Algorithmen und Wahrscheinlichkeit: Peer 1

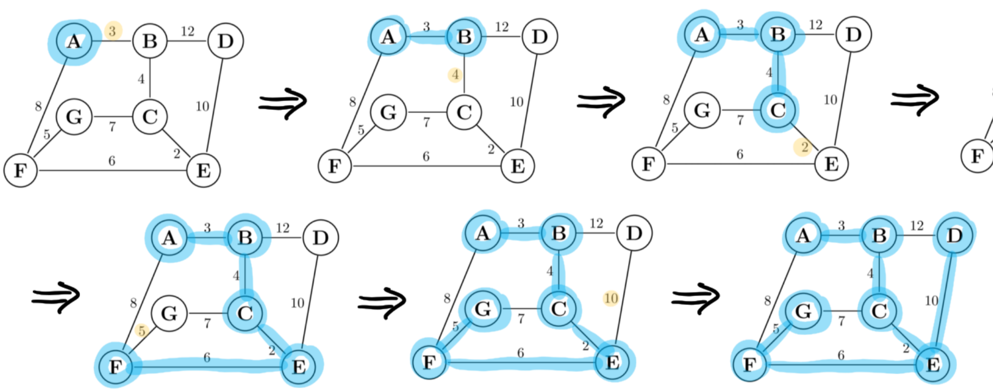
Yael Fassbind

Aufgabe 1 - Touren

a) Finden Sie einen minimalen Spannbaum T von G. Begründen Sie Ihre Schritte/Rechnungen genau

Um den MST zu finden wurde Prim's Algorithmus verwendet:

- Start bei einem beliebigen Knoten in G. Diesen Knoten markiert man als besucht und fügt ihn zum Zusammenhangskomponenten (ZSHK) hinzu.
- Man schaut alle ausgehenden Kanten des ZSHK an, welche noch nicht im MST sind. Von diesen wählt man die Kante mit den geringsten Kosten.
- Die ausgewählte Kante fügt man dem MST hinzu. Der Knoten (welcher über die gewählte Kante erreicht werden kann) wird dem ZSHK hinzugefügt.
- Wiederhole diese Schritte, bis alle Knoten von G im ZSHK sind.



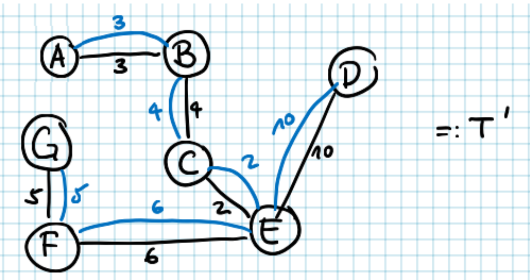
MST T gefunden.
MST hat Gewicht
$C = 3+4+2+6+5+10$
$= 30$

b) Bezeichne C das Gewicht von T. Verwenden Sie T um einen Zyklus Z zu finden, der in A beginnt und endet, jeden Knoten von G mindestens einmal besucht und Gewicht höchstens 2C hat

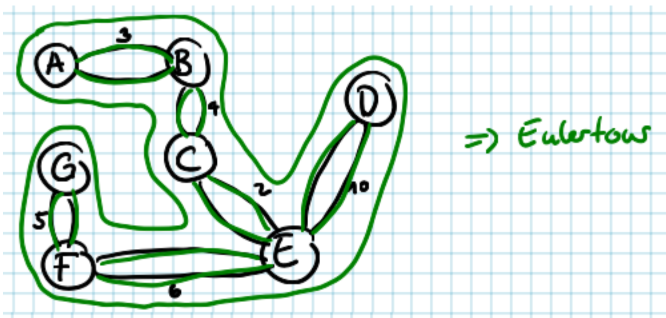
Der MST T von G hat ein Gewicht von C = 30 [Siehe a)]

Zyklus Z in G finden:

- Finde MST T in G (siehe a))
- Verdopple alle Kanten von T ⇒ T′

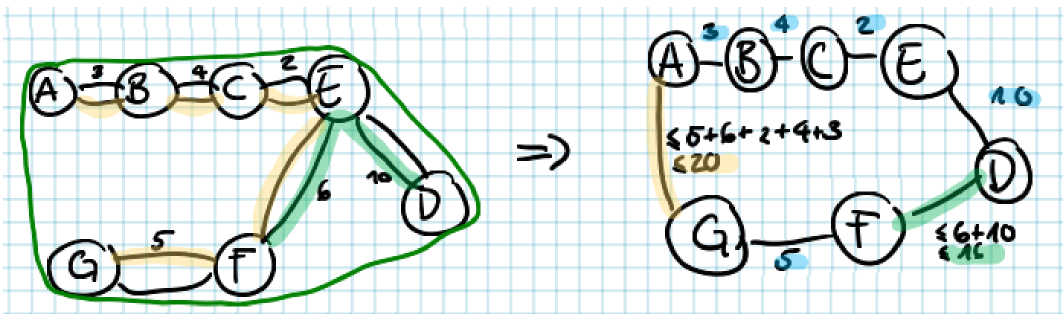


- Finden die Eulertour E in T′



- Kürze E, indem man Konten die mehrfach besucht werden überspringt. Dazu wird die Dreiecksungleichung verwendet.

  Dreiecksungleichung: $c(x, z) \leq c(x, y) + c(y, z)$



Daraus folgt das Gewicht von Z folgendermassen:
$Z \leq 3 + 4 + 2 + 10 + 5 + 20 + 16$
$Z \leq 60 = 2 * 30 = 2 * C$
$\Rightarrow Z \leq 2 * C$

c) Beweisen Sie, dass jeder Zyklus Z, der jeden Knoten mindestens einmal besucht, mindestens Gewicht C hat.

Wir haben Graph $G = (V, E)$, dessen MST mit Gewicht C und ein Zyklus Z der alle Knoten von G mindestens einmal besucht.

Das Gewicht des MST von G ist genau C. Daher sind die minimalen Kosten um alle Knoten zu erreichen genau C. Desswegen wird jeder andere Weg der alle Knoten besucht **mindestens C Kosten.**

Wenn man von Z eine beliebige Kante $e \in E$ entfernt, wird Z zu einem Pfad welcher alle Knoten von G mindestens einmal besucht. Dieser hat mindestens Kosten C (entsprechend der vorherigen Argumentation), folgendermassen **hat Z auch mindestens Kosten C.**