varphi(t)dt$, где $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^*(t) D\varphi(t)}$.

Внимательный читатель задастся вопросом: а не зависит ли наша мера от параметризации многообразия?

Лемма 1.41. *Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ - различные параметризации многообразия, такие что* $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} D\psi = k$. *Тогда $\int\limits_U J_\varphi(t)dt = \int\limits_V J_\psi(t)dt$.*

Доказательство. Рассмотрим $\psi^{-1} \circ \varphi$ — отображение между U и V.

Очевидно, что $\psi^{-1} \circ \varphi$ является биекцией и $\det D\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi$ – C^1-диффеоморфизм.

Сделаем замену переменных $y = \psi^{-1}(\varphi(x))$ в интеграле:

$$\int\limits_V \sqrt{\det D\psi^*(y) D\psi(y)} dy = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$|\det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)| dx = \int\limits_U \sqrt{\det D\psi^*(\psi^{-1} \circ \varphi(x)) D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(x))}$$

$$\sqrt{\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(x) \det D\psi^{-1} \circ \varphi(x)} dx$$

Заметим, что:

$$D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi) = D\varphi$$

Осталось применить то, что произведение определителей равно определителю произведения и подставить это равенство в интеграл. $\square$

Рассмотрим некоторые свойства меры S^k:

1. Счетная аддитивность.

   Пусть $\{M_i\}_{i \in N}$ – не более чем счетный дизъюнктный набор множеств, тогда $S^k(\bigcup M_i) = \sum\limits_i S^k(M_i)$.

2. Меру можно доопределить для кусочно-гладкого многообразия, так как мера множества размерности меньше k равна нулю в мере S^k.

Пример 1.42. Вывести формулу длины кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с помощью меры S^k.

Решение.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор скорости}$$

$$\sqrt{\det D\gamma^*(t) D\gamma(t)} = \sqrt{{x'}_1^2 + \ldots + {x'}_n^2} = |\gamma'(t)|$$

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

Определение 1.43. Мера угла – длина дуги единичной окружности с центром в начале угла.

1.6 Площадь графика функции

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ её график – n-мерное многообразие $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Чтобы найти S^k надо параметризовать график функции. Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n, \\ y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

– параметризация графика. Тогда $S^k(\Gamma_f) = \int_U J_\varphi(x) dx$.

Посчитаем $D\varphi$.

$$D\varphi = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}\right)_{n\times(n+1)}$$

Нам нужно посчитать определитель матрицы $\det D\varphi^* D\varphi$. Если мы будем считать «в лоб»:

$$D\varphi^* D\varphi = E + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

Получилась довольно сложная конструкция. Определитель проще вычислить по формуле Бине-Коши.

$$\det D\varphi^* D\varphi = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \ldots + f_{x_n}^2 = 1 + |\nabla f|^2$$

Отсюда получаем, что

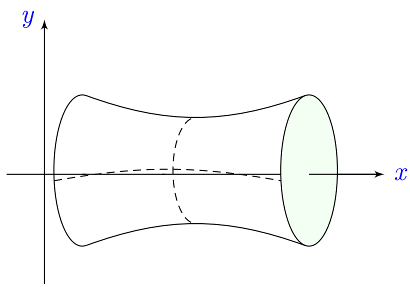
$$S^k(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx$$

Свойство формулы 1.6:

- $S^k(\lambda M) = \lambda^k S^k(M)$

Доказательство. TODO ☐

Пример 1.44 (Вывод частной формулы из общей)**.** Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$



– поверхность, полученная вращением кривой относительно оси Ox.

Для того, чтобы вывести формулу, нам нужно параметризовать поверхность. Должно быть два параметра (x, φ). Воспользуемся цилиндрической системой координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \\ z = f(x)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вывод формулы: TODO.

2 Криволинейные интегралы

2.1 Криволинейные интегралы I-рода

Определение 2.1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, задана функция $f : M \to \mathbb{E}$ – измеримая по S^k. Тогда интегралом по поверхности назовем

$$\int_M f\ dS^k$$

Чтобы взять интеграл по поверхности нам нужно:

1. надо выбрать параметризацию
2. подставить параметризацию в интеграл

Если мы выберем некоторую параметризацию $M = \varphi(U)$, то $S^k(M) = \int_U J_\varphi(x)dx$, получаем,

$$\int_M f(y)dS^k = \int_U f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)dx$$

Свойства интеграла по поверхности

1. линейность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то
$$\int_M (\alpha f + \beta g)dS^k = \alpha \int_M f dS^k + \beta \int_M g dS^k.$$
2. монотонность: если $f, g : M \to \mathbb{E}$ и $f \le g$, то
$$\int_M f dS^k \le \int_M g dS^k.$$
3. аддитивность по области определения: если $f : M \to \mathbb{E}$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то
$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f dS^k = \int\limits_{M_1} f dS^k + \int\limits_{M_2} f dS^k.$$
4. ограниченность: если $f : M \to \mathbb{E}$, то
$$\left| \int_M f dS^k \right| \le \int_M |f| dS^k.$$

2.2 Объем шара и площадь сферы

Введем сферическую систему координат в $\mathbb{R}^n$:

$$u = \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ x_3 = r\sin\varphi\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ r \geq 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Заметим, что $u(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$ - параметризация шара, а $\tilde{u}(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}) = u|_{r=const}$ - параметризация сферы.

Обозначим n-мерный шар радиуса r как B_r. Соответственно S_r - $(n-1)$-мерная сфера радиуса r.

Вычислим якобианы J_u и $J_{\tilde{u}}$ этих параметризаций. Нам известно, что $J_u = |\det Du|$ и $J_{\tilde{u}} = |\det D\tilde{u}|$.

Рассмотрим набор векторов $\{u_r, u_\varphi, u_\theta, \ldots, u_{\theta_{n-2}}\}$, где $u_s = \{\frac{\partial x_1}{\partial s}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\}$. Нетрудно проверить, что этот набор является ортогональным. Следовательно, объем параллелепипеда, который натянут на этот набор можно вычислить как произведение длин векторов набора.

$$J_u = |u_r||u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}| \quad J_{\tilde{u}} = |u_\varphi||u_\theta|\cdots|u_{\theta_{n-2}}|$$

Вычислим длины этих векторов.

$$\begin{aligned} &|u_r| = 1 \\ &|u_\varphi| = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_1}| = r\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &\ldots \\ &|u_{\theta_{n-3}}| = r\cos\theta_{n-2} \\ &|u_{\theta_{n-2}}| = r \end{aligned}$$

Из того, что $|u_r| = 1$ следует, что $J_u = J_{\tilde{u}}$.

Теперь мы можем записать конкретное выражение для J_u:

$$J_u = r^{n-1}\cos\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^{n-2}\theta_{n-2}$$

Из этого следуют формулы объема шара и площади сферы:

$$|B_R| = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_u d\theta_{n-2} = w_n R^n$$

$$S^{n-1}(S_r) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{\tilde{u}} d\theta_{n-2}$$

Так как $J_u = J_{\tilde{u}}$, можно получить другое выражение для объема шара:

$$|B_r| = \int\limits_0^R S^{n-1}(S_r) dr$$

То есть, чтобы найти объем шара нужно вычислить площади сфер, которые в нем содержаться. Так же площадь сферы можно представить ввиде объемов шаров:

$$S^{n-1}(S_r) = (w_n r^n)'_r = r w_n r^{n-1}$$

2.3 Формула коплощади

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы $\nabla\varphi \neq 0$ (т. е. $\operatorname{rank} D\varphi = k$ максимальный).

Уравнение $\varphi(x) = 0$ задает поверхность в U. Эту поверхность можно так же задать как $\varphi^{-1}(0)$. Из этого получаем:

$$\int\limits_a^b S^{n-1}(\varphi^{-1}(t)) dt = \int\limits_U J_\varphi(x) dx = \int_U |\nabla\varphi|(x) dx$$

Теорема 2.2 (Формула коплощади)**.** *Пусть* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \in C^1$*, такая, что* $\operatorname{rank}(D\varphi) = k$*, тогда верна формула коплощади*

$$\int\limits_U f(x) J_\varphi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t)) dS^{k-1}$$

где

$$J_{\varphi(x)} = \sqrt{\det D\varphi(x) \det D\varphi^*(x)} = \sqrt{\det(\langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in U$. Мы знаем, что $\text{rank}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) = k$ - максимальный. Следовательно, в матрице $D\varphi$ есть k линейно-независимых столбцов. Для простоты будем считать, что это k последних столбцов.

