PROJET UE MOGPL — MU4IN200
DICE BATTLE

ARIANA CARNIELLI

1. Introduction

2. Question 1

$Q(d,k)$ est la probabilité d'obtenir k points en jetant d dés sachant qu'aucun dé a tombé sur 1. On numérote les dés de 1 à d et on note j le résultat du dernier dé, qui est donc un nombre entre 2 à 6. Alors on aura k points si et seulement si les $d-1$ premiers dés donnent $k-j$ points. Les valeurs possibles de j étant disjointes, on peut dire que $Q(d,k)$ est la somme pour toutes les valeurs de j de $Q(d-1,k-j)$ multiplié par la probabilité que le dernier dé donne j sachant qu'il n'est pas 1 (égale à $\frac{1}{5}$), ce qui donne donc :

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}.$$

Plus précisément, soient $X_1,\dots,X_d$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$, représentant les résultats de chaque dé. Soient $S_d = \sum_{i=1}^{d} X_i$ et $S_{d-1} = \sum_{i=1}^{d-1} X_i$. On peut réécrire $Q(d,k)$ comme

$$Q(d,k) = \mathbb{P}(S_d = k \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1).$$

Or $S_d = S_{d-1} + X_d$. Conditionnellement à $X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1$, X_d ne peut prendre que les valeurs j allant de 2 à 6, et, comme les évènements $X_d = 2,\dots,X_d = 6$ forment une partition, on a

$$\begin{aligned} Q(d,k) &= \mathbb{P}(S_{d-1} + X_d = k \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) \\ &= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j, X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) \\ &= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1)\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1), \end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que S_{d-1} et X_d sont indépendants. Comme S_{d-1} ne dépend pas de X_d, on obtient, par la définition de Q, que

$$\mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_{d-1} \neq 1) = Q(d-1,k-j),$$

et en plus $\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(X_d = j \mid X_d \neq 1) = \frac{1}{5}$. Donc

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}. \tag{1}$$

Les cas d'initialisation correspondent à $d = 1$ et $k \in \{2,\dots,6\}$, auquel cas on a $Q(1,k) = \frac{1}{5}$. En plus, $Q(1,k) = 0$ pour $k > 6$.

3. Question 3

On considère ici que $D = 10$ et $N = 2$, auquel cas $d^*(D) = 6$. On suppose que le joueur 1 choisit de jouer toujours 6 dés alors que le joueur 2 choisit de jouer toujours un seul dé. Soient X_i et Y_i les gains des joueurs 1 et 2, respectivement, au i-ème lancer de dés. Alors $X_i \in \{1,12,13,\dots,36\}$ et $Y_i \in \{1,2,\dots,6\}$. En particulier, on remarque que, si $X_1 > 1$, alors le joueur 1 est sûr de gagner.

Comme $N = 2$, le jeu se finira au maximum au bout de 2 tours. Soit G la variable aléatoire donnant le gain final du joueur 1 : $G = 1$ si le joueur 1 gagne, $G = 0$ si on a un match nul et $G = -1$ si le joueur 2 gagne. Les évènements $G = 1$, $G = 0$ et $G = -1$ peuvent être décrits en fonction de X_i et Y_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
G = 1 : &\quad X_1 > 1 \cup \Big(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 > 1\Big) \\
G = 0 : &\quad X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap Y_2 = 1 \\
G = -1 : &\quad \Big(X_1 = 1 \cap Y_1 > 1\Big) \cup \Big(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap Y_2 > 1\Big)
\end{aligned}$$

Cela permet de calculer les probabilités :

$$\mathbb{P}(G = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.3720$$

$$\mathbb{P}(G = 0) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0.0123$$

$$\mathbb{P}(G = -1) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)\frac{5}{6} + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^2 \frac{1}{6}\frac{5}{6} \approx 0.6157$$

Comme $\mathbb{P}(G = 1) < \mathbb{P}(G = -1)$, on aura $\mathbb{E}(G) < 0$, le joueur 1 a une espérance de gain négative. Néanmoins, si le joueur 1 choisit de jouer comme le joueur 2 et ne lancer qu'un dé, alors, par la symétrie entre les joueurs dans ce cas, on aura $\mathbb{P}(G = 1) = \mathbb{P}(G = -1)$ et donc $\mathbb{E}(G) = 0$. Il est donc préférable dans ce cas pour le joueur 1 de jouer 1 dé que de jouer $d^*(10) = 6$ dés.