MATEMATIKA DISKRIT

TACBIR HENDRO PUDJIANTORO

UNIVERSITAS JENDERAL ACHMAD YANI 2019

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Apakah Matematika Diskrit Itu?
Matematika diskrit: cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit.

Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)?
Benda disebut diskrit jika:

terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda
elemen-elemennya tidak bersambungan (unconnected).

Contoh: himpunan bilangan bulat (*integer*)

Lawan kata diskrit: **kontinyu** atau **terus menerus** (*continuous*).
Contoh: himpunan bilangan riil (*real*)

Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.
Matematika diskrit merupakan ilmu dasar dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer.
Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika.

→ algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb.

Matematika diskrit adalah matematika yang khas informatika → **Matematika Informatika**.
Materi-materi dalam matematika diskrit:

1. Logika (*logic*)
2. Teori Himpunan (*set*)
3. Matriks (*matrice*)
4. Relasi dan Fungsi (*relation and function*)
5. Induksi Matematik (mathematical induction)
6. Algoritma (*algorithms*)
7. Teori Bilangan Bulat (*integers*)
8. Barisan dan Deret (*sequences and series*)
9. Teori Grup dan *Ring* (*group and ring*)
10. Aljabar Boolean (*Boolean algebra*)
11. Kombinatorial (*combinatorics*)
12. Teori Peluang Diskrit (*discrete probability*)
13. Fungsi Pembangkit dan Analisis Rekurens
14. Teori Graf (graph – included tree)
15. Kompleksitas Algoritma (*algorithm complexity*)
16. Otomata & Teori Bahasa Formal (automata and formal language theory)

Materi 1, 2 dan 16 dibahas dalam matakuliah yang bebeda. Materi 1 dan 2 di bahas dalam matakuliah Logika Informatika dan Otomata dan Teori Bahasa Formal dibahas dalam matakuliah dengan judul yang sama.

Contoh-contoh persoalan matematika diskrit:

- berapa banyak kemungkinan jumlah *password* yang dapat dibuat dari 8 karakter?
- bagaimana nomor ISBN sebuah buku divalidasi ?
- berapa banyak *string* biner yang panjangnya 8 bit yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil ?
- bagaimana menentukan lintasan terpendek dari satu kota *a* ke kota *b* ?

- buktikan bahwa perangko senilai n ($n \geq 8$) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja !
- diberikan dua buah algoritma untuk menyelesaian sebuah persoalan, algoritma mana yang terbaik ?
- bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital yang disusun oleh 7 buah batang (*bar*) ?
- dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perubahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula ?
- "Makanan murah tidak enak", "makanan enak tidak murah". Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama ?

Moral dari cerita di atas: mahasiswa informatika harus memiliki pemahaman yang kuat dalam matematika diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

BAB I

TEORI HIMPUNAN

1.1. Introduksi

Konsep dari sebuah himpunan muncul dalam semua cabang ilmu Matematika. Pada bagian ini diperkenalkan notasi dan terminologi dari teori himpunan yang menjadi dasar umum semua cabang ilmu matematika. Selain itu dikenalkan juga Diagram Venn yang merupakan representasi grafik dari himpunan dan diperlihatkan bagaimana mengaplikasikannya secara argumen logika. Relasi antara teori himpunan dan logika akan lebih diperdalam ketika membahas aljabar boole.

1.2. Himpunan dan Elemen

Himpunan dapat ditinjau sebagai sekumpulan objek, elemen atau anggota yang berbeda. Untuk melambangkan himpunan biasanya menggunakan huruf besar A,B,X,Y,...., dan huruf kecil untuk melambangkan elemennya a,b,x,y,.... .
Pernyataan "P adalah elemen A" atau "P anggota dari A" dapat dituliskan: **$P \in A$**
Pernyataan P adalah bukan elemen A, berarti negasi dari atau dapat ditulis : **$P \notin A$**

Definisi :
Dua himpunan A dan B dikatakan sama jika dan hanya jika mempunyai anggota yang sama. Biasanya dituliskan $A = B$ jika himpunan A dan B sama dan $A \neq B$ jika himpunan A dan B tidak sama.

1.3. Menentukan himpunan

Ada dua cara untuk menentukan himpunan.

Cara pertama
Jika mungkin buat daftar (list) anggotanya.

Sebagai contoh :

$$A = \{ a,e,i,o,u\}$$

Himpunan A mempunyai elemen yang ditulis dalam huruf kecil a,e,i,o,u. Penulisan elemen dipisahkan dengan menggunakan koma dan dibatasi dengan kurung kurawal { }.

Cara kedua adalah dengan menyatakan sifat-sifat / karakter yang harus dipenuhi elemen himpunan.
Sebagai contoh :

$$B = \{ x : x \text{ integer positif} \}$$

Ekspresi di atas dibaca sebagai "B adalah himpunan dari x, atau himpunan B berisi elemen bilangan integer positif.
Huruf yang biasa digunakan adalah x untuk menuliskan secara jelas anggota dari himpunan. Titik dua dibaca sebagai "dimana" dan koma dibaca "dan".

Contoh 1.1

a) Himpunan A dalam contoh di atas juga dapat ditulis :

A = { x : x adalah huruf dalam alfabet, x adalah huruf vokal }

Perhatikan **$f \notin A$, $a \in A$, $g \notin A$**

b) Elemen dari himpunan B di atas tidak dapat dituliskan secara spesifik karena terlalu banyak/luas.

Perhatikan **$-3 \notin B$, $10 \in B$.**

c) $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$

E berisi angka-angka yang memberikan jawaban yang benar jika dimasukan dalam persamaan . Hal ini biasanya dinamakan Himpunan Penyelesaian untuk sebuah persamaan. Jika solusi persamaan adalah 1 dan 2,
maka apat ditulis $E = \{1, 2\}$
R = himpunan dari bilangan pecahan
C = himpunan dari bilangan kompleks

Walaupun daftar elemen dari sebuah himpunan dapat dituliskan, tetapi secara prakteknya hal tersebut tidak dilakukan.
Misalnya harus membuat daftar anggota himpunan orang yang lahir di dunia selama tahun 2000, pada prakteknya hal ini tidak akan ditulis secara lengkap meskipun secara teori hal ini dapat dilakukan.
Himpunan biasanya hanya dituliskan bila elemennya sedikit, dengan kata lain himpunan dijelaskan dengan batasan yang karakteristiknya menggambarkan elemennya. Faktanya, himpunan dijelaskan dengan pernyataan formal yang biasa dinamakan prinsip dari abtraksi.

Prinsip Abstraksi

Andaikan terdapat sebuah himpunan U dan batasannya P, ada sebuah himpunan A yang semua elemen A adalah tepat menjadi anggota U yang mempunyai batasan P.

1.4. Macam-macam Himpunan

Beberapa macam Himpunan yang di bahas dalam buku ini :

1.4.1. Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong

Dalam beberapa aplikasi teori dari himpunan, anggota dari semua himpunan setelah diselidiki biasanya merupakan anggota himpunan yang lebih besar yang biasanya dinamakan Himpunan Semesta.
Sebagai contoh, dalam peta geometri, himpunan semesta berisi semua titik yang ada dalam peta, selain itu populasi manusia adalah himpunan semesta yang berisi semua manusia di dunia. Himpunan semesta disimbolkan dengan U. Himpunan semesta tidak mempunyai pengecualian pernyataan lain.

$S = \{x : x \text{ adalah bilangan integer positif}, X^2 = 3\}$

Tidak ada elemen karena tidak ada nilai bilangan bulat yang positif yang memenuhi persamaan.

Himpunan yang tidak mempunyai elemen dinamakan Himpunan Kosong atau Himpunan Null dan dituliskan dengan $\emptyset$.
Hanya ada satu himpunan kosong. Itu berarti jika S dan T keduanya kosong,

maka S = T jika keduanya tepat mempunyai elemen yang sama.

1.4.2. Himpunan yang Sama

A = *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen *B* dan sebaliknya setiap elemen *B* merupakan elemen *A*.
A = *B* jika *A* adalah himpunan bagian dari *B* dan *B* adalah himpunan bagian dari *A*. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 1.
(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, *A*, *B*, dan *C* berlaku aksioma berikut:
(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) jika $A = B$, maka $B = A$
(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

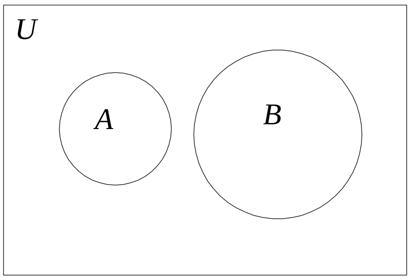
1.4.3. Himpunan yang Ekivalen

Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 2.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

1.4.4. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
Notasi : *A* // *B*
Diagram Venn:



Contoh 3.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka *A* // *B*.

1.5. Subhimpunan (Subset) dan Kardinalitas

Jika setiap elemen dalam himpunan A adalah juga elemen dari himpunan B, maka A dinamakan subset B. Dapat dikatakan juga A berisi B atau B berisi A. Hubungan ini ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Jika A bukan subset dari B (minimal ada satu elemen A yang tidak menjadi elemen B) maka ditulisnya menjadi $A \not\subset B$ atau $B \not\subset A$

Contoh 1.2

1) Perhatikan himpunan dibawah ini :

A = {1, 3, 4, 5, 8, 9 } B = {1, 2, 3, 5, 7 } C = {1, 5 }

maka C $\subseteq$ A dan C $\subseteq$ B jika 1 dan 5 adalah bagian dari C dan juga bagian dari A dan B.
Tetapi B $\not\subset$ A, jika beberapa elemen { 2,7} bukan anggota dari A.
Jika A,B, dan C harus menjadi elemen dari himpunan semesta U, maka himpunan U minimal berisi himpunan { 1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

2) N, Z, Q, R seperti yang didefinisikan pada sub bab 2
maka :

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

3) Himpunan E = { 2, 4, 6 } adalah subset himpunan F = { 6, 2, 4 }, jika semua angka 2,4 dan 6 anggota dari E dan juga anggota dari F maka E = F .

Keanggotaan sebuah himpunan dapat dituliskan :

a. Setiap himpunan A adalah subset dari himpunan semesta U, jika menurut definisi, semua elemen A adalah anggota U. Himpunan kosong $\varnothing$ adalah subset dari A ($\varnothing \subseteq$ A).
b. Setiap himpunan A adalah subset himpunan itu sendiri. Sederhananya elemen dari A adalah anggota dari himpunan A.
c. Jika setiap elemen dari A adalah elemen dari himpunan B, dan setiap elemen B adalah anggota dari himpunan C, maka setiap elemen A adalah elemen C. Dengan kata lain jika A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ C, maka A $\subseteq$ C.

4) Himpunan E = { 2, 4, 6 } adalah subset himpunan F = { 6, 2, 4 }, jika semua angka 2,4 dan 6 anggota dari E dan juga anggota dari F maka E = F .

Keanggotaan sebuah himpunan dapat dituliskan :

a. Setiap himpunan A adalah subset dari himpunan semesta U, jika menurut definisi, semua elemen A adalah anggota U. Himpunan kosong $\varnothing$ adalah subset dari A ($\varnothing \subseteq$ A).
b. Setiap himpunan A adalah subset himpunan itu sendiri. Sederhananya elemen dari A adalah anggota dari himpunan A.
c. Jika setiap elemen dari A adalah elemen dari himpunan B, dan setiap elemen B adalah anggota dari himpunan C, maka setiap elemen A adalah elemen C. Dengan kata lain jika A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ C, maka A $\subseteq$ C.

5) A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ A, maka A dan B mempunyai elemen yang sama.
Sebaliknya A = B maka A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ A jika setiap himpunan adalah subset dirinya sendiri.

Sebagai contoh :

A = {1,3} B = { 1,2,3} C = { 1,3,2}

A dan B adalah subset C, tetapi A proper subset C, B bukan proper subset C karena B = C.

Teorema 1

i) Untuk setiap himpunan A, maka $\varnothing \subseteq$ A $\subseteq$ U
ii) Untuk setiap himpunan A, maka A $\subseteq$ A
iii) Jika A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ C, maka A $\subseteq$ C
iv) A = B jika dan hanya jika A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ A

Jika A $\subseteq$ B, maka ada kemungkinan A = B. Jika A $\subseteq$ B tetapi A $\neq$ B, maka dikatakan A adalah proper subset B. Akan ditulis A $\subset$ B jika A adalah proper subset B.

Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.
Notasi: *n*(*A*) atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Latihan Soal (Himpunan dan Subset)

1. Yang mana diantara himpunan di bawah ini yang sama ?
   {r, t, s}, {s, t, r, s}, {t, s, t, r}, {s, t, s, t}

2. Buatlah Daftar elemen dari himpunan di bawah ini dimana N = {1, 2, 3, …}
   a) $A = \{x : x \in N, 3 < x < 12\}$
   b) $B = \{x : x \in N$, x bilangan genap, $x < 15\}$
   c) $C = \{x : x \in N, 4 + x = 3 \}$

3. Perhatikan himpunan di bawah ini :
   $\varnothing$, A = {1}, B = {1,3}, C = {1, 5, 9}, D = {1, 2, 3, 4, 5}
   isilah simbol yang benar diantara pasangan himpunan di bawah ini :
   a) $\varnothing$, A c) B, C e) C, D g) D, E
   b) A, B d) B, E f) C, E h) D, U

4. Yang mana diantara himpunan di bawah ini yang sama ?
   {r, t, s}, {s, t, r, s}, {t, s, t, r}, {s, t, s, t}

5. Buatlah Daftar elemen dari himpunan di bawah ini dimana N = {1, 2, 3, …}
   d) $A = \{x : x \in N, 3 < x < 12\}$
   e) $B = \{x : x \in N$, x bilangan genap, $x < 15\}$
   f) $C = \{x : x \in N, 4 + x = 3 \}$
6. Perhatikan himpunan di bawah ini :
   $\varnothing$, A = {1}, B = {1,3}, C = {1, 5, 9}, D = {1, 2, 3, 4, 5}
   isilah simbol yang benar diantara pasangan himpunan di bawah ini :
   c) $\varnothing$, A c) B, C e) C, D g) D, E
   d) A, B d) B, E f) C, E h) D, U

7. Himpunan yang sama dari himpunan di bawah ini :
   $A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$ C = {x: x N, x<3}
   $B = \{x : x^2 - 3x - 2 = 0\}$ D = {x: x N, x bilangan ganjil , x< 5}
   E = {1, 3, 5, 7, 9 } U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

8. Himpunan yang sama di bawah ini jika U = {a, b, … , z}
   A = {x: x huruf vokal } C = {x: x huruf sebelum F}
   B = {x: x huruf dalam kata letter} D = {x: x huruf dalam kata title}

