**PROJET UE MOGPL — MU4IN200**
**DICE BATTLE**

ARIANA CARNIELLI
IVAN KACHAIKIN

## 1. Introduction

## 2. Question 1

$Q(d,k)$ est la probabilité d'obtenir $k$ points en jetant $d$ dés sachant qu'aucun dé a tombé sur 1. On numérote les dés de 1 à $d$ et on note $j$ le résultat du dernier dé, qui est donc un nombre entre 2 à 6. Alors on aura $k$ points si et seulement si les $d-1$ premiers dés donnent $k-j$ points. Les valeurs possibles de $j$ étant disjointes, on peut dire que $Q(d,k)$ est la somme pour toutes les valeurs de $j$ de $Q(d-1,k-j)$ multiplié par la probabilité que le dernier dé donne $j$ sachant qu'il n'est pas 1 (égale à $\frac{1}{5}$), ce qui donne donc :

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}. \tag{1}$$

Plus précisément, soient $X_1,\ldots,X_d$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi uniforme sur $\{1,\ldots,6\}$, représentant les résultats de chaque dé. Soient $S_d = \sum_{i=1}^{d} X_i$ et $S_{d-1} = \sum_{i=1}^{d-1} X_i$. On peut réécrire $Q(d,k)$ comme

$$Q(d,k) = \mathbb{P}(S_d = k \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1).$$

Montrons d'abord que $P(d,k) = \left(\frac{5}{6}\right)^d Q(d,k)$ pour $2d \leq k \leq 6d$. On a

$$\begin{aligned}
P(d,k) &= \mathbb{P}(S_d = k, X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\\
&= \mathbb{P}(S_d = k \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\mathbb{P}(X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\\
&= Q(d,k)\mathbb{P}(X_1 \neq 1)\cdots\mathbb{P}(X_d \neq 1) = Q(d,k)\left(\frac{5}{6}\right)^d.
\end{aligned}$$

On montre maintenant la relation (1) pour $d \geq 2$ et $2d \leq k \leq 6d$. On a $S_d = S_{d-1} + X_d$. Conditionnellement à $X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1$, $X_d$ ne peut prendre que les valeurs $j$ allant de 2 à 6, et, comme les évènements $X_d = 2,\ldots,X_d = 6$ forment une partition, on a

$$\begin{aligned}
Q(d,k) &= \mathbb{P}(S_{d-1} + X_d = k \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\\
&= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j, X_d = j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\\
&= \sum_{j=2}^{6} \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1)\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1),
\end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que $S_{d-1}$ et $X_d$ sont indépendants. Comme $S_{d-1}$ ne dépend pas de $X_d$, on obtient, par la définition de $Q$, que

$$\mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(S_{d-1} = k-j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_{d-1} \neq 1) = Q(d-1,k-j),$$

et en plus $\mathbb{P}(X_d = j \mid X_1 \neq 1,\ldots,X_d \neq 1) = \mathbb{P}(X_d = j \mid X_d \neq 1) = \frac{1}{5}$. Donc

$$Q(d,k) = \sum_{j=2}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}.$$

Les cas d'initialisation correspondent à $d = 1$ et $k \in \{2, \ldots, 6\}$, auquel cas on a $Q(1,k) = \frac{1}{5}$. En plus, $Q(1,k) = 0$ pour $k > 6$.

## 3. Question 2

Remarquons que la formule

$$EP(d) = 4d\left(\frac{5}{6}\right)^d + 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^d \tag{2}$$

provient du fait qu'on a une probabilité de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^d$ de ne marquer qu'un seul point et une probabilité de $\left(\frac{5}{6}\right)^d$ de marquer entre $2d$ et $6d$ points, et l'espérance du nombre de points marqué dans ce dernier cas est égale à $4d$.