По теореме о выпрямлении, существует C^1-диффеоморфизм $\Phi : V \to W$, где V - окрестность x_0, W - окрестность нуля, такая что:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ h(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных в интеграле и воспользуемся формулой Фубини:

$$\int\limits_U f(x,y) J_\varphi(x,y) dxdy = \int\limits_{\Phi^{-1}(U)} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dxdy =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dx$$

Заметим, что $\Phi^{-1}_{z(x)} = \Phi^{-1}(x,z)$ при фиксированном z является поверхностью. Возьмем $s = \Phi^{-1}_z(x)$, тогда

$$\int\limits_{U \cap \varphi^{-1}(z)} g(s) dS^{n-k} = \int\limits_{\varphi(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}_z} g(\Phi^{-1}_z(x)) J_{\Phi^{-1}_z}(x) dx$$

Теперь нужно подставить это в прошлое уравнение.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{\varphi^{-1}(U) \cap \mathbb{R}^{n-k}} f(\Phi(x,z)) J_\varphi(\Phi(x,z)) J_{\Phi(x,z)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dz \int\limits_{U \cap \varphi^{-1}(z)} f(s) \frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi^{-1}_z}}$$

Для того, чтобы закончить доказательство, нужно лишь доказать, что:

$$\frac{J_\varphi J_\Phi}{J_{\Phi^{-1}_z}} = 1$$

(TODO: продолжение следует) $\square$

Для проекции $P_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ формула коплощади превращается в формулу Фубини:

$$\int\limits_U f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} dt \int\limits_{\mathbb{R}_t^{n-k}} f(y)dy$$

где $\mathbb{R}_t^{n-k} = \{(y, s) : s = t\}$ - $(n-k)$-мерная плоскость.

3 Введение в векторный анализ

3.1 Дифференциальные формы

Определение 3.1. Векторным полем на многообразии M называется функция $F : M \to F(x)$, такая что $F(x) \in T_x M$.

Для того, чтобы выяснить, как замена переменных влияет на векторное поле, введем оператор переноса.

Определение 3.2. Пусть $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда оператором переноса назовем φ^* и определим результат его действия на функцию $f : V \to \mathbb{E}$ как функцию $\varphi^* f : U \to \mathbb{E}$, такую, что $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x)$.

Выясним как оператор переноса действует на векторное поле. Пусть $v : V \to TV$ - векторное поле, тогда $\varphi^* v : U \to TU$ и $\varphi^* v(x) = D\varphi_{\varphi(x)}\langle v(\varphi(x))\rangle$.

Свойства оператора переноса:

Свойство 1°. Линейность

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall f, g$ - функции $\forall u, v$ – векторные поля.

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi^* f + \beta\varphi^* g \quad \varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi^* u + \beta\varphi^* v$$

Свойство 2°. мультипликативность

пусть $f : V \to \mathbb{R}$, $v : V \to TV$, $(f \circ v)(g) = f(g)\vec{v}(g)$. Тогда, если $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм, то $\varphi^*(f\vec{v}) = \varphi^* f \cdot \varphi^* v$.

Свойство 3°. перенос композиции является произведением переносов

пусть $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизмы, тогда $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \psi^*$.

Свойство 4°. перестановочность с дифференциалом

$\varphi^* d = d\varphi^*$.

Для доказательства последнего свойства, нам нужно ввести определение дифференциальной формы, а для этого нужно вспомнить некоторые свойства линейных отображений.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - линейное отображение. Рассмотрим действие L на вектор v:

$$L\langle v\rangle = L\langle v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n\rangle = v_1 L\langle e_1\rangle + \ldots + v_n L\langle e_n\rangle = v_1 a_1 + \ldots v_n a_n$$

Из этого уравнения следует то, что всякая линейная функция это скалярное произведение аргумента с некоторым постоянным вектором: $L\langle v\rangle = a \cdot v$.

Введем базис на пространстве линейных отображений $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Набор функций $dx_1, \ldots, dx_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таких что $dx_j(v_1, \ldots, v_n) = v_j$, является базисом в $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Следовательно, $L\langle v\rangle = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$.

Обозначим за $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ пространство алгебраических форм степени k над $\mathbb{R}^n$. В частности $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Определение 3.3. Дифференциальной формой степени k (сокращенно k-формой) на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 3.4. *Существует так называемый дуализм между 1-формами и векторными полями, так как каждая 1-форма изоморфна некоторому векторному полю.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую 1-форму $w(x)$, тогда $w(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots a_n(x)dx_n$. Пусть $v(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, тогда $w(x)\langle u\rangle = v(x) \cdot u$. □

Дифференциал функции так же является 1-формой. Так что стоит задаться вопросом: а не все ли 1-формы являются дифференциалом некоторой функции? Пример ниже говорит, что ответ на этот вопрос - нет.

Пример 3.5. $w = xdy$ - 1-форма, но не дифференциал.

Доказательство. Допустим, что $w = df = f_x dx + f_y dy$. Тогда $f_x = 0$ и $f_y = x$. Из курса мы знаем, что для любой функции $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим, так ли это в нашем случае. Получаем $f_{xy} = 0 \neq 1 = f_{yx}$. Получили противоречие. □

Рассмотрим как перейти к полярным координатам в форме $w = xdy$. Пусть $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, тогда $\varphi^* w = r\cos\varphi d(r\sin\varphi) = r\cos\varphi(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = r\sin\varphi\cos\varphi dr + r^2\cos^2\varphi d\varphi$.

Определим теперь оператор переноса для 1-форм.

Определение 3.6. Пусть w - 1-форма на V. Пусть $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ - C^1-диффеоморфизм. Тогда $\varphi^* w$ - 1-форма на U и $\varphi^* w(x)\langle v\rangle = w(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle$.

Теперь мы можем доказать 4 свойство оператора переноса.

Лемма 3.7 (Четвертое свойство оператора переноса)**.** *Пусть $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм, $f : V \to \mathbb{E} \in C^1$, тогда $\varphi^*(d\varphi) = d(\varphi^* f)$. Заметим так же, что слева от равенства стоит 1-форма, а справа 0-форма.*

Доказательство. Утверждение следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi^*(df)(x)\langle v\rangle = df(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle\rangle = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)\langle v\rangle = \\ = d(f\circ\varphi)(x)\langle v\rangle = d(\varphi^* f)(x)\langle v\rangle\end{aligned}$$

□

Пример 3.8 (Работа векторного поля вдоль кривой)**.** Рассмотри одно из физических приложений дифференциальных форм. Мы знаем, что работа силы вычисляется по формуле $A = \vec{(F)} \cdot \vec{l}$. То есть силу можно рассматривать как дифференциальную форму $A = w_g\langle l\rangle$. А теперь представим, что нам нужно посчитать работу вдоль кривой, где сила не постоянна на всех точках кривой. Получаем $A = \int\limits_{\gamma} \vec{g}(x) \cdot \vec{r}(x) dl(x)$.

3.2 Ориентация

Определение 3.9. Пусть V — конечномерное векторное пространство, в нем определены два базиса $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ связанные между собой матрицей перехода A такой, что $v_j = Au_j$ и $\det A \neq 0$. Базисы назовем *сориентированными* если $\det A > 0$, и *противоположено ориентированными* если $detA < 0$.

Ориентация — класс сориентированных базисов.

Определение 3.10. Пусть $\mathfrak{B}^n$ — множество базисов в $\mathbb{R}^n$ *ориентацией* на $\mathfrak{B}^n$ назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}^n \to \{-1, 1\}$$

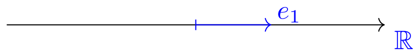
такую что:

1. Θ – непрерывная,
2. Θ – кососимметричная.

то есть, если $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ – перестановка, то $\Theta(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_n}) \to \operatorname{sgn} \sigma \cdot \Theta(v_1, \ldots, v_n)$

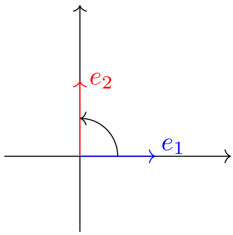
Теперь приведем примеры стандартных ориентаций. Они существуют для пространств $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

- ориентация в $\mathbb{R}^1$



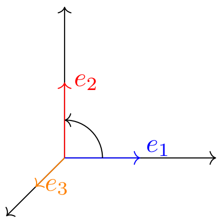
  т.е. стандартная ориентация направлена по возрастанию.

- ориентация в $\mathbb{R}^2$



  т.е. стандартная ориентация получается вращением от вектора e_1 к вектору e_2 против часовой стрелки.

- ориентация в $\mathbb{R}^3$



т.е. если вектор e_2 получен вращением вектора e_1 против часовой стрелки, то вектор e_3 должен смотреть «на нас».

Теперь определим ориентацию на многообразии.