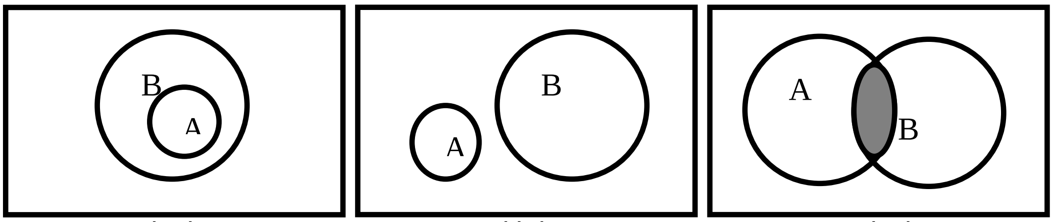
9. A = {1, 2, 3, …, 9} B = {2, 4, 6, 8} C = {1, 3, 5, 7, 9} D ={3, 4, 5} E = { 3, 5}
   Dari himpunan di atas, himpunan mana yang dapat menggantikan himpunan x yang memenuhi kondisi di bawah ini :
   a) x dan B tidak berhubungan c) $x \subseteq A$ tetapi $x \not\subset C$
   b) $x \subseteq D$ tetapi $x \not\subset B$ d) $x \subseteq C$ tetapi $x \subseteq A$

10. Himpunan yang sama di bawah ini jika U = {a, b, … , z}
    A = {x: x huruf vokal }   C = {x: x huruf sebelum F}
    B = {x: x huruf dalam kata letter}   D = {x: x huruf dalam kata title}

11. A = {1, 2, 3, …, 9} B = {2, 4, 6, 8}   C = {1, 3, 5, 7, 9} D ={3, 4, 5} E = { 3, 5}
    Dari himpunan di atas, himpunan mana yang dapat menggantikan himpunan x yang memenuhi kondisi di bawah ini :
    b) x dan B tidak berhubungan   c) $x \subseteq A$ tetapi $x \not\subset C$
    b) $x \subseteq D$ tetapi $x \not\subset B$ d) $x \subseteq C$ tetapi $x \subseteq A$

1.6. Diagram Venn

Diagram Venn adalah representasi gambar dari himpunan yang mana himpunan yang direpresentasikan disertai bidang gambarnya.
Himpunan semesta digambarkan dengan daerah dalam empat persegi panjang, dan himpunan lain digambarkan dalam empat persegi panjang.
Jika $A \subseteq B$, maka dalam gambar lingkaran A berada dalam lingkaran B. (Gambar 1.1.(a)).
Jika A dan B tidak berhubungan, maka tidak ada elemen dalam irisan, gambarnya seperti pada gambar 1.1.(b).
Walau bagaimanapun, A dan B adalah dua himpunan yang berubah-ubah, ada kemungkinan beberapa objek ada di dalam A tetapi tidak di dalam B, beberapa di dalam B tetapi tidak di dalam A, beberapa ada di dalam A dan B, dan beberapa tidak berada di dalam A dan B. (Gambar 1.1(c)).



(a)   (b)   (c)

Gambar 1.1

1.7. Diagram Venn dan Argumentasi

Banyak pernyataan verbal yang masalah pokoknya tentang himpunan dan dapat dijelaskan dengan diagram venn.
Diagram venn kadang-kadang digunakan untuk memperkirakan sebuah argumen valid atau tidak.

Contoh 1.3

Lihatlah argumen di bawah ini adalah valid.

S_1 : Panci bergagang punya saya terbuat dari kaleng
S_2 : Saya melihat semua kehadiran kamu sangat berguna
S_3 : Tidak ada panci saya yang sedikitpun berguna .
S : Kehadiran anda bagi saya tidak terbuat dari kaleng.

(Pernyataan S1, S2 dan S3 di atas diasumsikan garis horisontal, dan pernyataan S di bawahnya dituliskan sebagai kesimpulan. Argumen dikatakan valid jika kesimpulan S secara logika diambil dari asumsi S1, S2 dan S3).
S1 adalah objek dari kaleng yang merupakan bagian dari himpunan panci bergagang dan himpunan sesuatu yang berguna adalah tidak berhubungan.

Gambar 1.2

S2 adalah himpunan “kehadiran anda” adalah subset dari himpunan sesuatu yang berguna.

Gambar 1.3

Kesimpulannya adalah valid dengan diagram venn di atas, sebab himpunan “kehadiran anda” tidak berhubungan dengan objek kaleng.

Latihan Soal (Diagram Venn)

1. Perhatikan gambar 1(c), beri arsir untuk ekspresi di bawah ini :
   a) $A \cap B'$
   b) $(B \cup A)'$

2. Aturan distribusi untuk diagram venn $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, jika ketiga himpunan saling beririsan, Gambarkan diagram venn-nya

3. Validasi argumen di bawah ini dengan diagram Venn !

   S_1 : Semua Temanku adalah Dosen
   S_2 : Aris adalah temanku
   S_3 : Tetanggaku tidak ada yang Dosen .
   S : Aris bukan tetanggaku

1.8. Operasi Himpunan

Pada bagian ini akan dijelaskan beberapa operasi yang penting dari himpunan.

1.8.1. Gabungan dan Irisan

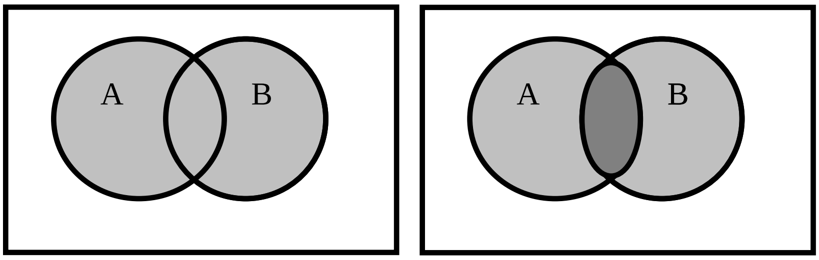
Gabungan dari dua himpunan A dan B dapat dituliskan $A \cup B$, adalah himpunan yang semua elemennya anggota A atau anggota B,
ini berarti

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Disini “OR” digunakan dalam pengertian dari and / or.
Gambar 1.4.(a) yang mana $A \cup B$ adalah yang diarsir. Irisan dari dua himpunan A dan B, dituliskan dengan $A \cap B$ adalah himpunan dari elemen yang menjadi anggota keduanya (A dan B),
ini berarti

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Gambar 1.4(b) yang diarsir adalah merupakan diagram venn dari $A \cap B$.
Jika $A \cap B = \varnothing$, maka jika A dan B tidak mempunyai elemen yang berada dalam irisan maka A dan B dapat dikatakan tidak berhubungan atau tidak ada irisan.



(a) (b)

Gambar 1.4

Contoh 1.4

a) $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5,6,7\}$ $C = \{2,3,5,7\}$ maka

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $A \cap B = \{3,4\}$
$A \cup C = \{1,2,3,4,5,7\}$ $A \cap C = \{2,3\}$

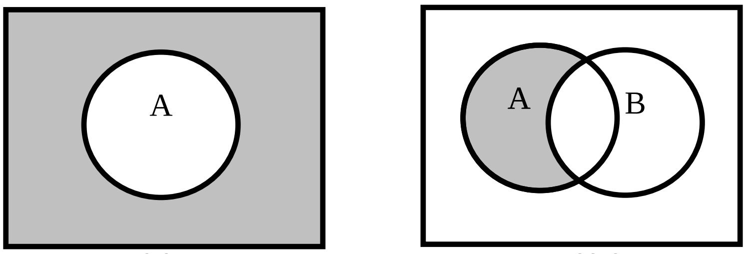
b) M adalah himpunan dari mahasiswa pria di sebuah univresitas C, dan F adalah himpunan dari mahasiswa wanita di universitas C. Maka jika semua mahasiswa di C adalah anggota dari $M \cup F$, disisi lain $M \cap F = \varnothing$, jika tidak ada mahasiswa yang menjadi anggota keduanya.
Operasi himpunan termasuk hubungan tertutup untuk operasi gabungan atau irisan.

Teorema 2

Beberapa operasi ini adalah ekuivalen : $A \subseteq B$, $A \cap B = A$ dan $A \cap B = B$

1.8.2. Komplemen

Komplemen mutlak atau sederhananya komplemen dari himpunan A, dituliskan sebagai A', dimana elemen himpunan adalah anggota U tetapi bukan anggota A.
Ini berarti $A' = \{x : x \subseteq U, x \not\subset A\}$.
Beberapa buku lain menuliskan komplemen dari A dengan A^c atau $\bar{A}$.
Pada gambar 1.5.(a) diagram yang diarsir adalah komplemen dari A.



(a) (b)

Gambar 1.5

Komplemen relatif dari himpunan B yang berkenaan dengan himpunan A atau sederhananya perbedaan dari A dan B yang ditulis dengan A \ B adalah dibaca himpunan elemen anggota dari A yang tidak menjadi anggota dari B,
berarti

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

Himpunan A \ B dibaca “A kurang B”. Banyak buku yang menuliskan A \ B dengan A - B atau A ~ B.
Gambar 1.5(b) adalah diagram dalam hal A \ B.

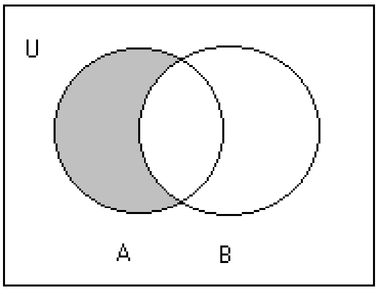
Contoh 1.5

$U = N\ \{1,2,3,...\}$, nilai integer postif adalah himpunan semesta.
$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5,6,7\}$ $C = \{6,7,8,9\}$ dan
$E = \{2,4,6,8,...\}$ bilangan genap integer yang lebih besar dari $\varnothing$.

Maka :
$A' = \{ 5, 6, 7, 8 \}$, $B' = \{ 1, 2, 8, 9, 10, ... \}$, $C' = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, ... \}$
dan
$A\setminus B = \{ 1, 2 \}$, $B\setminus C = \{ 3, 4, 5 \}$, $B\setminus A = \{ 5, 6, 7 \}$, $C\setminus E = \{ 7, 9 \}$
juga
$E' = \{ 1, 3, 5, ... \}$, bilangan ganjil integer yang lebih besar dari 0.

1.8.3. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 18.
(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$
(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

1.8.4. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 19.
Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.
(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
(iii) "Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

Teorema 3. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:
(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

1.8.5. Perkalian Kartesian (cartesian product)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh 20.
(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka
$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:
1. Jika *A* dan *B* merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.

3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong. Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Contoh 21. **Misalkan**
A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?
Jawab:
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 22. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:
(a) $P(\emptyset)$ (b) $\emptyset \times P(\emptyset)$ (c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:
(a) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
(b) $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$ (ket: jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = \emptyset$)
(c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset) = \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset)\}$
$P(P(\{3\})) = P(\{ \emptyset, \{3\} \}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\} \}$

1.9. Hasil Mendasar

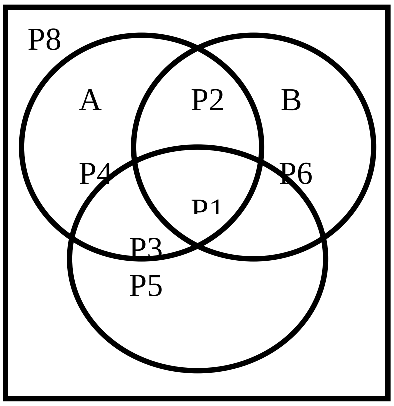
Perhatikan, n adalah himpunan nyata $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$.
Hasil mendasar dari himpunan adalah bentuk dari himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots, A_n$$

Dimana A_i adalah juga A_i * atau A_i'.
Dituliskan bahwa
(1) ada 2^n banyaknya hal yang mendasar.
(2) lebih dari dua hal mendasar yang tidak saling berhubungan.
(3) himpunan semesta adalah gabungan dari semua hal mendasar.

Contoh 1.6

Perhatikan himpunan A,B dan C. Perhatikan juga daftar 8 hasil yang mendasar dari ketiga himpunan tersebut.

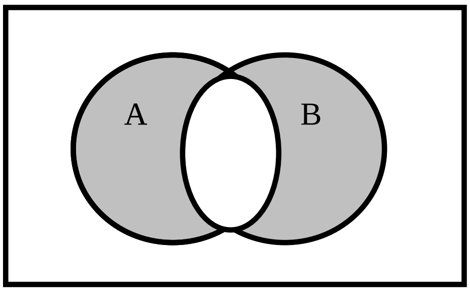


Gambar 1.6

8 hasil korespondensi dalam diagram venn digambarkan secara tepat dalam 8 daerah yang tidak saling berhubungan dari himpunan A,B dan C.

1.10. Perbedaan Simetri (Jumlah Dua Himpunan)

Perbedaan simetri dari himpunan A dan B dapat dituliskan dengan A + B, berisi elemen yang merupakan anggota A atau anggota B tetapi bukan anggota keduanya. Ini berarti :



$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
atau dapat juga ditulis
$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Gambar 1.7

Sebagai contoh :

> A = {1,2,3,4,5,6} dan B = {4,5,6,7,8,9}
> maka
> A\B = {1,2,3} B\A = {7,8,9} dan juga $A \oplus B$ {1,2,3,7,8,9}

Latihan Soal (Operasi Himpunan)

1. A = {1,2,3,4,5}, B = {4,5,6,7}, C = {5,6,7,8,9}, D = {1,3,5,7,9}, E = {2,4,6,8}, F = {1,5,9}
   Cari
   a) $A \cup B$ dan $A \cap B$
   b) $B \cup D$ dan $B \cap D$
   c) $A \cup C$ dan $A \cap C$
   d) $A \cup E$ dan $A \cap E$
   e) $E \cup E$ dan $E \cap E$
   f) $D \cup F$ dan $D \cap F$

2. Dengan kondisi himpunan seperti pada nomor 1, Cari :
   a) A’, B’, D’, E’,
   b) A\B, B\A , D\E, F\D
   c) $A \oplus B$, $C \oplus D$, $E \oplus F$

3. Dengan kondisi himpunan seperti pada nomor 1, Cari :
   a) $A \cap (B \cup E)$
   b) (A\E)
   c) $(A \cap D)\setminus B$
   d) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

4. Buktikan bahwa $A \cap B = A \cap B$ tanpa harus A = C

1.11. Aljabar Himpunan dan Prinsip Dualitas

Himpunan menurut operasi gabungan (union), irisan (intersection) dan komplemen (complement) akan memenuhi hukum yang merupakan identitas.
Ada dua cara untuk membuktikan persamaan yang terlibat dalam operasi himpunan. Cara pertama adalah dengan menggunakan apa arti dari sebuah objek x menjadi elemen dari setiap bagian dan cara lain dengan menggunakan diagram venn.
Perhatikan Hukum Pertama De Morgan’s. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

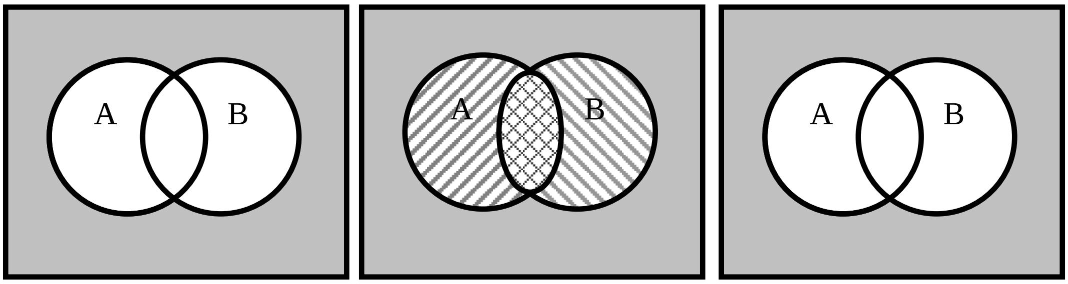
1.11.1. Hukum-hukum Aljabar dari Himpunan

	Hukum Idempoten	
1a.	$A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
	Hukum Asosiatif	
2a.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	Hukum Komutatif	
3a.	$A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
	Hukum Distributif	
4a.	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	4b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B) \cup(A\cap C)$
	Hukum Identitas	
5a.	$A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6a.	$A \cup U = U$	6b. $A \cap U = A$
	Hukum Involusi	
	7. $(A')' = A$	
	Hukum Komplemen	
8a.	$A \cup A' = U$	8b. $A \cap A' = \varnothing$
9a.	$U' = \varnothing$	9b. $\varnothing' = U$
	Hukum De Morgan	
9a.	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	9b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Metoda 1.
Perhatikan bahwa $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
Jika $x \in (A \cup B)'$, maka $x \notin A \cup B$. Selanjutnya $x \notin A$ dan $x \notin B$ dan juga $x \in A'$ dan $x \in B'$. Kesimpulannya $x \in A' \cap B'$.
Selanjutnya lihat bahwa $A' \cap B' = (A \cup B)'$.
Jika $x \in A' \cap B'$ maka $x \in A'$ dan $x \in B'$. Jadi $x \notin A$ dan $x \notin B$.
Kesimpulannya $x \notin A \cup B$, jadi $x \in (A \cup B)'$.

