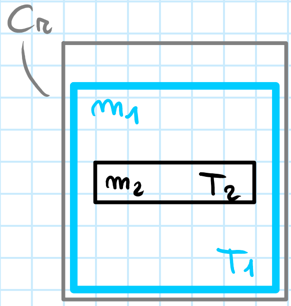
4-Esercitazione_19/04/2024

1) In un recipiente metallico chiuso, riempito con la massa $m_1 = 5\ kg$ di acqua alla temperatura $T_1 = 20°C$, viene immerso un blocco di alluminio di massa $m_2 = 1\ kg$ alla temperatura $T_2 = 90°C$.
Dopo che si è stabilito l'equilibrio termico, la temperatura dell'acqua diventa $T_f = 22°C$.
Trascurando scambi di calore con l'ambiente esterno, si calcoli la capacità termica del recipiente.

[Il calore specifico dell'Al è $c_2 = 0.22\ \frac{kcal}{kg°C}$]



$m_1 = 5\,kg\ ;\ T_1 = 20°C\ ;\ c_{1,H_2O} = 1\ \frac{kcal}{kg°C}$

$m_2 = 1\,kg\ ;\ T_2 = 90°C\ ;\ c_{2,Al} = 0.22\ \frac{kcal}{kg°C}$

▸ ALL' EQUILIBRIO TERMICO: $T_g = 22°C$

▸ Calore scambiato dall' acqua (m_1): $Q_1 = \overbrace{m_1 c_1}^{C_1}(T_g - T_1)$

▸ Calore scambiato da Al (m_2): $Q_2 = m_2 c_2 (T_g - T_2)$

▸ Calore scambiato dal recipiente: $Q_r = C_r (T_g - T_1)$

• Sistema acqua - recipiente - blocco Al : $Q_{TOT} = 0$

$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_r = 0$

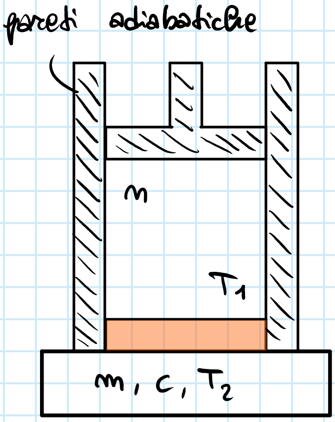
$\Rightarrow m_1 c_1 (T_g - T_1) + m_2 c_2 (T_g - T_2) + C_r (T_g - T_1) = 0$

$\Rightarrow C_r \frac{\cancel{(T_g - T_1)}}{\cancel{T_g - T_1}} = -m_1 c_1 \frac{\cancel{(T_g - T_1)}}{\cancel{T_g - T_1}} - m_2 c_2 \frac{(T_g - T_2)}{T_g - T_1}$

$\Rightarrow C_r = m_2 c_2 \frac{(T_2 - T_g)}{T_g - T_1} - m_1 c_1$

$= 1\,kg \cdot 0.22\ \frac{kcal}{kg°C} \frac{(90 - 22)°C}{(22 - 20)°C} - 5\,kg \cdot 1\ \frac{kcal}{kg°C} = 2.48\ \frac{kcal}{°C}$

2) In un recipiente cilindrico chiuso superiormente da un pistone scorrevole senza attrito sono contenute $n = 10\ moli$ di un gas ideale monoatomico alla temperatura $T_1 = 300\ K$ e a pressione atmosferica.
La superficie laterale del cilindro ed il pistone sono adiabatici, mentre la base del recipiente conduce il calore. Il recipiente viene poggiato su un blocco metallico a temperatura $T_2 = 1000\ K$. Il blocco è di massa $m = 1\ kg$ ed è costituito da un materiale con calore specifico $c = 400\ \frac{J}{kgK}$.
Ipotizzando trascurabili le capacità termiche del cilindro e del pistone e il calore scambiato dal blocco metallico con l'ambiente, si calcolino la temperatura finale del gas e il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione.