Определение 3.11. Пусть M — k-мерное многообразие и $\mathfrak{B}M := \{(x,v_1,\ldots,v_k) : x \in M, v_1,\ldots,v_k$ – базис $T_xM\}$

ориентацией на многообразии M назовем функцию

$$\Theta : \mathfrak{B}M \to \{-1,1\}$$

такую что:

1. Θ – непрерывная,
2. Θ – кососимметричная.

Оказывается, что не на всяком многообразии можно задать ориентацию. Таким многообразием, к примеру, является лента Мёбиуса: если мы возьмем стандартный базис $\mathbb{R}^2$ и «протащим» его по ленте на один оборот, то он «зеркально отразится». Таким образом, на ленте Мёбиуса не существует функции, удовлетворяющей определению 3.11.

Определение 3.12. Многообразие называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию. В противном случае оно называется *неориентируемым*.

Определение 3.13. Ориентируемое многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация.

Лемма 3.14. *Если многообразие задано параметрически, то оно ориентируемое.*

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k, f : U \to \mathbb{R}^n$ при $k \le n$.

$$M = f(U) \iff \begin{cases} x_1 = f_1(t_1,\ldots,t_k), \\ \ldots \\ x_r = f_r(t_1,\ldots,t_k). \end{cases}$$

Поскольку в U есть ориентация k-мерного пространства $\Theta(u_1,\ldots,u_k)$, определим на M ориентацию $\tilde{\Theta}(x,v_1,\ldots,v_k)$ следующим образом: $x = f(t), v_1 = df_x\langle u_1\rangle, \ldots df_x\langle u_k\rangle$. □

Лемма 3.15. *Многообразие заданное системой уравнений всегда ориентируемое.*

Доказательство. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi : U \to \mathbb{R}^k \in C^1$ и $\operatorname{rank} D\varphi = k$ всюду для всякого $k \leq n$.

x — точка на многообразии M тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$. В свою очередь

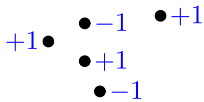
$$\varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

тогда $\nabla\varphi_1(x), \ldots, \nabla\varphi_k(x)$ — нормали к многообразию M в точке x. Определим ориентацию следующим образом:

$x \in M, \tau_1, \ldots, \tau_{n-k} \in T_x M \implies$
$\tilde{\Theta}(x, \tau_1, \ldots, \tau_{n-k}) = \Theta(\nabla\varphi_1(x), \ldots \nabla\varphi_k(x), \tau_1, \ldots, \tau_{n-k}).$ □

Рассмотрим примеры ориентируемых многообразий и ориентаций на них.

- $k = 0$. 0-мерное многообразие — набор точек.



  – просто приписываем $\{-1, +1\}$ к точкам.

- $k = 2, n = 3$. Поверхность в $\mathbb{R}^3$.

  Ориентация задается нормалью.

3.3 Интеграл 1-формы по кривой

Пусть $\gamma - C^1$-гладкая ориентированная кривая. Рассмотрим две регулярные параметризации. Тогда $\psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \to [c, d] \in C^1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi \neq 0$.

Определение 3.16. Две параметризации φ, ψ называются сориентированными (противоположно ориентированными), если $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ ($(\psi^{-1} \circ \varphi)' < 0$).

Определение 3.17. Параметризация φ кривой γ называется согласованной с ориентацией θ, если $\theta(\varphi(t), \varphi'(t)) > 0$.

Определение 3.18. Пусть $w : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ - непрерывная 1-форма и $\gamma \subset U$ - C^1-гладкая кривая с заданной ориентацией. Тогда интегралом 1-формы по ориентированной кривой называется $\int\limits_\gamma w = \int\limits_a^b w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle dt$, где $\varphi : [a, b] \to \gamma$ - параметризация, согласованная с ориентацией.

Рассмотрим как использовать эту формулу на примере.

Пример 3.19. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y.

Решение. Введем параметризацию, согласованную с ориентацией:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - (1 - t)^2 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Тогда $dx = -dt$, $dy = 2(1-t)dt$. Подставим эти выражения в формулу:

$$\int\limits_\gamma xdy + ydx = \int\limits_0^1 x(t)dy(t) + y(t)dx(t) = \int\limits_0^1 [x(t)y'(t) + y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 2(1 - t)^2 dt - (4 - (1 - t)^2)dt = \int\limits_0^1 [3(1 - t)^2 - 4]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-1 - 6t + 3t^2)dt = -t - 3t^2 + t^3 \Big|_0^1 = -3$$

□

Свойства интеграла 1-формы

Свойство 1°. Корректность

Определение не зависит от параметризации, согласованной с ориентацией

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \to \gamma, \psi : [c, d] \to \gamma \in C^1$ - параметризации, согласованные с ориентацией, следовательно они сориентированы. То есть $(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)$ - монотонно возрастает, следовательно $(\psi^{-1} \circ \varphi)(a) = c$ и $(\psi^{-1} \circ \varphi)(b) = d$.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_{c}^{d} w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$.

$$\int\limits_{c}^{d} w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = \int\limits_{a}^{b} w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)ds$$

Так как $w(\psi(s))$ - линейный оператор, можем внести $(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)$ как множитель аргумента. Имеем $\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(s) = \varphi(s)$ как производную композиции.

$$\int\limits_{a}^{b} w(\psi(\psi^{-1}(\varphi(s))))\langle\psi'(\psi^{-1}(\varphi(s)))\rangle(\psi^{-1} \circ \varphi)'(s)ds = \int\limits_{a}^{b} w(\varphi(s))\langle\varphi^{-1}(s)\rangle ds$$

$\square$

Свойство 2°. Антисимметричность

Пусть γ - ориентированная кривая, тогда $-\gamma$ та же кривая, только с противоположной ориентацией.

$$\int\limits_{-\gamma} w = -\int\limits_{\gamma} w$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, T] \to \gamma$ - параметризация кривой γ, согласованная с ориентацией, тогда $\psi(t) = \varphi(T - t)$ - параметризация кривой $-\gamma$, согласованная с ориентацией.

По определению интеграла 1-формы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} w = \int\limits_{0}^{T} w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle$$

Проведем замену переменных $t = (\varphi^{-1} \circ \psi)(s)$. Тогда $\psi(0) = T$ и $\psi(T) = 0$.

$$\int_0^T w(\varphi(t))\langle\varphi'(t)\rangle = \int_T^0 w(\varphi(\varphi^{-1}(\psi(s))))\langle\varphi'(\varphi^{-1}(\psi(s)))\rangle(\varphi^{-1}\circ\psi)'(s)ds =$$

$$= \int_T^0 w(\psi(s))\langle\psi^{-1}(s)\rangle ds = -\int_0^T w(\psi(t))\langle\psi'(t)\rangle = -\int_{-\gamma} w$$

$\square$

Свойство 3°. Линейность
$\forall w_1, w_2$ - формы, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\int_\gamma(\alpha w_1+\beta w_2) = \alpha\int_\gamma w_1 + \beta\int_\gamma w_2$$

Свойство 4°. Аддитивность
Пусть $\varphi : [p,q]\to\gamma$ - параметризация кривой γ, возьмем $r\in[p,q]$ и определим $\varphi_{pr} : [p,r]\to\gamma_{pr}$ и $\varphi_{pr} : [r,q]\to\gamma_{rq}$, тогда

$$\int_\gamma w = \int_{\gamma_{pr}} + \int_{\gamma_{rq}}$$

Замечание 3.20. Если кривая замкнута, тогда вместо $\int\limits_\gamma w$ используют обозначение $\oint\limits_\gamma w$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Пример 3.21 (Работа векторного поля вдоль ориентированной кривой)**.** Пусть $\vec{v}$ - векторное поле, γ - ориентированная кривая, тогда работа векторного поля вдоль кривой γ вычисляется как ($\vec{\tau}$ - касательный вектор к кривой)

$$\int_\gamma v_1dx_1+\ldots+v_ndx_n = \int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl$$

Теорема 3.22 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $w = df$ - полный дифференциал, γ - ориентированная кривая с начальной точной p и конечной точкой q, тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

Доказательство. Пусть $\varphi : [a, b] \to \gamma$ - параметризация кривой, согласованная с ориентацией. Тогда $\varphi(a) = p$ - начальная точка кривой и $\varphi(b) = q$ - конечная точка кривой.

$$\int\limits_{\gamma} df = \int\limits_{a}^{b} df(\varphi(t))\langle\varphi^{-1}(t)\rangle dt = \int\limits_{a}^{b} [f(\varphi(t))]'_t dt = f(\varphi(t))\Big|_{a}^{b} = f(q) - f(p)$$

$\square$

Следствие 3.23. *Если $w = df$, то $\int\limits_{\gamma} w$ не зависит от пути γ, а только от начальной и конечной точки.*

Следствие 3.24.

$$\oint\limits_{\gamma} df = 0$$

Пример 3.25. Пусть $w = xdy + ydx$, найти интеграл w по параболе $y = 4 - x^2$ в направлении возрастания y.

