

# CHAPITRE 4

## Le gaz parfait

— ou —

*L'invraisemblable thermomètre du savant Clapeyron*

# Chapitre 4 – Le gaz parfait

---

<b>4.1</b>	<b>Définition</b>	<b>91</b>
4.1.1	Le manomètre comme thermomètre	91
4.1.2	Définition : l'équation d'état	91
4.1.3	Que représente un gaz parfait ?	92
4.1.4	Que ne représente pas un gaz parfait ?	94
4.1.5	Limites du modèle	94
<b>4.2</b>	<b>Propriétés des gaz parfaits</b>	<b>96</b>
4.2.1	Deux capacités calorifiques importantes	96
4.2.2	Différence des chaleurs massiques	98
4.2.3	Quotient des chaleurs massiques	98
<b>4.3</b>	<b>Énergie et température</b>	<b>99</b>
4.3.1	Contexte historique	99
4.3.2	La loi de Joule	99
4.3.3	Enthalpie d'un gaz parfait	101
4.3.4	Interlude : Que retenir du gaz parfait jusqu'ici ?	102
<b>4.4</b>	<b>Transformations élémentaires réversibles</b>	<b>103</b>
4.4.1	À quoi sert cette section de chapitre ?	103
4.4.2	Évolutions à pression constante	103
4.4.3	Évolutions à volume constant	106
4.4.4	Évolutions à température constante	109
4.4.5	Évolutions adiabatiques réversibles	111
4.4.6	Évolutions arbitraires	115
<b>4.5</b>	<b>Exercices</b>	<b>117</b>

## *Le chapitre 4 en bref*

Le gaz parfait est un modèle mathématique qui permet de prévoir les propriétés (énergie interne, enthalpie) d'un gaz simplement en fonction de sa température. Par approximation, l'air est un gaz parfait.

# Introduction

---

Au cours des chapitres 2 et 3 nous avons appris à quantifier les transferts d'énergie, mais nous ne pouvons le faire que si nous connaissons les valeurs de  $u$  ou de  $h$ , propriétés qu'il est impossible de mesurer directement en pratique.

Ce chapitre 4 (*le gaz parfait*) se propose de répondre à deux questions :

- Comment peut-on décrire le comportement de l'air lorsqu'il est chauffé ou comprimé ?
- Comment peut-on prévoir les valeurs de  $u$  et de  $h$  lorsqu'on utilise de l'air ?

Ce chapitre est incompatible avec le chapitre 5 (*liquides et vapeurs*), où nous devrons oublier tout ce qui est appris ici.

## 4.1 Définition

---

### 4.1.1 Le manomètre comme thermomètre

Commençons par le plus important :

Le gaz parfait est un *modèle mathématique*, permettant de prédire la température d'un gaz en fonction de sa pression.

Le modèle du gaz parfait définit de lui-même une échelle de température. On propose de mesurer très simplement la température absolue  $T$  avec un manomètre, en stipulant qu'elle est directement proportionnelle à la pression  $p$  et inversement proportionnelle à la masse volumique  $\rho$ .

On peut ainsi dire que le gaz parfait ne décrit pas la réalité des choses, que ce n'est pas un principe physique, mais bien seulement un modèle simplifié du comportement des gaz. Sa plage de validité est limitée et floue.

### 4.1.2 Définition : l'équation d'état

Nous appellerons *gaz parfait* un fluide à l'état gazeux dont le multiple de la pression et du volume,  $p\nu$ , reste proportionnel à sa température. La constante de proportionnalité est nommée *constante du gaz*, et notée  $R$  ; elle dépend de la nature du gaz.

$$p\nu = RT \quad (4/1)$$

par définition pour un gaz parfait,  
où  $p$  est la pression (Pa),  
 $\nu$  le volume spécifique ( $\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$ ),  
 $T$  la température (K),  
et  $R$  la constante du gaz considéré ( $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$ ).

L'équation 4/1 est nommée *équation d'état des gaz parfaits*. Elle peut également être exprimée en fonction de la masse :

$$pV = mRT \quad (4/2)$$

où  $V$  est le volume ( $\text{m}^3$ ),  
et  $m$  la masse de gaz considérée (kg).

« Le changement de température occasionné dans les gaz par le changement de volume peut être regardé comme l'un des faits les plus importants de la physique, à cause des nombreuses conséquences qu'il entraîne, et en même temps comme l'un des plus difficiles à éclaircir et à mesurer par des expériences décisives. Il semble présenter dans plusieurs circonstances des anomalies singulières. »

Sadi Carnot, 1824 [2]

« M. S. Carnot, évitant l'emploi de l'analyse mathématique, arrive par une série de raisonnements délicats et difficiles à saisir, à des résultats qui se déduisent sans peine d'une loi plus générale, que je vais chercher à établir. »

Émile Clapeyron, 1834 [3]

Parce qu'elle est indissociable du concept de température absolue, il a fallu 150 ans pour que cette équation prenne sa forme définitive : celle que lui a donnée **Émile Clapeyron** en 1834 [3].

#### Exemple 4.1

Une masse de 2 kg de gaz dont la constante est  $R = 100 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  est contenue dans un réservoir de 200 L à pression de 3 bar. Quelle est sa température ?

Nous partons de l'équation 4/2 pour exprimer la température :  $T = \frac{p V}{m R} = \frac{3 \cdot 10^5 \times 0,2}{2 \times 100} = 300 \text{ K} = 26,85^\circ \text{C}$ .

✚ Admirable Émile ! La simplicité de ce calcul nous manquera au chapitre prochain.

✚ La seule épine dans cette équation concerne les unités, qu'il faut bien convertir en SI :  $200 \text{ L} = 0,2 \text{ m}^3$  et  $3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . La température est toujours en kelvins.

#### Exemple 4.2

L'air atmosphérique peut être modélisé par un gaz parfait avec  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Aux conditions ambiantes (1 bar,  $20^\circ \text{C}$ ), quels sont le volume spécifique et la masse volumique de l'atmosphère ?

Nous partons de l'équation 4/1 pour exprimer le volume spécifique :  $v = \frac{R T}{p} = \frac{287 \times (20 + 273,15)}{1 \cdot 10^5} = 0,841 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ . La masse volumique suit simplement :  $\rho = \frac{1}{v} = 1,189 \text{ kg m}^{-3}$ .

✚ Là encore, une erreur dans les unités de température serait fatale (on s'en convaincra en prenant  $T = 0^\circ \text{C}$ )

✚ Dans un mètre cube nous n'avons que 1,2 kg d'air. C'est très peu, surtout si l'on compare à l'eau liquide (1 000 kg pour le même volume). Les machines à air fonctionnent usuellement avec des débits volumiques importants.

### 4.1.3 Que représente un gaz parfait ?

Le gaz parfait est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour représenter le comportement d'un gaz.

Selon ce modèle, les molécules se comportent comme des sphères rebondissant les unes contre les autres (figure 4.1). On peut imaginer un grand nombre de très

petites boules de billard en mouvement chaotique, qui se percutent et rebondissent les unes contre les autres sans jamais s'attirer ni dissiper leur énergie par frottement. Dans ce chaos, la température est une mesure de l'énergie cinétique des molécules. On la quantifie en mesurant la force résultant de l'impact des molécules sur une paroi du récipient – c'est-à-dire avec la pression. Avec ce modèle, nous pouvons proposer une échelle de température telle que  $T \propto p$ .

Plus le nombre de molécules impactant la surface est faible, plus il faut qu'elles l'impactent fortement pour générer une pression donnée. Ainsi, lorsque la masse volumique  $\rho$  diminue à une pression donnée, c'est que la température augmente. On peut donc également proposer  $T \propto \frac{1}{\rho}$ .

Si ces deux propositions sont réunies en une seule équation, nous obtenons un modèle simple pour quantifier la température :  $T \propto p\rho$ .

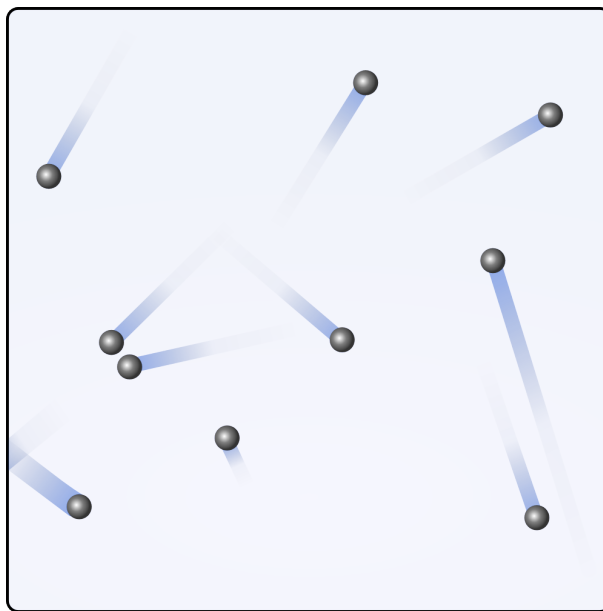


FIGURE 4.1 – Un gaz parfait peut être visualisé comme un ensemble de boules en mouvement désordonné. Elles se percutent sans frottement et sans attraction mutuelle. La vitesse de chaque boule change à chaque heurt.

