PROJET UE MOGPL — MU4IN200
DICE BATTLE

ARIANA CARNIELLI

1. Introduction

2. Question 1

$Q(d,k)$ est la probabilité d'obtenir k points en jetant d dés sachant qu'aucun dé a tombé sur 1. On numérote les dés de 1 à d et on note j le résultat du dernier dé, qui est donc un nombre entre 2 à 6. Alors on aura k points si et seulement si les $d-1$ premiers dés donnent $k-j$ points. Les valeurs possibles de j étant disjointes, on peut dire que $Q(d,k)$ est la somme pour toutes les valeurs de j de $Q(d-1,k-j)$ multiplié par la probabilité que le dernier dé donne j sachant qu'il n'est pas 1 (égale à $\frac{1}{5}$), ce qui donne donc :

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}.$$

Plus précisément, soient $X_1,\dots,X_d$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$, représentant les résultats de chaque dé. Soient $S_d = \sum_{i=1}^{d} X_i$ et $S_{d-1} = \sum_{i=1}^{d-1} X_i$. On peut réécrire $Q(d,k)$ comme

$$Q(d,k) = \mathbb{P}(S_d = k \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1).$$

Or $S_d = S_{d-1} + X_d$. Conditionnellement à $X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1$, X_d ne peut prendre que les valeurs j allant de 2 à 6, et, comme les évènements $X_d = 2,\dots,X_d = 6$ forment une partition, on a

$$\begin{aligned}
Q(d,k) &= \mathbb{P}(S_{d-1} + X_d = k \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) \\
&= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j, X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) \\
&= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1)\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1),
\end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que S_{d-1} et X_d sont indépendants. Comme S_{d-1} ne dépend pas de X_d, on obtient, par la définition de Q, que

$$\mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_{d-1} \neq 1) = Q(d-1,k-j),$$

et en plus $\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\dots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(X_d = j \mid X_d \neq 1) = \frac{1}{5}$. Donc

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}. \tag{1}$$

Les cas d'initialisation correspondent à $d = 1$ et $k \in \{2,\dots,6\}$, auquel cas on a $Q(1,k) = \frac{1}{5}$. En plus, $Q(1,k) = 0$ pour $k > 6$.

3. Question 3

On considère ici que $D = 10$ et $N = 2$, auquel cas $d^*(D) = 6$. On suppose que le joueur 1 choisit de jouer toujours 6 dés alors que le joueur 2 choisit de jouer toujours un seul dé. Soient X_i et Y_i les gains des joueurs 1 et 2, respectivement, au i-ème lancer de dés. Alors $X_i \in \{1,12,13,\dots,36\}$ et $Y_i \in \{1,2,\dots,6\}$. En particulier, on remarque que, si $X_1 > 1$, alors le joueur 1 est sûr de gagner.

Comme $N = 2$, le jeu se finira au maximum au bout de 2 tours. Soit G la variable aléatoire donnant le gain final du joueur 1 : $G = 1$ si le joueur 1 gagne, $G = 0$ si on a un match nul et $G = -1$ si le joueur 2 gagne. Les évènements $G = 1$, $G = 0$ et $G = -1$ peuvent être décrits en fonction de X_i et Y_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G = 1 : &\quad X_1 > 1 \cup \big(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 > 1\big) \\ G = 0 : &\quad X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap Y_2 = 1 \\ G = -1 : &\quad \big(X_1 = 1 \cap Y_1 > 1\big) \cup \big(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap Y_2 > 1\big) \end{aligned}$$

Cela permet de calculer les probabilités :

$$\mathbb{P}(G = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.3720$$

$$\mathbb{P}(G = 0) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0.0123$$

$$\mathbb{P}(G = -1) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)\frac{5}{6} + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^2\frac{1}{6}\frac{5}{6} \approx 0.6157$$

Comme $\mathbb{P}(G = 1) < \mathbb{P}(G = -1)$, on aura $\mathbb{E}(G) < 0$, le joueur 1 a une espérance de gain négative. Néanmoins, si le joueur 1 choisit de jouer comme le joueur 2 et ne lancer qu'un dé, alors, par la symétrie entre les joueurs dans ce cas, on aura $\mathbb{P}(G = 1) = \mathbb{P}(G = -1)$ et donc $\mathbb{E}(G) = 0$. Il est donc préférable dans ce cas pour le joueur 1 de jouer 1 dé que de jouer $d^*(10) = 6$ dés.