Решение. Заметим, что w - полный дифференциал функции $f = xy$, а так же, что начальная точка параболы это $(1, 3)$, а конечная $(0, 4)$.

$$\int\limits_{\gamma} xdy + ydx = \int\limits_{\gamma} d(xy) = xy\Big|_{(1,3)}^{(0,4)} = 0 - 3 = -3$$

$\square$

Теорема 3.26 (Критерий полного дифференциала)**.** *Пусть w - непрерывная 1-форма на множестве U. Тогда w является полным дифференциалом некоторой функции $f \in C^1$ тогда и только тогда, когда $\oint\limits_{\gamma} w = 0$ для всех ориентированных замкнутых контуров $\gamma \subset U$.*

Доказательство. Необходимость следует из 3.24.

Для доказательства достаточности построим функцию f.

Пусть U - открытое связное множество. Возьмем точку $x_0 \in U$ и положим, что $f(x_0) = C$. Возьмем так же $x \in U$ - другую точку и положим $f(x) = f(x_0) + \int\limits_\gamma w$, где γ - кривая, соеденяющая точки x и x_0 (начало в x_0, конец в x).

Если γ_1 и γ_2 - две кривые из x_0 в x, то $\gamma_1 - \gamma_2$ - замкнутый контур и

$$0 = \int\limits_{\gamma_1 - \gamma_2} w = \int\limits_{\gamma_1} w - \int\limits_{\gamma_2} w$$

Следовательно интегралы по разным кривым совпадают независимо от пути.

Продолжение следует ;) $\square$

Определение 3.27. Непрерывная дифференциальная форма w называется *точной*, если существует $f \in C^1$ такая, что $w = df$.

Определение 3.28. Векторное поле $\vec{v}$ называется *потенциальным*, если существует функция $f \in C^1$ такая, что $\vec{v} = \nabla f$. В таком случае говорят, что f является *потенциалом* $\vec{v}$.

Теорема 3.29 (Формула Грина)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактная область с кусочной-гладкой границей, пусть $w : U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ — C^1-гладкая 1-форма $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial U} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_U \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P(x,y) & Q(x,y) \end{vmatrix} = \int\limits_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Доказательство. Доказательство проведем для криволинейной трапеции.

Пусть $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f \leq g$ $\square$

Пример 3.30. Вычислить

$$\oint\limits_U x^2 \arctan(x^2 + \sin(x))dx + xdy$$

где U задано равенством $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Лайфхак от Сергея Геннадьевича: если вы видите задачу с «безумной функцией», то эта задача на формулу Грина.

Функция в задаче выглядит не очень, так что воспользуемся формулой Грина:

$$\oint\limits_{U} x^2 \arctan(x^2 + \sin x)dx + xdy = -\iint\limits_{U} (1-0)dxdy = -\pi ab$$

□

Определение 3.31. 1-формами площади называются специальные 1-формы, интегралы от которых дают площадь.

$$xdy, \qquad -ydx, \qquad \frac{xdy - ydx}{2}$$

Проинтегрировав любую из этих форм по области, вы получите площадь области:

$$\oint\limits_{\partial U} xdy = \iint\limits_{U} (1-0)dxdy = |U|$$

Пример 3.32. Вычислите площадь ветки циклоиды, полученной движением круга радиуса a.

$$\begin{cases} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{cases}$$

Решение. Из прошлого семестра, мы знаем, что площадь можно посчитать с помощью двойного интеграла. Для этого нам нужно найти пределы интегрирования. Переменная x меняется от 0 до $2\pi a$, однако, когда мы попытаемся найти пределы интегрирования по y, мы столкнемся с проблемой: t нельзя выразить через x в явном виде. Следовательно, старый способ вычисления площади тут не сработает.

Воспользуемся 1-формами площади. Заметим, что область ветки ограничена кривой циклоиды и осью Ox. Обозначим за C и I циклоиду и ось Ox соотвественно, по формуле Грина получим:

$$S = \oint\limits_{C+I} ydx = \int\limits_{C} ydx + \int\limits_{I} ydx$$

Так как $y = 0$ во втором интеграле, получаем:

$$\int\limits_C ydx = \int\limits_0^{2\pi} a(1+\cos t)d(at - a\sin t) = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \frac{6x - 8\sin x + \sin 2x}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

□

У нас уже был критерий полного дифференциала, но он не годится для непосредственной проверки того, является ли 1-форма дифференциалом некоторой функции. Поставим перед собой задачу: по 1-форме определить полный дифференциал ли это и, если да, то какой функции?

Теорема 3.33 (Необходимое условие полного дифференциала)**.** *Пусть* $w = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$ *и* $w \in C^1$*. Тогда, если* $w = df$*, то*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

Доказательство. Заметим, что, если $w = df$ и $w \in C^1$, то $f \in C^2$, т.е. существуют вторые частные производные функции f и дифференциал f можно записать в координатном представлении.

$$w = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Так как $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, получаем, что

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□

Сейчас мы убедимся, что данное условие не является достаточным.

Определение 3.34. Формой Гаусса Θ (в декартовых координатах) называется форма

$$\Theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad dom\,\Theta = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Не сложно убедится в том, что для формы Гаусса выполняются необходимые условия полного дифференциала.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Однако, если мы возьмем за замкнутый контур единичную окружность и вычислим интеграл по замкнутому контуру, мы получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

То есть, критерий полного дифференциала не выполняется и форма Гаусса не является полным дифференциалом.

Заметим так же, что если бы мы воспользовались формулой Грина для проверки критерия, мы бы получили другой ответ:

$$\oint \Theta = \int 0 dxdy = 0$$

Но тут нет противоречия, ведь форма Гаусса не гладкая в нуле, следовательно, нельзя применять формулу Грина.

Рассмотрим представление формы Гаусса в полярных координатах

$$\Theta = d\varphi$$

Лемма 3.35. *Пусть γ — кривая, не проходящая через 0, с началом в p и концом в q. Тогда*

$$\int\limits_\gamma = \varphi(q) - \varphi(p)$$

— разность углов с осью Ox радиус векторов в из начала координат в начальную и конечную точку.

Лемма 3.36. $\Theta = d\varphi$ *будет полным дифференциалом, если выколоть некоторый луч исходящий из нуля (т.к. никакая кривая не сможет полностью обойти* 0*).*

Определение 3.37. Две кривые $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называются гомотопными, если существует функция $f : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, такая, что f — непрерывная и $f(x, 0) = \gamma_0(x)$ и $f(x, 1) = \gamma_1(x)$

Определение 3.38. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется односвязным, если всякий замкнутый контур $\gamma \subseteq M$ гомотопен точке.

Примеры односвязных множеств

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, сфера — односвязные множества.

2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{прямая}\}$, тор — не являются односвязным множеством.

Теорема 3.39 (Гипотеза Пуанкаре)**.** *Всякое n-мерное компактное односвязное многообразие без края гомеоморфно n-мерной сфере.*

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 3.40 (Достаточное условие полного дифференциала)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое и односвязное множество, $w : U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \in C^1$, $w = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ для всех $i, j = 1, \ldots n$, тогда существует функция $f : U \to \mathbb{R} \in C^2$ такая, что $w = df$.*

Доказательство. Проведем для $\mathbb{R}^2$.

Пусть $w = adx + bdy$, $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ и пусть $\gamma \subseteq U$ — кусочно гладкий контур, $\gamma \subseteq \partial D$ где $D \subseteq U$. Тогда по формуле Грина:

$$\oint\limits_{\gamma} w = \pm \int\limits_{D} \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dxdy$$

следовательно, выполнен критерий полного дифференциала, тогда существует функция $f \in C^1$ такая, что $w = df \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$. □

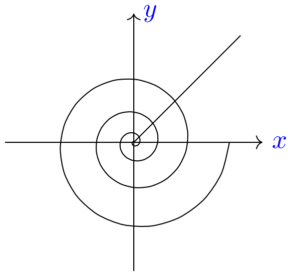
Допустим, нам дана 1-форма w и известно, что $w = df$. Возникает естественный вопрос: как найти такую функцию f?

- выберем $x_0 \in U$ и определим, что $f(x_0) := C$.