Harus dibuktikan bahwa setiap elemen dari $(A \cup B)'$ adalah anggota dari $A' \cap B'$ dan setiap elemen dari $A' \cap B'$ anggota dari $(A \cup B)'$.
Secara bersamaan pembuktian "inklusif" ini membuktikan bahwa himpunan mempunyai elemen yang sama, maka $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Metoda 2.
Dari diagram venn untuk $A \cup B$ dalam gambar 1.4(a), dapat dilihat bahwa $(A \cup B)'$ adalah digambarkan dengan daerah yang diarsir pada gambar 1.8.(a). Untuk menemukan $A' \cap B'$, daerah dari keduanya A' dan B' digambarkan berbeda antara daerah A' dengan B' (gambar 1.8.(b)). Kemudian $A' \cap B'$ digambarkan dengan diagram venn seperti pada gambar 1.8.(c). Jika $(A \cup B)'$ dan $A' \cap B'$ digambarkan dengan daerah yang sama, maka keduanya adalah sama.



(a) $(A \cup B)'$ (b) A' ///////// B' \\\\\\\\\ (c) $A' \cap B'$

Gambar 1.8

1.11.2. Dualitas

Aturan aljabar yang ditulis pada tabel di atas, diatur secara berpasangan (2a & 2b). E adalah persamaan dari aljabar himpunan. “Dual” E dari E adalah persamaan yang dihasilkan melalui pertukaran setiap kejadian dari $\cup$, $\cap$, U dan $\varnothing$ di dalam E oleh $\cup$, $\cap$, $\varnothing$ dan U.
Sebagai contoh :

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A \text{ adalah } (\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Perhatikan bahwa pasangan dari tabel 1.1. adalah dual satu sama lain. Hal ini merupakan kenyataan dari aljabar himpunan yang dinamakan prinsip dualitas. Jika setiap persamaan E adalah identitas, maka E* adalah juga identitas.

Latihan Soal (Himpunan Aljabar dan Dualitas)

1. Buatlah diualitas darii setiap persamaan himpunan di bawah ini !
   a) $(U \cap A) \cup (C \cap A) = A$
   b) $(A \cup B \cup C)' = (A \cup C)' \cap (A \cup B)'$
   c) $(A \cap U) \cap (\varnothing \cup A') = \varnothing$
   d) $(A \cap U)' \cap A = \varnothing$
2. Buktikan $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Catatan

Jika A dan B adalah himpunan terbatas yang tidak berhubungan, maka $A \cup B$ adalah terbatas dan $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

1.12. Himpunan Terbatas dan prinsip menghitung

Himpunan dikatakan terbatas jka berisi M secara pasti dan jelas dimana M dituliskan sebagai beberapa nilai integer non negatif. Dengan kata lain himpunan dikatakan terbatas. Sebagai contoh, himpunan kosong $\varnothing$ dan himpunan alfabet bahasa Inggris adalah himpunan terbatas.
Terangkan himpunan dari nilai bilangan genap positif {2,4,6,...} adalah himpunan tidak terbatas. Notasi n (A) adalah penulisan dari jumlah elemen dalam himpunan terbatas dari A. Beberapa buku lain menggunakan notasi # (A), $|A|$ atau kartu (A).

Pembuktian
Dalam menghitung elemen dari $A \cup B$, yang pertama dihitung adalah yang berada dalam himpunan A.
Disana ada n(A). Elemen lain dari $A \cup B$ adalah elemen yang berada di B tetapi tidak berada di A. Tetapi jika A dan B tidak berhubungan, tidak ada elemen dari B yang ada di A, jadi ada n(B) elemen yang berada di B tetapi tidak berada di A.
Oleh karena itu $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Teorema 4

Jika A dan B adalah himpunan terbatas, maka $A \cup B$ dan $A \cap B$ adalah terbatas dan $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Hasil ini dapat diaplikasikan untuk menghasil
kan sebuah rumus yang sama untuk tiga himpunan

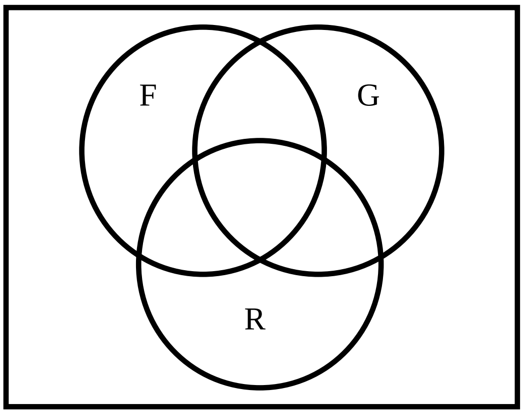
Pewarnaan 1
Jika A,B dan C adalah himpunan terbatas,
maka $A \cup B \cup C$, dan
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Contoh 1.7

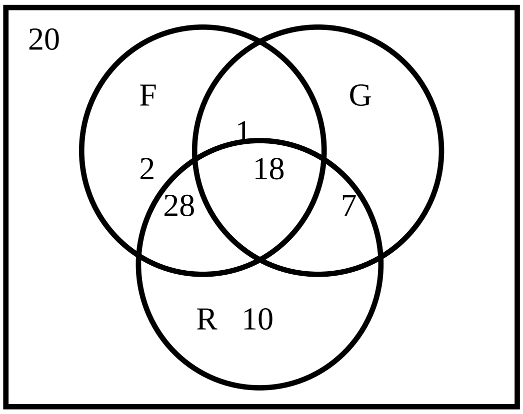
Perhatikan misalnya 120 mahasiswa matematika di sebuah perguruan tinggi yang menyukai bahasa Perancis, Jerman dan Rusia.

65 mahasiswa belajar bahasa Perancis
45 mahasiswa belajar bahasa Jerman
42 mahasiswa belajar bahasa Rusia
20 mahasiswa belajar bahasa Perancis dan Jerman
25 mahasiswa belajar bahasa Perancis dan Rusia
15 mahasiswa belajar bahasa Jerman dan Rusia
8 mahasiswa belajar seluruh bahasa

F,G,R digunakan sebagai himpunan mahasiswa yang belajar bahasa Perancis, Jerman dan Rusia. Cari jumlah mahasiswa yang minimal belajar satu bahasa dan isikan nilainya pada masing-masing daerah seperti pada gambar 1.9.
Persoalan di atas dapat digambarkan dalam diagram venn seperti dibawah ini :



Gambar 1.9



Gambar 1.10

Latihan Soal (Himpunan Terbatas dan Prinsip Menghitung)

Dengan pewarnaan 1

$(F \cup G \cup R) = n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) - n(F \cap R) - n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R)$
$= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100$

berarti $n(F \cup G \cup R) = 100$ mahasiswa yang belajar minimal satu dari tiga bahasa.
Dengan menggunakan hasil tersebut, maka diagram venn dapat diisi dengan jumlah mahasiswa pada masing-masing bagiannya.

8 mahasiswa yang belajar 3 bahasa
20 - 8 = 12 mahasiswa belajar bahasa perancis & Jerman tetapi tidak Rusia
25 - 8 = 17 mahasiswa belajar bahasa Perancis & Rusia tetapi tidak Jerman
15 - 8 = 7 mahasiswa belajar bahasa Jerman & Rusia tetapi tidak Perancis
65 - 12 - 8 - 17 = 28 mahasiswa belajar bahasa Perancis
45 - 12 - 8 - 7 = 18 mahasiswa belajar bahasa Jerman
42 - 17 - 8 - 7 = 10 mahasiswa belajar bahasa Rusia
120 - 100 = 20 mahasiswa yang tidak belajar bahasa

Perhatikan bahwa 28 + 18 + 10 = 56 mahasiswa yang belajar hanya satu bahasa.
Jika ditampilkan dalam diagram Venn, hasilnya akan tampak seperti pada gambar 1.10.

1. Periksa himpunan di bawah ini, mana yang termasuk himpunan terbatas ?
   a) himpunan garis pararel yang melalui sumbu x
   b) himpunan dari huruf dalam alfabet
   c) himpunan bilangan kelipatan 5
   d) himpunan binatang yang tinggal di bumi
   e) himpunan bilangan yang dapat menyelesaikan persamaan
      $x^{26} + 26x^{18} +- 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$
   f) himpunan lingkaran yang melalui titik (0,0)

2. Hasil survey pada sampel dari 25 mobil baru yang terjual di dealer lokal, pembeli selalu memperhatikan tiga hal pilihan yang populer (A) AC Mobil (R) Radio dan (W) Power Windows yang terpasang pada mobil yang akan dijual. Data hasil survey :
   15 memakai AC
   12 memakai Radio
   11 memakai Power Windows
   5 memakai AC dan Power Windows
   9 memakai AC dan Radio
   4 memakai Radio dan Power Windows
   3 memakai semuanya

   Cari jumlah mobil yang mempunyai
   a) hanya power windows
   b) hanya AC
   c) hanya radio
   d) radio dan power windows
   e) AC dan radio
   f) Hanya satu pilihan
   g) Minimal satu pilihan
   h) Tidak ada pilihan

1.13. Kelas dari Himpunan, Himpunan Kuasa, Partisi

Sebuah himpunan S mempunyai subset atau sebuah himpunan dari beberapa himpunan.

Agar tidak membingungkan, biasanya dinamakan kelas dari himpunan atau kumpulan dari himpunan.
Jika memperhatikan beberapa himpunan dalam kelas himpunan, maka akan dibahas juga subkelas (subclass) atau subkumpulan (subcollection).

Contoh 1.8

S = {1,2,3,4}. A adalah kelas subset dari himpunan S yang tepat berisi tiga himpunan dari S.

Maka A = [{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4}],
elemen dari A adalah himpunan {1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4},

B adalah kelas dari subset dari S yang berisi 2 dan dua elemen lainnya dari S.
Maka : B = [{1,2,3},{1,2,4},{2,3,4}]

elemen dari B adalah himpunan {1,2,3},{1,2,4},{2,3,4}. Jadi B adalah subkelas dari A, jika setiap elemen dari B adalah juga elemen dari A.

1.13.1. Himpunan Kuasa

Dengan memberikan S sebagai himpunan, maka selanjutnya boleh membahas kelas dari semua subset dari S. Kelas ini biasanya dinamakan himpunan kuasa dari S, dan akan dituliskan Power (S). Jika S adalah himpunan terbatas, maka adalah Power (S). Kenyataannya, jumlah dari elemen di dalam Power (S) adalah 2 yang dikembangkan ke kekuatan dari S; ini berarti n(Power (S)) = $2^{n(s)}$ atau 2^s.

Contoh 1.9

S = {1,2,3}, maka Power (S) = [∅,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3,},S].

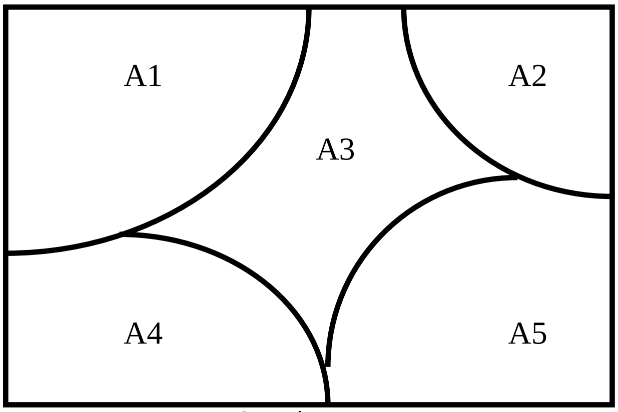
Perhatikan bahwa himpunan ∅ adalah anggota Power (S) jika ∅ adalah subset dari S. Sama dengan, S anggota dari Power (S). Seperti contoh di atas maka Power (S) mempunyai $2^3 = 8$ elemen.

1.13.2. Partisi

S adalah himpunan yang tidak kosong. Partisi dari S adalah subdivisi dari S yang tidak saling tumpang tindih (subset himpunan yang tidak kosong). Tepatnya partisi dari S adalah kumpulan $\{A_i\}$ dari subset yang tidak kosong dari S yang berarti:

i. setiap a di dalam S adalah anggota salah satu dari A_i
ii. himpunan dari $\{A_i\}$ adalah saling tidak berhubungan satu sama lain yang berarti jika $A_i \neq A$ maka $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Subset dalam partisi dinamakan sel (cells). Di bawah ini diperlihatkan gambar diagram venn partisi dari empat persegi panjang himpunan S yang terbagi menjadi lima sel A_1,A_2,A_3,A_4,A_5.



Gambar 11

Contoh 1.10

Perhatikan kumpulan subset dari S = {1,2,.....,8,9} dibawah ini :

i) [{1,3,5},{2,6},{4,8,9}]
ii) [{1,3,5},{2,4,6,8},{5,7,9}]
iii) [{1,3,5},{2,4,6,8},{7,9}]

maka :

i) bukan partisi dari S jika 7 di dalam S bukan anggota dari semua subset. Lebih jauh,
ii) bukan partisi dari S jika {1,3,5} dan {5,7,9} tidak berhubungan. Disisi lain
iii) {1,3,5},{2,4,6,8},{7,9} adalah partisi dari S.

1.14. Operasi himpunan yang diperumum

Operasi himpunan dari gabungan dan irisan telah didefinisikan di atas dengan dua himpunan. Operasi ini dapat diperluas ke dalam sejumlah himpunan terbatas atau tidak terbatas, seperti dibawah ini :

Perhatikan jumlah terbatas dari himpunan, katakan $A_1, A_2, \ldots A_m$. Gabungan dan irisan dari himpunan ini dituliskan dan didefinisikan dengan :

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \cup^{m}_{i=1} A_i = \{x : x \in A_i$ untuk beberapa $A_i\}$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m = \cap^{m}_{i=1} A_i = \{x : x \in A_i$ untuk setiap $A_i\}$

ini berarti bahwa gabungan berisi elemen yang menjadi anggota minimal sebuah himpunan, dan irisan berisi elemen yang menjadi anggota semua himpunan. A adalah kumpulan dari beberapa himpunan.