*Dérivé d'un schéma CC-BY-SA par l'utilisateur-rice Commons Sharayanan*

#### 4.1.4 Que ne représente pas un gaz parfait ?

« Quiconque veut étudier les propriétés de la matière dans un problème réel peut désirer partir en écrivant les équations fondamentales et puis essayer de les résoudre mathématiquement. Bien qu'il y ait des gens qui essayent d'emprunter une telle approche, ces personnes sont des ratés de ce domaine ; les véritables réussites sont le fait de ceux qui partent d'un point de vue *physique*, de ceux qui ont une idée approximative de l'endroit où ils vont et qui commencent en faisant la bonne approximation, sachant ce qui est grand et ce qui est petit dans une situation donnée qui est compliquée. »

Richard Feynman, 1963  
*The Feynman Lectures on Physics*  
[18, 19]

Le comportement des molécules lorsqu'elles sont proches les unes des autres est en réalité très complexe, car les forces d'attraction y jouent un rôle déterminant. L'influence de ces forces est d'autant plus grande que les molécules sont lentes et structurellement complexes (l'interaction entre deux molécules d'hydrocarbure, par exemple, est plus difficile à modéliser que l'interaction entre deux molécules d'hélium).

Les conséquences à l'échelle macroscopique de ces interactions, et les conditions dans lesquelles elles ne doivent plus être négligées, font l'objet du chapitre 5 (*liquides et vapeurs*).

Nous retiendrons pour l'instant que le modèle du gaz parfait fonctionne mieux :

- Lorsque les molécules se percutent à grande vitesse, c'est-à-dire lorsque la température du gaz est élevée ;
- Lorsque l'espace moyen entre les molécules est grand, c'est-à-dire lorsque le volume spécifique du gaz est grand.

Ces conditions permettent de s'assurer que les forces d'attraction entre molécules gardent un rôle mineur dans le comportement global du gaz. Elles sont respectées pour l'air dans la grande majorité des applications en ingénierie. Nous utiliserons la valeur  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  pour l'air pur dans nos machines.

#### 4.1.5 Limites du modèle

Il ne faudra pas longtemps à l'étudiant/e pour trouver les limites de l'équation 4/2, qui indique qu'une masse non-nulle de gaz parfait occupe *un volume nul* à température nulle. Strictement parlant, le gaz parfait ne peut pas exister – le modèle mathématique perd son sens à très basse température puisqu'il ne tient pas compte du volume des molécules elles-mêmes.

Plusieurs autres équations d'état peuvent être utilisées pour correspondre aux gaz réels sur une plus grande plage de propriétés.

Ainsi, l'*équation de Van der Waals*, proposée dès la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, propose :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (4/3)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes.

Cette équation a l'intérêt de tenir compte de deux facteurs ignorés dans l'équation d'état 4/1 : la force d'attraction entre les molécules (le terme  $a/v^2$ , qui devient partie de l'expression de la pression) et le volume occupé par les molécules elles-mêmes (le terme  $b$  qui se retranche au volume disponible).

Malgré les difficultés inhérentes à la quantification des termes  $a$  et  $b$ , ces modifications ont considérablement étendu la plage d'application des équations d'état. Elles ont valu à leur auteur, **Johannes Diderik van der Waals**, le prix Nobel de physique en 1910.

La recherche de modèles mathématiques pour décrire l'état des gaz réels est un thème important de recherche en mécanique des fluides. L'étudiant/e curieux/se pourra consulter les équations d'état de Beattie-Bridgeman, de Benedict-Webb-Rubin ou encore de Strohbridge pour se faire un aperçu de la complexité croissante de cette branche. Nous resterons quant à nous à l'équation 4/1.

## 4.2 Propriétés des gaz parfaits

### 4.2.1 Deux capacités calorifiques importantes

Nous avons déjà abordé la notion de capacité calorifique (ou « chaleur massique »), au premier chapitre (1/13). Elle se définit comme la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter d'un Kelvin<sup>1</sup> la température d'un kilo du corps. On a ainsi :

$$c = \frac{dq}{dT} \quad (4/4)$$

où  $c$  est la capacité calorifique spécifique ( $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$ ),  
 $dq$  la quantité infinitésimale de chaleur spécifique fournie ( $\text{J kg}^{-1}$ ),  
et  $dT$  la variation infinitésimale de température provoquée (K).

Comme la température d'un gaz varie aussi lorsqu'il reçoit ou fournit du travail, il existe une infinité de façons de faire varier sa température d'un degré, en combinant chaleur et travail (figure 4.2). Chacune nécessite une quantité de chaleur unique ; il y a donc *une infinité de chaleurs massiques* correspondantes.

Parmi celles-ci, deux valeurs particulières (figure 4.3) nous servent de référence pour décrire le comportement d'un gaz parfait :

**la chaleur massique à volume constant :**  $c_v$  ,

**la chaleur massique à pression constante :**  $c_p$  .

Ces deux propriétés vont nous servir très bientôt pour quantifier l'énergie dans les gaz.  $c_v$  et  $c_p$  sont indépendantes de la température dans un gaz parfait. Dans les

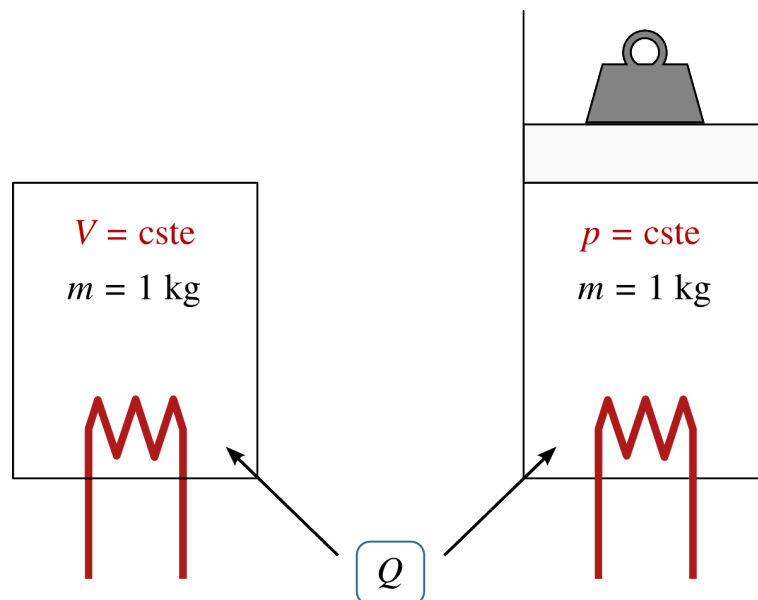


FIGURE 4.2 – Deux quantités identiques de gaz reçoivent la même quantité de chaleur  $Q$ . L'élévation de température sera plus faible à droite à cause du travail effectué sur le piston.