- $n = 10$ moli (gas ideale monoatomico); $T_1 = 300\,K$;
- $m = 1\,kg$; $c = 400 \frac{J}{kg\,K}$; $T_2 = 1000\,K$

• Trascurabili: → C del cilindro e del pistone
→ Q scambiato dal blocco metallico (m) con l'ambiente

→ T_{fin} gas?
→ W_g durante la trasformazione?

- Calore scambiato dal blocco (m):

$$Q_m = mc(T_f - T_2) = C_m(T_f - T_2)$$

- Calore scambiato dal gas:

$$Q_g = \Delta U_g + W_g$$

• Variazione E INT gas: $\Delta U_g = n c_V \Delta T \overset{!}{=} n \frac{3}{2} R (T_f - T_1)$
$\left(c_V = \frac{3}{2} R\right)$

• Lavoro compiuto dal gas: $W_g = -W_E = P\Delta V \overset{!}{=} P(V_f - V_i)$

$\Rightarrow W_g = PV_f - PV_i$

• Legge dei gas ideali: $PV_i = nRT_i = nRT_1$
$PV_f = nRT_f$

$$\Rightarrow W_g = nRT_f - nRT_1 = nR(T_f - T_1)$$

$$\Rightarrow Q_g = n\frac{3}{2}R(T_f - T_1) + nR(T_f - T_1)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\frac{5}{2} nR}(T_f - T_1) = C_g(T_f - T_1)$$

$\rightarrow C_g = \frac{5}{2} nR = 208 \frac{J}{K}$ $\left[R = 8.3145 \frac{J}{mol\,K}\right]$

$$\Rightarrow Q_{TOT} = Q_m + Q_g = 0$$

$$\overset{!}{=} C_m(T_f - T_2) + C_g(T_f - T_1) = 0$$

• Per trovare la T_f:

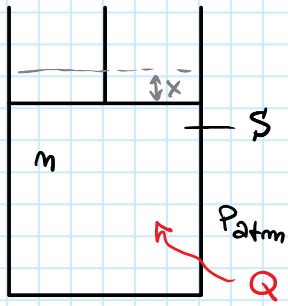
$$\frac{\cancel{(C_m + C_g)} T_f}{\cancel{C_m + C_g}} = \frac{C_m T_2 + C_g T_1}{C_m + C_g}$$

$$\Rightarrow T_8 = \frac{C_m T_2 + C_g T_1}{C_m + C_g} = 761\ K$$

- Il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione:

$$W_g = nR(T_8 - T_1) = 38\ 300\ J$$

3) Un gas ideale monoatomico è contenuto in un cilindro di sezione $S = 0.01\ m^2$, dotato di un pistone scorrevole senza attrito e di massa trascurabile. Il gas è in equilibrio con l'atmosfera esterna a pressione ambiente ($P_{atm} = 10^5\ Pa$).
Successivamente, viene fornito al gas in maniera reversibile il calore $Q = 500\ J$.
Si calcoli l'innalzamento del pistone.



$P_{atm} = 10^5\ Pa$

$Q = 500\ J$

- Innalzamento del pistone?

- TRASFORMAZIONE ISOBARA REVERSIBILE $(P = cost = P_{atm})$

$$Q = n\, c_p\, \Delta T \qquad c_p = \frac{5}{2} R$$

- Variazione di V: $\Delta V = S x$
- Legge dei gas ideali: $P \Delta V = nR\Delta T \Rightarrow \Delta V = nR \frac{\Delta T}{P_{atm}}$

$$\Rightarrow \Delta V = S x = nR \frac{\Delta T}{P_{atm}}$$

$$\rightarrow \text{Ricavando } \Delta T = \frac{P_{atm} S x}{nR}$$

- Sostituendo in Q:

$$Q = \cancel{n} \frac{5}{2} \cancel{R} \frac{P_{atm} S x}{\cancel{nR}} = \frac{5}{2} P_{atm} S x$$