Gabungan dan irisan dari himpunan dalam kumpulan A dituliskan dan didefinisikan dengan :

$\cup (A : A \in A) = \{x : x \in A$ untuk beberapa $A \in A\}$

$\cap (A : A \in A) = \{x : x \in A$ untuk semua $A \in A\}$

ini berarti bahwa gabungan berisi elemen yang menjadi anggota paling sedikit satu himpunan dalam kumpulan A, dan irisan berisi elemen yang beranggotakan setiap himpunan dari kumpulan A.

Contoh 11

$A_1 = \{1,2,3,\ldots\} = N_1$ $A_2 = \{2,3,4,\ldots\}$ $A_3 = \{3,4,5,\ldots\}$ $A_n = \{n,n+1,n+2,\ldots\}$
maka gabungan dan irisan dari himpunan di atas adalah :
$\cup (A_n : n \in N) = N$ dan $(A_n : n \in N) = \varnothing$

Hukum De Morgan's juga digunakan untuk operasi himpunan yang diperumum di atas ini berarti :

Teorema 4

A adalah kumpulan himpunan, maka :

i) $(\cup (A : A \in \mathcal{A}))' = \cap (A : A \in \mathcal{A})$

ii) $(\cap (A : A \in \mathcal{A}))' = \cup (A : A \in \mathcal{A})$

Latihan Soal (Kelas dari Himpunan, Himpunan Kuasa, Partisi)

1. Cari elemen dari himpunan [A, { 1, 2, 3 }, { 4, 5 },{6, 7, 8 }]
2. Cari Himpunan kuasa (A) dari A { a, b, c, d }
3. Perhatikan bahwa kelas A dari himpunan dalam soal No. 1. Ekspresi di bawah ini benar atau salah.
   a) $1 \in A$ b) $\{ 1, 2, 3 \} \subseteq A$ c) $\{ 6, 7, 8 \} \in A$
   d) $\{ 6 \{ 4, 5 \}\} \subseteq A$ e) $\varnothing \in A$ f) $\varnothing \subseteq A$
4. S = { merah, biru, hijau, kuning }. Ekspresi di bawah ini yang menyatakan partisi dari S adalah :
   a) P_1 = [{merah}, { biru,hijau}] b) P_2 = [{merah, biru, hijau, kuning}]
   c) P_3 = [∅,{merah, biru}, { hijau, kuning}]
   d) P_4 = [{ biru }{merah, kuning, hijau }]

1.15. Induksi matematika

Sebuah batasan yang penting dari sebuah himpunan :

N : {1,2,3,...}

yang digunakan dalam beberapa pembuktian.

1.15.1. Prinsip dari Induksi Matematik 1

Misalkan P adalah dalil yang didefinisikan sebagai integer positif N. P(n) adalah juga benar atau salah untuk setiap n di dalam N. Andaikan P mempunyai dua batasan :

i) P(1) adalah TRUE

ii) P(n+1) adalah TRUE ketika P(n) adalah TRUE

kemudian P adalah benar untuk setiap nilai bilangan bulat positif, prinsip ini tidak seharusnya dibuktikan. Kenyataannya, prinsip ini biasanya diberikan sebagai satu aksioma ketika N dikembangkan secara aksioma.

Contoh 12

P dalil yang menjumlahkan n bilangan ganjil pertama adalah n^2, ini berarti

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

bilangan ganjil yang ke n adalah 2n-1, dan bilangan ganjil yang selanjutnya adalah 2n + 1. Perhatikan bahwa P(n) adalah TRUE untuk n = 1, ini berarti $P(1):1 = 1^2$.

Asumsikan P(n) adalah TRUE, tambahkan 2n + 1 pada kedua sisi, P(n) isinya menjadi

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n +1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

yang berarti P(n+1). Ini berarti P(n+1) adalah TRUE ketika P(n) adalah TRUE. Dengan prinsip induksi matematik, P adalah TRUE untuk semua n.

Ada bentuk prinsip induksi matematik yang kadang-kadang lebih sesuai untuk digunakan. Walaupun kelihatannya berbeda, ini benar-benar sama dengan prinsip induksi matematika.

1.15.2. Prinsip dari Induksi Matematika II

P dalil yang diterangkan sebagai bilangan integer positif N yang berarti :

i) P(1) adalah TRUE
ii) P(n) adalah TRUE ketika P(k) adalah TRUE untuk semua $1 \leq k < n$

maka P adalah TRUE untuk semua bilangan integer positif.

Catatan

Kadang-kadang untuk membuktikan sebuah dalil P adalah TRUE untuk himpunan bulat {a,a+1,a+2,...} dimana a adalah setiap bilangan bulat, mungkin 0.
Hal ini dapat dikerjakan dengan penempatan sederhana angka 1 di a dalam prinsip induksi matematika di atas.

BAB I3

MATRIK

- Matriks adalah adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.
- Dalam praktek, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas $A = [a_{ij}]$.

Contoh 1. Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

Contoh 2. Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.

Contoh 3. Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1. Relasi

- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a\ R\ b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungankan dengan b oleh R
- $a \not{R}\ b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R.
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 3.
Misalkan

A = {Amir, Budi, Cecep}, B = {IF221, IF251, IF342, IF323}
$A \times B$ = {(Amir, IF221), (Amir, IF251), (Amir, IF342),
(Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251),
(Budi, IF342), (Budi, IF323), (Cecep, IF221),
(Cecep, IF251), (Cecep, IF342), (Cecep, IF323) }

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

R = {(Amir, IF251), (Amir, IF323), (Budi, IF221),
(Budi, IF251), (Cecep, IF323) }

- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
- (Amir, IF251) $\in R$ atau Amir R IF251
- (Amir, IF342) $\notin R$ atau Amir $\not{R}$ IF342.

Contoh 4. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15) \}$

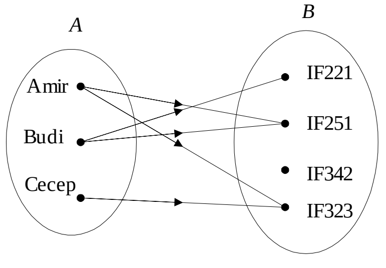
- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

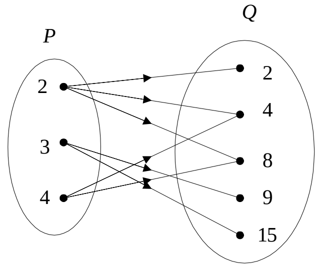
Contoh 5. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

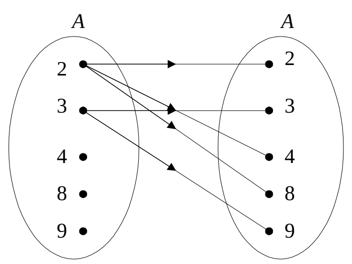
$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$

2.1.1. Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah







2. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \mathrm{M} \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \Lambda & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \Lambda & m_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ m_{m1} & m_{m2} & \Lambda & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 6. Relasi R pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini, a_1 = Amir, a_2 = Budi, a_3 = Cecep, dan b_1 = IF221, b_2 = IF251, b_3 = IF342, dan b_4 = IF323.

Relasi R pada Contoh 4 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

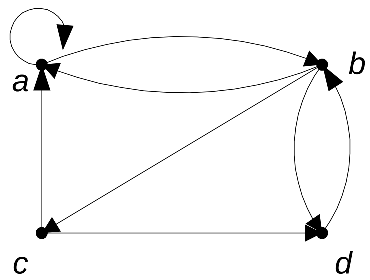
4. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
- Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*. Simpul *a* disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul *b* disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).

- Pasangan terurut (*a*, *a*) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh 7. Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



2.1.2. Sifat-sifat Relasi Biner

- Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

1. **Refleksif** (*reflexive*)

- Relasi *R* pada himpunan *A* disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

- Relasi *R* pada himpunan *A* tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 8. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi *R* di bawah ini didefinisikan pada himpunan *A*, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (*a*, *a*), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

Contoh 9. Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 10.
Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

R : *x* lebih besar dari *y*, $S : x + y = 5$, $T : 3x + y = 10$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2) bukan anggota *R*, *S*, maupun *T*.

■

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau m_{ii} = 1, untuk i = 1, 2, …, n,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \mathrm{O} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. **Menghantar** (*transitive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 11. Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka
(a) R = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk		
(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

(b) R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak manghantar karena
(c) (2, 4) dan (4, 2) $\in R$, tetapi (2, 2) $\notin R$, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in R$, tetapi (4, 3) $\notin R$.

(d) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) } jelas menghantar
(e) Relasi R = {(1, 2), (3, 4)} menghantar karena tidak ada
$(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.
(f) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4, 5)} selalu menghantar.

Contoh 12.
Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c. Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga $b = ma$ dan $c = nb$. Di sini $c = nma$, sehingga a habis membagi c. Jadi, relasi "habis membagi" bersifat menghantar.

Contoh 13.
Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.
R : x lebih besar dari y, S : $x + y = 6$, T : $3x + y = 10$
- R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- S tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S tetapi (4, 4) $\notin S$.
- T = {(1, 7), (2, 4), (3, 1)} menghantar.

- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari a ke b dan dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.

3. **Setangkup** (*symmetric*) dan **tak-setangkup** (*antisymmetric*)
   - Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.
   - Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.
   - Relasi R pada himpunan A disebut **tolak-setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$.
   - Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.
   - Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$.

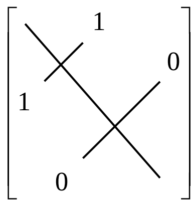
Contoh 14.
Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka
(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.
(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.
(c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ tolak-setangkup karena $1 = 1$ dan $(1, 1) \in R$, $2 = 2$ dan $(2, 2) \in R$, dan $3 = 3$ dan $(3, 3) \in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.
(d) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$ dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.
(e) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$ tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi $(2, 4)$ dan $(4, 2)$ anggota R. Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.
(f) Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ setangkup dan juga tolak-setangkup, dan $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ tidak setangkup tetapi tolak-setangkup.
(g) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ tidak setangkup maupun tidak tolak-setangkup. R tidak setangkup karena $(4, 2) \in R$ tetapi $(2, 4) \notin R$. R tidak tolak-setangkup karena $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \in R$ tetap $2 \neq 3$.

Contoh 15.
Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in R$ tetapi $(4, 2) \notin R$. Relasi "habis membagi" tolak-setangkup karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in R$ dan $4 = 4$.

Contoh 16.
Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

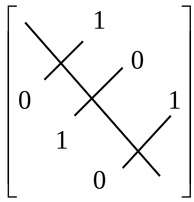
R : x lebih besar dari y, $S : x + y = 6$, $T : 3x + y = 10$

- R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- S relasi setangkup karena $(4, 2)$ dan $(2, 4)$ adalah anggota S.
- T tidak setangkup karena, misalkan $(3, 1)$ adalah anggota T tetapi $(1, 3)$ bukan anggota T.
- S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(4, 2) \in S$ tetapi $4 \neq 2$.
- Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!).
   - Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$:



- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

2.1.3. Relasi Inversi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 17. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

maka kita peroleh

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Mengkombinasikan Relasi

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 18.
Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.
Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ dan $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Contoh 19.
Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5. Komposisi Relasi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh
  $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C,$
  dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$ $\}$

Contoh 20. Misalkan

$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$

adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

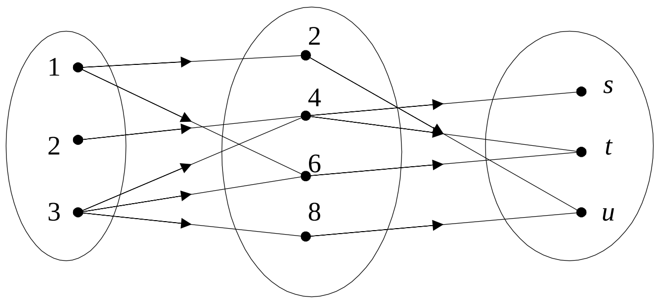
$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

  $$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

  yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Contoh 21.

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \,.\, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.6. Relasi *n-ary*

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).
- Jika n = 2, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.

- Misalkan A_1, A_2, …, A_n adalah himpunan. Relasi *n-ary* R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Himpunan A_1, A_2, …, A_n disebut daerah asal relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 22.
Misalkan

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019,
13598021, 13598025}
Nama = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}
MatKul = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data,
Arsitektur Komputer}
Nilai = {A, B, C, D, E}

Relasi *MHS* terdiri dari 5-tupel (*NIM*, *Nama*, *MatKul*, *Nilai*):

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

MHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A),
(13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B),
(13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D),
(13598015, Irwan, Algoritma, C),
(13598015, Irwan, Struktur Data C),
(13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B),
(13598019, Ahmad, Algoritma, E),
(13598021, Cecep, Algoritma, A),
(13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B),
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B),
(13598025, Hamdan, Algoritma, A, B),
(13598025, Hamdan, Struktur Data, C),
(13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B)
}

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

- Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.
- Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*). Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.
- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.
- Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.
- Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.
- Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.
- Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).
- Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.
- Contoh *query*:
  "tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah
  Matematika Diskrit"
  "tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"
  "tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata
  kuliah yang diambil"
- *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.
- Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

Seleksi
Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.
Operator: σ

Contoh 23.
Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul="Matematika Diskrit"}}\ (\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

Proyeksi
Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.
Operator: π

Contoh 24.
Operasi proyeksi

$$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}}\ (\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$$\pi_{\text{NIM, Nama}}\ (\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 3.5

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

Join
Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.
Operator: τ

Contoh 25. Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 3.7

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8

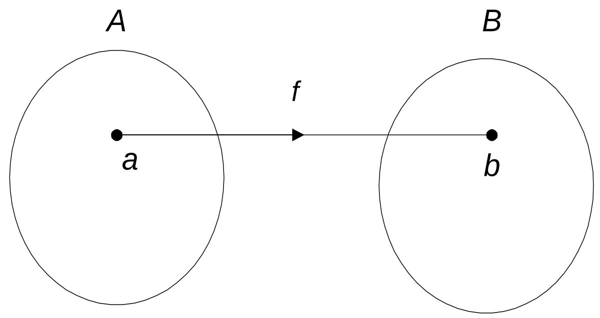
NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

2.2. Fungsi

- Misalkan *A* dan *B* himpunan.
  Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.
  Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan
  $$f : A \rightarrow B$$
  yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.
- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.
- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen *a* di dalam *A* dihubungkan dengan elemen *b* di dalam *B*.
- Jika $f(a) = b$, maka *b* dinamakan **bayangan** (*image*) dari *a* dan *a* dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari *b*.
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan *f* disebut **jelajah** (*range*) dari *f*. Perhatikan bahwa jelajah dari *f* adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari *B*.



