基本题反复琢磨，额外做一些练习题.

例. 设A、B分别是m阶、n阶方阵，C是m×n矩阵，则

$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ A、B可逆.

当A、B可逆时，$\left[\begin{array}{cc|cc} A & C & I_1 & 0 \\ 0 & B & 0 & I_2 \end{array}\right] \xrightarrow{A^{-1}\cdot①} \left[\begin{array}{cc|cc} I_1 & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & B & 0 & I_2 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{B^{-1}\cdot②} \left[\begin{array}{cc|cc} I_1 & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & B^{-1} \end{array}\right] \xrightarrow{①+(-A^{-1}C)\cdot②} \left[\begin{array}{cc|cc} I_1 & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & I_2 & 0 & B^{-1} \end{array}\right]$

$\therefore \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$.

例. Frobenius不等式，$A_{m\times n}$，$B_{n\times k}$，$C_{k\times s}$，则 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC) \le \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$.

（当B为单位矩阵时，上式变为 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(AC)+n$）

$\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{①+A\cdot②} \begin{bmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow[①+②\cdot(-C)]{} \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{bmatrix}$.

$= \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & -BC \end{bmatrix}$.

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & -BC \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$$

$\therefore \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$.

定理: $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 则有 $|I_m-AB|=|I_n-BA|$.

特别地, $|I_n-\alpha\beta^T|=1-\beta^T\alpha$.

$$\begin{bmatrix} I_m-AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m-AB & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n-BA \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n-BA \end{bmatrix}.$$

$\therefore |I_m-AB|=|I_n-BA|$.

推论: 若 $I-AB$ 可逆, 则 $I-BA$ 也可逆,

且 $(I_n-BA)^{-1}=I_n+B(I_m-AB)^{-1}A$.

$$\begin{aligned}(I_n-BA)[I_n+B(I_m-AB)^{-1}A] &= I_n+B(I_m-AB)^{-1}A-BA-BAB(I_m-AB)^{-1}A \\ &= I_n-BA+B[(I_m-AB)(I_m-AB)^{-1}A \\ &= I_n.\end{aligned}$$

正交矩阵与欧氏空间.

$\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 标准内积为 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

$$=\alpha^T\beta.$$

内积的性质: ① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ 对称性

② $(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$ 线性

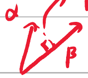
$(\gamma,k\alpha+l\beta)=k(\gamma,\alpha)+l(\gamma,\beta)$

③ $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 正定性.

定义长度: $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

距离: $\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$

对 $\forall t\in R$, $(\alpha-t\beta,\alpha-t\beta)\geq 0$.



$f(t)\geq 0$.

$f(t)=\|\alpha-t\beta\|^2\geq 0$

$=(\alpha-t\beta,\alpha-t\beta)=(\alpha,\alpha-t\beta)-t(\beta,\alpha-t\beta)$

$=(\alpha,\alpha)-t(\alpha,\beta)-t(\beta,\alpha)+t^2(\beta,\beta)$

$=(\alpha,\alpha)-2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)$.

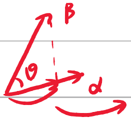
$\Delta=4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leq 0$

$\therefore \|\alpha\|\|\beta\|\geq|(\alpha,\beta)|^2$.

取"="当且仅当 α,β 共线.

$\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-\|\alpha-\beta\|^2=2(\alpha,\beta)=2\cos\theta\|\alpha\|\|\beta\|$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$.



(α,β).

内积的几何意义.

在欧氏空间中，由非零向量且两两正交的向量组叫做正交向量组.

例: $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&2&1\\-1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&2&-2\\0&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&6&0\\0&0&30\end{bmatrix}$$

若A为正交组，则除对角线外都为0.

$$A^TA=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&(\alpha_1,\alpha_3)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&(\alpha_2,\alpha_3)\\(\alpha_3,\alpha_1)&(\alpha_3,\alpha_2)&(\alpha_3,\alpha_3)\end{bmatrix}.$$

Gram矩阵.

A的列向量两两作内积.

若A为正交组 $\Leftrightarrow$ $rank(Gram)=rank(A)$ 且满秩.

正交向量组一定线性无关

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$

$\therefore (k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,\alpha_j)=0$

$\therefore k_j(\alpha_j,\alpha_j)=0$

$\therefore k_j=0,\ \forall 1\le j\le s.$

单位向量：长度为1的向量，$\frac{\vec{\alpha}}{||\alpha||}$

由单位正交向量构成的V基称为V的标准正交基.

引理：A的列向量组$\alpha_1\cdots\alpha_r$是列空间的标准正交基 $\Leftrightarrow A^TA=I_r$

$$I_r=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_r^2=1$，长度为1.

不同向量正交积为0.

正交矩阵：方阵A的列向量构成R^n的一组标准正交基，则称A为正交矩阵.

A为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=I_n$.

$\Leftrightarrow$ A可逆，且$A^{-1}=A^T$

$\Leftrightarrow AA^T=I_n$

做转置.

$\Leftrightarrow$ A的行、列向量都构成标准正交基.

(1) 正交矩阵的乘积仍是正交矩阵 $\longleftarrow AB(AB)^T=ABB^TA^T=AIA^T=I$.

(2) 正交矩阵的转置(or逆)仍是正交矩阵 $\longleftarrow AA^T=I_n \rightarrow (A^T)^TA^T=I_n$

(3) 正交矩阵的行列式为1或-1 $\leftarrow |A||A^T|=|I|=1 \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=\pm1$

期中. 2. (2) $a_{33}=-1$, $A_{3\times3}$, A_{ij}与A的(i,j)元代数余子式, $A_{ij}=a_{ij}$,

求$|A|$.

解: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = A^T$,

且 $A\cdot\frac{A^*}{|A|}=I$

$\therefore |A||A^*|=|A|^3$

$\therefore |A|^2=|A|^3$

$|A|^2(|A|-1)=0$

$\therefore |A|=1$.

$|A|=a_{33}A_{33}+a_{32}A_{32}+a_{31}A_{31}$

$=a_{33}^2+a_{32}^2+a_{31}^2$

$=1+a_{32}^2+a_{31}^2>0$.

(3) $n\geq2$, $\begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=C$, $|A|=5$, $a_{11}=2$.

$A^*=|A|\cdot A^{-1}$, $(A^*)^*=|A^*|\cdot(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\cdot\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}\cdot A$

$\Rightarrow C=|A|^{n-2}\cdot A(1;1)=5^{n-2}\cdot2$.

5. $A\in M_{m\times n}(R)$, r为正整数, 证明: $\mathrm{rank}(A)\leq r \Leftrightarrow$ 存在$B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$ 使$A=BC$.

证: "$\Rightarrow$": 已知$\mathrm{rank}(A)\leq r$, 要证$A_{m\times n}=B_{m\times r}C_{r\times n}$

$\therefore P_{m\times m}$, $Q_{n\times n}$ 可逆

$$A = P\begin{pmatrix} (A_1)_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$= \left(P_{1\,m\times r} \quad P_{2\,m\times(m-r)}\right)\cdot\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$= (P_1A_1, 0)\begin{pmatrix} Q_{1\,r\times n} \\ Q_{2\,(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

$$= (P_1A_1)_{m\times r}\, Q_{1\,r\times n}$$

"$\Leftarrow$": 已知 $A = B_{m\times r}C_{r\times n}$，要证 $\mathrm{rank}(A) \le r$.

$\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(B) \le r$.

6. $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\beta\in\mathbb{R}^m$，$AX=\beta$ 有解，证明：A第k列不能用其他列线性表出 $\Leftrightarrow$ 方程任何解向量k分量相等.

证：充分性：已知 A k列…… 要证 …….

假设至少存在2个解向量 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$b_k \ne a_k$.

令 $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n)$

则 $\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i = \beta$

$\therefore (a_k - b_k)\alpha_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} (a_i - b_i)\alpha_i$

$\therefore \alpha_k$ 可被其他列线性表出，矛盾，充分性得证.

必要性：已知～，要证～.

假设A第k列可用其他列线性表出

则 $\alpha_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} a_i\alpha_i$

任取一个解向量 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. 考虑另一组解

$\therefore \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} b_i\alpha_i + (b_k+1)\alpha_k - \alpha_k = \beta$.

$\therefore \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} b_i\alpha_i + (b_k+1)\alpha_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_i\alpha_i = \beta$.

$\therefore \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ \vdots \\ b_k+1 \\ \vdots \\ b_n-a_n \end{pmatrix}$ 也为解向量

但 $b_k+1 \neq b_k$, 矛盾.

8. $\alpha_1 \cdots \alpha_s$, $\beta_1 \cdots \beta_s$, $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\}$ 秩为 r, 证明有无另多个 $k\in R$, 使 $\alpha_1+k\beta_1, \alpha_2+k\beta_2 \cdots \alpha_s+k\beta_s$ 秩 $\geq r$.

证: 令 $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_s)$, $\operatorname{rank} A = r$

$\therefore A$ 有一 $r\times r$ 的子式 A_1 且 $|A_1|>0$

考虑 $C=A+kB$, $B=(\beta_1 \cdots \beta_s)$.

对应 A_1 的位置, 可取 $C_1 = A_1+kB_1$

$\therefore |C_1| = |A_1+kB_1|$

$\therefore |C_1|$ 为关于 k 的多项式函数., 设为 $f(k)$, 且 $f(0)>0$ 且连续.

$\therefore \exists \delta>0$, 使得 $\forall k\in[-\delta,\delta]$, $f(k)>0$, 故有无另个 k.

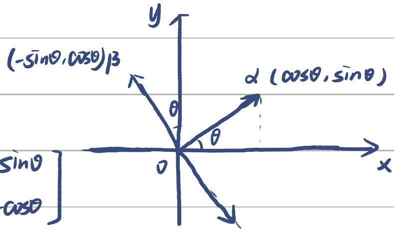
正交矩阵给出的正交变换：

① 左乘正交矩阵A，向量的长度、向量间夹角不变：

$$\forall \alpha,\beta\in R^n,\ (A\alpha,A\beta)=(A\alpha)^TA\beta=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta).$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\alpha^T\alpha}.\\&\|A\alpha\|=\sqrt{(A\alpha,A\alpha)}=\sqrt{(A\alpha)^TA\alpha}=\sqrt{\alpha^TA^TA\alpha}=\sqrt{\alpha^T\alpha}\end{aligned}}.$$

例. R^2的标准正交基.



$A=[\alpha,\beta]$

$\alpha=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$　　$\beta=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{bmatrix}$

$\therefore A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1$

or: $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-1.$

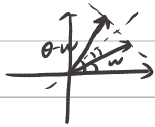
设$x=\begin{bmatrix}\cos w\\ \sin w\end{bmatrix}$，$AX=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos w\\ \sin w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos w-\sin\theta\sin w\\ \sin\theta\cos w+\cos\theta\sin w\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta+w)\\ \sin(\theta+w)\end{bmatrix}.$$

相当于把x逆时针旋转了θ，长度没变.

另一个：$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos w\\ \sin w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta-w)\\ \sin(\theta-w)\end{bmatrix}$

相当于：进行镜面反射



$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $A_p = \begin{bmatrix} \cos p & -\sin p \\ \sin p & \cos p \end{bmatrix}$

$\therefore A_\theta \cdot A_p = A_{\theta+p}$.

正交补.

设V为欧氏空间R^n的子空间，则集合 $V^\perp := \{\beta\in R^n \mid \overset{\beta\perp V}{(\beta,\alpha)=0}, \forall\alpha\in V\}$

是R^n的子空间，称为V的正交补.

引理：设A是实矩阵，则 $(A^T$列空间$)^\perp = A$解空间　互为正交补.

$\dim V^\perp = n - \dim V$

可以把正交补视作解空间.

定理：$V\cap V^\perp = \{0\}$, $V + V^\perp = R^n$.

R^n中任一向量可分解为V中向量和$V^\perp$中向量之和且唯一

$\alpha = \beta + \gamma$ ①

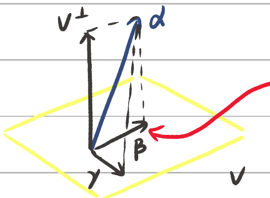
$\alpha = \beta' + \gamma'$ ②

①-②得，$(\beta-\beta') + (\gamma-\gamma') = 0$

又$\because \beta-\beta' \in V\cap V^\perp$, $\gamma-\gamma' \in V\cap V^\perp$

$V\cap V^\perp = \{0\}$

$\therefore \beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ $\Rightarrow$ 分解方式唯一.