On veut maximiser $EP(d)$ pour $d \in \{1, \ldots, D\}$. Pour éviter de faire une recherche exhaustive, on peut faire une étude de la fonction $EP(d)$ en relaxant d'abord $d$ à une variable réelle. Dans ce cas, on calcule

$$EP'(d) = 4\left(\frac{5}{6}\right)^d + 4d\left(\frac{5}{6}\right)^d \ln\frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^d \ln\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^d \left(4 + 4d\ln\frac{5}{6} - \ln\frac{5}{6}\right).$$

On cherche les valeurs $d^*$ telles que $EP'(d^*) = 0$. Cela arrive si et seulement si

$$4 + 4d^*\ln\frac{5}{6} - \ln\frac{5}{6} = 0$$

et on calcule alors

$$d^* = \frac{\ln\frac{5}{6} - 4}{4\ln\frac{5}{6}} = \frac{\ln\frac{6}{5} + 4}{4\ln\frac{6}{5}} \approx 5{,}735.$$

On remarque aussi que $EP'(d) > 0$ pour $d < d^*$ et $EP'(d) < 0$ pour $d > d^*$, donc $EP$ est strictement croissante sur $]-\infty, d^*[$ et strictement décroissante pour $]d^*, +\infty[$, et atteint ainsi son maximum global à $d = d^*$.

On revient maintenant à une variable discrète $d \in \{1, \ldots, D\}$. Grâce à l'étude précédente, $EP(1) < EP(2) < \cdots < EP(5)$ et $EP(6) > EP(7) > \cdots$, ainsi les candidats à maximum global de $EP$ dans les entiers sont 5 et 6. On calcule $EP(5) \approx 8{,}636$ et $EP(6) \approx 8.703$, donc le maximum global est atteint en $d = 6$. Comme $d \in \{1, \ldots, D\}$, cela n'arrive que lorsque $D \geq 6$ ; dans le cas contraire, $EP$ est croissante sur $\{1, \ldots, D\}$ et le maximum est atteint en $D$. On a donc $d^*(D) = \min(D, 6)$. La méthode implémentée retourne donc cette valeur.

## 4. Question 3

On considère ici que $D = 3$ et $N = 2$, auquel cas $d^*(D) = 3$. On suppose que le joueur 1 choisit de jouer toujours 3 dés alors que le joueur 2 choisit de jouer toujours un seul dé. Soient $X_i$ et $Y_i$ les gains des joueurs 1 et 2, respectivement, au $i$-ème lancer de dés. Alors $X_i \in \{1, 6, 7, \ldots, 18\}$ et $Y_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. En particulier, on remarque que, si $X_1 > 1$, alors le joueur 1 est sûr de gagner.

Comme $N = 2$, le jeu se finira au maximum au bout de 2 tours. Soit $G$ la variable aléatoire donnant le gain final du joueur 1 : $G = 1$ si le joueur 1 gagne et $G = -1$ si le joueur 2 gagne (il est impossible d'avoir un match nul dans la variante séquentielle). Les évènements $G = 1$ et $G = -1$ peuvent être décrits en fonction de $X_i$ et $Y_i$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G = 1 &: \quad X_1 > 1 \cup \left(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1\right) \\ G = -1 &: \quad X_1 = 1 \cap Y_1 > 1 \end{aligned}$$

Cela permet de calculer les probabilités :

$$\mathbb{P}(G = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right)\frac{1}{6} \approx 0{,}6489$$

$$\mathbb{P}(G = -1) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right)\frac{5}{6} \approx 0{,}3511$$

On a donc $\mathbb{E}(G) \approx 0{,}2978$. Si, à la place de $d^*(D) = 3$, le joueur 1 avait choisit de jouer 1 dé comme le joueur 2, les probabilités de $G = 1$ et $G = -1$ auraient été

$$\mathbb{P}(G = 1) = \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}8611$$
$$\mathbb{P}(G = -1) = \frac{1}{6}\frac{5}{6} \approx 0{,}1389$$

Cela donne $\mathbb{E}(G) \approx 0{,}7222$. Ainsi, l'espérance de gain du joueur 1 est plus grande s'il ne choisit de joueur qu'un seul dé dans ce cas.

On remarque que la situation de cet exemple n'est pas exceptionnelle : le cas $N = 2$ est équivalant, par exemple, au cas $N = 100$ lorsque les deux joueurs sont à égalité avec 98 points.