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan *A* harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan *f*.
  2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.
- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.
  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.
  3. Kata-kata
     Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".
  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
  if x < 0 then
    abs:=-x
  else
    abs:=x;
end;
```

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

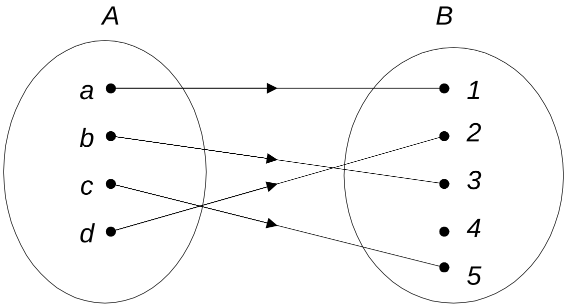
Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

- Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.



Contoh 31. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 32. Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z**. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

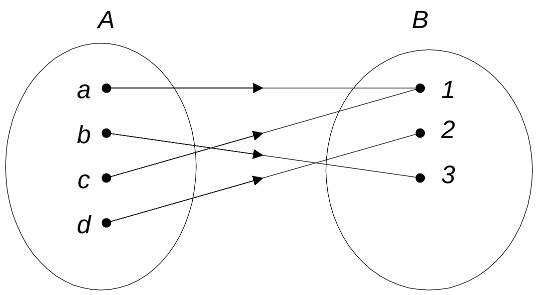
Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,
$a - 1 \neq b - 1$.
Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.

- Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.



Contoh 33. Relasi

$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 34. Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z**. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

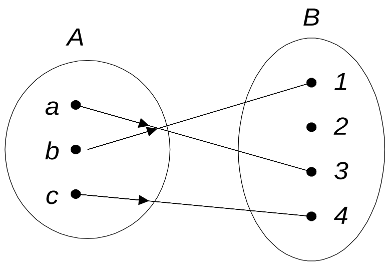
Contoh 35. Relasi

$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$

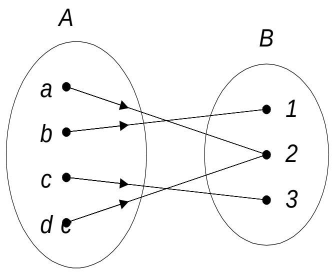
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 36. Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

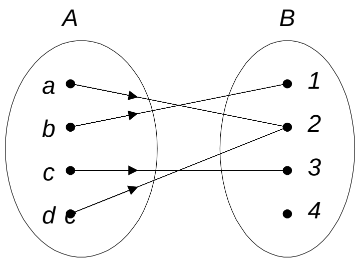
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



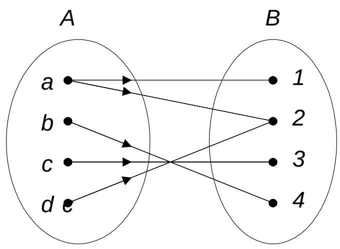
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



- Jika *f* adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari *A* ke *B*, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari *f*.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan *a* adalah anggota himpunan *A* dan *b* adalah anggota himpunan *B*, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 37. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi *f* adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, *f* adalah fungsi *invertible*.

Contoh 38. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.
Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{1}(y) = y + 1$.

Contoh 39. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:
Dari Contoh 3.41 dan 3.44 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah funsgi yang *not invertible*.

2.2.1. Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 40. Diberikan fungsi

$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x) \}$

Contoh 41. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.
Penyelesaian:
(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.
(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

2.2.2. Beberapa Fungsi Khusus

2.2.2.1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Fungsi *ceiling* dari x:

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh 42. Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$	$\lceil 3.5 \rceil = 4$
$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$	$\lceil 0.5 \rceil = 1$
$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$	$\lceil 4.8 \rceil = 5$
$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$	$\lfloor -0.5 \rfloor = 0$
$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$	$\lceil -3.5 \rceil = -3$

Contoh 42. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu *byte* tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*).

2.2.2.2. Fungsi modulo

Misalkan *a* adalah sembarang bilangan bulat dan *m* adalah bilangan bulat positif.

a mod *m* memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila *a* dibagi dengan *m*

a mod *m* = *r* sedemikian sehingga *a* = *mq* + *r*, dengan $0 \le r < m$.

Contoh 43. Beberapa contoh fungsi modulo

25 mod 7 = 4
15 mod 4 = 0
3612 mod 45 = 12
0 mod 5 = 5
–25 mod 7 = 3 (sebab –25 = 7 · (–4) + 3)

2.2.2.3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

2.2.2.4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2.2.2.5. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^{a}\log x \leftrightarrow x = a^y$$

2.2.2.6. Fungsi Rekursif

- Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n$.

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*
Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

- Contoh definisi rekursif dari faktorial:
  (a) basis:
  $n! = 1$, jika $n = 0$
  (b) rekurens:
  $n! = n \times (n - 1)!$, jika $n > 0$

5! dihitung dengan langkah berikut:

(1) $5! = 5 \times 4!$ (rekurens)
(2) $4! = 4 \times 3!$
(3) $3! = 3 \times 2!$
(4) $2! = 2 \times 1!$
(5) $1! = 1 \times 0!$
(6) $0! = 1$

(6') $0! = 1$
(5') $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$
(4') $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$
(3') $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$
(2') $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
(1') $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi, 5! = 120.

Contoh 44. Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

3. Fungsi fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$

BAB II

TEORI BILANGAN

3.1. Bilangan Bulat

- Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0
- Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02.

3.2. Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

- Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$. Kita menyatakan bahwa a **habis membagi** b (*a divides b*) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$.
- Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$. (**Z** = himpunan bilangan bulat)
- Kadang-kadang pernyataan "*a* habis membagi *b*" ditulis juga "*b* **kelipatan** *a*".

Contoh 1: $4 \mid 12$ karena $12 \div 4 = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$. Tetapi $4 \mid 13$ karena $13 \div 4 = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

Teorema 1 (Teorema Euclidean). Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r \qquad (1)$$

dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 2.

(i) 1987 dibagi dengan 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47:

$$1987 = 97 \cdot 20 + 47$$

(ii) –22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi –8 dan sisa 2:

$$-22 = 3(-8) + 2$$

tetapi $-22 = 3(-7) - 1$ salah karena $r = -1$ tidak memenuhi syarat $0 \leq r < n$.

3.3. Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

- Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat tidak nol. Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d \mid a$ dan $d \mid b$. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa PBB(a, b) = d.

Contoh 3.

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;
Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;
Faktor pembagi bersama dari 45 dan 36 adalah 1, 3, 9
PBB(45, 36) = 9.

Teorema 2. Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga

$$m = nq + r \quad , 0 \leq r < n$$

maka PBB(m, n) = PBB(n, r)

Contoh 3: $m = 60$, $n = 18$,

$$60 = 18 \cdot 3 + 12$$

maka PBB(60, 18) = PBB(18, 12) = 6

3.4. Algoritma Euclidean

Algoritma Euclidean adalah algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat.

Euclid, penemu algoritma Euclidean, adalah seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam bukunya yang terkenal, *Element*.

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat tak negatif dengan
$m \geq n$. Misalkan $r_0 = m$ dan $r_1 = n$.

Lakukan secara berturut-turut pembagian untuk memperoleh

$$
\begin{array}{ll}
r_0 = r_1 q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 \leq r_1, \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 \leq r_2, \\
\vdots & \\
r_{n-2} = r_{n-1}\, q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n \leq r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_n + 0 &
\end{array}
$$

Menurut Teorema 2,

$$\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(r_0, r_1) = \text{PBB}(r_1, r_2) = \ldots =$$
$$\text{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{PBB}(r_{n-1}, r_n) = \text{PBB}(r_n, 0) = r_n$$

Jadi, PBB dari m dan n adalah sisa terakhir yang tidak nol dari runtunan pembagian tersebut

- Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n ($m \geq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

Algoritma Euclidean

1. Jika $n = 0$ maka m adalah PBB(m, n);
   stop.
   tetapi jika $n \neq 0$,
   lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.
3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r, lalu ulang kembali ke langkah 1

```
procedure Euclidean(input m, n : integer,
                    output PBB : integer)
      { Mencari PBB(m, n) dengan syarat m dan n bilangan tak-
            negatif dan m ≥ n

