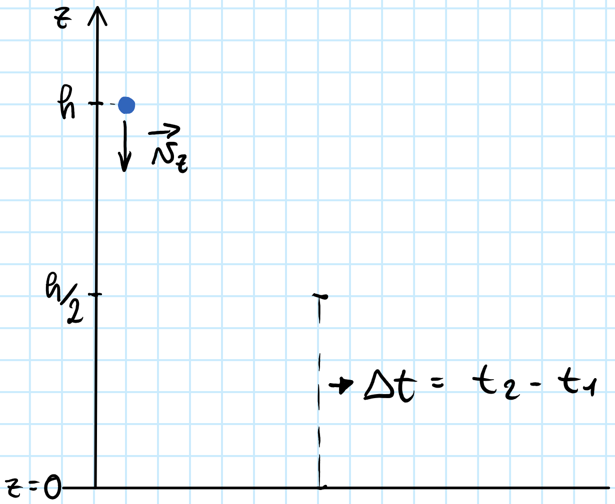
6-Esercitazione_03/05/2024

1) Durante la posa di un traliccio dell'alta tensione, un bullone mal fissato cade da un'altezza *h* rispetto al suolo. Sapendo che nell'ultimo secondo del suo moto, prima di toccare terra, esso percorre un'altezza pari a *h/2*, determinare il valore di *h*.



- $z_0(t_0 = 0\,s) = h$
  $v_z(t_0) = 0\ m/s$
- $z_1(t_1) = \frac{h}{2}$
- $z_2(t_2) = 0$

- Valore di h?

- Si sa che $t_2 - t_1 = \Delta t = 1\,s$
- Il moto e' UNIFORMEMENTE ACCELERATO in direzione z: $a_z = -g$

$$\Rightarrow z_1(t_1) - z_0(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} -gt\,dt = -g\frac{t^2}{2}\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$\Rightarrow t_0 = 0\,s \; ; \quad z_0(t_0) = h \; ; \quad z_1(t_1) = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow z_1(t_1) = h - \frac{1}{2}g t_1^2 = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} g t_1^2 = \frac{h}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$\Rightarrow z_2(t_2) = h - \frac{1}{2}g t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Sostituendo nell' intervallo Δt:

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 1\,s$$

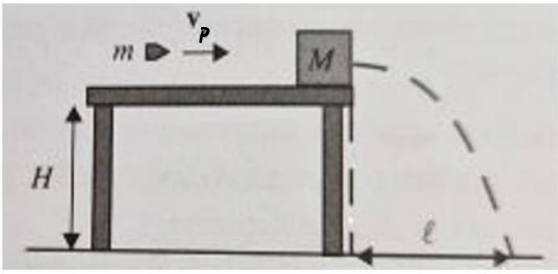
$$\Rightarrow \frac{2h}{g} + \frac{h}{g} - 2\sqrt{2}\,\frac{h}{g} = (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow 3h - 2\sqrt{2}\,h = g\,\Delta t^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{g\,\Delta t^2}{3 - 2\sqrt{2}} = 57.18\ m$$

2) Un proiettile di massa *m* viene sparato dentro un blocco di legno di massa *M* inizialmente fermo

sul bordo di un tavolo (supposto senza attrito) a un'altezza H dal pavimento, come mostrato in Figura.
Dopo l'urto, il proiettile rimane conficcato nel blocco, che cade a terra a una distanza l dal punto di impatto.

a) Quali quantità si conservano durante l'urto?
b) Determinare la velocità iniziale del proiettile.
c) Si supponga ora che, dopo aver toccato il terreno, il blocco continui a strisciare per una lunghezza L, rallentando e poi fermandosi per effetto dell'attrito. Trovare il coefficiente di attrito radente dinamico in funzione delle quantità note.



• v_p : velocita' iniziale del proiettile

a) Il proiettile rimane conficcato nel blocco di legno: URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO.
Il sistema proiettile + blocco è sottoposto alle seguenti forze esterne: il peso del blocco $M\boldsymbol{g}$, la reazione normale $\mathbf{N}$ dovuta al piano del tavolo, e il peso del proiettile $m\boldsymbol{g}$.
Tutte le forze sono verticali per cui:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{dP_x}{dt} = 0$$

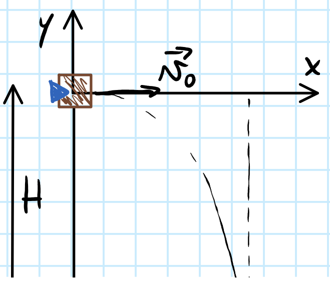
Quindi P_x certamente si conserva. Anche P_y è costante perché quando il proiettile inizia a penetrare nel blocco, il suo peso è bilanciato da un piccolo aumento della reazione vincolare $\mathbf{N}$ e quindi la risultante delle forze lungo la direzione y resta nulla. L'energia cinetica invece non si conserva perché l'urto è completamente anelastico.