- возьмем $x \in U$ такую, что $x \neq x_0$ и выберем путь $\gamma \subseteq U$ из x_0 в x тогда
$$f(x) := f(x_0) + \int\limits_{\gamma} w.$$

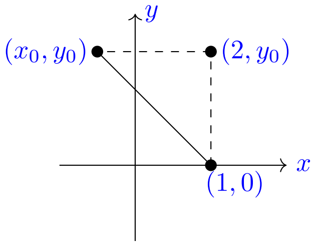
Сейчас рассмотрим восстановление функции по 1-форме в случае, если она является полным дифференциалом некоторой функции.

Пример 3.41. Рассмотрим дифференциальную форму $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.



— плоскость без луча. Если область не односвязная, ее надо сделать односвязной добавлением «связей», линий, соединяющих элементы области.

Восстановим функцию в $\mathbb{R}^2 \backslash \{x \le 0, y = 0\}$.



Выберем точку в области определения. Пусть $f(1{,}0) = C$.

$$\int\limits_{(1,0)}^{(2,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{y_0} \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y_0,$$

$$\int\limits_{(1,y_0)}^{(x_0,y_0)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_1^{x_0} -\frac{y_0 dy}{x^2 + y_0^2} = \begin{cases} y_0 = 0 : 0, \\ y_0 \neq 0 : -\frac{1}{y} \int\limits_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\int\limits_1^{x_0} \frac{dx}{\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1} = \left[t = \frac{x}{y_0}, dt = \frac{1}{y_0} dx\right] \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{y_0}}^{\frac{x_0}{y_0}} \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan \frac{1}{y_0} - \arctan \frac{x_0}{y_0}$$

Таким образом:

$$f(x,y) = f(1,0) + \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y < 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

— где $f(1,0)$ – задается.

3.4 Внешние формы второго порядка

Рассмотрим для примера как происходит замена переменной в плоском случае. Пусть $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ — 2-форма, такая что $w = f(x,y)dx \wedge dy$. Проведем замену переменных φ:

$$\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \end{cases}$$

Вычислим оператор переноса:

$$\varphi^* w(t,s) = (f \circ \varphi)(t,s)(x_t dt + x_s ds) \wedge (y_t dt + y_s ds) =$$
$$= (f \circ \varphi)(t,s) \cdot \det \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_y & y_s \end{pmatrix} dt \wedge ds$$

В операторе переноса возник коэффициент искажения. Заметим, что в отличие от коэффициента искажения при замене переменных в интеграле, в операторе переноса коэффициент искажение возникает без модуля. Его знак зависит от того, меняет ли замена переменных ориентацию (он отрицательный, если замена переменных меняет ориентацию).

Определение 3.42. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная 2-форма. Тогда выражение

$$\int\limits_U w = \iint\limits_U f(x,y)dx \wedge dy := \theta(e_x, e_y) \int\limits_U f(x,y)dxdy$$

называется *интегралом 2-формы* в $\mathbb{R}^2$, где $\theta(e_x, e_y) = \pm 1$ — ориентация плоскости (e_x, e_y — орты, соответствующие направлению).

Определение 3.43. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ - двумерное C^1-гладкое ориентированное многообразие и $w : M \to \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерываня 2-форма. Тогда, если $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ — параметризация, то

$$\int\limits_M := \int\limits_U \varphi^* w = \int\limits_U w(\varphi(t,s))\langle \varphi_t(t,s), \varphi_s(t,s)\rangle dt \wedge ds$$

будем называть *интегралом 2-формы по поверхности.*

Если $M \subseteq \mathbb{R}^3$ — поверхность, то соответствующие касательные векторы в каждой точке образуют касательную плоскость, а векторы нормали, в свою очередь, образуют прямую. Следовательно, ориентацию можно задать нормалью.

В $\mathbb{R}^3$ задано правило Буравчика (если поворачиваем от 1 к 2, то 3 смотрит на нас) — ориентация $\theta\langle u, v, w\rangle$. То есть, если на поверхности есть $\vec{n}, \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}$, то $\theta_M(\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}) = \theta\langle \vec{n}, \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle$.

Очевидно, что $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$. Следовательно, $(a,b,c) \simeq ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = w$. Отсюда $w\langle u, v\rangle = (a,b,c)(u \times v)$.

Получим формулу потока векторного поля через поверхность, где $(a,b,c)\cdot \langle \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle$ — поток вектора (a,b,c) через параллелограмм $\Pi(\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2})$.

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_M w\langle \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}\rangle dS =$$
$$= \int\limits_M (a,b,c) \cdot \langle \tau_1 \times \tau_2\rangle dS = \int\limits_M (a,b,c) \cdot \vec{n} dS$$

Определение 3.44. Форма Гаусса в $\mathbb{R}^3$:

$$\Theta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Лемма 3.45. *В сфеерических координатах форма Гаусса имеет вид*

$$\Theta = d\theta \wedge d\varphi.$$

Геометрическая интерпретация формы Гаусса $\int\limits_M \Theta$ — телесный угол под которым видна поверхность из начала координат.

3.5 Внешний дифференциал 1-формы

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Тогда $df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — линейная функция, а $df : x \mapsto df(x)$ — 1-форм. напомним, что $d^2 f(x)\langle u, v\rangle = d(df(x))$ - билинейная симметричная форма, такая что $d^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

В свою очередь, при $w : U \to \Lambda^1\mathbb{R}^n$, dw так же является билинейной формой, но не обязательно симметричной.

$$dw\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = d(w\langle\vec{u}\rangle)\langle\vec{v}\rangle = \frac{\partial}{\partial\vec{v}}w\langle\vec{u}\rangle$$

Форма w в координатном представлении имеет вид $w = a_1dx_1+a_2dx_2+\ldots+a_ndx_n$, следовательно

$$dw(x)\langle u\rangle = \sum_{i=1}^{n} da_i(x)u_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}u_idx_j$$

Из этого следует, что

$$dw(x)\langle u,v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}u_iv_j = (\frac{\partial a_i}{\partial x_j})\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}^T(\frac{\partial a_i}{\partial x_j})\vec{u}$$

То есть, всякая билинейная форма есть сумма симметричной и кососимметричной (первое и второе слагаемые соответственно), где $l^T\langle u,v\rangle = l\langle v,u\rangle$:

$$l = \frac{l+l^T}{2} + \frac{l-l^T}{2}$$

Определение 3.46. *Внешним дифференциалом 1-формы* называется кососимметричная часть полного дифференциала, то есть du сопоставляет 1-форме — 2-форму.

$$d : C^{r+1}(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \to C^r(U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

Лемма 3.47. *Если* $w = \sum\limits_{i=1}^{n} a_idx_i$, *то*

$$dw = \sum_{i=1}^{n} da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_i$$

Теорема 3.48 (Формула Грина в терминах внешнего дифференциала)**.** *Пусть* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *— область с кусочно-гладкой границей и* $w \in C^1(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$. *Тогда верна формула Грина*

$$\oint\limits_{\partial U} w = \int\limits_U d_{\text{внешний}}w$$

3.6 Ротация векторного поля

Определение 3.49. Пусть $\bar{v}$ — векторное поле в плоскости. Ротация (вихрь) векторного поля $\bar{v}$ в точке (x_0, y_0)

$$\operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \lim_{r \to 0} \oint\limits_C \bar{v} d\bar{r}, \text{ где } C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Лемма 3.50. *Для C^1-гладкого векторного поля $\bar{v}(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}$ верно, что*

$$\operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}(x_0, y_0) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. Пусть $C := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, S := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.

$$\oint\limits_C \bar{v} d\bar{r} = \oint\limits_C (a, b)(dx, dy) = \oint\limits_C a dx + b dy =$$

воспользуемся формулой Грина

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial a}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + o(1) \right] dxdy =$$

$$= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \pi r^2 + \iint\limits_B o(1) dxdy$$

Определение 3.51 (формула Грина)**.**

$$\oint\limits_{\partial U} \bar{v} d\bar{r} = \iint\limits_U \operatorname{rot}_{x,y} \bar{v} dxdy.$$

□

Свойства ротации.

Свойство 1°. Линейность

пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\bar{u}, \bar{v}$ — векторные поля в плоскости, тогда $\operatorname{rot}_{x,y}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \operatorname{rot}_{x,y} \bar{u} + \beta \operatorname{rot}_{x,y} \bar{v}$.

Свойство 2°. Антисимметричность
пусть $\bar{v}$ — векторное поле в плоскости, тогда $\operatorname{rot}_{x,y}\bar{v} = -\operatorname{rot}_{y,x}\bar{v}$.

Пример 3.52. Пусть $w = f(x,y)dx \wedge dy$.

