7-Esercitazione_23/05/2024

Esercizio 1)

Descrivere la traiettoria di una carica puntiforme di massa $m=1g$ e carica $q=-1\mu C$ che viaggia con velocità iniziale $v_o=1cm/s$ parallela ad uno strato piano con densità superficiale costante $\sigma = 100\mu C/m^2$. Se la carica inizialmente si trova ad una altezza $h=2cm$, dopo quanto tempo, a quale velocità e in quale posizione impatta sullo strato piano?

Esercizio 2)

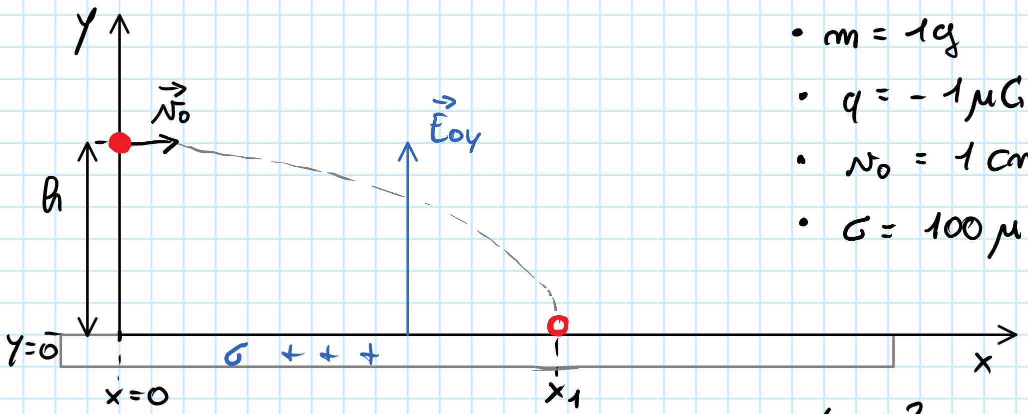
Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l, calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per l=5cm, $q_1 = q_2 = -q_3 = 1\mu C$. Calcolare l'energia configurazionale del sistema.

Esercizio 3)

Due lastre piane, parallele e di dimensioni infinite distano 20cm. La prima lastra è carica con una densità di superficie $\sigma_1 = 10^{-6}Cm^{-2}$ mentre la seconda ha densità $\sigma_2 = -3 \times 10^{-6}Cm^{-2}$. Una terza lastra, parallela alle prime due e sempre infinita, avente densità σ_3, viene a sua volta inserita tra le prime due. Quali dovranno essere il valore di σ_3 e la distanza della terza lastra dalla prima affinché il campo elettrostatico all'esterno del sistema di lastre risulti nullo?

- Esercizio1

Descrivere la traiettoria di una carica puntiforme di massa $m=1g$ e carica $q=-1\mu C$ che viaggia con velocità iniziale $v_o=1cm/s$ parallela ad uno strato piano con densità superficiale costante $\sigma = 100\mu C/m^2$. Se la carica inizialmente si trova ad una altezza $h=2cm$, dopo quanto tempo, a quale velocità e in quale posizione impatta sullo strato piano?



- $m = 1g$
- $q = -1\mu C$
- $v_0 = 1\ cm/s$
- $\sigma = 100\ \mu C/m^2$

▸ $t_1 = ?$ $x_1 = ?$ $v_1 = ?$

- La FORZA che agisce sulla carica puntiforme:

$$F_y = m a_y = -q E_{0y} = -q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ (trascurando la F_{peso})

- Accelerazione della carica:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -q \frac{\sigma}{2m\varepsilon_0} \end{cases} \xrightarrow{\text{integrando}}$$

- Velocita' della carica:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -q \frac{\sigma}{2m\varepsilon_0} \cdot t \end{cases}$$

- Le equazioni del moto della carica (integrando ulteriormente):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ y(t) = y_0 - q \frac{\sigma}{4m\varepsilon_0} t^2 \end{cases} \overset{x_0=0}{\underset{y_0=h}{\Rightarrow}} \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - q \frac{\sigma}{4m\varepsilon_0} t^2 \end{cases}$$

- Per determinare t_1: $y(t_1) = 0$

$$h - q \frac{\sigma}{4m\varepsilon_0} t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1^2 = h \cdot \frac{4m\varepsilon_0}{q\sigma}$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4m\varepsilon_0 h}{q\sigma}} = 2.66 \text{ ms} \quad 2.66 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

- La posizione x_1: $x_1(t_1) = v_0 t_1$

$$\Rightarrow x_1(t_1) = v_0 \sqrt{\frac{4m\varepsilon_0 h}{q\sigma}} = 26.6 \ \mu\text{m} \quad 26.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