正交投影是唯一的！

明显，$\alpha-\beta\perp V$，由勾股定理：$\|\alpha-\beta\|\le\|\alpha-y\|$.

定理：欧氏空间 R^n 中有子空间 V，任给 $\alpha\in R^n$，V 中有唯一的向量 β，使得 $\alpha-\beta\perp V$，即 α 有唯一分解 $\beta+(\alpha-\beta)\in V+V^{\perp}$，称 β 为 α 在 V 上的正交投影.

α 在 V 上的正交投影公式：

固定 V 的一组正交基 $\beta_1,\cdots\beta_r$，则 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r\in V$ 是 α 在 V 上的正交投影 当且仅当 $\alpha-\beta\perp V$.

$\Leftrightarrow (\alpha-k_1\beta_1-k_2\beta_2\cdots-k_r\beta_r,\beta_i)=0,\ \forall i$

$\Leftrightarrow (\alpha,\beta_i)-k_1(\beta_1,\beta_i)-k_2(\beta_2,\beta_i)\cdots-k_r(\beta_r,\beta_i)=0.$

$\beta_1\cdots\beta_r$ 两两正交

$\Leftrightarrow (\alpha,\beta_i)-k_i(\beta_i,\beta_i)=0.$

$\Leftrightarrow k_i=\dfrac{(\alpha,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}.$

$$\therefore \beta=\frac{(\alpha,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\cdots+\frac{(\alpha,\beta_r)}{(\beta_r,\beta_r)}\beta_r.$$

$\downarrow$ 将 $\beta_1\cdots\beta_r$ 变为标准正交基

$$\beta=(\alpha,\beta_1)\beta_1+\cdots+(\alpha,\beta_r)\beta_r=(\beta_1\beta_1^T+\cdots+\beta_r\beta_r^T)\alpha.$$

$$=(\beta_1\cdots\beta_r)\begin{pmatrix}(\alpha,\beta_1)\\ \vdots\\ (\alpha,\beta_r)\end{pmatrix}=(\beta_1\cdots\beta_r)\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots\\ \beta_r^T\end{pmatrix}\alpha$$

$$=BB^T\alpha$$

注意！$B^TB=I$
但 $BB^T\neq I$.

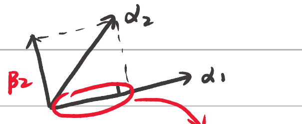
称 BB^T 为正交投影矩阵.

一个正交投影矩阵一定是实对称矩阵，则必有 $A=BB^T$. 特别地，A是实对称矩阵且 $A^2=BB^TBB^T=BB^T=A$.

反过来，A是实对称矩阵且 $A^2=A$，取A列空间一组正交基 $\overset{B}{\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r}$，则 $A=BB^T$，A是正交投影矩阵.

如何把一个向量组变为正交向量组？

Schmidt 正交化

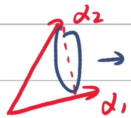


令 $\beta_1=\alpha_1$，$\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$. 减掉投影！每个α方向都要剪才能保证正交！

$\downarrow \cdots$

$\beta_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_k,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$



$\to d=\|\beta_2\|$

$\therefore \alpha_1=\beta_1$

$\alpha_2=\beta_2+\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$\vdots$

$\alpha_k=\beta_k+\sum_{j=1}^{k}\frac{(\alpha_k,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$.

α_i到$(\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1})$的距离.

$$[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k]=\underbrace{\left[\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\cdots\frac{\beta_k}{\|\beta_k\|}\right]}_{\text{正交矩阵}}\underbrace{\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|} & \cdots & \frac{(\alpha_k,\beta_1)}{\|\beta_1\|}\\ 0 & \|\beta_2\| & \cdots & \frac{(\alpha_k,\beta_2)}{\|\beta_2\|}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \|\beta_k\|\end{bmatrix}}_{\text{上三角矩阵}}$$

满秩矩阵都能唯一写成QR的形式，Q为正交矩阵，R为对角元均为正数的上三角矩阵.

求向量子空间 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 做正交投影的矩阵：

法I：由以上计算得，$r_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$r_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}$ 是V的标准正交基.

记 $B=[r_1,r_2]$

$B^TB=I_2$，则 BB^T 就是向V作正交投影的矩阵，$BB^T\alpha$ 是 α 在V上的正交投影

$B^T\alpha=\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\end{bmatrix}\alpha=\begin{bmatrix}(r_1^T,\alpha)\\(r_2^T,\alpha)\end{bmatrix}$ 是正交投影在 r_1,r_2 基下的坐标

α 在 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 上的正交投影为 $\frac{(\alpha,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1+\frac{(\alpha,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2$.

$$=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\alpha,\varepsilon_2)\varepsilon_2$$

$$=\boxed{(\varepsilon_1^T\alpha)}\varepsilon_1+\boxed{(\varepsilon_2^T\alpha)}\varepsilon_2 \quad \text{坐标}$$

$$=(\varepsilon_1\varepsilon_1^T)\alpha+(\varepsilon_2\varepsilon_2^T)\alpha$$

$\therefore B=\varepsilon_1\varepsilon_1^T+\varepsilon_2\varepsilon_2^T$. 正交投影矩阵.

法II：

记 $B=[\alpha_1,\alpha_2]$，列满秩，则 $B(B^TB)^{-1}B^T$ 是向 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 做正交投影的矩阵

设 x 为 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 中任一向量，y 为 x 向B作的正交投影向量.

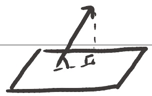
须满足：$y\in\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 即 $y=Bz$（z 为 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 中一个向量）.

$x-y$ 正交于 $B \Rightarrow B^T(x-y)=0 \quad \therefore B^Tx=B^Ty=B^TBz$

$z=(B^TB)^{-1}B^Tx$

$y=\boxed{B(B^TB)^{-1}B^T}x$

我们可以用正交投影定义2个子空间的夹角：



求所有满足以下条件的3阶正交矩阵A：A是对称矩阵且 $A\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$

设 $\alpha\neq\pm\beta$ 是n维欧氏空间中的2个单位向量，求所有实对称矩阵A，使得 $A\alpha=\beta$.

$\left.\begin{array}{l} A^TA=I \\ A^T=A \end{array}\right] \longrightarrow A^2=I$（对合矩阵）

$A\alpha=\beta,\quad A\beta=A(A\alpha)=A^2\alpha=I\alpha=\alpha.$

左乘A，可将 $\alpha.\beta$ 互换.

$A(\alpha+\beta)=\beta+\alpha=\alpha+\beta.$

$A(\alpha-\beta)=\beta-\alpha=-(\alpha-\beta)$

与 r_1、r_2 正交，右手系

令 $r_1=\dfrac{\alpha+\beta}{\|\alpha+\beta\|},\quad r_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|},\quad \underbrace{r_3=r_1\times r_2}.$

则 $Q=[r_1,r_2,r_3]$ 是第一类正交矩阵.

$Ar_1=r_1,\quad Ar_2=-r_2,$

$(Ar_3,r_1)=(Ar_3,Ar_1)=(r_3,r_1)=0$ （左乘正交矩阵不改变长度）

$(Ar_3,r_2)=-(Ar_3,Ar_2)=(r_3,r_2)=0.$

又 $\|Ar_3\|=\|r_3\|=1$

$\therefore Ar_3=r_3$ 或 $-r_3.$

第一种情况：$Ar_3=r_3.$

$\therefore AQ=A[r_1,r_2,r_3]=[r_1,-r_2,r_3].$

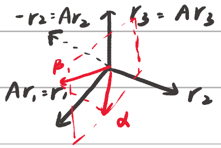
$=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$

$\therefore A\boxed{QQ^{-1}}^{I}=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}$

$\therefore A=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}+$

$[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}$

$=I_3-2r_2r_2^T.$ Householder 正交变化.



A是关于$<r_1,r_3>$的镜面反射.

对β作镜面反射到α.

第二类情况. $Ar_3=-r_3$.

$$AQ=A[r_1,r_2,r_3]=[r_1,-r_2,-r_3]$$

$$=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=[r_1,r_2,r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}=-[r_1\ r_2\ r_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}$$

$$+[r_1\ r_2\ r_3]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1^T\\r_2^T\\r_3^T\end{bmatrix}$$

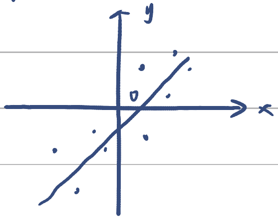
绕r_1旋转180°.

$$=-I_3+2r_1r_1^T$$

当$A=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$列满秩，即$A^TA$可逆时. 最小二乘方程$A^TAx=A^T\beta$有唯一解$x=(A^TA)^{-1}A^T\beta$.

最小二乘法与回归直线.

平面上给定n个点$P_i(a_i,b_i)$



这些点到直线的y-轴距离平方和最小

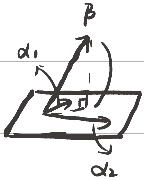
:

日期:　　　/

记 $A=[\alpha_1, \alpha_2]=\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$\sum_{i=1}^{n}(b_i-ka_i-l)^2=\|\beta-k\alpha_2-l\alpha_1\|^2$ n维欧氏空间距离.

求 $x=\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}$, 使得 $\|\beta-Ax\|$ 最小.

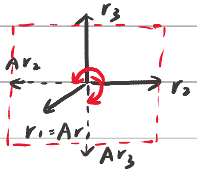


$\therefore Ax=\beta$ 在 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 上正交投影 r.

$\Leftrightarrow A^TAx=A^T\beta \Leftrightarrow x=(A^TA)^{-1}A^T\beta$.

$\therefore r=A(A^TA)^{-1}A^T\beta$.

$\therefore d^2=\|\beta-r\|^2=\|[I-A(A^TA)^{-1}A^T]\beta\|^2$.



左乘A相当于绕r_1旋转180°.

正弦矩阵　设$\theta=\frac{\pi}{n+1}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\begin{bmatrix}\sin\theta & \sin2\theta & \cdots & \sin n\theta\\ \sin2\theta & \sin4\theta & \cdots & \sin2n\theta\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin n\theta & \sin2n\theta & \cdots & \sin n^2\theta\end{bmatrix}$$

任选一行、一列: $\sin k\theta\sin l\theta+\sin2k\theta\sin2l\theta+\cdots+\sin nk\theta\sin nl\theta$

$$=\frac{1}{2}\Big[\cos(k-l)\theta-\cos(k+l)\theta+\cos(2k-2l)\theta-\cos(2k+2l)\theta\cdots+\cos(nk-nl)\theta-\cos(nk+nl)\theta\Big].$$

计算: $\cos m\theta+\cos2m\theta+\cdots+\cos nm\theta=\begin{cases}0 & m\text{为奇}\\ -1 & m\text{为偶}.\end{cases}$

又∵ $k+l$、$k-l$ 同奇偶 ⇒ 原式$=0$.

∴ 正弦矩阵中任意2个列向量内积为0 ⇒ 两两正交.

9/128

4. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 R^m 中的 n 个向量(点), 满足条件 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\mathbf{0}$. 证明: 若 L 是 R^m 中的一个 k 维平面 $(k\geq 0)$, 使得

$$Q(L)=\sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i,L)^2$$

取最小, 则 L 一定是一个 k 维子空间(包含原点). 这里 $d(\alpha_i,L)$ 表示点 α_i 到 L 的(最短)欧氏距离.

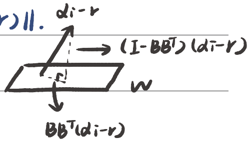
$A=[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$（中心化）.

设L是一个k维平面，$L=r+W$，使得 $Q(L)=\sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i,L)^2$ 最小，则必有 $r=0$，即L是k维子空间（必过原点!!）.

形象化表述：一组重心在原点的点，能最好拟合它们的面必过原点.

取W的一组标准正交基，$\beta_1\cdots\beta_k$ 是W的一组标准正交基.