*schéma CC-0 o.c.*

1. Ou d'un degré Celsius, ces différences de température étant égales.





FIGURE 4.3 – Définitions des chaleurs massiques. À gauche, le volume est fixé et la capacité calorifique massique sera  $c_v$ . À droite, la pression est constante et la capacité sera  $c_p$ .

schéma CC-0 o.c.

gaz réels, elles varient avec la température (figure 4.4), mais pour la plupart des applications en ingénierie il est raisonnable d'utiliser des valeurs moyennes. Pour l'air, nous retenons  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et  $c_{p(\text{air})} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

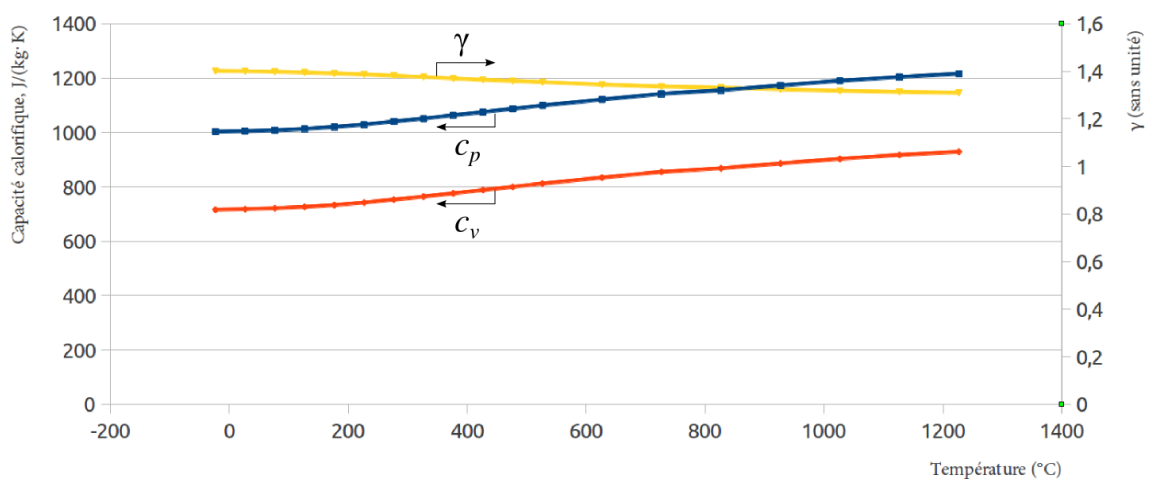


FIGURE 4.4 – Capacité calorifique de l'air en fonction de sa température. On note une variation sensible des valeurs dans la gamme de températures utilisée en ingénierie, que nous négligerons dans le cadre de notre étude de la thermodynamique.

Données issues du circulaire NBS 564 "Tables of Thermal Properties of Gases" (1955) jusqu'à 1 000 K, calculées selon le modèle de B. G. Kyle in "Chemical and Process Thermodynamics" (1984) ensuite, et publiées par Urieli ([ohio.edu/mechanical/thermo/](http://ohio.edu/mechanical/thermo/))

## 4.2.2 Différence des chaleurs massiques

Le grand nombre d'équations que nous abordons rend utile, mais pas indispensable, cette courte section. Pour l'ingénieur/e, il n'a d'autre intérêt que de permettre d'alléger l'écriture des relations de la section suivante.

Observons les quantités d'énergie en jeu dans l'expérience décrite en figure 4.3. Nous fournissons à chaque corps une quantité de chaleur différente pour obtenir la même variation de température. La différence entre les deux quantités de chaleur requises provient du fait que le gaz à pression constante (à droite) a fourni un travail pendant l'évolution.

Quelle est la différence entre les chaleurs massiques de chacun des gaz ? Dans chacun des deux cas, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u$  (2/2). Pour le corps A à gauche, comme aucun travail n'est effectué et que l'évolution est à volume constant, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} q_A = c_v \Delta T \\ \Delta u = q_A \end{cases} \quad (4/5)$$

Pour le corps B à droite, comme la pression  $p_{\text{cste}}$  est constante, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} q_B = c_p \Delta T \\ \Delta u = q_B + (-p_{\text{cste}} \Delta v) \end{cases} \quad (4/6)$$

En combinant les deux systèmes 4/5 et 4/6<sup>2</sup>, nous obtenons

$$c_v \Delta T = c_p \Delta T - p_{\text{cste}} \Delta v \quad (4/7)$$

qui stipule simplement que la différence entre les deux chaleurs fournies est retrouvée dans le travail fourni par le gaz de droite.

Une brève manipulation amène :

$$\begin{aligned} (c_p - c_v) \Delta T &= p_{\text{cste}} \Delta v \\ (c_p - c_v) &= \frac{p v_2 - p v_1}{\Delta T} = \frac{RT_2 - RT_1}{\Delta T} = \frac{R \Delta T}{\Delta T} \\ c_p - c_v &= R \end{aligned} \quad (4/8)$$

Cette expression a pour seul intérêt de nous permettre de simplifier l'équation 4/13 que nous allons écrire plus bas.

## 4.2.3 Quotient des chaleurs massiques

Le ratio des chaleurs massiques à pression et à volume constants est nommé  $\gamma$ . Ainsi :

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \quad (4/9)$$

En retournant à la figure 4.3 il apparaît rapidement que  $c_p$  doit être supérieur à  $c_v$  ; ainsi  $\gamma$  est toujours supérieur à 1. Nous retenons  $\gamma_{\text{air}} = 1,4$ .

2. En étant véritablement rigoureux, pour affirmer que  $\Delta u_A$  et  $\Delta u_B$  sont égaux, il nous faudrait attendre l'équation 4/11 qui arrive à la section suivante.

## 4.3 Énergie et température

### 4.3.1 Contexte historique

Au tout début du XIX<sup>e</sup> siècle ont lieu les premiers travaux de recherche visant à explorer la notion de température. La communauté scientifique s'intéresse alors beaucoup aux gaz – on s'aperçoit qu'il y a *deux* manières de faire augmenter leur température : en les chauffant, mais aussi en les comprimant.

Le français Louis Joseph Gay-Lussac cherche à comprendre pourquoi la température d'un gaz chute lorsqu'il se détend (il cherche en fait, selon les concepts d'alors, à identifier la source du *calorique* et les raisons pour lesquelles il s'écoule). Il s'efforce ainsi de produire des détentes de gaz aussi simples que possible, et d'y mesurer la température. Une trentaine d'années plus tard, l'anglais James Prescott Joule reprend et approfondit ces expériences<sup>3</sup> ; mais cette fois, en quantifiant la chaleur en tant qu'*équivalence de travail*. Ces expériences avec ballons de gaz et thermomètres sont tout sauf spectaculaires – mais elles vont jouer un rôle pivot en thermodynamique, parce qu'elles permettent de distinguer pour la première fois chaleur, travail, énergie et température.

« M'étant assuré de ce fait important, que plus un espace est vide, et plus il s'en dégage de la chaleur lorsque l'air extérieur y pénètre, j'ai cherché à déterminer, par des expériences exactes, quelle relation il y avoit entre le calorique absorbé dans l'un des récipients et celui dégagé dans l'autre, et comment ces variations de température dépendoient de celles de la variation de la densité de l'air. »

Louis Joseph Gay-Lussac, 1807 [1]

### 4.3.2 La loi de Joule

Dans leur expérience la plus remarquable, Joule et Gay-Lussac cherchent à faire varier la pression et le volume d'un gaz *sans lui transférer de chaleur ou de travail*. Pour cela, ils laissent un gaz comprimé se détendre dans un second récipient vide (figure 4.5). Le travail effectué est nul, car aucune surface n'a été déplacée – l'évolution est entièrement irréversible. La température est mesurée et ... il ne se passe rien ! Joule et Gay-Lussac ne mesurent ni transferts de chaleur, ni variation de température.

Joule effectue une multitude d'expériences différentes au cours desquelles il observe que quel que soit le travail fourni, la relation entre énergie interne (qui ne varie qu'avec travail et chaleur) et température reste sensiblement la même – et il suggère que pour un gaz parfait, elle reste toujours identique.

Ce postulat est connu sous le nom de *loi de Joule* et est posé comme vrai pour tout gaz parfait. On peut le résumer ainsi :

La température d'un gaz parfait ne varie qu'avec son énergie interne.

« J'ai pris deux ballons à deux tubulures, chacun de douze litres de capacité. A l'une des tubulures de chaque ballon étoit adapté un robinet, et à l'autre un thermomètre à alcool très-sensible, dont les degrés centigrades pouvoient être facilement divisés en centièmes. [...] Le vide étant fait dans les deux ballons, et m'étant assuré qu'ils le retenoient exactement, je remplissois l'un d'eux avec le gaz sur lequel je voulois opérer. Environ douze heures après, j'établissois entre eux une communication au moyen d'un tuyau de plomb, et en ouvrant les robinets, le gaz se précipitoit alors dans le ballon vide jusqu'à ce que l'équilibre de pression fût rétabli de part et d'autre. Pendant ce tems, le thermomètre éprouvoit des variations que je notois avec soin. »

Louis Joseph Gay-Lussac, 1807 [1]

Mathématiquement, nous pouvons l'écrire ainsi :

$$u = f(T) \quad (4/10)$$

3. Les travaux méticuleux de Joule mèneront à la première expression formelle du premier principe de la thermodynamique, et à la fin de la théorie du *calorique* selon laquelle la chaleur était un fluide très peu dense et invisible. Ils vaudront à son nom de famille l'utilisation que l'on sait aujourd'hui.



FIGURE 4.5 – La détente de Joule et Gay-Lussac.