On remarque que la situation de cet exemple n'est pas exceptionnelle : le cas $N = 2$ est équivalant, par exemple, au cas $N = 100$ lorsque les deux joueurs sont à égalité avec 98 points.

4. Question 4

Pour faciliter l'analyse, on représente l'état courant du jeu par un triplet (i, j, n) où i et j sont les points cumulés des joueurs 1 et 2, respectivement, et $n \in \{1, 2\}$ indique qui est le prochain joueur à jouer. On note l'espérance de gain du joueur 1 dans l'état (i, j, n) par $EG(i, j, n)$, en supposant que lui-même et son adversaire jouent toujours de façon optimale. On remarque que $EG(i, j, n)$ représente toujours l'espérance de gain du joueur 1, même lorsque $n = 2$.

Dans l'état $(i, j, 1)$, si le joueur 1 décide de jouer d dés et qu'il obtient k points, le prochain état sera $(i + k, j, 2)$. Comme il obtient k points avec probabilité $P(d, k)$, l'espérance de gain du joueur 1 lorsqu'il choisit de jouer d dés (et en supposant que lui-même et le joueur 2 jouent de façon optimale dans la suite) est

$$\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(i + k, j, 2). \tag{2}$$

Ainsi, son choix optimal est de choisir le nombre d de dés qui maximise la quantité ci-dessus, ce qui donne

$$EG(i, j, 1) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(i + k, j, 2).$$

Comme le jeu est symétrique par rapport à la permutation des deux joueurs (en changeant le signe du gain du joueur 1), on a $EG(i + k, j, 2) = -EG(j, i + k, 1)$, et ainsi on obtient la formule

$$EG(i, j, 1) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \left(-\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(j, i + k, 1)\right).$$

Comme cela ne fait intervenir que les espérances de gain lorsque c'est au joueur 1 de jouer (donc $n = 1$), on peut supprimer la troisième composante de l'état de la notation, comme à l'énoncé, pour arriver à

$$EG(i, j) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \left(-\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(j, i + k)\right), \tag{3}$$

où $EG(i,j)$ doit se comprendre comme $EG(i,j,1)$.

On initialise la récurrence en remarquant que $EG(i,j) = 1$ si $i \geq N$ et $j < N$ et que $EG(i,j) = -1$ si $i < N$ et $j \geq N$. Comme le jeu est séquentiel, il n'est pas nécessaire d'initialiser $EG(i,j)$ pour $i \geq N$ et $j \geq N$: il est impossible que les deux joueurs aient une quantité supérieure ou égale à N points car le jeu s'arrête dès que le premier joueur atteint N points ou plus.

5. Question 5

Notons $OPT(i,j)$ la stratégie optimale du joueur 1 dans l'état $(i,j,1)$, c'est-à-dire le nombre de dés qu'il doit lancer pour maximiser l'espérance de son gain. Cela revient à maximiser (2) par rapport à d, ce qui donne

$$OPT(i,j) = \operatorname*{argmax}_{d \in \{1,\ldots,D\}} \left(-\sum_{k=1}^{6d} P(d,k) EG(j, i+k) \right).$$

Cela peut être calculé en même temps que le calcul récursif de EG par la formule (3).

6. Question 6

Dans ce cas, la somme dans (3) doit commencer à $k = 0$ à la place de $k = 1$. Le calcul de $EG(i,j)$ par (3) utilise en particulier, dans le second membre, la valeur de $EG(j,i)$. Or, le calcul de $EG(j,i)$ par (3) utilise dans son second membre la valeur de $EG(i,j)$. Ainsi, (3) ne permet pas de calculer $EG(i,j)$ de façon explicite, mais donne uniquement une relation implicite où $EG(i,j)$ dépend de lui-même. Il faudrait alors implémenter une méthode pour être capable de calculer $EG(i,j)$ à partir de cette relation implicite.