$d(\alpha_i,L)=d(\alpha_i,r+W)=d(\alpha_i-r,W)=\|(I-BB^T)(\alpha_i-r)\|$.



记 $P=I-BB^T$.（实对称） $P^T=I-BB^T=P$.

$$\therefore Q(L)=\sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i,L)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-r)^TP^TP(\alpha_i-r)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^TP^2\alpha_i-\alpha_i^TP^2r-r^TP^2\alpha_i+r^TP^TPr).\quad n\|Pr\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^TP^2\alpha_i-\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^TP^2r-r^TP^2\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)+\boxed{n(Pr)^TPr}.$$

$$=n\|Pr\|^2$$

欲使 $Q(L)$ 最小，$r=0$.

不同基底间的坐标变换.

设V的两组基为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$.

$(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)U$，U是从 $\{\alpha_i\}$ 到 $\{\beta_i\}$ 的过渡矩阵.

$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)B=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)(UB)$

$\therefore UB=I_n\Rightarrow B=U^{-1}$.

定理：若向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 下的坐标为 x，从 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 到基 $\beta_1\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵为B，则 $\alpha=[\alpha_1\cdots\alpha_n]x=([\beta_1\cdots\beta_n]B^{-1})x$

$$=[\beta_1\cdots\beta_n](B^{-1}x)$$

即α在$\beta_1 \cdots \beta_n$下的坐标为$B^{-1}X$

线性映射.

要确定一个映射的完整信息，需记录定义域的每个元素在映射下的像.

要确定一个线性映射，只需记录定义域空间一组基的像；像的位置通常用陪域空间一组基及其坐标表示，并将坐标列向量排成矩阵.

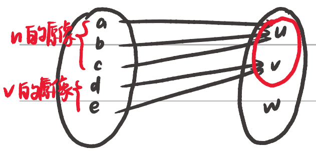
故记录一个线性映射，只需取2组基 + 1个矩阵. 记录一个线性变换，只需一组基和一个矩阵.

对$\forall \alpha \in U$，$A\alpha = A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n)$

$= k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_n A\alpha_n$.

$\therefore A\alpha = [A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ \cdots \ A\alpha_n] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

集合间的映射.



f的定义域　　f的陪域

f的像集合称为Imf.

陪域的每个元素都有原像 ⇒ 满射.

不同元素对应不同的像 ⇒ 单射.

既是单射又是满射 ⇒ 双射. ⇒ 双射是可逆的

每个元素都映到自身的变换称为恒同变换

将2个线性映射复合起来为复合映射.

$f\circ g(\alpha)=f(g(\alpha))$ ⇒ 先做 g 映射，再做 f 映射.

$f\circ g$ 为满射 ⇒ f 为满射.

$f\circ g$ 为单射 ⇒ g 单射.

映射乘积满足结合律: $f(gh)=(fg)h$.

但一般不满足交换律

类似于矩阵乘法.

满射有右逆.

若映射 $f:S\to T$ 为满射，则存在映射 $g:T\to S$，使得 $f\circ g=1_T$.

$\mathrm{Im}f=T$，对 $\forall\beta\in T$，$f^{-1}(\beta)\neq\emptyset$，且 $\bigcup_{\beta\in T}f^{-1}(\beta)=S$ 划分，

由选择公理，可在每个 $f^{-1}(\beta)$ 选一个 $r\in f^{-1}(\beta)$，定义反向映射 $g:T\to S$，$g(\beta)\triangleq r$.

则有 $f\circ g(\beta)=f(g(\beta))=f(r)=\beta$. ⇒ $f\circ g=1_T$.

单射有左逆:

若 $f:S\to T$ 即有左逆，又有右逆，此时 f 的左、右逆唯一且相同，记做 f^{-1}，f 可逆当且仅当 f 为双射.

向量空间之间的线性映射

$\underset{n\times 1}{x} \mapsto \underset{m\times n}{A}x$　　A行满秩 ⇒ A满射

A列满秩 ⇒ A单射.

设$\mathcal{A}$是向量空间K^n到K^m的一个映射，若$\mathcal{A}$满足

① $\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta$

② $\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}\alpha$.

则称$\mathcal{A}: K^n \to K^m$是线性映射.

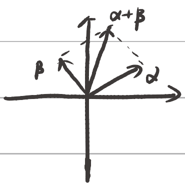
$\mathcal{A}(0)=0$

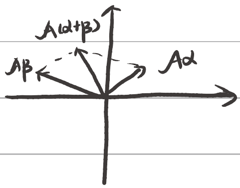
$\mathcal{A}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\mathcal{A}\alpha_1+k_2\mathcal{A}\alpha_2+\cdots+k_s\mathcal{A}\alpha_s$

若$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$线性相关 → $\mathcal{A}\alpha_1$、$\mathcal{A}\alpha_2\cdots\mathcal{A}\alpha_s$ 线性相关

反之不一定成立!

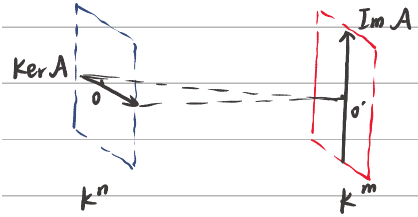
定理：若$\alpha_1\cdots\alpha_n$是K^n的基，在K^m中指定任意n个向量$\beta_1\cdots\beta_n$，则存在唯一的线性映射$\mathcal{A}: K^n\to K^m$，满足$\mathcal{A}\alpha_1=\beta_1$，$\mathcal{A}\alpha_2=\beta_2$ $\cdots$ $\mathcal{A}\alpha_n=\beta_n$





$\mathcal{A}: k^n \to k^m$ 是线性映射，$\operatorname{Im}\mathcal{A} := \{\mathcal{A}\alpha \mid \alpha \in k^n\}$ 是 k^m 的子空间，称为 $\mathcal{A}$ 的像空间.

$\operatorname{Ker}\mathcal{A} := \{\alpha \in k^n \mid \mathcal{A}\alpha = 0\}$ 是 k^n 的子空间，称为 $\mathcal{A}$ 的核空间.



设 $\mathcal{A}: k^n \to k^m$ 是线性映射，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}\text{的矩阵}.} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

线性映射保持相应的线性关系.

设线性映射 $\mathcal{A}: k^n \to k^m$ 在标准基下的矩阵为 A，则有 $\mathcal{A}\alpha = A\alpha$，$\forall \alpha \in k^n$.

$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{A\alpha \mid \alpha \in k^n\} = A$ 列空间，$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\alpha \in k^n \mid A\alpha = 0\} = A$ 解空间.

$\mathcal{A}$ 满射 $\leftrightarrow$ A 行满秩.　　　　$\mathcal{A}$ 单射 $\leftrightarrow$ A 列满秩

k^m 中所有向量都有原向量

$\because A \cdot 0 = 0$ 若 $A\alpha = 0$
则不为单射
$\therefore$ 只能有 $A \cdot 0 = 0$
$\therefore A$ 列满秩

设$\mathcal{A}: U\to V$是线性映射，$\alpha_1\cdots\alpha_n$是U的基，$\beta_1,\cdots\beta_m$是V的基，则有

$$\therefore(\mathcal{A}\alpha_1, \mathcal{A}\alpha_2 \cdots \mathcal{A}\alpha_n)=(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_m)\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}\text{在}U\text{基和}V\text{基下的矩阵}A}.$$

不同的线性映射有不同的矩阵.

若$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$. $\to$ α的坐标.

$$\therefore \mathcal{A}\alpha=k_1\mathcal{A}\alpha_1+k_2\mathcal{A}\alpha_2+\cdots+k_n\mathcal{A}\alpha_n=(\mathcal{A}\alpha_1,\mathcal{A}\alpha_2\cdots\mathcal{A}\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m)\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}}}_{\mathcal{A}\alpha\text{的坐标}}$$

$\therefore$ α在U基下坐标为X，线性映射后，$\mathcal{A}\alpha$在V基下坐标为AX.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{A}", "\alpha\mapsto\mathcal{A}\alpha"'] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ K^n \arrow[r, "A", "X\mapsto AX"'] & K^m \end{tikzcd}$$

定义域变化：$(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_n')=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)P$

陪域变化：$(\beta_1'\beta_2'\cdots\beta_m')=(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m)Q$.

$$\therefore \mathcal{A}(\alpha_1'\cdots\alpha_n')=\mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)P=(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m)AP$$

$$=(\beta_1'\beta_2'\cdots\beta_m')Q^{-1}AP.$$

定理：设$\mathcal{A}: U\to V$是线性映射，$r=\dim \operatorname{Im}\mathcal{A}$，则存在$U$的基$\alpha_1,\cdots\alpha_n$与$V$的基$\beta_1\cdots\beta_m$，使得$\mathcal{A}\alpha_1=\beta_1\cdots\mathcal{A}\alpha_2=\beta_2$，$\mathcal{A}\alpha_{r+1}=\cdots\mathcal{A}\alpha_n=0$.

$a \overset{\sim}{\sim} a$

称集合 S 上的一种二元关系（记为 $\sim$）是等价关系，若其满足反身性、对称性、传递性。

$a \sim b \Downarrow b \sim a$　　$\left.\begin{matrix} a\sim b \\ b\sim c \end{matrix}\right] \to a \sim c$.

在 S 上建立等价关系，相当于对 S 作了等价划分：$S = \bigcup_i S_i$，$S_i \cap S_j = \phi$，$\forall i \neq j$.

$a \in S$，$\bar{a} \triangleq \{b \in S \mid b \sim a\}$ 称为 a 所在的等价类

① $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \sim b$.

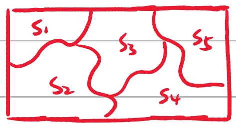
"$\Rightarrow$"：$a \in \bar{a} = \bar{b}$，故 $a \sim b$

"$\Leftarrow$"：若 $a \sim b$，又 $c \in \bar{a}$，$c \sim a \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \subseteq \bar{b}$

同理，$\bar{b} \subseteq \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

② 若 $c \in \bar{a}$ 且 $c \in \bar{b}$，则 $c \sim a$，$c \sim b \Rightarrow a \sim b$

由①得 $\bar{a} = \bar{b}$.　　不同的等价类之间无交集.



矩阵的相抵

若经过一系列初等行列变化后，$A \to B$，或有可逆矩阵 P、Q，使得 $PAQ = B$.

则称 A 与 B 相抵，相抵关系是一种等价关系

$\underset{\text{rank}=r}{A_{m\times n}} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow$ 相抵标准型

$\therefore A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$

定理：两个$m\times n$矩阵相抵$\Leftrightarrow$它们秩相同

全体$m\times n$矩阵在相抵分类下被划分成一个个等价类，每个等价类内的矩阵的秩与相抵标准型相同.

全体4×5矩阵在相抵分类下可被划分为5个等价类. $\mathrm{rank}=0\sim 4$.

线性变换. $\mathcal{A}: V\to V$

$$(\mathcal{A}\alpha_1, \mathcal{A}\alpha_2 \cdots \mathcal{A}\alpha_n) = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)}_{\text{取同一组基.}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}\text{在}\alpha_1\cdots\alpha_n\text{下的矩阵.}}.$$

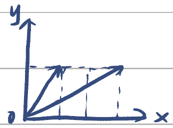
$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

则 $\mathcal{A}\alpha = k_1\mathcal{A}\alpha_1 + k_2\mathcal{A}\alpha_2 + \cdots + k_n\mathcal{A}\alpha_n = (\mathcal{A}\alpha_1, \mathcal{A}\alpha_2 \cdots \mathcal{A}\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}$. 即$\alpha$的坐标$X$

$$= (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}\alpha\text{的坐标 }AX\text{ .}}$$

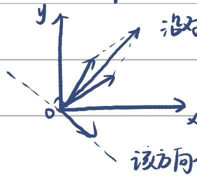
例：$\mathbb{R}^2$上的$\alpha \mapsto A\alpha$，$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ y \end{bmatrix}$$



沿水平方向拉伸.

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$

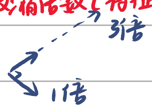


沿对角线拉伸

该方向不变.

相应列向量的放缩倍数(特征值).

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{\text{A的特征向量}}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$



A的特征向量.