Un gaz est initialement prisonnier d'un réservoir à gauche ; on le laisse se détendre en ouvrant la vanne (au centre) qui le sépare d'un réservoir entièrement vide à droite.

Joule et Gay-Lussac s'intéressent aux variations de température mesurées dans chaque réservoir. Plus les propriétés du gaz rapprochent son comportement du modèle des gaz parfaits (§4.1.4), plus les variations de température qu'ils mesurent sont faibles, jusqu'à devenir indétectables pour certains gaz simples à haute température.

schéma CC-0 o.c.

« La différence entre les moyennes des expansions et des expériences-témoin étant exactement telle que ce que à quoi nous avons attribué l'effet croissant de la température ambiante dans le dernier cas, nous arrivons à la conclusion qu'il n'y a pas de changement de température lorsque l'on laisse l'air se détendre d'une façon telle qu'il ne développe pas de puissance mécanique. »

James Joule, 1845 [6]

La fonction  $f$  peut être évaluée avec une expérience dans laquelle la variation de  $u$  est quantifiée. Par exemple, lors d'une évolution à volume constant  $q = \Delta u$  et  $q = c_v \Delta T$ . On peut ainsi affirmer que la fonction  $f$  est une simple relation de proportionnalité. L'énergie interne pouvant être arbitrairement posée comme nulle à température nulle ( $u = 0 \text{ J kg}^{-1}$  lorsque  $T = 0 \text{ K}$ ), on obtient :

$$u = c_v T \quad (4/11)$$

pour tout gaz parfait,  
 quelle que soit l'évolution (réversible ou non),  
 où  $u$  est l'énergie interne spécifique ( $\text{J kg}^{-1}$ );  
 $T$  est la température (K);  
 et  $c_v$  est la capacité calorifique massique à volume constant ( $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ).

Pour une masse  $m$  de gaz parfait, on a bien sûr :

$$U = m c_v T \quad (4/12)$$

Tant que notre fluide se comporte comme un gaz parfait, cette relation 4/11 reste vraie. Elle fonctionne pendant toute évolution, réversible ou non, et quelles que soient les contraintes de volume, de pression ou de température.

Par contre, il faut bien noter que cette équation 4/11, qui découle de la loi de Joule, n'est pas du tout valable dans le cas des liquides et vapeurs. On peut, par exemple, ajouter de l'énergie à une masse d'eau bouillante, sans que sa température n'augmente. Nous étudierons les liquides et vapeurs dans le chapitre 5.

### Exemple 4.3

La chaleur massique à volume constant de l'air est mesurée à  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

On prend une masse de 0,5 kg d'air à 20 °C et on lui transfère +15 kJ sous forme de chaleur et -10 kJ sous forme de travail. Quelle est sa température finale ?

Nous savons que l'énergie a varié avec les transferts :  $\Delta U = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B} = m c_v \Delta T$ . Ainsi, la température a varié en proportion :  $T_B = T_A + \frac{\Delta U}{m c_v} = T_A + \frac{W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B}}{m c_v} = 20 + \frac{-10 \cdot 10^3 + (+15 \cdot 10^3)}{0,5 \times 718} = 33,92 \text{ °C}$

👉 Sacré James ! Il nous suffit de quantifier les variations d'énergie pour connaître la température, et vice-versa.

👉 Ici les températures ne sont qu'additionnées et une conversion en kelvins n'aurait pas modifié le résultat. En cas de doute, il vaut mieux ne pas prendre ce raccourci.

### 4.3.3 Enthalpie d'un gaz parfait

Parce que nous venons de lier l'énergie interne  $u$  à la température et que le produit  $p v$  dépend lui aussi de la température, nous pouvons désormais facilement exprimer l'enthalpie  $h$  d'un gaz parfait en fonction de la température uniquement.

En effet, nous avons  $h \equiv u + p v$  (3/12) ; avec une rapide insertion des équations 4/1 et 4/11 nous pouvons écrire, pour tout gaz parfait :

$$h = u + p v = c_v T + R T = (c_v + R) T \quad (4/13)$$

Avec l'équation 4/8 que nous avons développée plus haut, nous pouvons simplifier cette expression pour obtenir :

$$h = c_p T \quad (4/14)$$

Pour tout gaz parfait,  
quelle que soit l'évolution (réversible ou non),  
où  $h$  est l'enthalpie spécifique ( $\text{J kg}^{-1}$ ) ;  
 $T$  est la température (K) ;  
et  $c_p$  est la capacité calorifique massique à pression constante ( $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ).

### Exemple 4.4

La chaleur massique à pression constante de l'air est mesurée à  $c_{p(\text{air})} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Un débit de  $2 \text{ kg s}^{-1}$  d'air passe dans un compresseur, où sa température augmente de 150 °C. Quelle est la puissance consommée par le compresseur ?

Nous savons que l'énergie est directement proportionnelle à la variation de température. Avec les équations 3/14 et 4/14, nous obtenons :  $\dot{W}_{A \rightarrow B} + \dot{Q}_{A \rightarrow B} = \dot{m} \Delta h = \dot{m} c_p \Delta T = 2 \times 1\,005 \times (+150) = +301,5 \text{ kW}$ .

☞ Avec un gaz parfait, un simple thermomètre suffit pour quantifier l'énergie...

☞ ...mais pas pour différencier travail et chaleur. Ici nous ne pouvons pas séparer  $\dot{W}_{A \rightarrow B}$  de  $\dot{Q}_{A \rightarrow B}$ . Nous ne pouvons pas non plus prédire l'état du gaz à la sortie, c'est à dire sa pression  $p$  et son volume spécifique  $v$  (seulement leur multiple). Pour cela, il faudrait une description précise de ce qui se passe entre l'entrée et la sortie.

#### 4.3.4 Interlude : Que retenir du gaz parfait jusqu'ici ?

Le gaz parfait est un modèle pour quantifier la température d'un gaz. Selon ce modèle, les trois principales formes d'énergie que nous avons utilisées jusqu'à présent — l'énergie interne  $u$ , l'enthalpie spécifique  $h$  et le terme  $pv$  — sont directement proportionnelles à la température  $T$  :

$$u = c_v T \quad (\text{J kg}^{-1})$$

$$h = c_p T \quad (\text{J kg}^{-1})$$

$$pv = RT \quad (\text{J kg}^{-1})$$

Si l'on mesure la température absolue d'un gaz, alors on peut quantifier immédiatement ces trois formes d'énergie.

## 4.4 Transformations élémentaires réversibles

Nous nous proposons ici de calculer les propriétés d'un gaz parfait, ainsi que les transferts d'énergie en jeu, lorsque l'on le comprime ou détend selon des contraintes entièrement arbitraires de volume, pression ou température.

### 4.4.1 À quoi sert cette section de chapitre ?

Les évolutions de gaz que nous étudions ici sont très hypothétiques et pas nécessairement passionnantes, mais elles méritent l'attention de l'étudiant/e pour deux raisons :

1. Le comportement d'un gaz, même avec le modèle du gaz parfait, est intrinsèquement complexe. Ces évolutions élémentaires font figure de gymnastique et permettent d'apprendre à le décrire étape par étape ;
2. Ces évolutions élémentaires sont des outils conceptuels que nous assemblerons plus tard, d'abord pour quantifier les limites théoriques des machines (au chapitre 7), puis pour décrire le comportement des gaz à l'intérieur des machines réelles (au chapitre 10).

### 4.4.2 Évolutions à pression constante

Il est possible de chauffer ou refroidir un gaz en maintenant sa pression constante (figure 4.6). Une évolution à pression constante est parfois dite *isobare*. Pour générer une telle transformation, nous pouvons :

- avec un système fermé, chauffer ou refroidir le gaz en maintenant une force constante sur les parois ;
- avec un système ouvert, chauffer ou refroidir le gaz en le laissant simplement s'écouler dans un conduit, sans pièce mobile. C'est le cas par exemple dans la chambre de combustion d'un turboréacteur.

Lorsque la pression est constante, les propriétés du gaz varient selon la relation

$$\frac{T}{v} = \text{constante} \quad (4/15)$$

En système fermé, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u$  (2/2) et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail peuvent être facilement reliés à la température :

$$\begin{aligned} w_{1 \rightarrow 2} &= - \int_1^2 p \, dv = -p_{\text{cste}} \int_1^2 dv = -p_{\text{cste}} \Delta v \\ w_{1 \rightarrow 2} &= -R \Delta T \end{aligned} \quad (4/16)$$

lors d'une évolution réversible à pression constante  $p_{\text{cste}}$ , en système fermé.

On remarque que le travail est de signe opposé à la variation de température.