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t,s), \\ y = y(t,s). \end{cases}$$

$\varphi^* w(t,s) = (f\circ\varphi)(x_t dt + x_s ds)\wedge(y_t dt \wedge y_s ds) = (f\circ\varphi)(t,s)\det\begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} ds\wedge dt$

Определение 3.53. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ – открытое множество, $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ – непрерывная. Тогда

$$\int\limits_U w = \iint\limits_U f(x,y)dx\wedge dy := \underbrace{\Theta(e_x, e_y)}_{\pm 1}\int\limits_U f(x,y)dxdy$$

Определение 3.54 (Интеграл 2-формы по поверхности)**.** Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ – двумерное C^1-гладкое ориентированное многообразие, $w : M \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ – непрерывная 2-форма.

Если $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ – параметризация, то

$$\int\limits_U w := \int\limits_U \varphi^* w = \int\limits_U w(\varphi(t,s))\langle\varphi_t(t,s), \varphi_s(t,s)\rangle dt\wedge ds$$

Определение 3.55. Внешний дифференциал 1-формы — это кососимметрическая часть полного дифференциала

$$d : C^{r+1}(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)) \to C^r(U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n))$$

т.е. если $w = \sum\limits_{i=1}^n a_i dx_i$ – 1-форма, то $dw = \sum\limits_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum\limits_{i=1}^n \left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j\right) dx_i$

Теперь рассмотрим запись формулы Грина и формулы Ньютона-Лейбница в терминах внешнего дифференциала.

формула Грина: пусть $U \subseteq R^2$ – область с кусочно гладкой границей, $w \in C^1(U \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2))$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial U} w = \int\limits_U dw$$

формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{\partial\gamma} f = f(q) - f(p) = \int\limits_{\gamma} df$$

3.7 Внешние формы высших порядков

Определение 3.56. Внешней алгебраической формой порядка $k \in \mathbb{N}$ над $\mathbb{R}^k$ называется функция $l : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

1. l — k-линейная функция (т.е. линейна по каждому из k аргументов),
2. l — кососимметричная функция, т.е. если $\sigma : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$ – перестановка, то $l\langle u_{\sigma_1},\ldots,u_{\sigma_k}\rangle = \operatorname{sgn}\sigma \cdot l\langle u_1,\ldots u_k\rangle$

Пространство алгебраических форм порядка k над $\mathbb{R}^n$ будем обозначать как $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.57. Пусть даны k штук 1-форм $l_1,\ldots,l_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ результат их внешнего произведение будет являться k-формой

$$(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k)\langle u_1,u_2,\ldots,u_k\rangle = \det\begin{pmatrix} l_1\langle u_1\rangle & l_1\langle u_2\rangle & \ldots & l_1\langle u_k\rangle \\ l_2\langle u_1\rangle & l_2\langle u_2\rangle & \ldots & l_2\langle u_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_k\langle u_1\rangle & l_k\langle u_2\rangle & \ldots & l_k\langle u_k\rangle \end{pmatrix}$$

На пространстве k-форм над $\mathbb{R}^n$ $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ можно ввести базис: $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq k$.

Размерность пространства $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ это число перестановок из n по k: $\dim\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k$.

Для упрощение записи введем специальной обозначение

Определение 3.58. «Шапкой-невидимкой» называется операция $\widehat{\ }$ определенная как

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Стандартный базис $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ это $\{(-1)^{j+1}dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\ldots\wedge dx_n\}_{j=1,\ldots,n}$ – базис для $(n-1)$-форм.

К примеру для $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ базисом будет набор $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$.

Мультииндексные обозначения

Для упрощения записей будем использовать мультииндексные обозначения. Определим $M(n,k) := \{(i_1,\ldots,i_k) : 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n\}$, число элементов $M(n,k)$ равняется C_n^k.

Тогда k-форма l будет записываться как $l = \sum\limits_{I\in M(n,k)} a_I dx_I$, где $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

С помощью мультииндексных обозначений доопределим внешнее произведение внешних форм

$$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

Пусть $w^k = \sum\limits_{I\in M(n,k)} a_I dx_I$ и $w^l = \sum\limits_{J\in M(n,l)} b_J dx_J$. Тогда $w^k \wedge w^l = \sum\limits_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$.

Пример 3.59. Пусть даны две формы $2dx+3dy+4dz$ и $5dz\wedge dx+6dx\wedge dy$.

Тогда

$$\begin{aligned}(2dx + 3dy + 4dz) \wedge (5dz \wedge dx + 6dx \wedge dy) =\\ 0 + 0 + 16dy \wedge dz \wedge dx + 0 + 0 + 24dz \wedge dx \wedge dy =\\ 39dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

т.к. $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Свойства внешнего произведения $\wedge$.

Свойство 1°. Линейность

Свойство 2°. Кососимметричность

Для любых w^k, w^l выполнено $w^k \wedge w^l = (-1)^{kl} \cdot w^l \wedge w^k$.

Определение 3.60. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, функция $w^k : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ называется внешней дифференциальной формой порядка k (k-формой).

3.7.1 Замена переменной в k-форме

Определение 3.61. Пусть $w : V \to \Lambda^k, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\varphi : U \to V$ – C^1-диффеоморфизм, тогда *операция переноса*

$$\varphi^* : (V \to \Lambda^k) \to (U \to \Lambda^k)$$

определяется следующим образом:

$$(\varphi^* w)(x)\langle u_1,\ldots,u_k\rangle = w(\varphi(x))\langle D\varphi_x\langle u_1\rangle,\ldots,D\varphi_x\langle u_n\rangle\rangle$$

то есть
$$w(y) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in M(n,k)} a_I(y)dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$$
замена $y = \varphi(x)$
$$\varphi^*(w)(x) = \sum_{I\in M(n,k)} a_I(\varphi(x))dx\varphi_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}(x)$$

Свойства операции переноса φ^*.

Свойство 1°. Линейность для любых форм w_1, w_2 и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что $\varphi^*(\alpha_1 w_1 + \beta w_2) = \alpha_1\varphi^* w_1 + \beta\varphi^* w_2$

Свойство 2°.
пусть ψ^* и φ^* — операции переноса. Тогда $\psi^*\varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*$
Свойства внешнего произведения $\wedge$.

Свойство 3°.
пусть φ^* – операция переноса, w^k, w^l – формы. Тогда $\varphi^*(w^k \wedge w^l) = \varphi^* w^k \wedge \varphi^* w^l$.

Рассмотрим n-форму над $\mathbb{R}^n$ $w^n = f(y_1, \ldots, y_n)dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n$, пусть $y = \varphi(x)$. Тогда $\varphi^* w^n = f(\varphi(x)) \det D\varphi(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Теперь выясним, как интегрировать n-форму по области в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, Θ – ориентация в $\mathbb{R}^n$, $w : U \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ – непрерывна, $w(x) = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Положим
$$\int_U w = \int_U f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n := \Theta(l_1, \ldots, l_n) \int_U f(x)dx_1 \ldots dx_n$$

3.7.2 Интеграл k-формы по ориентированному k-мерному многообразию

TODO

Определение 3.62. Пусть $w : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \in C^1$ и $w(x) = \sum\limits_{I\in H(n,k)} a_I(x)dx_I$ внешним дифференциалом k-формы w назовем дифференциальную $(k+1)$-форму $dw : U \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ определяемую следующим образом:

- при $k = 0$ это дифференциал функции (1-форма),

- при $k > 0$ определим покоординатно

$$dw(x) = d\left(\sum_I a_I(x)dx_I\right) := \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Свойства внешнего дифференциала.

Свойство 1°. Линейность
Для любых w_1, w_2, α, β выполнено

$$d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha dw_1 + \beta dw_2$$

Свойство 2°.

$$d(w^k \wedge w^l) = dw^k \wedge w^l + (-1)^k w^k \wedge dw^l$$

Доказательство. Пусть w^k и w^l, такие, что

$$w^k = \sum_{I \in M(n,k)} a_I dx_I \quad w^l = \sum_{I \in M(n,l)} a_I dx_I$$

$$w^k \wedge w^l = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

$$d(w^k \wedge w^l) = \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} (a_I db_J + b_J da_I) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$
$$= \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Осталось заметить, что первое слагаемое это в точности

$$(-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J = (-1)^k \wedge dw^l$$

А второе, в свою очередь, в точности

$$\sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge (b_J dx_J) = dw^k \wedge w^l$$

$\square$

Свойство 3°. Перестановочность с заменой переменных

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

Доказательство. Для 0,1-форм уже доказано. Докажем для форм высшего порядка по индукции. Пусть для k-форм утверждение выполнено, докажем для $(k+1)$-форм.