  Masukan: m dan n, m ≥ n dan m, n ≥ 0
  Keluaran: PBB(m, n)
}

Deklarasi
   r : integer


Algoritma:
   while n ≠ 0 do
      r←m mod n
      m←n
      n←r
   endwhile
   { n = 0, maka PBB(m,n) = m }
   PBB←m
```

Contoh 4. m = 80, n = 12 dan dipenuhi syarat $m \geq n$

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka PBB(80, 12) = 4.

- PBB dua buah bilangan bulat a dan b dapat dinyatakan sebagai **kombinasi lanjar** (*linear combination*) a dan b dengan dengan koefisien-koefisennya.

Teorema 3. Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga PBB(a, b) = $ma + nb$.

Misalnya PBB(80, 12) = 4 , dan 4 = (-1) · 80 + 7 · 12.

Contoh 5. Nyatakan PBB(60, 18) = 6 sebagai kombinasi lanjar dari 60 dan 18.

3.5. Relatif Prima

- Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan *relatif prima* jika PBB(a, b) = 1.

Contoh 6. 20 dan 3 relatif prima sebab PBB(20, 3) = 1. Begitu juga 7 dan 11 relatif prima karena PBB(7, 11) = 1. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab PBB(20, 5) = 5 ≠ 1.

- Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $ma + nb = 1$ (2)

Contoh 7. Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena PBB(20, 3) =1, atau dapat ditulis 2 . 20 + (–13) . 3 = 1
dengan m = 2 dan n = –13. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena PBB(20, 5) = 5 ≠ 1 sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam m . 20 + n . 5 = 1.

3.6. Aritmetika Modulo

- Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0. Operasi a mod m (dibaca "a modulo m") memberikan sisa jika a dibagi dengan m.
- Notasi: a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
- Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan {0, 1, 2, …, m – 1} (mengapa?).

Contoh 8. Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod 5 = 3 (23 = 5 · 4 + 3)
(ii) 27 mod 3 = 0 (27 = 3 · 9 + 0)
(iii) 6 mod 8 = 6 (6 = 8 · 0 + 6)
(iv) 0 mod 12 = 0 (0 = 12 · 0 + 0)
(v) – 41 mod 9 = 4(–41 = 9 (–5) + 4)
(vi) – 39 mod 13 = 0 (–39 = 13(–3) + 0)

Penjelasan untuk (v): Karena a negatif, bagi |a| dengan m mendapatkan sisa r'. Maka a mod m = $m - r'$ bila $r' \neq 0$. Jadi |– 41| mod 9 = 5, sehingga –41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

3.7. Kongruen

- Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka kita katakan $38 \equiv 13 \pmod 5$ (baca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).
- Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0, maka $a \equiv b \pmod m$ jika m habis membagi $a - b$.
- Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod m$.

Contoh 9.

$17 \equiv 2 \pmod 3$ (3 habis membagi $17 - 2 = 15$)
$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ (11 habis membagi $-7 - 15 = -22$)
$12 \not\equiv 2 \pmod 7$ (7 tidak habis membagi $12 - 2 = 10$)
$-7 \not\equiv 15 \pmod 3$ (3 tidak habis membagi $-7 - 15 = -22$)

- Kekongruenan $a \equiv b \pmod m$ dapat pula dituliskan dalam hubungan

$$a = b + km \tag{3}$$

yang dalam hal ini k adalah bilangan bulat.

Contoh 10.

$17 \equiv 2 \pmod 3$ dapat ditulis sebagai $17 = 2 + 5 \cdot 3$
$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ dapat ditulis sebagai $-7 = 15 + (-2)11$

- Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan $a \bmod m = r$ sebagai

$a \equiv r \pmod m$

Contoh 11.

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo berikut:
(i) 23 mod 5 = 3 dapat ditulis sebagai $23 \equiv 3 \pmod 5$
(ii) 27 mod 3 = 0 dapat ditulis sebagai $27 \equiv 0 \pmod 3$
(iii) 6 mod 8 = 6 dapat ditulis sebagai $6 \equiv 6 \pmod 8$
(iv) 0 mod 12 = 0 dapat ditulis sebagai $0 \equiv 0 \pmod{12}$
(v) – 41 mod 9 = 4 dapat ditulis sebagai $-41 \equiv 4 \pmod 9$
(vi) – 39 mod 13 = 0 dapat ditulis sebagai $-39 \equiv 0 \pmod{13}$

Teorema 4. Misalkan m adalah bilangan bulat positif.
1. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka
   (i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod m$
   (ii) $ac \equiv bc \pmod m$
   (iii) $a^p \equiv b^p \pmod m$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.
2. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka
   (i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$
   (ii) $ac \equiv bd \pmod m$

Bukti (hanya untuk 1(ii) dan 2(i) saja):

1(ii) $a \equiv b \pmod m$ berarti:

$\Leftrightarrow a = b + km$
$\Leftrightarrow a - b = km$
$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$
$\Leftrightarrow ac = bc + Km$
$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod m$ ■

2(i) $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a = b + k_1m$
$c \equiv d \pmod m \Leftrightarrow c = d + k_2m$ +
$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$
$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km$ ($k = k_1 + k_2$)
$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) \pmod m$ ■

Contoh 12.

Misalkan $17 \equiv 2 \pmod 3$ dan $10 \equiv 4 \pmod 3$, maka menurut Teorema 2,

$17 + 5 = 2 + 5 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 22 = 7 \pmod 3$

$17 . 5 = 5 \cdot 2 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 85 = 10 \pmod 3$

$17 + 10 = 2 + 4 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 27 = 6 \pmod 3$

$17 . 10 = 2 \cdot 4 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 170 = 8 \pmod 3$

- Perhatikanlah bahwa Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi. Misalnya:
  (i) $10 \equiv 4 \pmod 3$ dapat dibagi dengan 2 karena $10/2 = 5$ dan $4/2 = 2$, dan $5 \equiv 2 \pmod 3$
  (ii) $14 \equiv 8 \pmod 6$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14/2 = 7$ dan $8/2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4 \pmod 6$.

3.8. Balikan Modulo (modulo invers)

- Jika *a* dan *m* relatif prima dan $m > 1$, maka kita dapat menemukan balikan (*invers*) dari *a* modulo *m*. Balikan dari *a* modulo *m* adalah bilangan bulat $\bar{a}$ sedemikian sehingga

  $a\bar{a} \equiv 1 \pmod m$

  Bukti: Dari definisi relatif prima diketahui bahwa PBB(a, m) = 1, dan menurut persamaan (2) terdapat bilangan bulat *p* dan *q* sedemikian sehingga

  $pa + qm = 1$

  yang mengimplikasikan bahwa

  $pa + qm \equiv 1 \pmod m$

  Karena $qm \equiv 0 \pmod m$, maka

  $pa \equiv 1 \pmod m$

  Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa *p* adalah balikan dari *a* modulo *m*.
- Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari *a* modulo *m*, kita harus membuat kombinasi lanjar dari *a* dan *m* sama dengan 1. Koefisien *a* dari kombinasi lanjar tersebut merupakan balikan dari *a* modulo *m*.

Contoh 13.

Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

<u>Penyelesaian</u>:

(a) Karena PBB(4, 9) = 1, maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$9 = 2 \cdot 4 + 1$

Susun persamaan di atas menjadi

$-2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 1$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh –2 adalah balikan dari 4 modulo 9. Priksalah bahwa

$-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9$ (9 habis membagi $-2 \cdot 4 - 1 = -9$)

(b) Karena PBB(17, 7) = 1, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$17 = 2 \cdot 7 + 3$ (i)

$7 = 2 \cdot 3 + 1$ (ii)

$3 = 3 \cdot 1 + 0$ (iii) (yang berarti: PBB(17, 7) = 1))

Susun (ii) menjadi:

$1 = 7 - 2 \cdot 3$ (iv)

Susun (i) menjadi

$3 = 17 - 2 \cdot 7$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv):

$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$

atau

$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh –2 adalah balikan dari 17 modulo 7.
$-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod 7$ (7 habis membagi $-2 \cdot 17 - 1 = -35$)

(c) Karena PBB(18, 10) = 2 $\neq$ 1, maka balikan dari 18 (mod 10) tidak ada.

3.9. Kekongruenan Lanjar

- Kekongruenan lanjar adalah kongruen yang berbentuk
  $ax \equiv b \pmod m$
  dengan m adalah bilangan bulat positif, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan bulat.
- Nilai-nilai x dicari sebagai berikut:
  $ax = b + km$

  yang dapat disusun menjadi

$$x = \frac{b + km}{a}$$

dengan k adalah sembarang bilangan bulat. Cobakan untuk k = 0, 1, 2, … dan k = –1, –2, … yang menghasilkan x sebagai bilangan bulat.

Contoh 14.
Tentukan solusi: $4x \equiv 3 \pmod 9$ dan $2x \equiv 3 \pmod 4$

Penyelesaian:
(i) $4x \equiv 3 \pmod 9$

$$x = \frac{3 + k \cdot 9}{4}$$

$k = 0 \rightarrow x = (3 + 0 \cdot 9)/4 = 3/4$ (bukan solusi)
$k = 1 \rightarrow x = (3 + 1 \cdot 9)/4 = 3$
$k = 2 \rightarrow x = (3 + 2 \cdot 9)/4 = 21/4$ (bukan solusi)
$k = 3$, $k = 4$ tidak menghasilkan solusi
$k = 5 \rightarrow x = (3 + 5 \cdot 9)/4 = 12$
…
$k = -1 \rightarrow x = (3 - 1 \cdot 9)/4 = -6/4$ (bukan solusi)
$k = -2 \rightarrow x = (3 - 2 \cdot 9)/4 = -15/4$ (bukan solusi)
$k = -3 \rightarrow x = (3 - 3 \cdot 9)/4 = -6$
…
$k = -6 \rightarrow x = (3 - 6 \cdot 9)/4 = -15$
…
Nilai-nilai x yang memenuhi: 3, 12, … dan –6, –15, …

(ii) $2x \equiv 3 \pmod 4$

$$x = \frac{3 + k \cdot 4}{2}$$

Karena $4k$ genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi $2x \equiv 3 \pmod 5$.

3.10. Chinese Remainder Problem

Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen lanjar:

$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 5 \pmod 7$$
$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

Teorema 5. (*Chinese Remainder Theorem*) Misalkan $m_1, m_2, \ldots, m_n$ adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga PBB(m_i, m_j) = 1 untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruen lanjar

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

mempunyai sebuah solusi unik modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Contoh 15.

Tentukan solusi dari pertanyaan Sun Tse di atas.

Penyelesaian:

Menurut persamaan (5.6), kongruen pertama, $x \equiv 3 \pmod 5$, memberikan $x = 3 + 5k_1$ untuk beberapa nilai k. Sulihkan ini ke dalam kongruen kedua menjadi $3 + 5k_1 \equiv 5 \pmod 7$, dari sini kita peroleh $k_1 \equiv 6 \pmod 7$, atau $k_1 = 6 + 7k_2$ untuk beberapa nilai k_2. Jadi kita mendapatkan $x = 3 + 5k_1 = 3 + 5(6 + 7k_2) = 33 + 35k_2$ yang mana memenuhi dua kongruen pertama. Jika x memenuhi kongruen yang ketiga, kita harus mempunyai $33 + 35k_2 \equiv 7 \pmod{11}$, yang mengakibatkan $k_2 \equiv 9 \pmod{11}$ atau $k_2 = 9 + 11k_3$. Sulihkan k_2 ini ke dalam kongruen yang ketiga menghasilkan $x = 33 + 35(9 + 11k_3) \equiv 348 + 385k_3 \pmod{11}$. Dengan demikian, $x \equiv 348 \pmod{385}$ yang memenuhi ketiga konruen tersebut. Dengan kata lain, 348 adalah solusi unik modulo 385. Catatlah bahwa $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut. Solusi tersebut modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 5 \cdot 77 = 11 \cdot 35$. Karena $77\ \ 3 \equiv 1 \pmod 5$, $55 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7$, dan $35 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11}$, solusi unik dari sistem kongruen tersebut adalah

$$x \equiv 3 \cdot 77 \cdot 3 + 5 \cdot 55 \cdot 6 + 7 \cdot 35 \cdot 6 \pmod{385}$$
$$\equiv 3813 \pmod{385} \equiv 348 \pmod{385}$$

3.11. Bilangan Prima

- Bilangan bulat positif p ($p > 1$) disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan p.
- Contoh: 23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 23.
- Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, …. Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.
- Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*). Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri.

Teorema 6. (*The Fundamental Theorem of Arithmetic*). Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh 16.

$9 = 3 \times 3$ (2 buah faktor prima)

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ (4 buah faktor prima)

$13 = 13$ (atau 1×13) (1 buah faktor prima)

- Untuk menguji apakah n merupakan bilangan prima atau komposit, kita cukup membagi n dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, … , bilangan prima $\leq \sqrt{n}$. Jika n habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan komposit, tetapi jika n tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

Contoh 17.
Tunjukkan apakah (i) 171 dan (ii) 199 merupakan bilangan prima atau komposit.

Penyelesaian:

(i) $\sqrt{171}$ = 13.077. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

(ii) $\sqrt{199}$ = 14.107. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

- Terdapat metode lain yang dapat digunakan untuk menguji keprimaan suatu bilangan bulat, yang terkenal dengan **Teorema Fermat**. Fermat (dibaca "Fair-ma") adalah seorang matematikawan Perancis pada tahun 1640.

Teorema 7 (**Teorema Fermat**). Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p, yaitu PBB(a, p) = 1, maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Contoh 18.
Kita akan menguji apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan. Di sini kita mengambil nilai a = 2 karena PBB(17, 2) = 1 dan PBB(21, 2) = 1. Untuk 17,

$$2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$$

karena 17 habis membagi 65536 – 1 = 65535
(65535 $\div$ 17 = 3855).

Untuk 21,

$$2^{21-1} = 1048576 \not\equiv 1 \pmod{21}$$

karena 21 tidak habis membagi 1048576 – 1 = 1048575.

- Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan **prima semu** (*pseudoprimes*).
- Misalnya komposit 341 (yaitu 341 = 11 $\cdot$ 31) adalah bilangan prima semu karena menurut teorema Fermat,

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat.

Contoh 19.
Periksalah bahwa (i) $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ dan (ii) $18^6 \equiv 1 \pmod{49}$.

Penyelesaian:

(i) Dengan mengetahui bahwa kongruen $3^3 \equiv 10 \pmod{17}$, kuadratkan kongruen tersebut menghasilkan

$3^6 \equiv 100 \equiv -2 \pmod{17}$

Kuadratkan lagi untuk menghasilkan

$3^{12} \equiv 4 \pmod{17}$

Dengan demikian, $3^{16} \equiv 3^{12} \cdot 3^3 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 10 \cdot 3 \equiv 120 \equiv 1 \pmod{17}$

(ii) Caranya sama seperti penyelesaian (i) di atas:

$18^2 \equiv 324 \equiv 30 \pmod{49}$
$18^4 \equiv 900 \equiv 18 \pmod{49}$
$18^6 \equiv 18^4 \cdot 18^2 \equiv 18 \cdot 30 \equiv 540 \equiv 1 \pmod{49}$

3.12. Kriptografi

- **Kriptografi**: ilmu sekaligus seni untuk menjaga kerahasiaan pesan (data atau informasi) dengan cara menyamarkannya (*to crypt* artinya menyamar) menjadi bentuk yang tidak dapat dimengerti.

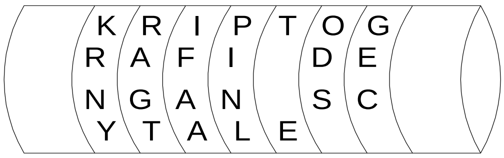
- Tujuan penyandian adalah agar isi pesan tidak dapat dimengerti oleh orang yang tidak berhak.
- Kehidupan saat ini dikelilingi oleh kriptografi, mulai:
  - ATM tempatmengambil uang,
  - Telepon genggam (HP),
  - Komputer di lab/kantor,
  - Internet,
  - Gedung-gedung bisnis,
  - sampai ke pangkalan militer

a. Sejarah Kriptografi

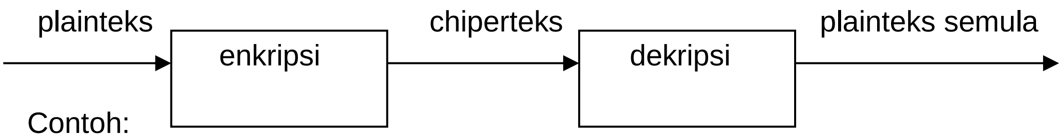
- Kriptografi sudah lama digunakan oleh tentara Sparta di Yunani pada permulaan tahun 400 SM.

  Scytale : Pita panjang dari daun *papyrus* + sebatang silinder
  Pesan ditulis horizontal (baris per baris).
  Bila pita dilepaskan, maka huruf-huruf di dalamnya telah tersusun membentuk pesan rahasia.
  Untuk membaca pesan, penerima melilitkan kembali silinder yang diameternya sama dengan diameter silinder pengirim.

Beberapa terminologi dasar dalam kriptografi:



1. **Plainteks** (*plaintext* atau *cleartext*, artinya teks jelas yang dapat dimengerti): pesan yang dirahasiakan.
2. **Chiperteks** (*chipertext* atau *cryptogram*, artinya teks tersandi): pesan hasil penyandian.
3. **Enkripsi** (*encryption* atau *enchipering*): proses penyandian dari plainteks ke chiperteks.
4. **Dekripsi** (*decryption* atau *dechipering*): proses pembalikan dari chiperteks ke plainteks



Contoh:

plainteks: uang disimpan di balik buku X
chiperteks: j&kloP(d$gkhtpuBn%6^klp..t@8^

5. **Algoritma kriptografi** (atau *chiper*):
   - aturan untuk *enchipering* dan *dechipering*
   - fungsi matematika yang digunakan untuk enkripsi dan dekripsi.
6. **Kriptografer**: orang menggunakan algoritma kriptografi untuk merahasiakan pesan dan mendekripsikannya kembali
7. **Kriptanalisis** (*cryptanalysis*): ilmu dan seni untuk memecahkan chiperteks, berupa proses untuk memperoleh plainteks dari chiperteks tanpa mengetahui *kunci* yang diberikan. Pelakunya disebut **kriptanalis**.