b) QUANTITA' di MOTO immediatamente prima dell'urto: $P_{x,i} = m v_p$

• Dopo l'urto, blocco + proiettile avranno una velocita' v_0;
QUANTITA' di MOTO dopo l'urto: $P_{x,f} = (m+M) v_0$

$\Rightarrow$ P_x si CONSERVA : $P_{x,i} = P_{x,f}$
ovvero : $m v_p = (m+M) v_0$

• Si puo' calcolare v_p conoscendo v_0 :
Si puo' ricavare v_0 risolvendo il moto del sistema di massa $m+M$

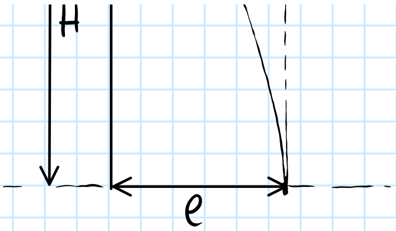


• $t=0$: urto e inizio del moto

$\Rightarrow$ Le leggi orarie:

$\Rightarrow$ $x(t) = v_0 t$

$\Rightarrow$ $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$



→ $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$

- All' istante $t = t_1$ il blocco arriva a terra

→ $x_1(t_1) = \ell$

→ $y_1(t_1) = -H$

$$\Rightarrow y_1(t_1) = -\frac{1}{2} g t_1^2 = -H \Rightarrow t_1^2 = \frac{2H}{g} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

- Sostituendo t_1 nella prima legge oraria:

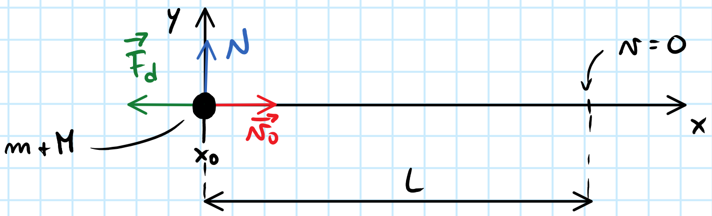
$$x_1(t_1) = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = \ell \Rightarrow v_0 = \ell \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}$$

Da cui si può ora ricavare v_p:

$$\Rightarrow v_p = \frac{m+M}{m} v_0 = \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}$$

c) Nel momento in cui il blocco (trattato come puntiforme) tocca il suolo, è soggetto a una forza impulsiva dovuta al pavimento che annulla la componente verticale della sua quantità di moto. E' lecito, invece, assumere che la quantità di moto lungo l'asse orizzontale si conservi, il che significa che:
i) la forza impulsiva esercitata dal pavimento è praticamente verticale;
ii) il moto di strisciamento inizia con una velocità orizzontale pari a v_0.



L'accelerazione del corpo durante lo strisciamento si ottiene dalla relazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0) \quad \text{avendo} \quad v = 0 \quad \text{quando} \quad x - x_0 = L$$

⇒ Si trova l'accelerazione: $v_0^2 + 2a_x L = 0$

$$\Rightarrow a_x = -\frac{v_0^2}{2L}$$

- Durante lo strisciamento, per la II legge di Newton:

$$F = (m+M)a_x = -F_d \quad \text{dove} \quad F_d = \mu_d N$$

$$N = (m+M)g$$

→ Si ottiene allora: $-\mu_d N = (m+M)a_x$

$$= -\mu_d (m+M) g$$

$$\Rightarrow \mu_d = -\frac{a_x}{g} = \frac{v_0^2}{2gL} = \frac{g\ell^2}{2H}\cdot\frac{1}{2gL} = \frac{\ell^2}{2HL}$$

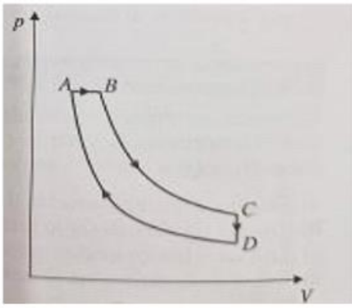
$$a_x = -\frac{v_0^2}{2\ell} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}$$

$$\rightarrow \mu_d = \frac{\ell^2}{4HL}$$

3) Il ciclo di un motore Diesel può essere schematizzato come in Figura, ed è costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: un'isobara AB, un'adiabatica BC, un'isocora CD e, infine, un'altra adiabatica DA.

Si consideri ora un motore Diesel funzionante con n = 1 moli di gas perfetto monoatomico.