## 5. Question 4

Pour faciliter l'analyse, on représente l'état courant du jeu par un triplet $(i, j, n)$ où $i$ et $j$ sont les points cumulés des joueurs 1 et 2, respectivement, et $n \in \{1, 2\}$ indique qui est le prochain joueur à jouer. On note l'espérance de gain du joueur 1 dans l'état $(i, j, n)$ par $EG(i, j, n)$, en supposant que lui-même et son adversaire jouent toujours de façon optimale. On remarque que $EG(i, j, n)$ représente toujours l'espérance de gain du joueur 1, même lorsque $n = 2$.

Dans l'état $(i, j, 1)$, si le joueur 1 décide de jouer $d$ dés et qu'il obtient $k$ points, le prochain état sera $(i + k, j, 2)$. Comme il obtient $k$ points avec probabilité $P(d, k)$, l'espérance de gain du joueur 1 lorsqu'il choisit de jouer $d$ dés (et en supposant que lui-même et le joueur 2 jouent de façon optimale dans la suite) est

$$\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(i + k, j, 2). \tag{3}$$

Ainsi, son choix optimal est de choisir le nombre $d$ de dés qui maximise la quantité ci-dessus, ce qui donne

$$EG(i, j, 1) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(i + k, j, 2).$$

Comme le jeu est symétrique par rapport à la permutation des deux joueurs (en changeant le signe du gain du joueur 1), on a $EG(i + k, j, 2) = -EG(j, i + k, 1)$, et ainsi on obtient la formule

$$EG(i, j, 1) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \left( -\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(j, i + k, 1) \right).$$

Comme cela ne fait intervenir que les espérances de gain lorsque c'est au joueur 1 de jouer (donc $n = 1$), on peut supprimer la troisième composante de l'état de la notation, comme à l'énoncé, pour arriver à

$$EG(i, j) = \max_{d \in \{1,\dots,D\}} \left( -\sum_{k=1}^{6d} P(d, k) EG(j, i + k) \right), \tag{4}$$

où $EG(i, j)$ doit se comprendre comme $EG(i, j, 1)$.

On initialise la récurrence en remarquant que $EG(i, j) = 1$ si $i \geq N$ et $j < N$ et que $EG(i, j) = -1$ si $i < N$ et $j \geq N$. Comme le jeu est séquentiel, il n'est pas nécessaire d'initialiser $EG(i, j)$ pour $i \geq N$ et $j \geq N$ : il est impossible que les deux joueurs aient une quantité supérieure ou égale à $N$ points car le jeu s'arrête dès que le premier joueur atteint $N$ points ou plus.

## 6. Question 5

Notons $OPT(i, j)$ la stratégie optimale du joueur 1 dans l'état $(i, j, 1)$, c'est-à-dire le nombre de dés qu'il doit lancer pour maximiser l'espérance de son gain. Cela revient à maximiser (3) par rapport à $d$, ce qui donne

$$OPT(i,j) = \operatorname*{argmax}_{d \in \{1,\dots,D\}} \left( -\sum_{k=1}^{6d} P(d,k) EG(j, i+k) \right).$$

Cela peut être calculé en même temps que le calcul récursif de $EG$ par la formule (4).

## 7. Question 6

Dans ce cas, la somme dans (4) doit commencer à $k = 0$ à la place de $k = 1$. Le calcul de $EG(i,j)$ par (4) utilise en particulier, dans le second membre, la valeur de $EG(j,i)$. Or, le calcul de $EG(j,i)$ par (4) utilise dans son second membre la valeur de $EG(i,j)$. Ainsi, (4) ne permet pas de calculer $EG(i,j)$ de façon explicite, mais donne uniquement une relation implicite où $EG(i,j)$ dépend de lui-même. Il faudrait alors implémenter une méthode pour être capable de calculer $EG(i,j)$ à partir de cette relation implicite.