FIGURE 4.6 – Évolution à pression constante (isobare) d'un gaz parfait. En système fermé (à gauche), le piston exerce une force constante tout au long de l'évolution. En système ouvert (à droite), aucun travail n'est effectué.

CC-0 o.c.

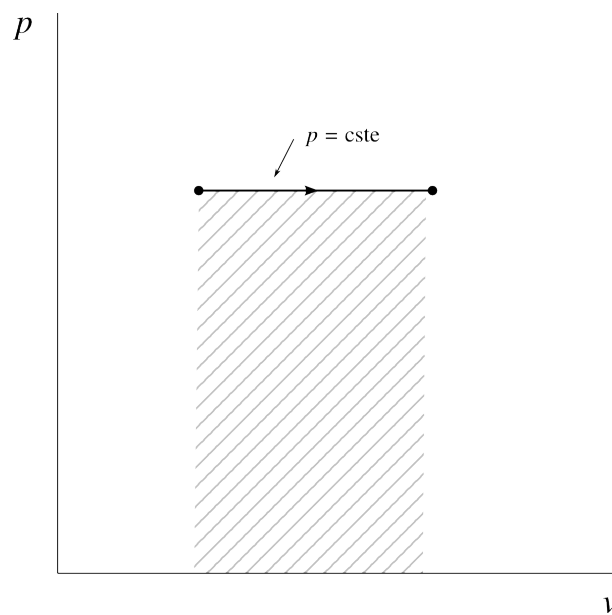


FIGURE 4.7 – Réchauffement à pression constante d'un gaz parfait, représenté sur un diagramme pression-volume.

CC-0 o.c.



La chaleur peut être quantifiée aisément :

$$\begin{aligned}q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta u - w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u + p_{\text{cste}} \Delta v = \Delta h \\q_{1 \rightarrow 2} &= c_p \Delta T\end{aligned}\tag{4/17}$$

lors d'une évolution réversible à pression constante, en système fermé.

Lorsque l'évolution se fait en système ouvert, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta h$  (3/15), et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail se quantifient sans peine :

$$\begin{aligned}w_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 v \, dp \\w_{1 \rightarrow 2} &= 0\end{aligned}\tag{4/18}$$

lors d'une évolution réversible à pression constante, en système ouvert.

Le travail est bien sûr nul, puisqu'aucune pièce mobile n'est présente pour extraire de l'énergie mécanique du gaz.

La chaleur est alors responsable de l'entièreté de la variation de température :

$$\begin{aligned}q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta h - w_{1 \rightarrow 2} = \Delta h \\q_{1 \rightarrow 2} &= c_p \Delta T\end{aligned}\tag{4/19}$$

lors d'une évolution réversible à pression constante, en système ouvert.

### Exemple 4.5

Pour l'air, on mesure  $c_{p(\text{air})} = 1\,005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Combien faut-il d'énergie pour chauffer l'air dans un appartement de  $30 \text{ m}^2$  depuis  $10^\circ\text{C}$  jusqu'à  $20^\circ\text{C}$  ?

Le réchauffement se fera vraisemblablement à pression constante (à moins que l'appartement ne soit fermé hermétiquement, la pression sera partout atmosphérique et l'air « fuira » sous les portes). Nous supposons une pression de 1 bar et une hauteur de plafond de 2,5 m. Nous utilisons un système fermé englobant tout l'air réchauffé.

Nous avons un volume de  $75 \text{ m}^3$ , ce qui mène la masse totale d'air à  $m_A = \frac{p_A V_A}{R T_A} = \frac{1 \cdot 10^5 \times 75}{287 \times (10 + 273,15)} = 92,29 \text{ kg}$ .

La chaleur nécessaire pour chauffer cette quantité d'air à pression constante est quantifiable avec l'équation 4/17 :  $Q_{A \rightarrow B} = m c_p \Delta T = 92,29 \times 1\,005 \times (20 - 10) = +9,28 \cdot 10^5 \text{ J} = +928 \text{ kJ}$ .

☞ Ce résultat représente le transfert final *net* de chaleur vers l'air (incluant les pertes vers les murs et les fenêtres, ainsi que les transferts qui les compensent).

☞ À l'inverse, un refroidissement provoquerait l'arrivée d'air extérieur, dont il faudrait tenir compte dans le calcul de la masse.

### 4.4.3 Évolutions à volume constant

Il est possible de chauffer ou refroidir un gaz en maintenant son volume constant (figure 4.8). Une évolution à volume constant est parfois dite *isochore*.

- Avec un système fermé, nous pouvons chauffer ou refroidir un gaz dans un réservoir fixe et fermé. C'est le cas par exemple pendant la phase de combustion (« explosion ») dans un moteur à essence.
- Avec un système ouvert, la manipulation est plus complexe. Nous devons compresser le gaz pendant qu'on le réchauffe pour éviter que son volume n'augmente ; À l'inverse, pendant un refroidissement, il faut le détendre pour éviter que son volume ne baisse. Cette manipulation n'a pas d'application pratique courante.

Lorsque le volume spécifique d'un gaz parfait est constant, ses propriétés varient selon la relation

$$\frac{T}{p} = \text{constante} \quad (4/20)$$

En système fermé, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u$  et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail peuvent être facilement reliés à la température.

Le volume ne variant pas, le travail est bien sûr nul :

$$\begin{aligned} w_{1 \rightarrow 2} &= - \int_1^2 p \, dv \\ w_{1 \rightarrow 2} &= 0 \end{aligned} \quad (4/21)$$

lors d'une évolution réversible à volume constant, en système fermé.

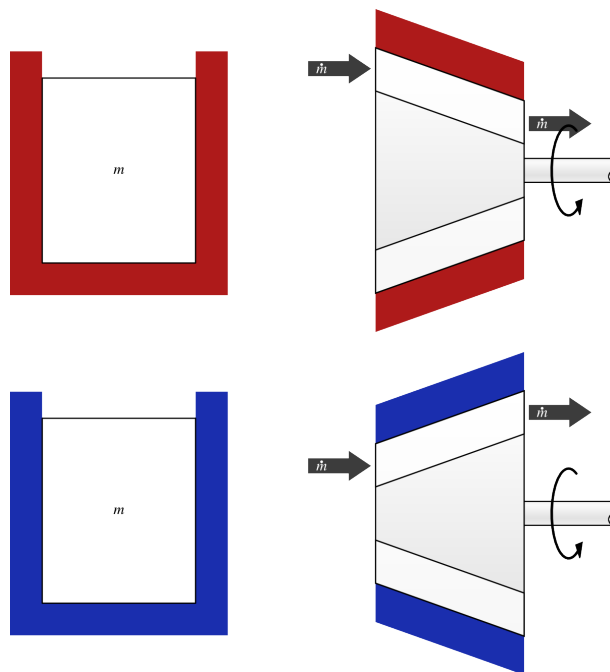


FIGURE 4.8 – Évolution à volume constant (isochore) d'un gaz parfait. En système fermé (à gauche), le volume est bloqué et aucun travail n'est effectué. En système ouvert (à droite), on doit comprimer le gaz pendant qu'on le chauffe et le détendre pendant qu'on le refroidit, pour pouvoir maintenir le volume spécifique constant.

CC-0 o.c.

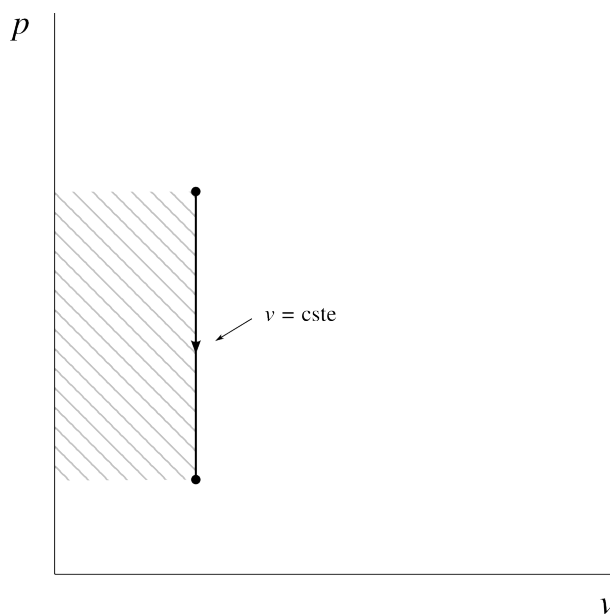


FIGURE 4.9 – Refroidissement à volume constant d'un gaz parfait, représenté sur un diagramme pression-volume.