8. **Kriptologi** (*cryptology*): studi mengenai kriptografi dan kriptanalisis.

b. Aplikasi kriptografi:

1. Pengiriman data melalui saluran komunikasi
2. Penyimpanan data di dalam *disk storage*.

Data ditransmisikan dalam bentuk chiperteks. Di tempat penerima chiperteks dikembalikan lagi menjadi plainteks. Data di dalam media penyimpanan komputer (seperti *hard disk*) disimpan dalam bentuk chiperteks. Untuk membacanya, hanya orang yang berhak yang dapat mengembalikan chiperteks menjadi plainteks.

c. Notasi Matematis

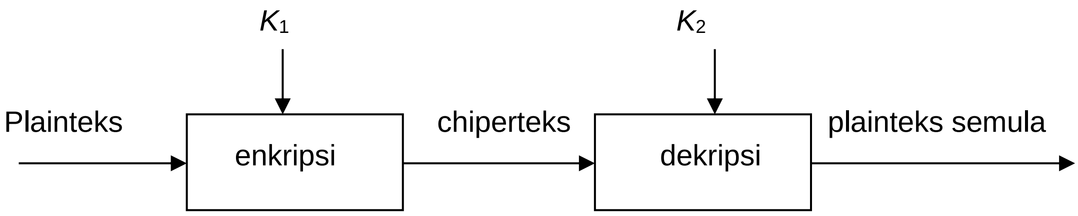
- Misalkan:
  C = chiperteks
  P = plainteks dilambangkan
- Fungsi enkripsi E memetakan P ke C,
  $E(P) = C$
- Fungsi dekripsi D memetakan C ke P,
  $D(C) = P$
- Karena proses enkripsi kemudian dekripsi mengembalikan pesan ke pesan asal, maka kesamaan berikut harus benar,

  $$D(E(P)) = P$$
- Pada sistem kriptografi modern, kekuatan kriptografinya terletak pada kunci, yang berupa deretan karakter atau bilangan bulat, dijaga kerahasiaannya.
- Dengan menggunakan kunci K, maka fungsi enkripsi dan dekripsi menjadi

  $E_{K1}(P) = C$
  $D_{K2}(C) = P$

  dan kedua fungsi ini memenuhi

  $D_{K2}(E_{K1}(P)) = P$



- Jika $K1 = K2$, maka algoritma kriptografinya disebut **algoritma simetri**, **konvensional**, ***secret key***, atau ***one-key*** .
  Contoh: *DES* (*Data Encyption Standard*).
- Jika $K1 \neq K2$, maka sistem kriptogafinya disebut **algoritma nirsimetri** atau **kunci publik**
  Contoh: RSA (Rivest-Shamir-Adleman)

1. Caesar Cipher

- Ini adalah algoritma kriptografi yang mula-mula digunakan oleh kaisar Romawi, Julius Caesar (sehingga dinamakan juga *caesar chiper*), untuk menyandikan pesan yang ia kirim kepada para gubernurnya.
- Caranya adalah dengan mengganti (menyulih atau mensubstitusi) setiap karakter dengan karakter lain dalam susunan abjad (alfabet).
- Misalnya, tiap huruf disubstitusi dengan huruf ketiga berikutnya dari susunan akjad. Dalam hal ini kuncinya adalah jumlah pergeseran huruf (yaitu k = 3).

Tabel substitusi:
p_i : A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
c_i : **D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C**

Contoh 20.
Pesan

AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

disamarkan (enskripsi) menjadi

DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA

Penerima pesan men-dekripsi chiperteks dengan menggunakan tabel substitusi, sehingga chiperteks

DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA

dapat dikembalikan menjadi plainteks semula:

AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

- Dengan mengkodekan setiap huruf abjad dengan *integer* sebagai berikut: A = 0, B = 1, …, Z = 25, maka secara matematis *caesar chiper* menyandikan plainteks p_i menjadi c_i dengan aturan:
  $c_i = E(p_i) = (p_i + 3) \bmod 26$ (1)
  dan dekripsi chiperteks c_i menjadi p_i dengan aturan:
  $p_i = D(c_i) = (c_i - 3) \bmod 26$ (2)

2. *Algoritma RSA*

ALGORITMA RSA

1. Pilih dua buah bilangan prima sembarang, sebut *a* dan *b*. Jaga kerahasiaan *a* dan *b* ini.
2. Hitung $n = a \times b$. Besaran n tidak dirahasiakan.
3. Hitung $m = (a - 1) \times (b - 1)$. Sekali *m* telah dihitung, *a* dan *b* dapat dihapus untuk mencegah diketahuinya oleh pihak lain.
4. Pilih sebuah bilangan bulat untuk kunci publik, sebut namanya *e*, yang relatif prima terhadap *m*.
5. Bangkitkan kunci dekripsi, *d*, dengan kekongruenan $ed \equiv 1 \pmod{m}$. Lakukan enkripsi terhadap isi pesan dengan persamaan $c_i = p_i^e \bmod n$, yang dalam hal ini p_i adalah blok plainteks, c_i adalah chiperteks yang diperoleh, dan *e* adalah kunci enkripsi (kunci publik). Harus dipenuhi persyaratan bahwa nilai p_i harus terletak dalam himpunan nilai 0, 1, 2, …, $n - 1$ untuk menjamin hasil perhitungan tidak berada di luar himpunan.
6. Proses dekripsi dilakukan dengan menggunakan persamaan $p_i = c_i^d \bmod n$, yang dalam hal ini *d* adalah kunci dekripsi.

Contoh 21. Misalkan a = 47 dan b = 71 (keduanya prima), maka dapat dihitung
$n = a \times b = 3337$ dan $m = (a - 1)\times(b - 1) = 3220$.
Pilih kunci publik e = 79 (yang relatif prima dengan 3220 karena pembagi bersama terbesarnya adalah 1). Nilai *e* dan *m* dapat dipublikasikan ke umum.
Selanjutnya akan dihitung kunci dekripsi *d* seperti yang dituliskan pada langkah instruksi 4,

$$e \times d \equiv 1 \pmod{m}$$

Kunci dekripsi *d* sebagai berikut:

$$d = \frac{1 + (k \times 3220)}{79}$$

Dengan mencoba nilai-nilai k = 1, 2, 3, …, diperoleh nilai *d* yang bulat adalah 1019. Ini adalah kunci dekripsi.
Misalkan plainteks

P = HARI INI
atau dalam desimal ASCII:
7265827332737873

Pecah *P* menjadi blok yang lebih kecil (misal 3 digit):

$p_1 = 726$	$p_4 = 273$
$p_2 = 582$	$p_5 = 787$
$p_3 = 733$	$p_6 = 003$

Blok pertama dienkripsikan sebagai $726^{79} \bmod 3337 = 215 = c_1$.
Blok kedua dienkripsikan sebagai $582^{79} \bmod 3337 = 776 = c_2$.
Dengan melakukan proses yang sama untuk sisa blok lainnya, dihasilkan chiperteks C = 215 776 1743 933 1731 158.

Proses dekripsi dilakukan dengan menggunakan kunci rahasia d = 1019.
Blok c_1 didekripsikan sebagai 215^{1019} mod 3337 = 726 = p_1,
Blok c_2 didekripsikan sebagai 776^{1019} mod 3337 = 582 = p_2.
Blok plainteks yang lain dikembalikan dengan cara yang serupa. Akhirnya kita memperoleh kembali plainteks semula P = 7265827332737873 yang karakternya adalah P = HARI INI.
Perhitungan perpangkatan pada proses enkripsi ($c_i = p_i^e$ mod n)dan dekripsi ($p_i = c_i^d$ mod n) membutuhkan bilangan yang sangat besar. Untuk menghindari penggunaan bilangan yang besar, maka dapat digunakan penyederhanaan dengan persamaan berikut:

$$ab \bmod m = [(a \bmod m)(b \bmod m)] \bmod m$$

3. Kekuatan dan Keamanan RSA

- Kekuatan algoritma *RSA* terletak pada tingkat kesulitan dalam memfaktorkan bilangan non prima menjadi faktor primanya, yang dalam hal ini $n = a \times b$.
- Sekali n berhasil difaktorkan menjadi a dan b, maka $m = (a - 1)\times(b - 1)$ dapat dihitung. Selanjutnya, karena kunci enkrispi e diumumkan (tidak rahasia), maka kunci dekripsi d dapat dihitung dari persamaan $e \times d \equiv 1 \pmod{m}$. Ini berarti proses dekripsi dapat dilakukan oleh orang yang tidak berhak.
- Penemu algoritma *RSA* menyarankan nilai a dan b panjangnya lebih dari 100 digit. Dengan demikian hasil kali $n = a \times b$ akan berukuran lebih dari 200 digit. Bayangkanlah berapa besar usaha kerja yang diperlukan untuk memfaktorkan bilangan bulat 200 digit menjadi faktor primanya. Menurut Rivest dan kawan-kawan, uasaha untuk mencari faktor bilangan 200 digit membutuhkan waktu komputasi selama 4 milyar tahun! (dengan asumsi bahwa algoritma pemfaktoran yang digunakan adalah algoritma yang tercepat saat ini dan komputer yang dipakai mempunyai kecepatan 1 milidetik).

3.13. Fungsi Hash

$h(k) = k$ mod m
- m adalah jumlah lokasi memori yang tersedia
- Fungsi h menempatkan *record* dengan kunci k pada lokasi memori yang beralamat $h(k)$.

Contoh: m = 11 mempunyai sel-sel memori yang diberi indeks 0 sampai 10. Akan disimpan data *record* yang masing-masing mempunyai kunci 15, 558, 32, 132, 102, dan 5.

$h(15)$ = 15 mod 11 = 4
$h(558)$ = 558 mod 11 = 8
$h(32)$ = 32 mod 11 = 10
$h(132)$ = 132 mod 11 = 0
$h(102)$ = 102 mod 11 = 3
$h(5)$ = 5 mod 11 = 5

132			102	15	5			558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

International Standard Book Number (ISBN)

- Kode ISBN terdiri dari 10 karakter, biasanya dikelompokkan dengan spasi atau garis, misalnya 0–3015–4561–9.
- ISBN terdiri atas empat bagian kode:
  - kode *yang mengidentifikasikan bahasa,*
  - *kode penerbit,*
  - *kode yang* diberikan secara unik kepada buku tersebut,
  - sebuah karakter uji (dapat berupa angka atau huruf X untuk merepresentasikan angka 10).

  Karakter uji dipilih sedemikian sehingga

$$\sum_{i=i}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\sum_{i=i}^{9} ix_i \bmod 11 = \text{karakter uji}$$

Untuk kode ISBN 0–3015–4561–8, 0 adalah kode kelompok negara berbahasa Inggris, 3015 adalah kode penerbit, 4561 adalah kode unik untuk buku yang diterbitkan oleh penerbit tersebut, dan 8 adalah karakter uji. Karakter uji ini didapatkan sebagai berikut:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 151$$

Jadi, karakter ujinya adalah 151 mod 11 = 8. Catatlah bahwa untuk kode ISBN ini,

$$\sum_{i=i}^{10} ix_i = \sum_{i=i}^{9} ix_i + 10x_{10} = 151 + 10 \cdot 8 = 231$$

dan 231 mod 11 = 0 atau 231 $\equiv$ 0 (mod 11).

BAB III

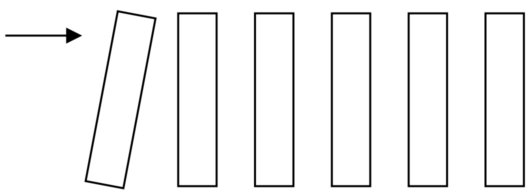
INDUKSI MATEMATIKA

4.1. Introduksi

Metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat adalah **induksi matematik**.
Contoh : Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan yang menyatakan: "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $n(n + 1)/2$". Buktikan bahwa $p(n)$ benar!
Contoh lainnya:
Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.
Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar.
Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n +1)/2$.
Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n
Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

4.2. Prinsip Induksi Sederhana.

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
p(1) benar, dan
untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika p(n) benar maka p(n + 1) juga benar.
Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.



Gambar 4.1 Efek domino

Contoh 1. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa

$$1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$$

Contoh 2. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.
Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkann benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

4.3. Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

$p(n_0)$ benar, dan

untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar.

Contoh 3. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:

$$2^0 = 2^{0+1} - 1.$$

Ini jelas benar, sebab
$$\begin{aligned} 2^0 = 1 &= 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Contoh 4. Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Contoh 5. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n + 1 sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:
Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai n + 1 sen.
Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai n sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko n + 1 sen.

Contoh 6. Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

4.4. Prinsip Induksi Kuat

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
p(n_0) benar, dan
untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n_0), p(n_0+1), …, p(n) benar maka p(n+1) juga benar.

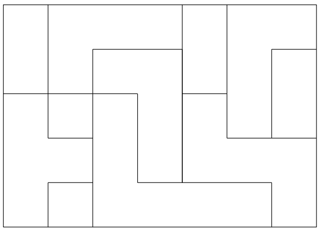
Contoh 7. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.
Penyelesaian:
Basis induksi. Jika n = 2, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa n + 1 juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:
Jika n + 1 sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
Jika n + 1 bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis n + 1 tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, n + 1 jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.
Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

Contoh 8. [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar 4.2). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu.



Penyelesaian:
(i) Basis induksi. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan (n = 1, 2, 3, …, k) diperlukan sejumlah n – 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk n + 1 potongan diperlukan n langkah.
Bagilah n + 1 potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan n_1 - 1 langkah untuk menyatukan blok yang satu dan n_2 – 1 langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah
(n_1 - 1) + (n_2 – 1) + 1 langkah terakhir = ($n_1 + n_2$) – 2 + 1 = n + 1 – 1 = n.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Contoh 9. Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?
Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama
(i) Basis induksi: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $P(1)$ benar.
(ii) Langkah induksi: andaikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama adalah benar. Tinjau untuk himpunan dengan n + 1 kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, n+1. Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama (1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, n+1) juga harus berwarna sama. Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua n+1 kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar jika n + 1 = 2, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan n = 1 elemen) tidak beririsan.

Contoh 10. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.
Basis induksi. Untuk n = 0, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0.
Langkah induksi. Misalkan pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, …, n, yaitu $a^0 = 1$, $a^1 = 1$, $a^2 = 1$, …, $a^n = 1$. Kita ingin memperlihatkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka

$$a^{n+1} = \frac{a^n \,.\, a^n}{a^{n-1}}$$

$$= \frac{1 \times 1}{1} \quad \text{(dari hipotesis induksi)}$$

$= 1$

Penyelesaian: Kesalahan terjadi pada langkah induksi, karena untuk n = 0 kita tidak dapat menghitung

$$a^{0+1} = \frac{a^0 \,.\, a^0}{a^{-1}} = \frac{1 \times 1}{?}$$

sebab nilai a^{-1} tidak terdapat dalam hipotesis induksi.

4.5. Bentuk Induksi Secara Umum

Relasi biner "<" pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan "<") bila memiliki properti berikut:
Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.
Diberikan $x, y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar: $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$.
Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil".

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan p(x) adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Kita ingin membuktikan bahwa p(x) benar untuk semua $x \in X$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
1. $p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X, dan
2. untuk semua $x > x_0$ di dalam X, jika p(y) benar untuk semua y < x, maka p(x) juga benar.

Contoh 11. Tinjau barisan bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$S_{0,0} = 0$	$S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$
$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1$	$S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$
$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2$	$S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 3, \ldots$

Buktikanlah dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$.
Penyelesaian:
Basis induksi. Karena (0, 0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$. Ini benar dari definisi $S_{0,0}$.
Langkah induksi. Buktikan untuk semua $(m, n) > (0, 0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m,n)$. Ini adalah hipotesis induksi. Kita perlu menunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.
Kasus 1: Jika $n = 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$. Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,
$S_{m-1,n} = (m - 1) + n$
sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m - 1) + n + 1 = m + n.$

Kasus 2: Jika $n \neq 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$. Karena $(m, n-1) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,
$S_{m,n-1} = m + (n - 1)$ sehingga $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n - 1) + 1 = m + n.$

BAB IV

KOMBINATORIAL

5.1. Introduksi : Prinsip dasar menghitung

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.
Analisa kombinatorial termasuk mempelajari permutasi, kombinasi dan partisi, adalah menjadi perhatian pokok dengan menentukan banyaknya kemungkinan yang logis dari beberapa kejadian tanpa membutuhkan identifikasi setiap kasus. Ada dua kaidah dasar menghitung yang dapat digunakan untuk jalan keluarnya.