С одной стороны для $w^{k+1}(y) = a(y)dy_i \wedge dy_J$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^* dw^{k+1} = \varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J - a(y)dy_i \wedge d(dy_J)) = \\ = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J) = \varphi^*(da(y) \wedge dy_i \wedge dy_J)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}d(\varphi^* w^{k+1}) = d(\varphi^*(a(y)dy_i \wedge dy_J)) = d(\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J) = \\ = d\varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_J) \wedge d(\varphi^* dy_J)\end{aligned}$$

Применив предположение индукции, получим

$$\varphi^*(d(a(y)dy_i)) \wedge \varphi^* dy_J - \varphi^*(a(y)dy_i) \wedge \varphi^*(d(d(y_J)) = \varphi^*(d(a(y)) \wedge dy_i \wedge dy_J)$$

$\square$

Определение 3.63. k-мерное многообразие называется *замкнутым*, если это компакт без края.

Если M — k-мерное замкнутое многообразие и w^k — k-форма на M, то

$$\oint\limits_{\partial M} w^k := \int\limits_M w^k$$

Теорема 3.64 (Формула Стокса-Пуанкаре)**.** *Пусть M — кусочно-гладкое k-мерное компактное ориентированное многообразие, w — C^1-гладкая $(k-1)$-форма на M, тогда*

$$\oint\limits_{\partial M} w = \int\limits_M dw$$

Доказательство. Разобьем доказательство данной формулы на два шага. Для начала докажем ее для случая куба в $\mathbb{R}^n$, потом, имея доказательство для куба, обобщим его на случай произвольного многообразия.

Шаг 1. Проведем доказательство для куба в $\mathbb{R}^n$. Зададим куб как $[-a,a]^n$ и заметим, что он является n-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$ и у него есть $2n$ $(n-1)$-мерных граней

$$\begin{cases} -a \le x_1 \le a \\ -a \le x_2 \le a \\ \dots \\ -a \le x_n \le a \end{cases}$$

Пусть w — $(n-1)$-форма, заданная на кубе, тогда

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Дифференциал этой формы равен

$$dw(x) = \sum_{j=1}^{n} da_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge (-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} (-1)^{j+1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Вычислим интеграл от dw по кубу

$$\int\limits_{[-a,a]^k} dw = \int\limits_{[-a,a]^k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{-a}^{a} \ldots \int\limits_{-a}^{a} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

С другой стороны

$$\int\limits_{x_j=a} w = \int\limits_{x_j=a} \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(-1)^{j+1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Что равно

$$\int\limits_{x_j=a} a_j(x)(-1)^{j+1}dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\ldots\wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a}\ldots\int\limits_{-a}^{a} a_j(x1,\ldots,x_{j-1},a,x_{j+1},\ldots,x_n)dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n =$$

$$= -\int\limits_{-a}^{a}\ldots\int\limits_{-a}^{a} a_j(x1,\ldots,x_{j-1},-a,x_{j+1},\ldots,x_n)dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n$$

Отсюда

$$\int\limits_{x_j=a} w + \int\limits_{x_j=-a} w = \int\limits_{-a}^{a}\ldots\int\limits_{-a}^{a}\left(a_j\Big|_{x_j=a} - a_j\Big|_{x_j=-a}\right)dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n$$

Следовательно

$$a_j\Big|_{x_j=a} - a_j\Big|_{x_j=-a} = \int\limits_{-a}^{a}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)dx_j$$

Шаг 2. Пусть $x\in M$ тогда существует U_x – окрестность точки x и существует C^1-диффеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x)$ на окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, такой что $\varphi_x(x) = 0$ и

$$\varphi_x(U\cap M) = \begin{cases}\varphi_x(U)\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\}^{n-k}),\\ \varphi_x(U)\cap(\mathbb{R}^n_+\times\{0\}^{n-k}).\end{cases}$$

Причем U_x мы выберем квадратной, так как если существует какая-либо окрестность точки, то в нее всегда можно вписать квадрат.

Пусть $Q_x\subset\varphi(U_x)$ – открытый k-мерный куб с центром в нуле. Для любого такого куба формула уже доказана в силу 1 шага. Все многообразие M покрывается $\varphi_x^{-1}(Q_x)$, т.е. образами кубов. Следовательно, существует конечный набор $Q_1,\ldots,Q_m$ соответствующий $x_1,\ldots,x_m$, такой что $\varphi_1^{-1}(Q_1),\ldots,\varphi_m^{-1}(Q_m)$ – покрывает M.

Используем «разбиение единицы». Пусть существует набор гладких функций $\psi_1,\ldots,\psi_m : M\to\mathbb{R}$, таких что $\psi_j(x)>0$ тогда и только тогда, когда $x \in \varphi_j(Q_j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \psi_j(x) \equiv 1$. Такой набор всегда существует, потому что мы можем его построить.

Построим «разбиение единицы»:

Существует функция $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^\infty$ определенная как

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(x) > 0, & |x| < a, \\ \chi(x) = 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Тогда $\chi^k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ это $\chi^k(x_1, \ldots, x_k) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi(x_k)$ Имеем

$$\chi^k(x) = \begin{cases} \chi^k(x) > 0, & |x|_\infty < a, \\ \chi^k(x) = 0, & |x|_\infty \geq a. \end{cases}$$

Переносом системы координат получим эту функцию, заданную на многообразии: $\varphi_j^* \chi^k : M \to \mathbb{R}$ при этом $\chi^k(x) > 0 \iff x \in \varphi_j^{-1}(Q_j)$. Получаем, что сумма φ_j неотрицательна, осталось нормировать.

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi_j^* \chi^k(x)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i^* \chi^k(x)}$$

$\varphi_j : \varphi_j^{-1}(Q_j) \to Q_j$ — перенос образа куба в куб.

$$\int_M dw = \int_M 1 dw = \int_M \sum_{j=1}^m \psi_j(x) dw(x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j(x) dw(x) =$$

$$\sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw).$$

Используем доказанную ранее формулу Стокса для случая куба:

$$\int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)} \psi_j w = \int\limits_{\partial Q_j} \varphi_j^*(\psi_j w) = \int\limits_{Q_j} d\varphi_j^*(\psi_j w) = \int\limits_{Q_j} \psi_j^* d(\psi_j w) =$$

$$\int\limits_{Q_j} \varphi_j^* \left(d\psi_j \wedge w + \psi_j dw\right) = \int\limits_{Q_j} \psi_j^*(d\psi_j \wedge w) + \int\limits_{Q_j} \varphi_j^*(\psi_j dw) =$$

$$\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} d\psi_j \wedge w + \int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)} \psi_j dw$$

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)}\psi_j w=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)}d\psi_j\wedge w+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)}\psi_j dw$$

При этом левая часть этого выражения равна

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(\partial Q_j)}\psi_j w=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\partial\varphi_j^{-1}(Q_j)}\psi_j w=\int\limits_{\partial M}w$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)}d\psi_j\wedge w=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{M}d\psi_j\wedge w=\int\limits_{M}d1\wedge w\equiv 0$$

Второе слагаемое в правой части равно

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\varphi_j^{-1}(Q_j)}\psi_j dw=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{M}\psi_j dw=\int\limits_{M}dw$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial M}w=\int\limits_{M}dw$$

$\square$

Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре:

1. Если $k=1$, то M — кривая, а w — функция и формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Ньютона-Лейбница.

2. Если $n=2$ и $k=2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Грина.

3. Если $n=3$ и $k=3$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Гаусса-Остроградского.

4. Если $n=3$ и $k=2$, то формула Стокса-Пуанкаре принимает вид формулы Кельвина-Стокса.

3.8 25.04.19

Пусть поверхность S окружает тело V в $\mathbb{R}^2$. Тогда объем тела V можно вычислить проинтегрировав по внешней стороне поверхности одну из форм:

$$xdy \wedge dz \quad ydz \wedge dx \quad zdx \wedge dy$$

По формуле Стокса

$$\oint_S xdy \wedge dz = \int_V dx \wedge dy \wedge dz = \pm|V|$$

Чтобы значение было положительно, нужно согласовать ориентацию так, чтобы она определялась с помощью нормали по внешней стороне.

В общем случае, формами объема в $\mathbb{R}^n$ являются формы вида

$$(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad j = 1 \ldots n$$

А так же форма

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1} n(-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Определение 3.65. Непрерывная k-форма называется *точной*, если она является внешним дифференциалом некоторой C^1-гладкой $(k-1)$-формы θ, т.е. $w = d\theta$.

Определение 3.66. C^1-гладкая форма w называется *замкнутой*, если $dw = 0$.