CC-0 o.c.

La chaleur peut être quantifiée aisément :

$$\begin{aligned} q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta u - w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u \\ q_{1 \rightarrow 2} &= c_v \Delta T \end{aligned} \quad (4/22)$$

lors d'une évolution réversible à volume constant, en système fermé.

Lorsque l'évolution se fait en système ouvert, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta h$  et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail peuvent être quantifiés, bien qu'avec un peu plus de difficulté :

$$\begin{aligned} w_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 v dp = v_{\text{cste}} \int_1^2 dp = v_{\text{cste}} \int_1^2 \frac{R}{v_{\text{cste}}} dT = R \int_1^2 dT \\ w_{1 \rightarrow 2} &= R \Delta T \end{aligned} \quad (4/23)$$

lors d'une évolution réversible à volume constant, en système ouvert.

On peut alors quantifier facilement la chaleur à fournir :

$$\begin{aligned} q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta h - w_{1 \rightarrow 2} = c_p \Delta T - R \Delta T \\ q_{1 \rightarrow 2} &= c_v \Delta T \end{aligned} \quad (4/24)$$

lors d'une évolution réversible à volume constant, en système ouvert.

#### Exemple 4.6

Pour l'air, on mesure  $c_{p(\text{air})} = 1\,005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Dans un cylindre de moteur à essence, de l'air se trouve à pression de 17 bar avec une masse volumique de  $9,4 \text{ kg m}^{-3}$ . La combustion du carburant (si rapide que le volume n'a pas le temps de varier) se traduit par l'apport de  $1\,450 \text{ kJ kg}^{-1}$  de chaleur. Quelles valeurs atteignent la température et la pression ?

Au départ, la température est  $T_A = \frac{p_A v_A}{R} = \frac{p_A}{\rho_A R} = \frac{17 \cdot 10^5}{9,4 \times 287} = 630,1 \text{ K} = 357^\circ \text{C}$ . Nous utilisons un système fermé constitué par la masse d'air. Le volume ne variant pas, le travail est nul (4/21) et c'est la chaleur qui fait varier l'énergie interne (4/22) :  $q_{A \rightarrow B} = \Delta u - w_{A \rightarrow B} = \Delta u = c_v \Delta T$  ; ainsi  $T_B = T_A + \frac{q_{A \rightarrow B}}{c_v} = 630,1 + \frac{1\,450 \cdot 10^3}{718} = 2\,649,6 \text{ K} = 2\,376,5^\circ \text{C}$ . La pression finale s'obtient en comparant la condition finale et la condition initiale (4/20) :  $\frac{RT_A}{p_A} = v_A = v_B = \frac{RT_B}{p_B}$  ; ainsi  $p_B = \frac{T_B}{T_A} p_A = \frac{2\,649,6}{630,1} \times 17 \cdot 10^5 = 7,148 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 71,5 \text{ bar}$ .

☞ Attention à bien compter les températures en kelvins dans les fractions.

☞ La température maximale, supérieure à  $2\,300^\circ \text{C}$ , dépasse la température de fonte de la plupart des métaux. Dans un moteur à essence, cette température n'est atteinte que sporadiquement, à chaque combustion.

☞ Les données de cet exemple imitent celles de l'exercice 2.5. Cette fois, nous savons prédire les conditions finales sans devoir faire de mesure.

#### 4.4.4 Évolutions à température constante

Il est possible de chauffer ou refroidir un gaz en maintenant sa température constante (figure 4.10). Une évolution à température constante est parfois dite *isotherme*.

Pour un gaz parfait, une évolution à température constante se fait toujours à énergie constante. Pour chaque joule de chaleur que l'on fournit au gaz, il faut lui prendre un joule sous forme de travail ; inversement chaque prélèvement de chaleur doit être compensé par un apport égal de travail.

En pratique, cette complexité fait que les transferts de chaleur isothermes sont rarement utilisés dans l'industrie. Ils revêtent par contre une importance théorique capitale, que nous étudierons au chapitre 7 (le *second principe*).

Lorsque la température d'un gaz parfait reste constante, ses propriétés varient selon la relation

$$p v = \text{constante} \quad (4/25)$$

En système fermé, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta u$ , et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail peuvent être reliés aux propriétés du gaz, non sans une certaine

« Il est facile d'imaginer une petite quantité de combustible gazeux ou liquide, ou bien de la poussière de charbon, que l'on insérerait dans un volume d'air comprimé et très chaud, et qui brûlerait suite à un allumage séparé ou spontané. Le piston est chassé en même temps de sorte qu'aucune augmentation de température n'ait lieu, car la chaleur développée par chaque particule de combustible est instantanément absorbée par le refroidissement dû à l'expansion. De cette façon l'ensemble de la chaleur est transformée en travail. »

Rudolf Diesel, 1893  
*Theorie und Konstruktion eines rationellen Wärmemotors zum Ersatz der Dampfmaschinen und der heute bekannten Verbrennungsmotoren* [14, 15]

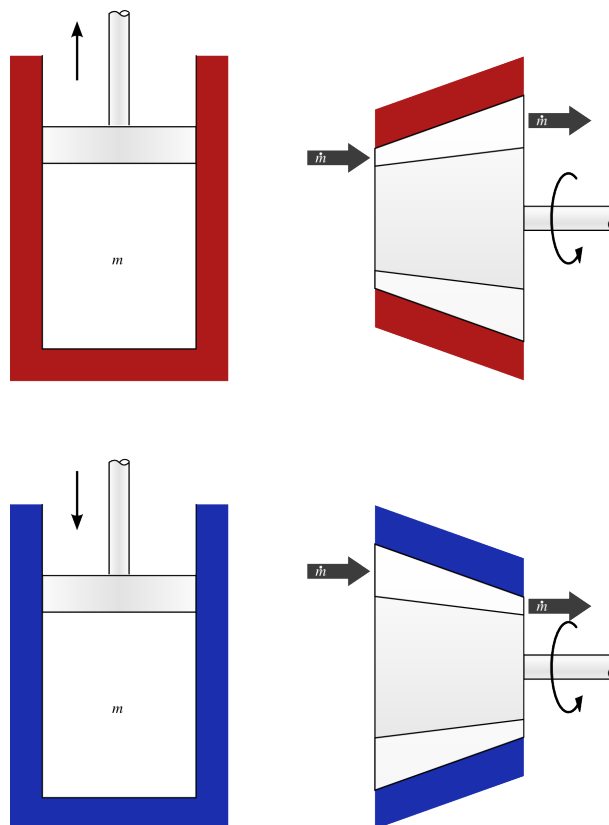


FIGURE 4.10 – Évolution à température constante (isotherme) d'un gaz parfait. En système fermé (à gauche), on laisse travailler le gaz sur un piston pendant qu'on le chauffe, et à l'inverse, on lui fournit du travail lorsqu'on le refroidit. En système ouvert (à droite), les mêmes manipulations sont effectuées en flux continu.

CC-0 o.c.

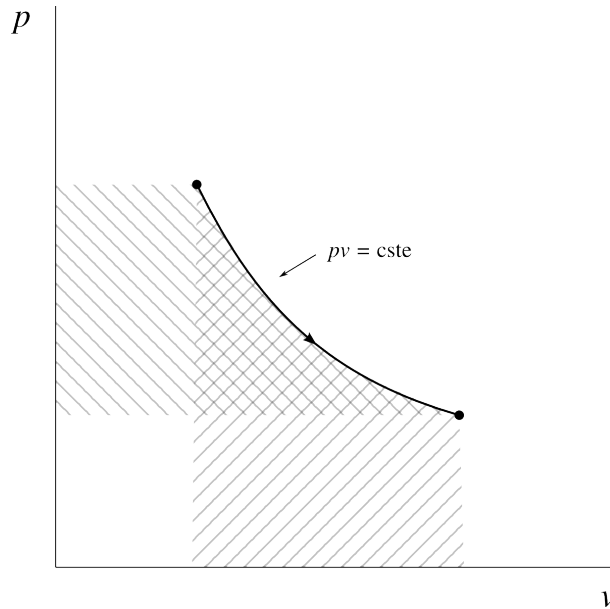


FIGURE 4.11 – Détente (réchauffement) à température constante d'un gaz parfait, représenté sur un diagramme pression-volume.

CC-0 o.c.

difficulté toutefois.

$$w_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 p \, dv = - \int_1^2 \frac{R T_{\text{cste}}}{v} \, dv = -R T_{\text{cste}} \int_1^2 \frac{1}{v} \, dv = -R T_{\text{cste}} [\ln v]_{v_1}^{v_2}$$

$$w_{1 \rightarrow 2} = R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{v_1}{v_2} \right) \quad (4/26)$$

lors d'une évolution réversible à température constante, en système fermé.

