درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها.

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود.

درایه: هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

تذکر: معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

نکته: در حالت کلی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

a_{ij}: درایهٔ عمومی ماتریس A می‌نامیم که $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کند. i اندیس سطر و j اندیس ستون.

مانند: a_{11} درایهٔ سطر اول و ستون اول؛ a_{34}: درایهٔ سطر سوم و ستون چهارم

مثال ۱: ماتریس $A_{2\times 3}$ را با درایه‌هایش بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

مثال 2: اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ ماتریسی 2×2 باشد و $a_{ij}=\begin{cases} 7 & i=j \\ 5 & i>j \\ -2 & i<j \end{cases}$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال 3: اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریس 3×4 باشد بطوری که:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 7 & i=j \\ i^2 & i<j \end{cases}$$

در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

مثال 4: در ماتریس $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2m & -1 \\ m+1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ داریم: $b_{31}-2b_{22}=5$

مقدار m را بیابید.

$$m+1-2\times 2m=5 \Rightarrow m+1-4m=5 \Rightarrow -3m=4 \Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

معرفی چند ماتریس خاص:

1) ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ می‌نامیم.

تذکر: در ماتریس مربعی اگر $i=j$ باشد درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

درایه‌های روی قطر اصلی: $\sqrt{3}$ و -1 و 2

2) ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم.

$$A=[a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}]_{1\times n}=[a_{1j}]_{1\times n}\ ,\quad B=[2\ -1\ 4\ 5]_{1\times4}\ ,\quad C=[7]_{1\times1}=7$$

تذکر: اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $A=[k]_{1\times1}$ را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم:

$$A=[\sqrt{2}]_{1\times1}=\sqrt{2}$$

۳) ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط یک ستون داشته باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

$$A=[a_{i1}]_{m\times 1}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2\\\pi\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

۴) ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

تذکر: درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&7\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

مثال 5: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&0&b-1\\0&-1&0\\\frac{c}{2}&0&\pi\end{bmatrix}_{3\times 3}$ ماتریسی قطری باشد مقادیر a، b، c را پیدا کنید.

$b-1=0 \Rightarrow b=1 \quad , \quad \frac{c}{2}=0 \Rightarrow c=0 \quad , \quad a\in\mathbb{R}$ هر عدد حقیقی a

۵) ماتریس اسکالر: اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix} \quad , \quad C=[2]$$

تذکر: هر ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است. اما هر ماتریس قطری، ماتریس اسکالر نیست.

مثال 6: ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&x-1&0\\0&y+2x&0\\0&0&z\end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مقادیر x، y، z را پیدا کنید.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$z=2 \quad , \quad y+2x=2 \Rightarrow y+2=2 \Rightarrow y=0$

6) ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند.

ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. $\bar{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\bar{O}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\bar{O}=[0]=0$

7) ماتریس واحد یا همانی: ماتریس اسکالری است که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی عدد یک می‌باشند.

ماتریس واحد از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم.

$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j \; ; \; a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مثال 7: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases} + \qquad z-1=5 \Rightarrow z=6$$

$$2x=12 \Rightarrow x=6 \;,\; 6+y=9 \Rightarrow y=3$$

جمع ماتریس‌ها: برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که $C=A\pm B$ ماتریسی هم مرتبه با A و B است. به عبارت دیگر:

$$\left.\begin{array}{l} A=[a_{ij}]_{m\times n} \\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \end{array}\right\} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$