Как мы знаем, первообразную можно восстановить с точностью до константы. В случае с формами роль констант выполняют замкнутые формы, т.е. форму можно восстановить по дифференциалу с точностью до замкнутой формы.

Теорема 3.67 (Первая теорема Пуанкаре)**.** *Все (гладкие) точные формы являются замкнутыми, т.е. если w – C^1-гладкая точная форма, то $dw = 0$. Так же это утверждение можно переформулировать как $d \circ dw = 0$, т.е. внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

Доказательство. Так как дифференциал линеен, достаточно доказать только для одного из слагаемых.

Пусть $\theta = adx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_{i_k} = adx_I$. Тогда

$$d\theta = d(adx_I) = da \wedge dx_I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Отсюда

$$d(d\theta) = \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I) = \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial a}{\partial x_i}) \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

Если $i = j$, то слагаемые вида $dx_i \wedge dx_i$ равны нулю, с другой стороны, если $i \neq j$, то $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ и это слагаемое равно симметричному слагаемому с противоположным знаком, так как

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i}$$

Следовательно, $d(d\theta) = 0$. □

Определение 3.68. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется k-связным, если каждое замкнутое многообразие, порядок которого меньше или равен k, можно стянуть в точку.

В частности, 0-связное множество представляет собой набор точек, каждую пару которых можно соединить кривой. Так же вводят понятие (-1)-связного множества, что обозначает, что она не является k-связным ни для какого k.

Определение 3.69. Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно некоторой точки x_0, если любую точку $x \in U$ можно соединить с x_0 отрезком.

Очевидно, что, если множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ звездное, то оно k-связное для любого $k = 1 \ldots n$.

Определение 3.70. Пусть U — звездное множество. Определим оператор $I : C^r(U \to \Lambda^k) \to C^{r+1}(U \to \Lambda^{k-1})$, так, что каждой форме $w = adx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ сопоставляется

$$I(w) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Определение 3.71. Форма w называется коточной, если существует форма θ, такая что $w = I\theta$.

Теорема 3.72. *Для всякой C^1-гладкой k-формы w на звездной области выполнено*

$$w = dIw + Idw$$

Доказательство. Пусть $w = a(x_1, \ldots, x_n)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, вычислим все выражения, которые есть в теореме.

$$Iw = \sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha-1}\Big[\int\limits_0^1 t^{k-1}a(tx)dt\Big]x_{i_\alpha}dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$dIw = \sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha-1}d\Big[\int\limits_0^1 t^{k-1}a(tx)dt\; x_{i_\alpha}\Big]dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha-1}d\Big[\int\limits_0^1 t^{k-1}a(tx)dt\; dx_{i_\alpha} + x_{i_\alpha}\sum_{j=1}^{n}\Big(\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}dt\Big)\Big]\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k}\Big(\int\limits_0^1 t^{k-1}a(tx)dt\Big)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_{i_\alpha}(-1)^{\alpha-1}\Big(\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}dt\Big)dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$dw = da \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$Idw = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\Big[\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}dt\Big]x_{i_\alpha}dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\Big[\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}dt\Big]x_j dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Если мы сложим Idw и dIw, двойные суммы сократятся, и проинтегрировав по частям и применив формулу Ньютона-Лейбница, мы получим

$$dIw+Idw = k\left(\int\limits_0^1 t^{k-1}a(tx)dt\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}+\sum_{i=1}^n\left[\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}x_j dt\right]dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1\left[kt^{k-1}a(tx)+\sum_{i=1}^n t^k\frac{\partial a}{\partial x_j}x_j\right]dt\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} = \left(\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\left[t^k a(tx)\right]dt\right) = w$$

$\square$

Следствие 3.73 (Вторая теорема Пуанкаре)**.** *В звездной области всякая замкнутая форма точна.*

3.9 Дивергенция векторного поля

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана $(n-1)$-мерная ориентированная поверхность M. Тогда поток векторного поля $\vec{v}$ через поверхность M вычисляется как

$$\Phi = \int\limits_M \vec{v}(x)\cdot\vec{n}(x)dS^{n-1}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к M в точке x, согласованный с ориентацией.

Эту задачу можно решить используя дифференциальные формы. Для начала, рассмотрим для примера случай в $\mathbb{R}^3$. Как известно, $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

$$e_1 \simeq dy\wedge dz$$
$$e_2 \simeq dz\wedge dx$$
$$e_3 \simeq dx\wedge dy$$

Пусть $\vec{v}(x,y,z)$ — векторное поле, такое, что

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(x,y,z)\\ b(x,y,z)\\ c(x,y,z)\end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Phi = \int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

Убедимся, что это выражение совпадает с исходным. Пусть $\varphi : U \to M$ — параметризация поверхности M, такая что

$$\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \\ z = z(t,s) \end{cases}$$

Пусть φ_1, φ_2 — касательные векторы, тогда

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_U (ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy)\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle =$$

$$= \int\limits_U \det \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ b & y_1 & y_2 \\ c & z_1 & z_2 \end{pmatrix} dtds = \int\limits_U (a,b,c) \cdot \vec{n} \cdot J_\varphi(t,s) dt \wedge ds$$

Проведя обратную замену, получим, что

$$\int\limits_M ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy = \int\limits_U (a,b,c) \cdot \vec{n} dS^2$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $e_j \simeq (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Из этого получаем выражение в общем случае при $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\int\limits_M \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int\limits_M \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Напомним, что через S_r и B_r мы обозначаем сферу и шар радиуса r соответственно.

Определение 3.74. Дивергенция векторного поля $\vec{v}$ в точке x определяется как

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS^{n-1}$$

где, при вычислении потока $\vec{v}$ через сферу S_r, интеграл берется по внешней стороне сферы.

Лемма 3.75 (Оператор дивергенции в декартовых координатах)**.** *Для C^1-гладкого векторного поля v имеет место формула*

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x)$$

Доказательство. По формуле Стокса имеем

$$\int\limits_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS^{n-1} = \int\limits_{S_r} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{B_r} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} da_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int\limits_{B_r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{B_r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n$$

Отсюда

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{S_r} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS^{n-1} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

□

Теорема 3.76 (Формула Гаусса-Остроградского)**.** *Пусть V — тело (n-мерное компактное многообразие в $\mathbb{R}^n$), тогда*

$$\int\limits_{\partial v} \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) dS^{n-1} = \int\limits_{V} \operatorname{div} \vec{x}(x) dx$$

Определение 3.77. Векторное поле $\vec{v}$ называется *бездивергентным*, если div $\vec{v} = 0$.

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

$$\begin{tikzcd}
Scal(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, dash, "\simeq"] & Vec(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, dash, "\simeq"] & Vec(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, dash, "\simeq"] & Scal(\mathbb{R}^3) \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
\{U \to \Lambda^0\} \arrow[r, "d"] & \{U \to \Lambda^1\} \arrow[r, "d"] & \{U \to \Lambda^2\} \arrow[r, "d"] & \{U \to \Lambda^3\}
\end{tikzcd}$$

Имеют место следующие соответствия, где соответствующие члены двух цепей изоморфны между собой:

То есть, на языке дифференциальных форма, каждой операции векторного анализа соответствует дифференциал.

В плоском случае можно получить следующие выражения:

$$\operatorname{rot}(a,b) \simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \nabla \wedge (a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}(a,b) \simeq d(adx + bdy) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \nabla \cdot (a,b)$$

Определение 3.78. Пусть $\vec{v}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда $\vec{v}$ называют *вихревым*, если существует $\vec{u}$ — векторное поле такое, что $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}$. В этом случае, $\vec{u}$ называют векторным потенциалом векторного поля $\vec{v}$.

Леммы ниже являются следствиями первой и второй теоремы Пуанкаре соответственно.

Лемма 3.79. *Вихревое векторное поле всегда бездивергентно, т.е.* $\operatorname{div}\ \operatorname{rot} \vec{v} = 0$*.*

Лемма 3.80. *Если векторное поле $\vec{v}$ в звездной области в $\mathbb{R}^3$ бездивергентно, то она вихревое.*

Теорема 3.81. *В звездной области всякое трехмерное векторное поле $\vec{v}$ раскладывается в сумму вихревого и потенциального.*

Доказательство. Следует из теоремы 3.72. □

Определение 3.82. Оператором Лапласа называется оператор $\Delta : Scal \to Scal$ такой, что

$$\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$$

В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Если $\Delta f > 0$, то $f(x)$ больше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x.

Если $\Delta f < 0$, то $f(x)$ меньше своего среднего значения на маленькой сфере с центром в точке x.

Если $\Delta f = 0$, то $f(x)$ приблизительно равна своему среднему значению на маленькой сфере с центром в точке x.