## 8. Question 10

Soit $G$ la variable aléatoire donnant le gain du joueur 1 lorsqu'il a jeté $d_1$ dés et le joueur 2 a jeté $d_2$ dés. Alors, par la définition de l'espérance,

$$EG_1(d_1,d_2) = 1 \cdot \mathbb{P}(G = 1 \mid d_1,d_2) + 0 \cdot \mathbb{P}(G = 0 \mid d_1,d_2) + (-1) \cdot \mathbb{P}(G = -1 \mid d_1,d_2).$$

Soient $K_1$ et $K_2$ les variables aléatoires représentant le nombre de points obtenus par les joueurs 1 et 2, respectivement. Les évènements $G = 1$, $G = 0$ et $G = -1$ peuvent s'écrire en termes de $K_1$ et $K_2$ comme $K_1 > K_2$, $K_1 = K_2$ et $K_1 < K_2$, respectivement. On a

$$\{K_1 > K_2 \mid d_1,d_2\} = \bigcup_{j=1}^{6d_2} \bigcup_{i=j+1}^{6d_1} \{K_1 = i, K_2 = j \mid d_1,d_2\}.$$

On remarque que certains des ensembles du membre de droite peuvent être vides, par exemple pour $1 < i < 2d_1$ ou $1 < j < 2d_2$. En plus, l'union sur $i$ peut être vide, par exemple dans le cas $j \geq 6d_1$, auquel cas il n'y a aucun $i$ possible entre $j+1$ et $6d_1$. On a donc des ensembles vides qui ne changent pas l'union finale. De la même manière, on peut facilement obtenir que

$$\{K_1 < K_2 \mid d_1,d_2\} = \bigcup_{i=1}^{6d_1} \bigcup_{j=i+1}^{6d_2} \{K_1 = i, K_2 = j \mid d_1,d_2\}.$$

Avant d'obtenir la formule de $EG_1(d_1,d_2)$, on remarque que tous les évènements dans les unions ci-dessus sont deux à deux disjoints, et donc la probabilité de leur union est la somme de leurs probabilités. En plus, comme $K_1$ et $K_2$ sont indépendantes et $K_i$ ne dépend que de $d_i$, on a $\mathbb{P}(K_1 = i, K_2 = j \mid d_1,d_2) = P(d_1,i)P(d_2,j)$. On peut finalement obtenir une formule pour $EG_1(d_1,d_2)$ :

$$\begin{aligned}
EG_1(d_1,d_2) &= \mathbb{P}(G = 1 \mid d_1,d_2) - \mathbb{P}(G = -1 \mid d_1,d_2) \\
&= \sum_{j=1}^{6d_2} \sum_{i=j+1}^{6d_1} \mathbb{P}(K_1 = i, K_2 = j \mid d_1,d_2) - \sum_{i=1}^{6d_1} \sum_{j=i+1}^{6d_2} \mathbb{P}(K_1 = i, K_2 = j \mid d_1,d_2) \\
&= \sum_{j=1}^{6d_2} \sum_{i=j+1}^{6d_1} P(d_1,i)P(d_2,j) - \sum_{i=1}^{6d_1} \sum_{j=i+1}^{6d_2} P(d_1,i)P(d_2,j) \\
&= \sum_{j=1}^{6d_2} P(d_2,j) \sum_{i=j+1}^{6d_1} P(d_1,i) - \sum_{i=1}^{6d_1} P(d_1,i) \sum_{j=i+1}^{6d_2} P(d_2,j)
\end{aligned}$$

En utilisant cette formule, on calcule, pour $D = 3$, la matrice de gains

| $d_1 \backslash d_2$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −0.375 | −0.227 |
| 2 | 0.375 | 0 | −0.199 |
| 3 | 0.227 | 0.199 | 0 |

Comme le jeu est à somme nulle, la matrice est anti-symétrique.