⇓

在A的作用下只做放缩变化.

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{3} & 0\\ 0 & \boxed{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}.$$

(矩阵的对角化).

相似 ⇒ 即表示同一个线性变换.

↓

定义: 存在可逆矩阵 U, 使得 $B=U^{-1}AU$, 则称 A 与 B 相似, 记作 $B\sim A$.

相似也是等价关系

求正交矩阵的方法:

①直接用空间的标准正交基

对∀子空间 V, 若有标准正交基 $\{v_1,\cdots,v_k\}$, 则向 V 的正交投影矩阵为:

$$Q=v_1v_1^T+v_2v_2^T+\cdots+v_kv_k^T=VV^T$$

对 $\forall x$, $Qx=VV^Tx=V(V^Tx)$ ⇒ x 在 V 上的正交投影.

②用正交补的标准正交基.

向子空间的投影 = 全空间 − 向正交补的投影.

$$Q=I-\sum_{j=1}^{n-k}u_ju_j^T.$$ (其中 $\{u_j\}$ 是 $V^{\perp}$ 的标准正交基).

1:42

1. 设 $\mathscr{A}: X \to AX$ 是 K^n 到 K^m 的线性映射. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ 的一组基, $\alpha_i \in K^n$ 是 β_i 的原像, 即 $\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i$, $1 \le i \le r$.

又设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 是 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 的一组基.

1) 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 构成 K^n 的基, 由此给出解空间维数公式的新证明

$$\dim \mathrm{Im}\,\mathscr{A} + \dim \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = n;$$

2) 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充成 K^m 的基 $\beta_1,\cdots,\beta_m$. 证明:

$$A[\alpha_1 \cdots \alpha_r\ \gamma_1 \cdots \gamma_s] = [\beta_1 \cdots \beta_m]\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. 用以上方法求可逆矩阵 P,Q, 使得 $A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$.

解: (1) 大致思路:

先证这些向量线性无关 → 再证 K^n 中任一向量可被这个向量组线性表出.

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+l_1\gamma_1+\cdots+l_s\gamma_s=0$.

$\therefore A(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+l_1\gamma_1+\cdots+l_s\gamma_s)=A(0)=0$.

又 $\because \beta_i=A\alpha_i$, $A\gamma_j=0$

$\therefore k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r=0$

又 $\because \beta_1\cdots\beta_r$ 是 $\mathrm{Im}A$ 的一组基 ⇒ 线性无关

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

代入原式, $l_1\gamma_1+\cdots+l_s\gamma_s=0$

$\because \gamma_1\cdots\gamma_s$ 是 $\mathrm{Ker}\,A$ 的一组基 ⇒ 线性无关

$\therefore l_1=l_2=\cdots=l_s=0$

$\therefore \alpha_1\cdots\alpha_r,\ \gamma_1\cdots\gamma_s$ 线性无关.

对于 $x\in K^n$, $Ax\in K^m \Rightarrow Ax=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r$

$\therefore Ax=A(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r) \Rightarrow A[x-(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)]=0$

$\therefore x-(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)\in \mathrm{Ker}A$.

$\therefore x-(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=l_1\gamma_1+\cdots+l_s\gamma_s$.

$\therefore x=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+l_1\gamma_1+\cdots+l_s\gamma_s$

$\therefore K^n$ 中任一向量都可被该向量组线性表出.

$\therefore \alpha_1\cdots\alpha_r,\ \gamma_1\cdots\gamma_s$ 构成 K^n 的一组基.

(2) $$[\beta_1\cdots\beta_m]\begin{array}{c} r \\ m-r \end{array}\begin{bmatrix} \overset{r}{I_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\underbrace{\beta_1\cdots\beta_r}_{r},\underbrace{0\cdots0}_{m-r}].$$

又 $\because A[\alpha_1 \cdots \alpha_r\ \gamma_1 \cdots \gamma_s] = [\beta_1 \cdots \beta_r, 0 \cdots 0]$

$\therefore A[\alpha_1 \cdots \alpha_r, \gamma_1 \cdots \gamma_s] = [\beta_1 \cdots \beta_m]\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) 由(2)知，$P = [\beta_1 \cdots \beta_m] \Rightarrow K^m$ 的一组基，即 $\mathrm{Im}A$ 的一组基.

$Q = [\alpha_1 \cdots \alpha_r, \gamma_1 \cdots \gamma_s]^{-1}$.

先算 P：$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$\therefore \mathrm{Im}A$ 的基为：$\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\therefore P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

再计算 Q：$\because A\alpha = \beta \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_4$ 是 K^5 的前4个基.

$\therefore \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + \frac{5}{2}x_5 = 0 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\therefore Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

$\therefore Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

要记录一个线性映射 $\mathscr{A}$，我们需要两组基和一个矩阵：

$$\text{空间}U \xrightarrow{\mathscr{A}} \text{空间}V$$

基：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$　　基：$\{\beta_1, \cdots \beta_m\}$

$\therefore \mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_m)$

$$\therefore (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_m) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}$$

$\mathscr{A}$在$\{\alpha_i\}$ $\{\beta_i\}$下的矩阵A.

设 $\alpha \in U$：$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

$\therefore \mathscr{A}\alpha = k_1\mathscr{A}\alpha_1 + k_2\mathscr{A}\alpha_2 + \cdots + k_n\mathscr{A}\alpha_n$

$= (\mathscr{A}\alpha_1,\ \mathscr{A}\alpha_2 \cdots \mathscr{A}\alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

在基$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$下的坐标X

$$= (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m)\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}\right)$$

$= (\beta_1 \cdots \beta_m)(AX)$　在基$(\beta_1 \cdots \beta_m)$下的坐标就是用矩阵A左乘在基$(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$下的坐标X.

基底变化，矩阵如何变？

$\mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\mathscr{A}\alpha_1 \cdots \mathscr{A}\alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_m)A$

设$(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$，P可逆.

$(\beta_1' \cdots \beta_m') = (\beta_1 \cdots \beta_m)Q$，Q可逆.

则 $\mathscr{A}: U \to V$ 在新基底下的矩阵 $A' = Q^{-1}AP$

$\mathscr{A}(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = \mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)P = (\beta_1 \cdots \beta_m)AP = (\beta_1' \cdots \beta_m')Q^{-1}AP.$

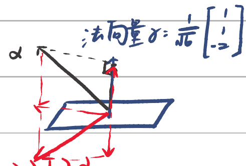
$\therefore A' = Q^{-1}AP.$

可取好的基，使得$\mathcal{A}$的矩阵变为相抵标准型！

$$
\begin{array}{lllll}
U & \alpha_1 \cdots \alpha_r & & \underbrace{\gamma_1 \cdots \gamma_s}_{\ker\mathcal{A}\text{基}} & \Rightarrow \text{构成 } K^n \text{ 基.} \\
 & \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\
V & \beta_1 \cdots \beta_r \Rightarrow \mathrm{Im}\mathcal{A}\text{ 基} & & 0 .
\end{array}
$$

求3阶矩阵A，使得$\mathcal{A}: x \mapsto Ax$，是向$V: x+y-2z$作

1) 正交投影 2) 镜面反射.



1) 设$\alpha \in \mathbb{R}^3$，则α在$\langle\gamma\rangle$上的正交投影为：

$$(\alpha,\gamma)\gamma = (\gamma^T\alpha)\gamma = \gamma(\gamma^T\alpha) = (\gamma\gamma^T)\alpha$$

于是α在$V=\langle\gamma\rangle^\perp$上的正交投影为$\alpha-(\gamma\gamma^T)\alpha = (I-\gamma\gamma^T)\alpha$

向V的正交投影矩阵为$I-\gamma\gamma^T = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

2) 镜面反射的向量$=\alpha-2(\gamma\gamma^T)\alpha = (I-2\gamma\gamma^T)\alpha$

$\therefore$ 矩阵为$(I-2\gamma\gamma^T)$.

3. (用最小二乘法求最佳拟合线性映射)

给定 $B \in M_{n,s}(R)$, $C \in M_{m,s}(R)$. 求 $A \in M_{m,n}(R)$,

使得 $\| AB - C \|_F$ 取最小值, 并确定此最小值.

这里 $\| A \|_F$ 表示矩阵 $A = [\, a_{ij} \,]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(R)$

的 Frobenius 范数，即

$$\| A \|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^TA)} = \left(\sum_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} {a_{ij}}^2 \right)^{1/2}$$

解：$\|AB-C\|_F = \|(AB-C)^T\|_F = \|B^TA^T - C^T\|_F$.

设 $A^T=(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$， $C^T=(\beta_1 \cdots \beta_m)$.

$\therefore \|B^T(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m) - (\beta_1 \cdots \beta_m)\|_F$

$= \|(B^T\alpha_1-\beta_1)+(B^T\alpha_2-\beta_2)+\cdots+(B^T\alpha_m-\beta_m)\|_F$

$= \sqrt{(B^T\alpha_1-\beta_1)^2+(B^T\alpha_2-\beta_2)^2+\cdots+(B^T\alpha_m-\beta_m)^2}$

$\geq$ C^T的列向量 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 到 B^T 列空间的距离平方和.

取"="$\Leftrightarrow$ $B^T\alpha_i$是β_i在B^T列空间上的正交投影！

A的广义逆：

设$A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$，P、Q可逆，则 $Q^{-1}\begin{bmatrix} X & B \\ C & D \end{bmatrix}P^{-1}$是A的广义逆当且仅当$X=I_r$，验证即可.

$$AXA = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QQ^{-1}\begin{bmatrix} X & B \\ C & D \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$= P\begin{bmatrix} X & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$= P\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = A$$

$\therefore X = I_r$.

矩阵的相似.

$A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$, U可逆, $B=U^{-1}AU \rightarrow A$与B相似，记作 $A\sim B$.

$\mathcal{A}(\beta_1\cdots\beta_n)=\mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)U=(\mathcal{A}\alpha_1\cdots\mathcal{A}\alpha_n)U$

$=(\alpha_1\cdots\alpha_n)AU$

$=(\beta_1\cdots\beta_n)U^{-1}AU$

$\therefore A$在基$(\beta_1\cdots\beta_n)$下的过渡矩阵变为 $U^{-1}AU$.

运算：若 $B=UAU^{-1}$

则 $B^k=(UAU^{-1})^k=UA^kU^{-1}$.

$a_0B^k+a_1B^{k-1}+\cdots+a_nI=U(a_0A^k+a_1A^{k-1}+\cdots+a_nI)U^{-1}$.

相似矩阵秩与行列式相同：

$A\sim B \Leftrightarrow A=UBU^{-1}$

U、U^{-1}满秩，乘满秩矩阵不改变矩阵的秩

$|A|=|U||B||U^{-1}|=|U||U^{-1}||B|=|UU^{-1}||B|=|B|$.

迹也相同：

① $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
② $tr(kA)=k\,tr(A)$
→ 显然

③ $tr(AB)=tr(BA)$　A的(i,j)元与B的(j,i)元乘积之和

$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$tr(B)=tr(U^{-1}AU)=tr(AUU^{-1})=tr(A)$.

$\therefore \mathcal{A}: V\mapsto V$

$\{\alpha_i\}$　$\{\beta_i\}$　$\{\gamma_i\}$

$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$　$C=U\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}U^{-1}$

同一相似等价类
有相同的秩、迹、行列式
在该线性变换中保持不变.

判断2个矩阵是否相似：

①是不是每个方阵都相似于对角矩阵？×

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 不相似于任何对角矩阵！

秩、迹、行列式相同是相似的必要条件，而不是充分条件！

若 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = U^{-1}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}U$，$U$ 可逆

$\therefore \begin{cases} \lambda^2 = ab \\ 2\lambda = a+b \end{cases} \Rightarrow a=b=\lambda.$

又 $\because \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$，可交换

$\therefore U^{-1}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}U = U^{-1}U\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$，矛盾.

若 A 相似于某个对角矩阵 D，即 $A = U\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}U^{-1}$，则称 A 在 K 上可对角化，D 是 A 的相似标准形.

A 什么时候可以写成这样？→ 能否找到 n 个线性无关的向量，变换后方向不变.