« Lorsqu'un gaz varie de volume sans changer de température, les quantités de chaleur absorbées ou dégagées par ce gaz sont en progression arithmétique, si les accroissements ou les réductions de volume se trouvent être en progression géométrique. Lorsque l'on comprime un litre d'air maintenu à la température 10° et qu'on le réduit à 1/2 litre, il se dégage une certaine quantité de chaleur. Cette quantité se trouvera toujours la même si l'on réduit de nouveau le volume de 1/2 litre à de 1/4 de litre, de 1/4 de litre à 1/8, ainsi de suite. »

Sadi Carnot, 1824 [2]

On peut aussi exprimer le travail en fonction de la pression, puisqu'avec l'équation 4/25 on a :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

ainsi :

$$w_{1 \rightarrow 2} = R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (4/27)$$

lors d'une évolution réversible à température constante, en système fermé.

La chaleur peut être quantifiée aisément. En effet, l'énergie interne ne varie pas :

$$q_{1 \rightarrow 2} = \Delta u - w_{1 \rightarrow 2} = 0 - w_{1 \rightarrow 2}$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = -w_{1 \rightarrow 2} \quad (4/28)$$

lors d'une évolution réversible à température constante, en système fermé.

Lorsque l'évolution se fait en système ouvert, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta h$  et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail peuvent être quantifiés de la même façon :

$$w_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 v \, dp = \int_1^2 \frac{R T_{\text{cste}}}{p} \, dp = R T_{\text{cste}} \int_1^2 \frac{1}{p} \, dp = R T_{\text{cste}} [\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$w_{1 \rightarrow 2} = R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{v_1}{v_2} \right) \quad (4/29)$$

lors d'une évolution réversible à température constante, en système ouvert.

Cette relation, identique à l'équation 4/27, n'aura pas surpris l'étudiant/e perspicace, puisque la relation  $p\nu = \text{cste}$ . assure que pour deux points donnés en figure 4.11, l'aire sous la courbe est toujours égale à l'aire à gauche de la courbe.

La chaleur à fournir se quantifie bien sûr sans peine :

$$\begin{aligned} q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta h - w_{1 \rightarrow 2} = 0 - w_{1 \rightarrow 2} \\ q_{1 \rightarrow 2} &= -w_{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \quad (4/30)$$

lors d'une évolution réversible à température constante, en système ouvert.

#### Exemple 4.7

Pour l'air, on mesure  $c_{p(\text{air})} = 1\,005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Une masse de 2,5 kg d'air dans un réservoir est à pression de 2 bar et température de 800 °C. On souhaite lui fournir 100 kJ de chaleur sans modifier sa température. Quel doit être le transfert de travail ? Quels seront le volume et la pression au final ?

Le travail est facile à déterminer :  $W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B} = \Delta U = 0$  ici car la température ne varie pas. Ainsi  $W_{A \rightarrow B} = -Q_{A \rightarrow B} = -100 \text{ kJ}$  (le gaz doit dépenser autant de travail qu'il reçoit de chaleur).

Les propriétés finales sont obtenues grâce à l'équation 4/26 :

$$\begin{aligned} w_{A \rightarrow B} &= R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{\nu_A}{\nu_B} \right) = R T_{\text{cste}} \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right) \\ \frac{V_A}{V_B} &= \exp \left[ \frac{w_{A \rightarrow B}}{R T_{\text{cste}}} \right] = \exp \left[ \frac{W_{A \rightarrow B}}{m R T_{\text{cste}}} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{-100 \cdot 10^3}{2,5 \times 287 \times (800 + 273,15)} \right] = 0,878207 \end{aligned}$$

Et comme  $V_A = \frac{R T_A}{p_A} = \frac{287 \times (800 + 273,15)}{2 \cdot 10^5} = 1,54 \text{ m}^3$ , nous obtenons un volume final  $V_B = \frac{V_A}{0,878207} = 1,715 \text{ m}^3$ .

La pression finale, enfin, s'obtient en comparant l'état final et l'état initial :

$$p_A V_A = m R T_A = m R T_B = p_B V_B \text{ (ou avec l'équation 4/27) : } p_B = p_A \frac{V_A}{V_B} = 2 \cdot 10^5 \times 0,878207 = 1,786 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,786 \text{ bar.}$$

🔗 Le volume augmente et la pression diminue, puisque le gaz travaille en se détendant et en recevant de la chaleur.

🔗 Il est difficile de cacher que ce type d'évolution est rarement utilisé en pratique, mais il nous servira pour élaborer un prodigieux thermomètre-moteur-réfrigérateur absolu, au chapitre 7 (le second principe).

### 4.4.5 Évolutions adiabatiques réversibles

Une évolution *adiabatique* est une évolution au cours de laquelle il n'y a aucun échange de chaleur (figure 4.12). On peut forcer cela en recouvrant le récipient ou

le conduit de gaz que l'on comprime ou détend avec une épaisse couche d'isolant thermique.

Attention, même s'il n'y a strictement aucun transfert de chaleur, la température est nécessairement amenée à varier dans une telle évolution, puisque le travail est non-nul. Cette variation de température est d'ailleurs très souvent l'effet escompté, comme nous pourrions le voir au chapitre 7 (*le second principe*).

Une évolution *adiabatique réversible* est effectuée infiniment lentement. Un piston dans un cylindre devra pour cela être déplacé infiniment lentement, et un compresseur en flux continu devra pour cela être infiniment long. Plus tard, dans le chapitre 8 (*l'entropie*), nous appellerons ces transformations *isentropiques*.

En système fermé, nous avons  $q_{1\rightarrow 2} + w_{1\rightarrow 2} = \Delta u$  et, si l'évolution est réversible, la chaleur et le travail sont quantifiés sans la moindre difficulté :

$$q_{1\rightarrow 2} = 0 \quad (4/31)$$

lors d'une évolution adiabatique réversible, par définition.

$$\begin{aligned} w_{1\rightarrow 2} &= \Delta u - q_{1\rightarrow 2} = \Delta u \\ w_{1\rightarrow 2} &= c_v \Delta T \end{aligned} \quad (4/32)$$

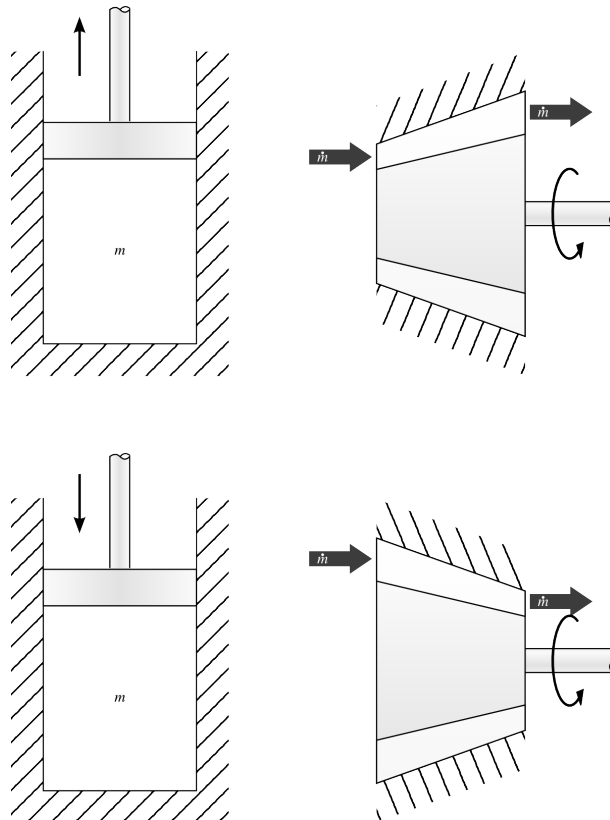


FIGURE 4.12 – Évolution adiabatique réversible (isentropique) d'un gaz parfait. En système fermé (à gauche) comme en système ouvert (à droite), l'appareil est parfaitement isolé, de sorte qu'il n'y ait aucun transfert de chaleur, même si la température du gaz varie.

CC-0 o.c.