## 9. Question 11

Si on suppose que le joueur 2 connait la probabilité $p_1(i)$, $i = 1, 2, \ldots, D$, alors il peut calculer le gain espéré du joueur 1. En fait, quand le joueur 2 joue $j$ dés ($j = 1, 2, \ldots, D$), le joueur 1 gagne en espérance $EG_1(1, j)$ avec probabilité $p_1(1)$, $EG_1(2, j)$ avec probabilité $p_1(2)$, …, $EG_1(D, j)$ avec probabilité $p_1(D)$. L'espérance du gain du joueur 1 est donc donnée par la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, j),$$

quand le joueur 2 joue $j$ dés. Par conséquent, il ne reste au joueur 2 qu'à minimiser cette espérance de gain. On suppose qu'il choisit une stratégie mixte $p_2(1), p_2(2), \ldots, p_2(D)$ (on remarque que les stratégies mixtes contiennent les pures). Le joueur 2 perdra ainsi $\sum_{i=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, 1)$ avec probabilité $p_2(1)$, $\sum_{i=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, 2)$ avec probabilité $p_2(2)$, …, $\sum_{i=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, D)$ avec probabilité $p_2(D)$. Ainsi, l'espérance de sa perte est

$$\sum_{j=1}^{D} p_2(j) \sum_{i=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, j) = \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} p_1(i) EG_1(i, j) p_2(j).$$

Notons $p_1 = \big(p_1(1), p_1(2), \ldots, p_1(D)\big)$, $p_2 = \big(p_2(1), p_2(2), \ldots, p_2(D)\big)$, et $EG_1$ la matrice dont l'élément à la ligne $i$ et colonne $j$ est $EG_1(i, j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, D$. La perte moyenne du joueur 2 s'écrit donc :

$$p_1^\top EG_1 p_2,$$

où on a supposé que $p_1$ et $p_2$ sont des vecteurs colonne.

Pour le joueur 2, il faut donc minimiser son espérance de perte. C'est pourquoi il prendra une stratégie mixte $p_2^* = \big(p_2^*(1), p_2^*(2), \ldots, p_2^*(D)\big)$ telle que

$$p_1^\top EG_1 p_2^* = \min_{p_2} p_1^\top EG_1 p_2. \tag{5}$$

## 10. Question 12

Le joueur 1 veut maximiser de son côté son espérance de gain. Supposant que le joueur 2 joue optimalement, le joueur 1 peut déduire que, pour toute stratégie $p_1$ qu'il choisit, son adversaire jouera selon (5). Sachant ce fait, il doit donc maximiser (5) de son côté, c'est-à-dire, il doit choisir une stratégie mixte $p_1^* = \big(p_1^*(1), p_1^*(2), \ldots, p_1^*(D)\big)$ telle que

$$\min_{p_2} {p_1^*}^\top EG_1 p_2 = \max_{p_1} \min_{p_2} p_1^\top EG_1 p_2. \tag{6}$$

Le joueur 1 doit donc résoudre le problème de maximisation à droite dans (6) pour déterminer une stratégie $p_1^*$ qui maximisera son espérance de gain sachant que son adversaire joue optimalement.

Pour trouver une solution du problème (6), on remarque que, comme vu en cours (Lemme 1 du Cours 4),

$$\max_{p_1} \min_{p_2} p_1^\top EG_1 p_2 = \max_{p_1} \min_{j} p_1^\top EG_1^j,$$

où $EG_1^j$ est la colonne d'indice $j$ de la matrice $EG_1$ ($j = 1, 2, \ldots, D$). En plus, d'après les propriétés vues en cours de ce type de problème linéaire, le problème $\max_{p_1} \min_j p_1^\top EG_1^j$ peut être résolu en résolvant

$$\begin{aligned}
&\max\ z' - z'' \\
&-p_1^\top EG_1^j + z' - z'' \le 0 \qquad \forall j \in \{1, \ldots, D\}, \\
&\textstyle\sum_{i=1}^{D} p_1(i) \le 1 \\
&-\textstyle\sum_{i=1}^{D} p_1(i) \le -1 \\
&z' \ge 0,\ z'' \ge 0,\ p_1(i) \ge 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, D\}
\end{aligned} \tag{7}$$

Donc, en résolvant le problème (7) on peut obtenir un vecteur $p_1^*$ qui sera aussi une solution du problème (6). Finalement, le joueur 1 prend donc $p_1^*$ comme sa stratégie optimale.