Sia, inoltre, V_A = 0.010 m^3 , $V_B = \frac{3}{2}V_A$, $V_C = 2V_A$ e T_A= 300 K.



a) Calcolare il lavoro fatto dal gas in un ciclo.

b) Calcolare il rendimento del ciclo e paragonarlo al ciclo di Carnot di una macchina che opera fra due sorgenti aventi temperatura uguale a T_B (temperatura nello stato B) e T_D (temperatura nello stato D).

c) Calcolare la variazione di entropia corrispondente a ciascuna trasformazione.

- Calcolo delle coordinate termodinamiche incognite nei vari stati A, B, C, D.

-Stato A:

• moli n, V_A, T_A ⇒ equazione di stato dei gas perfetti:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49\cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$(V_A = nRT_A / P_A)$$

-Stato B:

• $V_B = \frac{3}{2}V_A$, $P_B = P_A$ ⇒ $\frac{nRT_A}{V_A} = \frac{nRT_B}{V_A}\cdot\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow T_B = \frac{3}{2}T_A$$

-Stato C: → BC: TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE

$$\Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$ dove $\gamma = \frac{5}{3}$ per un gas perfetto monoatomico

• $V_B = \frac{3}{2}V_A$, $V_C = 2V_A$, $T_B = \frac{3}{2}T_A$ ⇒ $T_C = T_B\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma-1} = 2T_A\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma}$ $= 371.47$ K

- Per trovare la pressione P_c : $P_c V_c = nRT_c = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} nRT_A$

$$\Rightarrow P_c = \cancel{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} \frac{nRT_A}{\cancel{2}V_A} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} \frac{\cancel{nRT_A}}{\cancel{nRT_A}} \cdot P_A = \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} P_A$$

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A}$$

$$\Rightarrow P_c = P_A\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} = 1.54\cdot 10^5\ Pa$$

-Stato D:

- TRASFORMAZIONE CD: ISOCORA $\Rightarrow V_D = V_c = 2V_A$
- TRASFORMAZIONE DA: ADIABATICA REVERSIBILE :

$$\Rightarrow P_D V_D^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma}$$

$$\Rightarrow P_D = P_A\left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma} = P_A\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma}$$

- Equazione di stato dei gas perfetti: $P_D V_D = nRT_D$

$$\Rightarrow T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = P_A\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma}\frac{2V_A}{nR} = 2\frac{\cancel{nR}T_A}{\cancel{nR}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} = 2^{1-\gamma}T_A$$

$$P_A V_A = nRT_A$$

$$\Rightarrow T_D = 2^{1-\gamma}T_A = 188.99\ K$$

a) In un ciclo: $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

Il gas non compie lavoro nella trasformazione isocora CD: in tutte le altre trasformazioni il lavoro è non nullo. Però, nelle trasformazioni adiabatiche BC e DA, il gas non scambia calore. Pertanto anziché calcolare il lavoro totale L come somma dei lavori compiuti lungo le tre trasformazioni non isocore AB, BC e DA, conviene calcolare il calore totale scambiato dal gas lungo le due trasformazioni non adiabatiche, ossia AB e CD

$$c_V = \frac{3}{2}R \quad ; \quad c_P = \frac{5}{2}R$$

- CALORE SCAMBIATO LUNGO L'ISOBARA AB:

$$Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = 3116.25\ J$$

- CALORE SCAMBIATO LUNGO L'ISOCORA CD:

$$Q_{CD} = nc_V(T_D - T_c) = -2274.60\ J$$

- CALORE SCAMBIATO DURANTE IL CICLO:

$$\Rightarrow Q = Q_{AB} + Q_{CD} = 841.65\ J$$

$$\Rightarrow W = Q$$

b) Il rendimento del ciclo

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 1 - \frac{c_v (T_C - T_D)}{c_p (T_B - T_A)} = 0.27$$

- IL RENDIMENTO DELLA MACCHINA DI CARNOT:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 0.58$$

a) Essendo l'entropia una funzione di stato, la sua variazione su un ciclo è sempre nulla : $\Delta S = 0$

- ADIABATICHE REVERSIBILI, anche ISOENTROPICHE

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{BC} = \Delta S_{DA} = 0$$

Quindi : $\Delta S = \Delta S_{AB} + \underbrace{\cancel{\Delta S_{BC}}}_{0} + \Delta S_{CD} + \underbrace{\cancel{\Delta S_{DA}}}_{0} = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{AB} = - \Delta S_{CD}$$

- Variazione di entropia nella trasformazione ISOBARA AB:

$$\Delta S_{AB} = m c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 8.42 \ \frac{J}{K}$$