если же $n = k$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx^2\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\,dx = 0, \qquad (II)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx^2\,dx = \pi.$$

Вычислим, например, первый интеграл из группы (I). Так как

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos{(n+k)x} + \cos{(n-k)x}]$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos{(n+k)x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos{(n-k)x}\,dx$$

Подобным образом можно получить и остальные формулы $(I)^*$). Интегралы группы (II) вычисляют непосредственно (см. X гл. т. I).

Теперь мы можем вычислить коэффициенты a_k и b_k ряда (2). Для разыскания коэффициента a_k при каком-либо определенном значении $k \neq 0$ умножим обе части равенства (2) на $\cos kx$:

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\inf}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \qquad (2')$$

Ряд, получившийся в правой части равенства, мажорируем, так как его члены не превосходят по абсолютной величине членов сходящегося положительного ряда (3). Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке.

Проинтегрируем равенство $(2')$ в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\inf}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right).$$

---

*) С помощью формул

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2}[\sin{(n+k)x} - \sin{(n-k)x}]$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2}[-\cos{(n+k)x} + \cos{(n-k)x}]$$

Принимая во внимание формулы (II) и (I), видим, что все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом a_k.

Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{5}$$

Умножая обе части равенства (2) на $\sin kx$ и снова интегрируя от $-\pi$ до π, найдем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = b_k\pi, \tag{6}$$

откуда

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{7}$$

Коэффициенты, определенные по формулам (4) – (6), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (1) с такими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Возвратимся теперь к вопросу, поставленному нами в начале параграфа: какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для неё ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Мы сформулируем здесь теорему, которая даст достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (a, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ так что на каждом из интервалов функция монотонна, т. е. либо не возрастающая, либо неубывающая.

Из определения следует, что если функция $f(x)$ кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[a, b]$, то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x = c$ есть точка разрыва функции $f(x)$, то в силу монотонности функции существуют пределы

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$$

т. е. точка c есть точка разрыва первого рода (рис. 374).