$A = UDU^{-1} \Longleftrightarrow AU = UD$

$A[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n] = \underbrace{[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n]}_{\text{线性无关.}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\therefore [A\alpha_1\ A\alpha_2 \cdots A\alpha_n] = [\lambda_1\alpha_1\ \ \lambda_2\alpha_2 \cdots \lambda_n\alpha_n]$

$\Longleftrightarrow A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \cdots A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n.$ $\alpha_1、\alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关.

一组线性无关的向量在 A 的作用下方向不变，长度伸缩.

$\therefore \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是 A 的特征向量，λ_i 是 A 的特征值. α_i 称为特征值为 λ_i 的特征向量

$$A^k\alpha=\lambda^k\alpha$$

$$(A^3-2A^2+I)\alpha=(\lambda^3-2\lambda^2+1)\alpha$$

定理：n级方阵A在K上可对角化 $\Leftrightarrow$ K^n中有一组由A的特征向量构成的基

设$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\overset{P}{\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\alpha\quad & \quad\beta\end{array}\\ \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\left(I-2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$\therefore A=P\left(I-2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)P^{-1}$$

$$=PIP^{-1}-2P\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=I-2(\alpha\ \beta)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\end{pmatrix}=I-2(0\ \beta)\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\end{pmatrix}$$

$$=I-2\beta\beta^T.$$

设A是数域K上的n级矩阵，若有$\alpha\in K^n$，$\lambda\in K$，$A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，

则λ为特征值.

$\Rightarrow (A-\lambda I)\alpha=0$，$\alpha\neq 0$

$\therefore A-\lambda I=0.$

$\Rightarrow |A-\lambda I|=0$

α是$(A-\lambda I)X$的非零解.

矩阵对角化的条件.

$(A-\lambda I)\alpha=0,\ \alpha\neq 0 \iff \lambda$是A的特征值，$\alpha$是属于$\lambda$的特征向量

$\Updownarrow$

λ是$|A-\lambda I|=0$的根（代数重数）

$0\neq\alpha\in(A-\lambda I)$的解空间（几何重数）.

定理：特征值的代数重数 $\geq$ 几何重数

Proof.

设特征子空间的基为 $\langle\alpha_1\cdots\alpha_r\rangle$，$A\alpha_i=\lambda\alpha_i$，$1\leq i\leq r$

扩充成全空间 K^n 的基 $\alpha_1\cdots\alpha_r\cdots\alpha_n$.

$$\therefore A[\alpha_1\cdots\alpha_r\cdots\alpha_n]=[\lambda\alpha_1\cdots\lambda\alpha_r\ *\cdots *]=\underbrace{[\alpha_1\cdots\alpha_r\cdots\alpha_n]}_{U\text{可逆}}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \lambda\end{matrix}}^{\lambda I_r} & * \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & *\end{bmatrix}$$

$$\therefore AU=U\begin{bmatrix}\lambda I_r & B\\ 0 & C\end{bmatrix}\Rightarrow A=U\begin{bmatrix}\lambda I_r & B\\ 0 & C\end{bmatrix}U^{-1}.$$

$$\therefore A\sim\begin{bmatrix}\lambda I_r & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$$

相似矩阵有相同特征多项式！

还可能产生λ.

$$\therefore |xI-A|=\begin{vmatrix}(x-\lambda)I_r & -B\\ 0 & xI_{n-r}-C\end{vmatrix}=(x-\lambda)^r\,|xI_{n-r}-C|$$

这说明λ的代数重数 $\geq$ 几何重数 r.

推论：n级方阵各个特征子空间的维数和 $\geq$ 特征值代数重数之和 $\leq n$.

定理：方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在一组A的特征向量构成的基底.

设A有n个线性无关的特征向量：

$$\underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{V_1},\ \underbrace{\beta_1 \cdots \beta_t}_{V_2},\ \underbrace{\gamma_1 \cdots \gamma_v}_{V_s}.$$

$\dim V_1+\dim V_2+\dim V_s \geq n$.

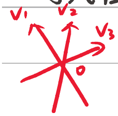
又 ∵ $\dim V_1+\dim V_2+\dim V_s \leq r+t+v \leq n$

∴ $\dim V_1+\dim V_2+\dim V_s = n$.

∴ A的各特征子空间维数之和 $= n$.

即几何重数之和.

若A特征子空间维数之和为n，各特征子空间中取基，合并后是否仍可线性无关？ ×



反例：V_1、V_2、V_3 两两线性无关，但组合后相关.

直和：V_1、$V_2 \cdots V_s$

若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，$\alpha_i \in V_i$，写法唯一

只要有一个向量的写法唯一，则每个向量的写法都唯一.（可用反证法证明）.

引理. 若 $V_1, V_2 \cdots V_s$ 是A的不同特征子空间，$\alpha_i \in V_i$，若 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=0$.

则 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_s=0$.

Proof. $A(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$

$A\cdot A(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\cdots+\lambda_s^2\alpha_s=0$.

$\cdots$

$$A^{s-1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=\lambda_1^{s-1}\alpha_1+\lambda_2^{s-1}\alpha_2+\cdots+\lambda_s^{s-1}\alpha_s.$$

特征值两两不同.

$$\therefore [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_s]\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{bmatrix}=0$$

$\therefore$ 右矩阵可逆 $\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_s=0.$

$\Rightarrow$ 不同特征子空间的基底合起来仍线性无关.

若有 $\underbrace{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3}_{V_1}+\underbrace{l_1\beta_1+l_2\beta_2}_{V_2}+\underbrace{t_1\gamma_1+t_2\gamma_2}_{V_3}=0$

由引理. $\begin{cases} k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0 \\ l_1\beta_1+l_2\beta_2=0 \Rightarrow l_1=l_2=0 \\ t_1\gamma_1+t_2\gamma_2=0 \Rightarrow t_1=t_2=0. \end{cases}$

(1) $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和

$\Leftrightarrow$ (2) 将 V_i 的基合并, 得到 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 的基

$\Leftrightarrow$ (3) $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_s)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_s.$

定理: A 在 K 上可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的特征子空间维数之和等于 n.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ A 的特征多项式的根的几何重数 = 代数重数.

设$\mathcal{A}$是空间V上的线性变换

记录$\mathcal{A}$需要V的一组基、一个方阵.

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\mathcal{A}\alpha_1,\mathcal{A}\alpha_2\cdots\mathcal{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)A.$$

当基底变化，$(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)U$

$$\therefore\mathcal{A}(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)=\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)U$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)AU.$$

$$=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)U^{-1}AU.$$

与A相似.

此时，线性变换在基$(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$下的矩阵变为$U^{-1}AU$.

A可对角化，当且仅当存在可逆矩阵U，使得$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix}$.

$$\therefore A(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}A\gamma_1=\lambda_1\gamma_1\\A\gamma_2=\lambda_2\gamma_2\\\quad\vdots\\A\gamma_n=\lambda_n\gamma_n\end{cases}\qquad\gamma_i\neq0$$

特征值与特征向量. $A\in M_n(K)$

① 定义: $A\alpha=\lambda\alpha,\ \alpha\neq0$

② 几何意义: 放缩. $A\alpha\in\langle\alpha\rangle$

定理: 特征值的几何重数 ≤ 代数重数.

设 A、B 分别是 K 上的 $m\times n$ 矩阵、$n\times m$ 矩阵.

证明：AB 与 BA 有相同的非零特征值且其几何重数、代数重数都相同.

证明：设 λ 是 AB 的特征值，α 是特征向量.

$\therefore$ $AB\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$.

$\therefore$ $(BA)(B\alpha)=\lambda(B\alpha)$.

验证 $B\alpha\neq 0$：

若 $B\alpha=0$，$AB\alpha=0=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，$\lambda\neq 0$.

矛盾.

$\therefore$ $B\alpha\neq 0$.

验证 λ 的几何、代数重数相同：

设 $0\neq\lambda\in K$ 是 AB、BA 的特征值.

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是 AB 的特征子空间 $\mathrm{Ker}(\lambda I-AB)$ 的一组基.

$\therefore$ 作为 AB 的特征值，λ 的几何重数为 r.

$AB(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r)=\lambda(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r)$

$\therefore$ $BA[B\alpha_1,B\alpha_2\cdots B\alpha_r]=\lambda[B\alpha_1,B\alpha_2\cdots B\alpha_r]$

$\therefore$ $B\alpha_1,B\alpha_2\cdots B\alpha_r$ 是 BA 的特征向量且线性无关？

$A(B[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n])=AB[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]=\lambda[\alpha_1\cdots\alpha_r]$

秩为 r.

于是 $\mathrm{rank}(B\alpha_1,B\alpha_2\cdots B\alpha_r)\geq r$

$\therefore$ $\mathrm{rank}(B\alpha_1,B\alpha_2\cdots B\alpha_r)\geq r$

$\therefore$ BA 关于 λ 的特征子空间维数 $\geq r$

由对称性得，λ作为AB、BA的特征值，几何重数相同.

λ在AB、BA中的代数重数相同：

不妨设$m \geq n$，$f_{AB}(x) = |xI_m - AB| \overset{\text{先证}}{=} x^{m-n} f_{BA}(x) = x^{m-n}|xI_n - BA|$.

$$f_{AB}(x) = \begin{vmatrix} xI_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} xI_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} \to x^{-n}\begin{vmatrix} xI_m & A \\ xB & xI_n \end{vmatrix}$$

$$\to x^{m-n}\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & xI_n \end{vmatrix} \to x^{m-n}\begin{vmatrix} I_m & 0 \\ B & xI_n - BA \end{vmatrix} = x^{m-n}|xI_n - BA|.$$

设A是第一类3阶正交矩阵，$A^TA = I_3$，$|A| = 1$

(1) 证明：$\lambda = 1$是A的特征值（n为奇）.

$$|A - I| = |AI - AA^T| = |A||I - A^T| = |I - A^T| = |I - A| = (-1)^n|I - A|$$

$\therefore |A - I| = 0$.

(2) 设α_1是$\lambda = 1$的单位特征向量，将α_1扩充成R^3的右手系标准正交基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，证明：$\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$仍是标准正交基. 特别地，$A\alpha_2, A\alpha_3 \in \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

由于A是正交矩阵，$x \mapsto Ax$是正交变换，夹角不变、长度不变.

$\therefore A\alpha_1 = \alpha_1$，$A\alpha_2$，$A\alpha_3$也是$R^3$的标准正交基

$\langle A\alpha_2, A\alpha_3 \rangle = \langle \alpha_1 \rangle^{\perp} = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

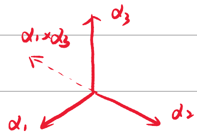
设$A\alpha_2 = \cos\theta \cdot \alpha_2 + \sin\theta \cdot \alpha_3$，$A\alpha_3 = -\sin\theta \cdot \alpha_2 + \cos\theta \cdot \alpha_3$.

即
$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{tr}A = 1+2\cos\theta$$

(3) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，$\|\alpha_1\|=1$，记 $C = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$.



证明：$\boxed{C\text{是叉积变换}，\beta \mapsto \alpha_1\times\beta \text{.} \quad \text{即 } \alpha_1\times\beta = C\beta，\forall\beta}$

验证：设 $\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，则 $\alpha\times\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] = [\alpha_1\times\alpha_1,\ \alpha_1\times\alpha_2,\ \alpha_1\times\alpha_3]$$

$$= [0,\ \alpha_3,\ -\alpha_2]$$

$$= [\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= [0\ \ \alpha_3\ \ -\alpha_2] \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_3\alpha_2^T - \alpha_2\alpha_3^T$$

$$C^2 = \overset{P}{[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \left(-\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= -PI_3P^T + \alpha_1\alpha_1^T$$

$$= -I_3 + \alpha_1\alpha_1^T.$$

$C^3 = -C$.

$$A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$A^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - A^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sin\theta \\ 0 & 2\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= 2\sin\theta\cdot[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}.$$

$$= 2\sin\theta\cdot C$$

$$A + A^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= 2\cos\theta\, P I P^T + 2[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} 1-\cos\theta & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$$

$$= 2\cos\theta\cdot I_3 + 2(1-\cos\theta)\cdot\alpha_1\alpha_1^T$$

$$\therefore A = \cos\theta\cdot I_3 + \sin\theta\cdot C + (1-\cos\theta)\cdot\alpha_1\alpha_1^T.$$

$$= I_3 + \sin\theta\cdot C + (1-\cos\theta)\,C^2$$

$\therefore A = e^{\theta\cdot C}$ → 泰勒展开.