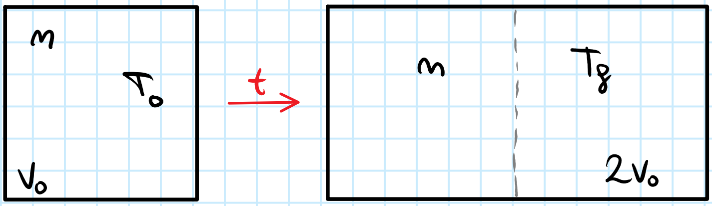
$\Rightarrow$ Si può ricavare l'innalzamento x del pistone:

$$x = \frac{2}{5} \frac{Q}{S P_{atm}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{500\ J}{0.01\ m^2\ 10^5\ Pa} = 0.2\ m$$

4) Un gas ideale monoatomico si trova inizialmente alla temperatura $T_0 = 300\ K$ ed occupa il volume $V_0 = 2*10^{-3} m^3$.
Il gas viene fatto espandere, fino a raddoppiarne il volume, seguendo la trasformazione:
$P = a + b V^2$
Dove $a = 10^5\ Pa;\ b = 5*10^{10} Pa/m^6$.

Si calcolino:

a. La temperatura finale del gas
b. Il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione
c. Il calore scambiato dal gas durante la trasformazione



- Calcolare: a) T_g gas; b) W_g; c) Q_g

$T_0 = 300\ K$; $V_0 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$

La trasformazione t: $P = a + bV^2$ con $\begin{cases} a = 10^5\ Pa \\ b = 5 \cdot 10^{10}\ \frac{Pa}{m^6} \end{cases}$

▸ La P iniziale (a V_0):

$$P_0 = a + bV_0^2 = 10^5\ Pa + 5 \cdot 10^{10}\ \frac{Pa}{m^6} \underbrace{(2 \cdot 10^{-3}\ m^3)^2}_{4 \cdot 10^{-6}\ m^6} = 3 \cdot 10^5\ Pa$$

▸ La P finale (a $2V_0$):

$$P_g = a + bV_g^2 = 10^5\ Pa + 5 \cdot 10^{10}\ \frac{Pa}{m^6} \underbrace{(4 \cdot 10^{-3}\ m^3)^2}_{16 \cdot 10^{-6}\ m^6} = 9 \cdot 10^5\ Pa$$

- Eq di stato gas ideali: $P_0 V_0 = nRT_0$

$P_g V_g = nRT_g$

$$\Rightarrow nR = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_g V_g}{T_g}$$

▸ Possiamo ricavare la T finale T_g:

$$\Rightarrow T_g = \frac{P_g V_g}{P_0 V_0} \cdot T_0 = 1800\ K$$

▸ Lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione:

$$W_g = \int_{V_0}^{2V_0} P\, dV = \int_{V_0}^{2V_0} (a + bV^2)\, dV$$

$$= \left[aV + \frac{b}{3}V^3\right]_{V_0}^{2V_0}$$

$\begin{pmatrix} a = 10^5 Pa \\ b = 5\cdot 10^{10}\ Pa/m^6 \end{pmatrix}$

$$= 2aV_0 + \frac{b}{3}\cdot 8V_0^3 - aV_0 - \frac{b}{3}V_0^3$$

$$\Rightarrow W_g = aV_0 + \frac{7}{3}bV_0^3 = 1130\,J$$

- Il calore assorbito dal gas nella trasformazione (I PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA):

$$Q = \Delta U + W_g$$

- La variazione dell'E INTERNA del gas:

$$\Delta U = n c_v \Delta T = n\frac{3}{2}R(T_g - T_0)$$
$$= \frac{3}{2}(nRT_g - nRT_0)$$
$$= \frac{3}{2}(P_g V_g - P_0 V_0) = 4500\,J$$

$$\Rightarrow Q = \Delta U + W_g$$
$$= 4500\,J + 1130\,J = 5630\,J$$