Distribución de Wishart

Esta distribución corresponde a una generalización multidimensional de la distribución χ^2; es de utilidad para analizar la matriz de varianzas-covarianzas de un vector aleatorio con distribución Normal Multivariante. Considerando notación previa, se tiene que:

Sea $A = (n-1)S^2$ una forma cuadrática pxp definida positiva, donde $\vec{X}_i \sim N(0, \Sigma)$, entonces $A \sim W_p(\Sigma, n)$ la cual posee la siguiente función de densidad de parámetros (n, Σ), con $n > p-1$:

$$W(A; \Sigma, n) = \frac{|A|^{\frac{n-p-1}{2}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot traza\left(A\Sigma^{-1}\right)\right\}}{2^{\frac{np}{2}} \cdot \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)}$$

A continuación se destacan sus parámetros poblacionales y sus principales propiedades:

- Parámetros poblaciones:
  - $\mathbb{E}\left[A\right] = n\Sigma$.
  - $moda(A) = (n-p-1)\Sigma$, para $n \geq p+1$.
  - $\mathbb{V}\left[A\right] = n(\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj})\ \ i, j = \{1, \ldots, p\}$.
- Propiedades:
  - Si C una matriz constante, $CAC^t \sim W_n\left(CAC^t, C\Sigma C^t\right)$.
  - Considerando k poblaciones multivariantes p-dimensionales que siguen una distribución $N(0, \Sigma)$, se tiene $A_1, \ldots, A_k$ tienen distribución Wishart las cuales son independientes entre si, de parámetros (Σ, n_i) con $i = \{1, \ldots, k\}$, por lo que se tiene que:

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \sim W_{n-k}(A, \Sigma) \text{ , donde } n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

$\mathbf{T^2}$ de Hotelling

Corresponde a una prueba que sirve para definir dócimas y regiones de confianza para la media de distribuciones normales, y es una de las principales aplicaciones de la distribución de Wishart.

Considerando un vector aleatorio $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$ y $S = \dfrac{A}{n-1}$, se tiene que la estandarización cuadrática del vector (T^2) es:

$$T^2 = \left(\vec{X} - \vec{\mu}\right)^t S^{-1} \left(\vec{X} - \vec{\mu}\right)$$

La cual sigue la siguiente distribución:

$$\frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \sim F_{(p, n-p)}$$

Nota: Esta expresión solo depende de las dimensiones (p, n) y no de los parámetros $(\vec{\mu}, \Sigma)$.