实对称矩阵.

(1) n级实对称矩阵有n个实特征值

(2) 属于不同特征值的特征向量彼此正交.

(3) 都可对角化：$A=PDP^{-1}=PDP^{T}$.

证(1)：设A为n级实对称矩阵.

$\therefore A\alpha=\lambda\alpha$., $\lambda\in\mathbb{C}$, $0\neq\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$.

$\therefore \alpha^TA^T=\lambda\alpha^T$

$\bar{A}\bar{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\alpha}$ (实数矩阵).

$\therefore \alpha^T(\bar{A}\bar{\alpha})=\bar{\lambda}(\alpha^T\bar{\alpha})$

$\therefore (\alpha^TA)\bar{\alpha}=\lambda\alpha^T\bar{\alpha}=\alpha^T(A\bar{\alpha})=\bar{\lambda}(\alpha^T\bar{\alpha})$

$\Rightarrow \lambda-\bar{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda$ 为实数.

引理：A是n级实对称矩阵，$(\alpha,A\beta)=(A\alpha,\beta)$

$(A\alpha,\beta)=(A\alpha)^T\beta=\alpha^TA^T\beta=\alpha^T(A\beta)=(\alpha,A\beta)$

证(2)：设λ_1, λ_2是A的2个不同的特征值.

$\therefore A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$.

$(A\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,A\alpha_2)$

$(\lambda_1\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)$

$\therefore \lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)$

又$\because \lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2)=0$.

$\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 正交，得证.

定理：实对称矩阵都可写成 $A=PDP^{-1}=PDP^T$，其中P是正交矩阵，D是对角矩阵（A与D合同）.

反之，能写成 PDP^T 的矩阵都实对称.

证明：假设 n-1 阶实对称矩阵都能正交对角化，考察n阶A的情况.

设λ为A的特征值，$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ 且 $\|\alpha_1\|=1$.

再正交化、单位化得到标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$

$$\therefore A[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]=[\lambda_1\alpha_1\ \ *\ \ *]=\underbrace{[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]}_{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \overbrace{*\cdots*}^{C}\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}.$$

$$\therefore P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & C\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}$$，P^TAP 仍是实对称矩阵

$\therefore$ B也实对称，$C=0$.

$$\therefore P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\therefore A=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}P^T.\quad =P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & P_1D_1P_1^T\end{bmatrix}P^T$$

$$=\underbrace{\left(P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{bmatrix}\right)}_{\text{正交}}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & D_1\end{bmatrix}}_{\text{对角}}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1^T\end{bmatrix}P^T\right)}_{\text{正交的逆}}$$

得证.

作正交投影

$$\therefore A=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

$$=(B_1\ B_2\cdots B_s)\begin{bmatrix}\lambda_1I_1 & & & \\ & \lambda_2I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sI_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1^T\\ B_2^T\\ \vdots\\ B_s^T\end{bmatrix}=\lambda_1B_1B_1^T+\cdots+\lambda_sB_sB_s^T$$

正交投影矩阵.

设A是n阶实正规矩阵，则 $AA^T=A^TA$ ⇒ 也符合上面的定理.

例. 求 $A^5+3A-I=0$，A为实对称矩阵.

设 $A\sim D$（D为对角矩阵）

$\therefore D^5+3D-I=0$

$\therefore$ D的对角元x满足 $f(x)=x^5+3x-1=0$.

$f'(x)=5x^4+3>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$

设c：$f(c)=0$

$\therefore D=cI$.

例. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} \sin j\theta \\ \sin 2j\theta \\ \vdots \\ \sin nj\theta \end{bmatrix},\ \theta=\frac{\pi}{n+1}. = \begin{bmatrix} \sin 2j\theta \\ \sin j\theta+\sin 3j\theta \\ \sin 2j\theta+\sin 4j\theta \\ \vdots \\ \sin(n-1)j\theta+\overset{0}{\boxed{\sin(n+1)j\theta}} \end{bmatrix}$$

$$=2\cos j\theta\begin{bmatrix} \sin j\theta \\ \sin 2j\theta \\ \vdots \\ \sin nj\theta \end{bmatrix}$$

$$aI+A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & a \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} a+2\cos\theta & & & \\ & a+2\cos 2\theta & & \\ & & \ddots & \\ & & & a+2\cos n\theta \end{bmatrix}P^T$$

考试题型. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，求P.D 使得 $A=PDP^{-1}=PDP^T$.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

$\therefore \lambda = 5$ 或 -4

$\lambda = 5$：解 $(5I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3$$

$$\therefore \alpha_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -4$，解 $(A + 4I)x = 0$

基为 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

对 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ 正交化：$\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

再单位化，$\eta_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\eta_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\alpha_3$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P = [\eta_1\ \eta_2\ \eta_3], \quad D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}.$$

例. 求 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 在单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 上取得的 max、min？

多元：$f(x_1, \cdots x_n) = [x_1\ x_2 \cdots x_n] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{对称}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T A X.$

可令 $x = CY$，C 为可逆矩阵.

$$f(x) = X^TAX = Y^T(C^TAC)Y = Y^TBY = g(Y)$$

若 C 可逆，且 $C^TAC=B$，称A与B合同.

若二次型 x^TAx 只含平方项 ⇒ 标准形.

回到例：$f(x)=f(\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|})=\|x\|^2 f(\frac{x}{\|x\|}).\in[m\|x\|^2, M\|x\|^2]$.

$$f(x)=(x_1\ x_2\ x_3)\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}}_{\text{A是实对称矩阵}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x^TAx=(x^TP)D(P^Tx)$$

$$=(P^Tx)^T D(P^Tx).$$

用上节方法求解.　↑对角

令 $Y=P^Tx \Rightarrow x=PY$.

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2\sqrt5}{15}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ → 新坐标轴.

$$\therefore f(x)=(y_1\ y_2\ y_3)\begin{bmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2.$$

$$4\le\ =5(y_1^2+y_2^2+y_3)^2-9y_3^2\le 5.$$

可取最大特征值/最小特征值.

即 $\lambda_{min}\|x\|^2\le f(x)\le\lambda_{max}\|x\|^2$.

何时可取：$f(x)=x^TAx$

当 $Ax=\lambda_{max}$ 时，$f(x)=\lambda_{max}\|x\|^2$

$f(x)=x^TAx=Y^TDY=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

$=\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)-(\lambda_1-\lambda_{s+1})y_{s+1}^2\cdots-(\lambda_1-\lambda_n)y_n^2$

$\le\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_1\|x\|^2$

等号成立 ⇔ $y_{s+1}=\cdots=y_n=0$

$x=y_1\alpha_1+\cdots+y_s\alpha_s\in\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle\in\ker(\lambda_1I-A)$

x 在 λ_1 的特征子空间中.

矩阵的奇异值分解

引理：若A是实矩阵，则 A^TA（实对称）的特征值都 ≥ 0（即 A^TA 半正定）

证明：设 $\lambda\in R$ 是 A^TA 的一个特征值，α 是 λ 的特征向量.

$$\therefore A^TA\alpha=\lambda\alpha.$$

$$\therefore \alpha^TA^TA\alpha=\alpha^T\lambda\alpha$$

欧氏长度 $\underbrace{(A\alpha)^TA\alpha}=\lambda\underbrace{(\alpha^T\alpha)}$ 欧氏长度

$$\therefore \lambda=\frac{\|A\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2}\geq 0 \longrightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|}$$ 奇异值.

得证.

属于 AA^T/A^TA

设 $\text{rank}(A)=r$，$A_{m\times n}$，则 AA^T 与 A^TA 有相同的正特征值 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$，其算术平方根称为A的奇异值. 属于A.

几何意义： r维椭球，r个半轴长为奇异值.

左、右乘正交矩阵，奇异值不变

$(PAQ)^T(PAQ)=Q^TA^TAQ$ 与 A^TA 相似.

定理：$A_{m\times n}$ 可分解为 $A=PSQ^T$，P、Q分别为m、n级正交矩阵.

$$S=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{bmatrix},\quad r=\text{rank}(A).$$ $\sigma_1\cdots\sigma_r$ 是A的奇异值.

$$\therefore A=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_m)\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1^T\\ \gamma_2^T\\ \vdots\\ \gamma_n^T\end{bmatrix}$$

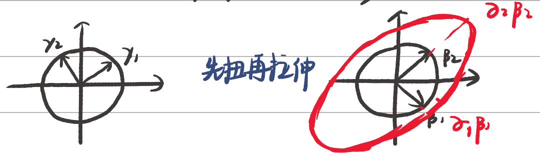
值.

$$=\sigma_1\beta_1\gamma_1^T+\sigma_2\beta_2\gamma_2^T+\cdots+\sigma_r\beta_r\gamma_r^T$$

$$AQ=PS\Rightarrow[A\gamma_1\ A\gamma_2\cdots A\gamma_n]=[\underbrace{\sigma_1\beta_1\ \sigma_2\beta_2\cdots\sigma_r\beta_r}_{\text{前r个!}}\ 0\cdots 0]$$

几何直观:

$$A[y_1, y_2] = [\beta_1, \beta_2]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}.$$



定理: 每个实方阵都 = 一个实对称(半正定)矩阵 × 正交矩阵

$$A = PSQ^T = (PSP^T)(PQ^T)$$

先作正交变化，再伸缩.

线性映射: $x \mapsto Ax$ 将 R^n 中的单位球体映成 R^m 中 r 维椭球体

证明: $$A^TA = \overset{\text{正交}}{[y_1 \cdots y_r \cdots y_n]}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1^T\\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T\end{bmatrix}$$

$$Q^TA^TAQ = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0\end{bmatrix} = (AQ)^TAQ$$

→ $A\gamma_1 \cdots A\gamma_r$ 两两正交.

$A\gamma_{r+1} \cdots A\gamma_n$ 是零向量.

且 $\|A\gamma_1\| = \sqrt{\lambda_1}$, $\|A\gamma_2\| = \sqrt{\lambda_2}$ $\cdots$ $\|A\gamma_r\| = \sqrt{\lambda_r}$.

令 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}A\gamma_1 \cdots \beta_r = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}A\gamma_r$

扩成 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基 $\beta_1 \cdots \beta_r \cdots \beta_m$

$$AQ = [A\gamma_1\ A\gamma_2 \cdots A\gamma_r\ 0 \cdots 0] = [\sigma_1\beta_1 \cdots \sigma_r\beta_r\ 0 \cdots 0]$$

$$= \underbrace{[\beta_1 \cdots \beta_m]}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}}_{S}.$$

可对角化的矩阵：有n个不同特征值的矩阵

$A^2=A$

$A^2=I$

周期矩阵、实对称矩阵.

若A是准上三角矩阵，即 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{bmatrix}$，其中 $A_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & & * \\ & \lambda_i & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$.

A可对角化 $\Leftrightarrow A_i=\lambda_i I_{n_i}\ (1\le i\le s)$.

证明：若A可对角化，则A的特征值 λ_i 的几何重数 = 代数重数 = n_i.

由此可证，每个 $A_i=\lambda_i I_{n_i}$：若 $A_1-\lambda_1 I_{n_1}\ne 0$，则存在至少一个非零元 $a\ne 0$.

$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix} A_1-\lambda_1 I_{n_1} & & & * \\ & A_2-\lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s-\lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix}$ 可逆.

找一个 $(n-n_1+1)$ 阶方阵：$\begin{bmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & A_2-\lambda_2 I_{n_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & A_s-\lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 行列式不为0.

故 $A-\lambda_1 I_n$ 的秩 $\ge n+1-n_1$

λ_1 的特征子空间 $\ker(A-\lambda_1 I_n)$ 的维数 $\le n_1-1<n_1=\lambda_1$ 的代数重数

$\Rightarrow$ 不能对角化，矛盾.

$A\alpha=\lambda\alpha$

$(A^2-I)\alpha=(\lambda^2-1)\alpha=0$

对合变化：$A^2=I$.

$\therefore \lambda=\pm1$.