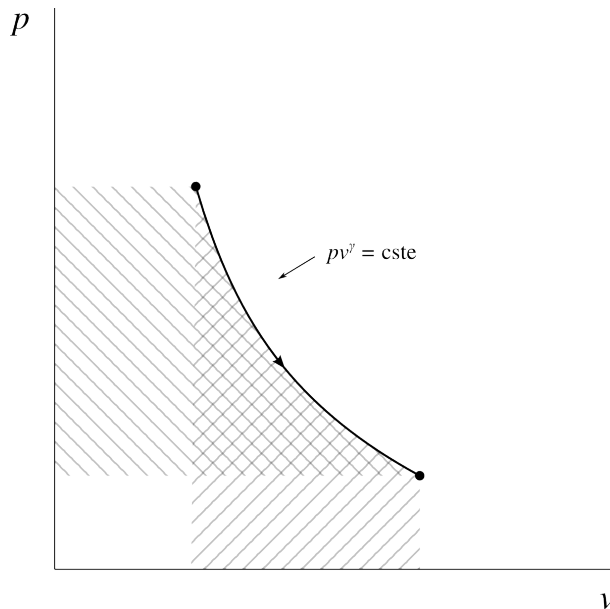


FIGURE 4.13 – Détente adiabatique réversible d'un gaz parfait, représentée sur un diagramme pression-volume.

CC-0 o.c.

lors d'une évolution adiabatique réversible en système fermé.

Lorsque l'évolution se fait en système ouvert, nous avons  $q_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} = \Delta h$  et nous pouvons de même écrire :

$$q_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (4/33)$$

$$w_{1 \rightarrow 2} = c_p \Delta T \quad (4/34)$$

lors d'une évolution adiabatique réversible, en système ouvert.

Malheureusement, ces deux équations 4/32 et 4/34 ne sont d'aucune utilité tant que l'on a pas prédit la température  $T_2$  à la fin de l'évolution. Or, dans une évolution adiabatique réversible, rien ne reste constant : le volume spécifique, la pression et la température varient tous les trois. Comment quantifier ces propriétés ?

Partons d'une évolution adiabatique infiniment courte dans un système fermé. Lorsque l'évolution est réversible,  $dw = -p dv$  et alors :

$$dq = du - dw = 0$$

$$du + p dv = 0$$

Comme  $du = c_v dT$  pour un gaz parfait et que  $p = RT/v$ , on peut ré-écrire cette équation ainsi :

$$c_v dT + \frac{RT}{v} dv = 0$$

$$\frac{1}{T} dT + \frac{R}{c_v} \frac{1}{v} dv = 0$$

En intégrant entre deux états 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{R}{c_v} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) &= 0 \\ \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{R}{c_v}} &= 0 \\ \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) &= \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{R}{c_v}}\end{aligned}\quad (4/35)$$

Et comme  $R = c_p - c_v$  (4/8) et  $\gamma \equiv c_p/c_v$  (4/9), on a  $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1$ , ce qui permet de reformuler l'équation 4/35 ci-dessus :

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}$$

Nous avons donc lié température et volume spécifique lorsque l'évolution est adiabatique réversible (privée d'échange de chaleur et infiniment lente).

Quelques manipulations algébriques, qu'il est laissé à l'étudiant/e le soin de réviser, nous permettent de décliner cette expression en fonction de la pression. On obtient ainsi les trois relations :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} \quad (4/36)$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4/37)$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma} \quad (4/38)$$

pour toute évolution adiabatique réversible.

Cette dernière équation 4/36 équivaut à l'expression :

$$pv^{\gamma} = \text{constante} \quad (4/39)$$

pour toute évolution adiabatique réversible.

Nous disposons donc d'une relation simple entre pression et volume pour un gaz parfait suivant une évolution réversible adiabatique. Remarquons une dernière fois que, même si par définition aucune chaleur n'est échangée, la température varie systématiquement, comme l'indique la relation 4/36.

#### Exemple 4.8

Pour l'air, on mesure  $c_{p(\text{air})} = 1\,005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $c_{v(\text{air})} = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , et  $\gamma_{\text{air}} = 1,4$ .

Un réservoir d'air comprimé de 50 L contient de l'air à 40 bar et 50 °C. L'atmosphère ambiante est à 1 bar. Quelle est la quantité maximale de travail que l'on peut extraire de l'air comprimé sans lui fournir de chaleur ?

Le travail maximal sera obtenu si la détente est réversible. Comme nous ne pouvons pas apporter de chaleur, notre meilleure option est donc ici d'effectuer une détente adiabatique réversible depuis 40 bar jusqu'à 1 bar. Nous voulons calculer la température finale, car c'est elle qui nous don-

nera la variation d'énergie, donc le travail perdu par le gaz. Des trois intimidantes relations 4/36 à 4/38, c'est la seconde qui nous intéresse :  $\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ . Ainsi :  $T_B = T_A \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (50 + 273,15) \left(\frac{40}{1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 112,6 \text{ K} = -160,5^\circ\text{C}$ .

Le travail effectué par le système fermé constitué par le gaz est donc  $w_{A \rightarrow B} = \Delta u - q_{A \rightarrow B} = c_v \Delta T - 0 = 718 \times (-160,5 - 50) = -1,5115 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1} = -151,1 \text{ kJ kg}^{-1}$ .

En calculant la masse  $m_A = \frac{p_A V_A}{R T_A} = \frac{40 \cdot 10^5 \times 0,2}{287 \times (50 + 273,15)} = 8,626 \text{ kg}$ , nous obtenons  $W_{A \rightarrow B} = m_A w_{A \rightarrow B} = 8,626 \times -151,1 \cdot 10^3 = -1,3038 \cdot 10^6 \text{ J} = -1,304 \text{ MJ}$ .

☞ Cela représente suffisamment d'énergie pour accélérer sans frottement un véhicule de 1 t jusqu'à une vitesse  $C = \left[ \frac{1,3038 \cdot 10^6}{\frac{1}{2} \times 1000} \right]^{0,5} = 51,1 \text{ m s}^{-1} \approx 180 \text{ km/h}$ .

☞ La température finale,  $-160^\circ\text{C}$  (!), nous rappelle qu'il ne faut pas confondre « adiabatique » et « à température constante ».

☞ Les pressions peuvent être laissées en bars dans les fractions, mais les températures ne peuvent rester en  $^\circ\text{C}$ .

☞ La détente correspond au maximum de travail car elle est réversible. Si elle ne l'était pas, alors la température du gaz chuterait moins et le travail serait plus faible (nous aurions toujours  $w = c_v \Delta T$ ). Dans le cas le plus extrême, celui de la détente de Joule et Gay-Lussac (§4.3.2), la température resterait fixe à  $50^\circ\text{C}$  et aucun travail ne serait développé.

#### 4.4.6 Évolutions arbitraires

Il faut bien garder en tête que l'on peut en pratique faire évoluer les propriétés d'un gaz *de n'importe quelle façon arbitraire* (figure 4.14).

Nous nous sommes concentrés sur quatre évolutions particulières des gaz parfaits, parce qu'elles jouent chacune un rôle important, pour les physiciens comme pour les ingénieur/es, dans la conception des machines thermiques. Cela ne doit toutefois pas limiter notre façon de « penser » un gaz et ses transformations. En contrôlant astucieusement les transferts de chaleur et de travail, nous pouvons bien sûr provoquer n'importe quelle évolution arbitraire.

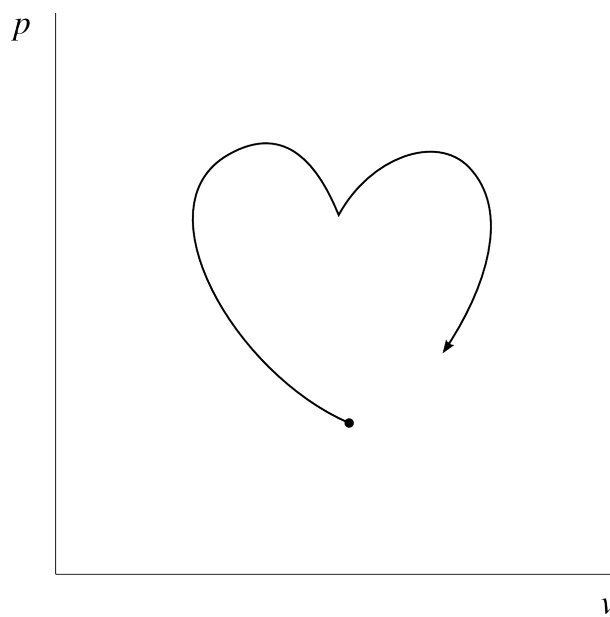


FIGURE 4.14 – Évolution entièrement arbitraire d'un gaz parfait représentée sur un diagramme pression-volume. Une telle évolution requiert une combinaison complexe de transferts de chaleur et de travail, que l'étudiant/e est invité/e à se représenter.

CC-0 o.c.