- La velocita' v_{1y}:

$$v_{y1}(t_1) = -q \frac{\sigma}{2m\varepsilon_0} t_1 = -\frac{\sqrt{q}^2 \sqrt{\sigma}^2}{\cancel{\sqrt{4}} \sqrt{m}^2 \sqrt{\varepsilon_0}^2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{4}} \cancel{\sqrt{m}} \cancel{\sqrt{\varepsilon_0}} \sqrt{h}}{\cancel{\sqrt{q}} \cancel{\sqrt{\sigma}}}$$

$$\Rightarrow v_{y1}(t_1) = -\sqrt{\frac{q\sigma h}{m\varepsilon_0}} = -15.04 \text{ m/s}$$

$$\left[\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2} \right]$$

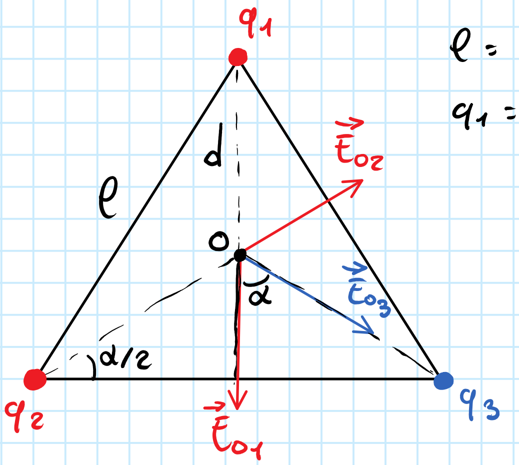
$$v_{x1}(t_1) = v_0$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{q\sigma h}{m\varepsilon_0}} \simeq 15.04 \text{ m/s}$$

$$|v_1| \simeq |v_{y1}|$$

Esercizio2)

Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l, calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per l=5cm, $q_1 = q_2 = -q_3 = 1 \mu C$. Calcolare l'energia configurazionale del sistema.



$\ell = 5cm$

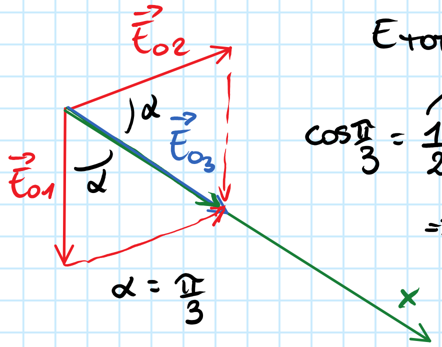
$q_1 = q_2 = -q_3 = 1\mu C = q$

▸ Campi generati da ogni carica:

$|E_{01}| = |E_{02}| = |E_{03}| = E_0$

$E_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

▸ IL CAMPO ELETTRICO TOTALE NEL PUNTO O (somma vettoriale):



$$E_{TOT} = E_{01}\cos\alpha + E_{02}\cos\alpha + E_{03}$$

$$= \frac{E_0}{2} + \frac{E_0}{2} + E_0 = 2E_0$$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow E_{TOT} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2} = 2.16\cdot 10^{7}\,\frac{V}{m}$$

$d = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$

$\boxed{d = \frac{2}{3}h \text{ (} h \text{ altezza del triangolo)} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell = \frac{\ell}{\sqrt{3}}}$

▸ IL POTENZIALE TOTALE in O:

$$V(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}} = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 \ell} = 3.12\cdot 10^{5}\,V$$

$d = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$

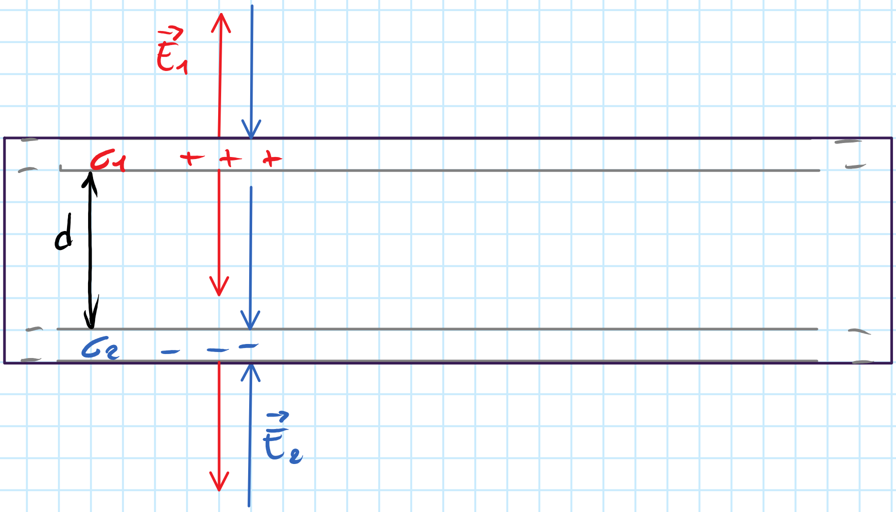
▸ ENERGIA CONFIGURAZIONALE del SISTEMA:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \ell} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \ell} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \ell}$$

$$= \cancel{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell}} - \cancel{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell}} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell} = -0.18\,J$$

Esercizio3)

Due lastre piane, parallele e di dimensioni infinite distano 20cm. La prima lastra è carica con una densità di superficie $\sigma_1 = 10^{-6}Cm^{-2}$ mentre la seconda ha densità $\sigma_2 = -3\times 10^{-6}Cm^{-2}$. Una terza lastra, parallela alle prime due e sempre infinita, avente densità σ_3, viene a sua volta inserita tra le prime due. Quali dovranno essere il valore di σ_3 e la distanza della terza lastra dalla prima affinché il campo elettrostatico all'esterno del sistema di lastre risulti nullo?



$\sigma_1 = 10^{-6}\ C/m^2$

$\sigma_2 = -3 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$

$d = 20\ cm$

- IL CAMPO ELETTRICO ESTERNO ALLE 2 LASTRE:

$$|E_{EXT}| = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

Per annullarlo:

$$\sigma_3 = -(\sigma_1 + \sigma_2) = 2 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$$

- Campo uniforme → la posizione della 3ª lastra non influisce