$V=\ker(A-I)\oplus\ker(A+I)$

$\ker(A-I)=V_1$: $A\alpha=\alpha$

$\ker(A+I)=V_2$: $A\alpha=-\alpha$.

若A在K上可对角化，则A满足：$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_s I)=0$，

$K^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$，$V_i=\ker(A-\lambda_i I)$.

任取$\alpha\in K^n$，可分解为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ ($\alpha_i\in V_i$)

$$\begin{aligned}\therefore (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_s I)\alpha &= (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_s I)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)\\ &=(\lambda_1-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_2-\lambda_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_s-\lambda_s)\alpha_s\\ &=0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_s I)=0.$

实对称矩阵的对角化

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 的SVD分解 $A=P\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\end{bmatrix}Q^T$，P、Q是正交矩阵，$\sigma_1\geq\sigma_2$是A的奇异值，写出A的最佳秩1逼近，求$A^+$.

解：$A^TA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&5\end{bmatrix}$

对角阵D

求正交矩阵Q，使得 $A^TA=Q^TDQ$.

$|\lambda I-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-2\\-1&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=0$ $\qquad\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{5}\\0&1&-\frac{2}{5}\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda)=0\Rightarrow\lambda=0$或1或6.

$\lambda=0$时，解 $A^TAx=0$

$\therefore\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=1$时，解$(I-A^TA)x=0$

$\therefore\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-2\\-1&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=6$时，解$(6I-A^TA)x=0$.

$\therefore\begin{bmatrix}5&0&-1\\0&5&-2\\-1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{5}\\0&1&-\frac{2}{5}\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$

要按特征值从大到小排 ⇒

单位化, $\eta_1=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$, $\eta_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

记 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 为正交矩阵

$$\therefore A^TA=[\eta_1\ \eta_2\ \eta_3]\begin{bmatrix}6&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1^T\\\eta_2^T\\\eta_3^T\end{bmatrix}.$$

求A的奇异值分解, 即求 $A=P\begin{bmatrix}\sqrt6&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}Q^T$

$$=[\beta_1\ \beta_2]\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt6&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}}_{S}\begin{bmatrix}\eta_1^T\\\eta_2^T\\\eta_3^T\end{bmatrix}$$

由 $AQ=PS$ 知, $A\eta_1=\sqrt6\beta_1$, $A\eta_2=\beta_2$

$$\therefore \beta_1=\frac{1}{\sqrt6}A\eta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

$$\beta_2=A\eta_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\therefore P=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt6&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{5}{\sqrt{30}}&0&\frac{-1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

求A的最佳秩1逼近:

$$A=\boxed{\sigma_1\beta_1\eta_1^T}+\sigma_2\beta_2\eta_2^T.$$

A的最佳秩1逼近 $\sigma_1\beta_1\eta_1^T=\sqrt6\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1&2&5\end{bmatrix}$

$$=\frac15\begin{bmatrix}1&2&5\\2&4&10\end{bmatrix}.$$

求 A^+: $A=PSQ^T$, 则 $A^+=QS^TP^T$

全体作转置!

$AA^+=PSS^TP^T$ ⇒ 实对称

$A^+A=QS^TSQ^T$ ⇒ 实对称

$$A^+=Q\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1}&&&\\&\ddots&&\\&&\frac{1}{\sigma_r}&\\&&&0\end{bmatrix}P^T.$$

证明：对 $A\in M_{m\times n}(K)$，有 $\max\limits_{\substack{\|\beta\|=1\\ \|y\|=1}}\{\beta^T A y\}=\sigma_1$（A最大奇异值）

证：设 $A=PSQ^T=[\beta_1\cdots\beta_m]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots\\ \gamma_n^T\end{bmatrix}$

$\beta\in\mathbb{R}^m$ 可写成 $\beta=x_1\beta_1+\cdots+x_m\beta_m=[x_1\cdots x_m]P^T$

$\|\beta\|\overset{=1}{}\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2=1$.

$y\in\mathbb{R}^n$ 可写成 $y=y_1\gamma_1+\cdots+y_n\gamma_n.=Q\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$

$\|y\|=1\Leftrightarrow y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$.

则 $\beta^TAy=[x_1\cdots x_m]P^TAQ\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$

$$=[x_1\cdots x_m]P^TPSQ^TQ\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

$$=[x_1\cdots x_m]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

$$=\sigma_1x_1y_1+\cdots+\sigma_rx_ry_r$$

$$\le\sigma_1\cdot\frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\sigma_1\cdot\frac{x_2^2+y_2^2}{2}+\cdots+\sigma_r\cdot\frac{x_r^2+y_r^2}{2}$$

$$=\sigma_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^r x_i^2+\sum_{i=1}^r y_i^2}{2}=\sigma_1$$

得证.

$$A=\underbrace{\overset{AA^T\text{特征向量}}{(\beta_1\cdots\beta_r\cdots\beta_m)}}_{P}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots\\ \gamma_r^T\\ \vdots\\ \gamma_n^T\end{bmatrix}}_{Q^T}\ A^TA\text{特征向量}.$$

前r个有如下关系：$AQ=PS$　　　$A^TP=QS^T$

$\therefore A\eta_i=\sigma_i\beta_i\ (1\le i\le r)$　　　$\therefore A^T\beta_i=\sigma_i\eta_i\ (1\le i\le r)$

$\Rightarrow \beta_i=\dfrac{A\eta_i}{\sigma_i}$　　　$\therefore \eta_i=\dfrac{A^T\beta_i}{\sigma_i}$.

绑定！

秩1扰动只会改变一个特征值.

4. (Google's PageRank 矩阵)

设 n 级实矩阵 A 有 n 个实特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，又设 α 是属于 λ_1 的单位特征向量. 证明: 对任意 $\beta\in R^n$, 矩阵 $A+\alpha\beta^T$ 的 n 个特征值为

$$\lambda_1+\beta^T\alpha,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n;$$

且 $(A+\alpha\beta^T)\alpha=(\lambda_1+\beta^T\alpha)\alpha$.

证明: $(A+\alpha\beta^T)\alpha=\lambda_1\alpha+\alpha(\beta^T\alpha)=(\lambda_1+\beta^T\alpha)\alpha$.

存在正交矩阵P使得 $A=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$.

设 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$.

$$\alpha_1\beta^T=\alpha_1[k_1\cdots k_n]\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+\alpha_1\beta^T=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1+k_1 & *' & \cdots & *'\\ & \lambda_2 & & *\\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$$

又$\because$ $\beta^T\alpha_1=k_1(\alpha_1,\alpha_1)=k_1$

$\therefore$ $A+\alpha_1\beta^T$的特征值为 $\lambda_1+\beta^T\alpha_1,\ \lambda_2\cdots\lambda_n$.

日期: /

对于 $1 \le k \le m$

若 $V \in R^m$，记 $Q(A,V) = \sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i, V)^2$

即在 R^m 的所有 k 维子空间中，点 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 到 $V_k = \langle \beta_1 \cdots \beta_k \rangle$ 的距离平方和

最小 $\Rightarrow \min\limits_{\dim V = k} Q(A,V) = Q(A, V_k)$

10:47

进一步比较维数知，$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 分别构成 A 列空间与行空间的标准正交基，而且由 PCA 定理知它们是最能拟合 A 的列向量，行向量(看成空间里的点) 分布的正交基：β_1 是 A 列向量分布的主方向，β_1,β_2 生成 A 列分布的主平面…；$\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ 也有类似的行向量分布的拟合性.

最后 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_m$ 与 $\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$ 分别构成 $\mathrm{Ker}A^T$ 与 KerA 的标准正交基 (这些基可独立取，不唯一).

A 的奇异值 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 AA^T（或 A^TA）正特征值的平方根. 一般来说，排在后面的奇异值会越来越接近 0 . 省略这些小值，只保留前 k 个奇异值，就得到矩阵 A 在秩 $\leq k$ 限制下的最佳逼近

$$A_k = \sigma_1\, \beta_1\, \gamma_1{}^T + \cdots + \sigma_k\, \beta_k\, \gamma_k{}^T \rightsquigarrow A$$

用 $\|*\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数，我们有

定理：对任意秩 $\leq k$ 的矩阵 $B \in M_{m,n}(R)$，有

$$\| A - B \|_F{}^2 \geq \| A - A_k\|_F{}^2 = \sigma_{k+1}{}^2 + \cdots + \sigma_r{}^2 .$$

注意 $\sigma_i\gamma_i = A^T\beta_i$，$i = 1,\cdots,r$. 故有

$A_k = \sigma_1\, \beta_1\, \gamma_1{}^T + \cdots + \sigma_k\, \beta_k\, \gamma_k{}^T$

$\quad = \beta_1\, \beta_1{}^T A + \cdots + \beta_k\, \beta_k{}^T A = B_k B_k{}^T A$.

这里记 $B_k = [\, \beta_1 \cdots \beta_k \,]$. 故 $A_k = B_k B_k{}^T A$ 是 A 的各个列向量在 B_k 列空间 $V_k = \langle \beta_1,\cdots,\beta_k \rangle$ 上的正交投影排成的矩阵，而 $A - A_k$ 则是 A 的各列向 V_k 作的垂线排成的矩阵.

主成分分析(PCA)：

122/168 主成分分析(PCA)

设 $A=[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n]$ 是 $m\times n$ 实矩阵,

A 列分布的主方向, 主...

$$AA^T = \underbrace{[\beta_1 \cdots \beta_r \cdots \beta_m]}_{\text{正交矩阵 } P} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{对角矩阵 } D} P^T$$

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_m = 0$$

若 V 是 R^m 的子空间, 记

$$Q(A,V) = \sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i, V)^2 .$$

这里 $d(\alpha,V)$ 表示 α 到 V 的最短欧氏距离.

对于 $1\le k\le m$, 记 $V_k = \langle \beta_1, \cdots, \beta_k \rangle$.

$$\min_{\dim V=k} Q(A,V) = ?$$

定理:

$$\min_{\dim V=k} Q(A,V) = Q(A,V_k) = \lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_m$$

即在 R^m 所有 k 维子空间中, 点 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 到 $V_k = \langle \beta_1 \cdots \beta_k \rangle$ 的距离平方和最小.

证: 设 $w_1 \cdots w_k$ 是 V 的标准正交基

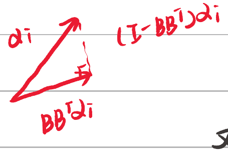
$B=[w_1\ w_2 \cdots w_k]$, 则 $B^TB = I_k$

$BB^T\alpha_i$ 是 α_i 在子空间 V 上的投影:

$$(\alpha_i, w_1)w_1 + \cdots + (\alpha_i, w_k)w_k = [w_1 \cdots w_k]\begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_k^T \end{bmatrix}\alpha_i = BB^T\alpha_i .$$

全空间-投影

$$\therefore \alpha_i = BB^T\alpha_i + (I-BB^T)\alpha_i \in V + V^{\perp} .$$



$$\therefore \|\alpha_i\|^2 = \|BB^T\alpha_i\|^2 + \|(I-BB^T)\alpha_i\|^2$$

$$\therefore \sum_{1\le i\le n}\|\alpha_i\|^2 = \sum_{1\le i\le n}\|BB^T\alpha_i\|^2 + \underbrace{\sum_{1\le i\le n}\|(I-BB^T)\alpha_i\|^2}_{Q(A,V).}$$

$$又\because \sum_{1\le i\le n}\|\alpha_i\|^2 = tr(A^TA) = \lambda_1+\cdots+\lambda_m$$

欲使 $Q(A,V)$ 最小, 只需正交投影平方和最大

$$\sum_{1\le i\le n}\|BB^T\alpha_i\|^2 = tr((BB^TA)^T(BB^TA))$$

$$= tr(A^TBB^TBB^TA)$$

$$= tr(A^TB\,B^TA)$$

$$= tr(B^TA\,A^TB)$$

$$= tr(B^TPDP^TB) \rightarrow C = P^TB .$$

$$= tr(C^TDC) = tr(CC^TD)$$

$\because C=P^TB \Rightarrow C^TC=B^TPP^TB=B^TB=I_k \Rightarrow C$ 也是正交矩阵

将C的列向量扩充为R^m的标准正交基

$\therefore$ C第i行元素的平方和满足：$c_1+\cdots+c_m=tr(CC^T)=tr(C^TC)=k$.

$\therefore tr(CC^TD)=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\cdots+c_m\lambda_m$

$\leq \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$

$c_1\cdots c_m$中有k个为1，其余为0
为将$tr(CC^TD)$最大化，将$\lambda_1\cdots\lambda_k$分配给前k个.

取"="$\Leftrightarrow C=\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$，$B=PC=[\beta_1\cdots\beta_k]$.

$\therefore V=\langle\beta_1\cdots\beta_k\rangle=V_k$时取到.

当$\lambda_k>\lambda_{k+1}$时，取"="仅在$V_k=\langle\beta_1\cdots\beta_k\rangle$，k维主子空间唯一.

$\|A\|_2 \triangleq \max\limits_{\|\alpha\|=1}\|A\alpha\|=\sigma_1$.

$\|A\|_F=\sqrt{tr(A^TA)}=\sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}$

$\therefore \|A\|_2\leq\|A\|_F\leq\sqrt{n}\|A\|_2$.

定理：设$A=PSQ^T=[\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1^T\\ \gamma_2^T \\ \vdots \\ \gamma_n^T\end{bmatrix}$,

记$B_k=[\beta_1\cdots\beta_k]$，$1\leq k\leq r$

$A_k=\sigma_1\beta_1\gamma_1^T+\cdots+\sigma_k\beta_k\gamma_k^T=B_kB_k^TA$,

则A_k是A在秩k下的最佳逼近

对$\forall$ rank(M)=k 的M，有：$\|A-M\|_F^2\geq\|A-A_k\|_F^2=\sigma_{k+1}^2+\cdots+\sigma_r^2$

设$A=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$，$M=[\xi_1\cdots\xi_n]\in M_{m\times n}(R)$

$\therefore \|\alpha_i-\xi_i\|^2\geq d(\alpha_i,V)^2$，$V=\langle\xi_1,\cdots\xi_n\rangle$.

$\therefore \|A-M\|_F^2\geq\sum_{i=1}^n d(\alpha_i,V)^2=Q(A,V)\geq Q(A,V_k)=\sigma_{k+1}^2+\cdots+\sigma_r^2$.

对称矩阵标准化的三种方法:

① 实对称矩阵作正交替换对角化

② 配方法

③ 成对的初等行、列变化.

ps: 反对称矩阵合同于 $\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

针对三阶情形,假设A,B已经特征多项式一样了,设特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(1) λ_1、λ_2、λ_3 互不相等,一定相似

(2) $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$,若 $rank(A-\lambda_1 I)=rank(B-\lambda_1 I)$,则相似,否则不相似

(3) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$,若 $rank(A-\lambda I)=rank(B-\lambda I)$,则相似,否则不相似.

实二次型的规范型、正定性

设 $f(x_1\cdots x_n)=X^TAX$ 是n元实二次型.

☆ ① 正交替换,设 $A=PDP^T$,$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ $(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n)$.

作正交替换令 $X=PY \Rightarrow f(x_1\cdots x_n)=Y^TP^TPDP^TPY=Y^TDY=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

② 配方法,成对行/列变化

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} \qquad C^TAC=D.$$

结果不唯一!

设 $f(x_1\cdots x_n)=x^TAx=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$.

令 $\begin{cases} y_i=\frac{1}{\sqrt{d_i}}z_i\ (1\le i\le r) \\ y_i=z_i\ (i>r). \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_1\cdots x_n)=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$. 实二次型的规范型.

实二次型的惯性指数是唯一的.

证明：若 $f(x_1\cdots x_n)=x^TAx$ 有2种规范型

$\begin{cases} y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \\ z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2 \end{cases}$ $p>q$

令 $y_{p+1}=\cdots=y_r=0$

令 $\begin{cases} z_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1p}y_p=0 \\ \vdots \\ z_q=c_{q1}y_1+\cdots+c_{qp}y_p=0 \end{cases}$

即系数矩阵 $C_{q\times p}$ 有无非零解？

$\because q<p \Rightarrow$ 有

$\therefore$ 可找到不全为0的一组 $y_1\cdots y_p$.

使得 $y_1^2+\cdots+y_p^2=-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$，明显不成立.

$q>p$ 同理.

综上，$p=q$!

推论：2个n元实二次型等价 $\Leftrightarrow$ 规范型相同．惯性指数相同.

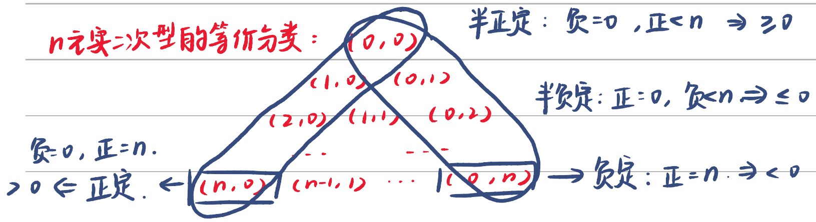
例. 全体2阶实二次型可被分为几个等价类？

$r=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$r=1\begin{cases} p=1 & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \\ q=1 & \begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix} \end{cases}$

$r=2\begin{cases} p=0 & \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \\ p=1 & \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \\ p=2 & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \end{cases}$.

n元实二次型的等价分类:



复二次型的规范型.

$f(x_1\cdots x_n)=x^TAx \xrightarrow{X=CY} c_1y_1^2+\cdots+c_ry_r^2.$

令 $\begin{cases} y_i=\frac{1}{\sqrt{c_i}}z_i & (1\le i\le r) \\ y_i=z_i & (i>r) \end{cases}$

$\Rightarrow z_1^2+\cdots+z_r^2$

复规范型由A的秩唯一确定.

正定二次型与正定矩阵.

设 $f(x_1\cdots x_n)=x^TAx$ 是实二次型, 若对任意 $0\ne X\in R^n$, 有 $x^TAx>0$, 称A正定,

若 $x^TAx\ge 0$, 称A半正定.

类似地, 有负定/半负定/不定

等价的实二次型有相同的正定性

$X=CY \Rightarrow f,g$ 在 $R^n/\{0\}$ 上的取值范围相同, 故 f、g 正定性相同.

$f(x_1\cdots x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$

正定: $p=n$　　负定: $q=n$　　不定: $p>0$ 且 $q>0$.

半正定: $q=0$　　半负定: $p=0$.

设实对称矩阵的顺序主子式大于0.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{44} \end{bmatrix}$$

用上面行倍数加到下面行/左边列~ ⇒ 顺序主子式不变

⟷ A是正定矩阵.

A负定 ⟷ -A正定 ⟷ A的奇数阶顺序主子式<0，偶数阶>0.

定理：实对称矩阵A正定 ⟺ $A=U^TU$，U为对角元>0的上三角矩阵.

A正定 ⟺ $A \overset{合同}{\simeq} I$ ⟺ $A=C^TI_nC=C^TC$ (C可逆).

若C为正定 → $A=C^2$，C唯一.

C为上三角，对角元大于0 → $A=C^TC$.

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} D^2 \\ C \end{bmatrix}$$ 对角

$\therefore C^TAC=D^2$

$A=(C^T)^{-1}D^2C^{-1}=(C^T)^{-1}D\cdot DC^{-1}=(DC^{-1})^T(DC^{-1})=U^TU$.

对角　上三角.

例. 设 $A=(a_{ij})$ 正定，证明：$|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 等号成立 ⟺ A是对角矩阵.

$$A=U^TU=\begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}=b_{11}^2 \\ a_{22}=b_{21}^2+b_{22}^2 \\ \vdots \\ a_{nn}=b_{n1}^2+b_{n2}^2+\cdots+b_{nn}^2 \end{cases}$$

$|A|=|U^T||U|=b_{11}^2b_{22}^2\cdots b_{nn}^2$

$\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

推论：$C\in M_n(\mathbb{R})$，$C=[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]$，有 $\|\alpha_1\|\|\alpha_2\|\cdots\|\alpha_n\|\geq|C|$，等号成立当且仅当 C 是正交矩阵.

$$C^TC=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]=\begin{bmatrix}\|\alpha_1\| & & *\\ & \|\alpha_2\| & \\ * & & \ddots \\ & & & \|\alpha_n\|\end{bmatrix}.$$

半正定

$\therefore \|\alpha_1\|\|\alpha_2\|\cdots\|\alpha_n\|\geq|C^TC|=|C|^2.$

$H=\begin{bmatrix}A & C^T\\ C & B\end{bmatrix}$ 半正定，证：$|H|\leq|A||B|$.

$\therefore A、B$ 半正定

$\therefore H=\begin{bmatrix}P_1D_1P_1^T & C^T\\ C & P_2D_2P_2^T\end{bmatrix}$，$P_1、P_2$ 正交，$D_1、D_2$ 对角元 ≥ 0.

$$=\begin{bmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}D_1 & P_1^TC^TP_2\\ P_2^TCP_1 & D_2\end{bmatrix}}_{\text{半正定}}\begin{bmatrix}P_1^T & \\ & P_2^T\end{bmatrix}$$

$$\therefore |H|=\begin{vmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}D_1 & P_1^TC^TP_2\\ P_2^TCP_1 & D_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}P_1^T & \\ & P_2^T\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix}D_1 & P_1^TC^TP_2\\ P_2^TCP_1 & D_2\end{vmatrix}}_{\text{半正定}}\leq|D_1||D_2|=|A||B|.$$

A 是实对称矩阵，A 半正定当且仅当 A 的所有主子式都 ≥ 0.

定理：实对称矩阵 A 半正定 $\Leftrightarrow A=LDL^T$，L 是对角元为 1 的下三角矩阵，D 是对角元 ≥ 0 的对角矩阵.

$$\begin{bmatrix}A\\ I\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}D\\ C\end{bmatrix}\qquad C^TAC=D\Rightarrow A=(C^T)^{-1}DC^{-1}$$

令 $L=(C^T)^{-1}$，$A=LDL^T$.

半正定矩阵的性质

若A的对角元 $a_{ii}=0$，则第i行与第i列全部元素为0.

$$\begin{bmatrix} c & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \left|\begin{bmatrix} c & b \\ b & 0 \end{bmatrix}\right| = -b^2 \geq 0 \Rightarrow b=0.$$

设分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ 半正定，证：$AX=B$ 有解.

设 $A=E_1D_1E_1^T$，$C=E_2D_2E_2^T$.

$$\therefore \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ E & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1^T & E^T \\ 0 & E_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1D_1E_1^T & E_1D_1E^T \\ ED_1E_1^T & ED_1E^T+E_2D_2E_2^T \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = E_1D_1E^T = E_1D_1E_1^T(E_1^T)^{-1}E^T$$
$$= A(E_1^T)^{-1}E^T$$

$$\therefore X=(E_1^T)^{-1}E^T.$$

对角块可以表示半正定的其他行和列.

例. 设 A , B 是实对称矩阵, 且 A 正定. 证明:

1) 存在实可逆矩阵 C , 使得

$$C^TAC = I,\ C^TBC = D\ ,$$

其中 D 是实对角矩阵. 故 $A^{-1}B = CDC^{-1}$ 可对角化，且 $A^{-1}B$ 的特征值都是实数.

2) 若 B 半正定, 则 A + B 正定, 且有

$$|A+B| \geq |A| + |B|\ .$$

(1)

$\exists$ 可逆 U, $U^TAU=I$, 记 $U^TBU=E$ 实对称

$\exists$ 正交 P, $P^TEP=D=\text{diag}\{\mu_1\cdots\mu_n\}$.

$\therefore P^TU^TB\overset{C}{(UP)}=C^TBC=D$.

$C^TAC=P^TIP=I$.

且 $C^TAC\cdot D=C^TBC$

$ACD=BC$

$\therefore CD=A^{-1}BC$

$\therefore A^{-1}B=CDC^{-1}$.

(2) $x^T(A+B)x>0 \Rightarrow A+B$ 正定

$|I+D|=(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)\geq 1+\mu_1\cdots\mu_n$

$=|I|+|D|$

$\therefore |C^T(A+B)C|\geq|C^TAC|+|C^TBC|$

$\therefore |C^T||A+B||C|\geq|C^T||C|(|A|+|B|)$

$\therefore |A+B|\geq|A|+|B|$.