5.2. Kaidah Penjumlahan

Andaikan beberapa kejadian E dapat terjadi dalam m cara dan yang kedua kejadian F dapat terjadi dalam n cara, dan anggap juga kedua kejadian tersebut tidak terjadi secara simultan (serempak/bersamaan). Maka E atau F dapat terjadi dalam m dan n cara.
Secara umum, Andaikan kejadian E_1 dapat terjadi dalam n cara, kejadian E_2 kedua dapat terjadi dalam n_2 cara, kejadian E_3 ketiga dapat terjadi dalam n_3 cara,......., dan Andaikan tidak ada dua kejadian yang terjadi dalam waktu yang sama. Maka satu kejadian dapat tejadi dalam $n_1 + n_2 + n_3 +$ .....cara.

Contoh 4.1

a. Misalkan ada 8 profesor laki-laki dan 5 profesor wanita yang mengajar kelas kalkulus. Mahasiswa dapat memilih kuliah kalkulus yang diberikan oleh profesor dengan 8 + 5 = 13 cara.
b. Misalkan E adalah kejadian dari pemilihan bilangan prima yang kurang dari 10, dan Andaikan F adalah kejadian dari pemilihan bilangan genap yang kurang dari 10. Maka E dapat dilakukan dengan empat cara {2,3,5,7} dan F terjadi dalam empat cara {2,4,6,8}. Bagaimanapun E atau F tidak dapat terjadi dalam 4 + 4 = 8 cara, jika 2 adalah bilangan prima yang lebih kecil dari 10 dan bilangan genap yang lebih kecil dari 10. Jadi E atau F dapat terjadi hanya dalam 4 + 4 - 1 = 7 cara.
c. Misalakan E adalah kejadian dari pemilihan bilangan prima diantara 10 dan 20, dan Andaikan F adalah kejadian pemilihan bilangan genap antara 10 dan 20. Maka E dapat terjadi dalam 4 cara {11,13,17,19} dan F dapat terjadi dalam 4 cara {12,14,16,18}. Maka E atau F dapat terjadi dalam 4 + 4 = 8 jika tidak satupun bilangan prima yang bilangan genap.

5.3. Kaidah Perkalian

Andaikan ada kejadian E yang terjadi dalam m cara dan masing-masing berdiri sendiri, ada kejadian kedua F yang terjadi dalam n cara. Maka kombinasi dari E dan F dapat terjadi dalam mn cara.
Secara umum, Andaikan kejadian E_1 dapat terjadi dalam n cara dan diikuti E_1, kejadian kedua E_2 dapat terjadi dalam n_2 cara dan diikuti E_2, kejadian ketiga E_3 dapat terjadi dalam n_3 cara dan selanjutnya. Maka semua kejadian dapat terjadi dalam urutan yang diindikasikan sebagai $n_1,n_2,n_3,....$ cara.

Contoh 4.2

a.	Andaikan plat nomor kendaraan berisi dua huruf yang diikuti oleh tiga angka yang huruf pertamanya tidak boleh nol. Berapa banyak plat nomor yang dicetak. Setiap huruf dapat dicetak dalam 26 cara, digit pertama 9 cara dan 2 digit selanjutnya dalam 10 cara. Oleh karena itu 26.26.9.10.10 = 608400 plat nomor yang dapat dicetak.
b.	Dalam berapa cara organisasi yang berisi 26 anggota pemilih Presiden, Bendahara dan Sekretaris (dengan asumsi tidak ada orang yang dipilih untuk lebih satu posisi). Presiden dapat dipilih dalam 26 cara yang berbeda, Bendahara dapat dipilih dalam 25 cara yang berbeda, dan Sekretaris dapat dipilih dalam 24 cara yang berbeda. Dengan kaidah menghitung di atas, ada 26.25.24 = 15600 cara berbeda organisasi dapat memilih petugas.

Ada interprestasi teori himpunan dari dua prinsip menghitung di atas. Secara khusus, Andaikan n(A) dituliskan sebagai jumlah dari elemen dalam himpunan A.

Maka :

1) Prinsip aturan menjumlahkan : jika A dan B adalah himpunan yang tidak beririsan maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
2) Prinsip aturan hasil kali : A x B menjadi perkalian Cartesian dari himpunan A dan B, maka $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

5.4. Notasi Faktorial

Hasil kali dari bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n inklusif dituliskan dengan n! (baca n faktorial).

$$n! = 1 - 2 - 3 - ... (n-2)\ (n-1)\ n$$

dengan kata lain n! didefinisikan sebagai

$$1! = 1 \quad \text{dan } n! = n.(n-1)\,!$$

ini juga berlaku untuk mendefinisikan 0! = 1

Contoh 4.3

a) $2! = 1.2 = 2$ $\quad 3! = 1.2.3 = 6$ $\quad 4! = 1.2.3.4 = 24$

$5! = 5.4! = 120$ $\quad 6! = 6.120 = 720$

b) $\frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$ $\qquad 12.11.10 = \frac{12.11.10.9!}{9!} = \frac{12!}{9!}$

c) $\frac{12.11.10}{1.2.3} = 12.11.10.\frac{1}{3!} = \frac{12!}{3!9!}$

5.5. Koefisien Binomial

Simbol $\binom{n}{r}$ (dibaca "${}_nC_r$"), dimana r dan n adalah bilangan bulat positif dengan

r <= n, adalah didefiniskan sebagai :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-r+1)}{1.2.3\ ...\ (r-1)r}$$

dalam contoh 2.3(c) dapat dilihat bahwa :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-r+1)}{1.2.3\ \ldots\ (r-1)r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

tetapi n - (n - r) = r ; sehingga didapat hubungan sebagai berikut :

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$ atau, dengan kata lain jika a + b = n maka

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

Contoh 4.4

a) $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28$ $\quad \binom{9}{4} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126$

$\binom{12}{5} = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 792$ $\quad \binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

$\binom{13}{1} = \frac{13}{1} = 13$

catatan : bahwa $\binom{n}{r}$ mempunyai tepat r faktor dalam penyebut dan pembilang.

b) Hitung $\binom{10}{7}$ dengan mendefinisikan

$$\binom{10}{7} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7} = 120$$

dalam hal lain, 10 - 7 = 3 jadi dapat juga dihitung $\binom{10}{7}$ sebagai :

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$$

Perhatikan bahwa metoda kedua lebih mudah dan cepat.

5.6. Koefisien Binomial dan Segitiga Pascal

Jumlah $\binom{n}{r}$ dinamakan koefisien binomial ketika hasilnya jelas adalah koefisien yang diperluas dari $(a+b)^n$. Secara khusus, satu cara untuk membuktikannya

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

koefisien dari pangkat berikutnya dari a+b dapat diatur dalam bentuk segitiga, yang biasa dinamakan sebagai segitiga Pascal.

Angka-angka dalam segitiga Pascal mempunyai sifat-sifat irisan sebagai berikut:

i. angka pertama dan angka terakhir dalam setiap baris adalah 1

ii. setiap angka lain dalam array dapat dicari dengan menambahkan 2 angka tepat di atasnya. Sebagai contoh 10 = 4+6, 15=5+10, 20=10+10

Jika angka-angka yang ada dalam segitiga Pascal adalah koefisien binomial, batasan (ii) dari segitiga Pascal adalah dari teorema :

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Gambar 1 (Segitiga Pascal)

Latihan Soal (Notasi Faktorial dan Kefisien Binomial)

1. Hitung 4!, 5!, 6! Dan 7!
2. Hitung $\frac{13!}{11!}$ Dan $\frac{7!}{10!}$
3. Hitung $\binom{16}{3}$, $\binom{12}{4}$
4. Hitung
   a) $\binom{8}{5}$
   b) $\binom{9}{7}$

5.7. Permutasi

Beberapa pengaturan dari himpunan n objek yang disusun dinamakan Permutasi. Beberapa pengaturan dari berapa r <= n objek dalam susunannya dinamakan suatu r permutasi atau permutasi r dari n objek.

Contoh :

Sebuah himpunan huruf a,b,c dan d. maka

i. bdca, dcba dan acdb adalah permutasi dari 4 huruf
ii. bad, adb, cbd dan bca adalah permutasi empat huruf yang diambil tiga
iii. ad, cb, da dan bd adalah permutasi dari empat huruf yang diambil dua

Gunakan p(n,r) sebelum mendapatkan rumus p(n,r), perhatikan terlebih dahulu kasus di bawah ini.

Contoh 4.5

Cari permutasi dari 6 objek, katakan A,B,C,D,E,F diambil tiga dalam waktu yang sama. Dengan kata lain, cari jumlah dari "kata tiga huruf" yang menggunakan 6 huruf tanpa ada pengulangan huruf. Tiga huruf secara umum dapat direpresentasikan dengan tiga kotak di bawah ini :

sekarang huruf pertama dapat dipilih dalam 6 cara, huruf kedua dapat dipilih dalam 5 cara, huruf ketiga dapat dipilih dalam 4 cara. Tulis yang didapatkan dalam kotak yang disediakan.

6	5	4

Selanjutnya, dengan prinsip dasar dari menghitung ada 6.5.4=120 kemungkinan kata 3 huruf tanpa pengulangan dari 6 huruf, atau ada 120 permutasi dari 6 objek yang diambil 3.

5.8. Penurunan dari rumus P(n,r)

Penurunan dari rumus untuk sejumlah permutasi dari n objek yang diambil r buah, atau jumlah permutasi dari n objek, p(n,r).
Ikuti prosedur contoh di bawah ini :
Elemen pertama dalam sebuah r permutasi dari n objek dapat dipilih dalam n cara yang berbeda; elemen kedua dari permutasi dapat dipilih dalam n-1 cara; elemen ketiga dalam permutasi dapat dipilih dalam n-2 cara.

Teruskan cara ini, untuk mendapatkan elemen r yang terakhir dalam r permutasi dapat dicari dalam n-(r-1) = n-r+1 cara.
Selanjutnya dengan prinsip dasar menghitung didapatkan

$$p(n,r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$$

dengan contoh dapat dilihat

$$n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) . (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

selanjutnya dapat dibuktikan dengan mengikuti teorema.

Teorema 1

$$p(n.r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dalam kasus khusus yang mempunyai r = n,

$$p(n,n) = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n!$$

Selanjutnya, ikuti pewarnaan :

Pewarnaan 1

Ada n! permutasi dari n objek (mengambil semua dalam sekali waktu)
contoh, ada 3! = 1.2.3 = 6 permutasi dari 3 huruf a,b,c. Isinya abc, acb, bac, bca, cab, cba.

5.9. Permutasi dengan pengulangan

Banyaknya permutasi dari beberapa himpunan dari multi himpunan adalah himpunan dari objek yang beberapa diantaranya sama.

$$p(n;n_1,n_2,\ldots n_r)$$

Banyaknya permutasi dari n objek dimana n_1 buah yang sama, n_2 buah yang sama, n_3 buah yang sama ... n_4 buah yang sama.

Rumus umumnya :

Teorema 2

$$P(n:n_1,n_2,\ldots,n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots n_r!}$$

Indikasi dari pembuktian teorema di atas dilakukan dengan contoh-contoh :
Misalkan akan membentuk semua kemungkinan kata lima huruf dengan menggunakan huruf dari kata "BABBY".

Sekarang 5! = 120 permutasi dari objek B_1,A,B_2,B_3,Y, dimana ada tiga B yang berbeda.
Perhatikan 6 permutasi di bawah ini : B_1 B_2 B_3 A Y, B_2 B_1 B_3 A Y, B_3 B_1 B_2 A Y, B_1 B_3 B_2 A Y, B_2 B_3 B_1 A Y, B_3 B_2 B_1 A Y.
Menghasilkan kata yang sama jika huruf kecil dibawahnya dihapus. 6 berasal dari fakta bahwa ada 3! = 3.2.1 = 6 cara berbeda untuk menempatkan B dalam 3 posisi pertama dalam permutasi.
Hal ini akan bernilai TRUE untuk beberapa himpunan dari tiga posisi dengan pendekatan B.

Selanjutnya ada :

$$P(5,3) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

perbedaan (kombinasi) kata 5 huruf yang dapat dibentuk dengan menggunakan kata 'BABBY'.

Contoh 4.6

a) Berapa banyak kata tujuh huruf yang dapat dibentuk dengan menggunakan kata "BENZENE" ? dapat dilihat bahwa permutasi dilakukan terhadap 7 huruf dengan 3 huruf yang sama (tiga E) dan 2 lain yang sama (dua N). Dengan menggunakan teorema 4 banyaknya kata adalah :

$$P(7:3:2) : \frac{7!}{3!\,2!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 420$$

b) Berapa banyak tanda yang berbeda, dari 8 bendera yang tergantung di garis vertikal. Bendera tersebut terdiri dari 4 bendera merah, 3 bendera putih dan 1 bendera biru ? jumlah permutasi dari 8 objek dengan 4 objek yang sama dan 3 objek yang sama adalah :

$$P(8:4,3) = \frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 280$$

Latihan Soal (Permutasi)

1. Ada empat jalur bus diantara A dan B, dan ada tiga jalur bus diantara B dan C. Dengan Berapa cara seseorang dapat bepergian :
   a) dengan bus dari A ke C melalui B ?
   b) pergi berkeliling dengan bus dari A ke C melalui B?
   c) pergi berkeliling dengan bus dari A ke C melalui B jika jalur bus tidak boleh digunakan dua kali (berulang) ?
2. Andaikan pengulangan tidak diijinkan,
   a) Berapa banyak tiga digit angka yang dapat dibentuk dari 6 digit 2, 3, 5, 7 dan 9 ?
   b) Berapa banyak angka yang dapat dibentuk yang nilainya kurang dari 400 ?
   c) Berapa bayak bilangan genap yang dapat dibentuk ?
3. Cari jumlah permutasi yang muncul yang dapat dibentuk dari semua huruf pada setiap kata
   a) RADAR
   b) UNUSUAL

5.10. Kombinasi

Misalnya ada sekumpulan dari n objek, kombinasi dari n objek dengan pengambilan r pada satu waktu dengan berbagai seleksi dari r dari objek dimana urutan tidak diperhitungkan. Dengan kata lain, kombinasi r dari himpunan n objek adalah berbagai subset dari r elemen.

Sebagai contoh, kombinasi dari huruf a,b,c,d diambil 3 dalam satu waktu adalah :

{a,b,c} {a,b,d} {a,c,d} {b,c,d} atau sederhananya abc, abd, acd, bcd.

Perhatikan bahwa kombinasi di bawah ini adalah sama :

abc, acb, bac, bca, cab dan cba

semua di atas sama dengan himpunan {a,b,c}

Jumlah kombinasi dari n objek yang diambil sebanyak r dalam satu waktu dituliskan dengan c(n,r). Simbol ${}_nC_r$, C_{nr} dan C_r juga diperbolehkan dalam variasi penulisannya.
Sebelum mencari rumus umum untuk c(n,r), perhatikan terlebih dahulu kasus khusus di bawah ini .

Contoh 4.7

Cari jumlah dari kombinasi 4 objek a,b,c,d yang diambil 3 pada satu waktu. Kombinasi yang berisi 3 objek yang ditentukan 3! = 6 permutasi. Jumlah kombinasinya adalah 3! sama dengan jumlah permutasi.

$$C(4.3)\,.\,3! = (P,3) \text{ atau } C(4,3) = \frac{P(4\ 3)}{3!}$$

tetapi P (4,3) = 4.3.2 = 24 dan 3! = 6 selanjutnya C (4.3) = 4

Kombinasi	Permutasi
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dba, dab
acd	acd, adc, cad, cda, dac, cda
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc,dcb

Gambar 2.

5.11. Rumus untuk C (n,r)

Jika kombinasi dari n objek yang diambil r pada satu waktu ditentukan r! permutasi dari objek dalam kombinasi, dapat disimpulkan bahwa

$$P(n,r) = r!\,C(n.r)$$

Teorema 3 $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

ingat kembali bahwa koefisien binomial $\binom{n}{r}$ didefinisikan menjadi

selanjutnya $C(n,r) = \binom{n}{r}$ jadi C (n,r) dan $\binom{n}{r}$ dapat saling digunakan.

Contoh 4.8

a) Berapa banyak cara komisi yang terdiri atas 3 orang yang dapat dibentuk dari 8 orang ? Pada dasarnya masing-masing komisi adalah kombinasi dari 8 orang yang diambil 3 pada satu waktu. Selanjutnya jumlah komisi yang dapat dibentuk adalah

$$C(8.3) = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$$

b) Seorang petani membeli 3 sapi, 2 babi dan 4 ayam dari seseorang yang mempunyai 6 sapi, 5 babi dan 8 ayam. Berapa banyak pilihan yang dipunyai oleh si petani ? Petani dapat memilih sapi dalam $\binom{6}{3}$ cara, memilih babi

$\binom{5}{2}$ cara dan ayam $\binom{8}{4}$ cara. Selanjutnya semua disatukan menjadi :

$$\binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6.5.4}{1\,2\,3} \cdot \frac{5\,4}{1\,2}\;\frac{8\,7\,6\,5}{1\,2\,3\,4} = 20.10.70 = 14{,}000 \text{ cara}$$

Latihan Soal (Kombinasi)

1. Dalam berapa banyak cara sebuah komisi yang terdiri dari tiga orang laki-laki dan 2 orang wanita dapat dipilih dari tujuh orang pria dan lima orang wanita ?
2. Kantung berisi enam kelereng berwarna putih dan lima kelereng berwarna merah. Cari jumlah cara empat kelereng dapat diambil dari kantung jika :
   a) terdiri dari semua warna
   b) dua putih dan dua merah
   c) semua warna sama
3. Berapa bayak komisi yang terdiri dari lima orang dengan salah seorangnya menjadi ketua dapat dipilih dari 12 orang ?

5.12. Kaidah Sarang Burung

Jika n sarang burung terisi oleh n + 1 atau lebih burung, maka paling sedikit satu sarang burung diisi oleh lebih dari satu burung.
Prinsip ini dapat diaplikasikan untuk beberapa masalah dimana situasi yang diharapkan dapat terjadi.

Contoh 4.9

a) Misalkan satu departemen berisi 13 profesor. Kemudian dua dari profesor (burung) lahir pada bulan yang sama (sarang burung).
b) Misalkan kantong cucian berisi banyak kaos kaki merah, putih dan biru. Hanya diperlukan satu pengambilan (burung) untuk empat kaos kaki agar dapat yakin mengambil sepasang kaos kaki dengan warna yang sama (sarang burung).
c) Cari jumlah minimum dari elemen yang dengan satu kali pengambilan dari himpunan s = {1,2,3,...,9} untuk meyakinkan bahwa dua dari angka tersebut jika ditambahkan hasilnya akan sama dengan 10. Disini sarang burung adalah 5 himpunan {1,9}, {2,8}, {3,7}, {4,6}, {5}. Dengan enam pilihan (burung) dari s akan dijamin jika kedua angka tersebut hasilnya akan 10.

5.13. Prinsip Sarang Burung yang diperumum

Jika n sarang burung diisi oleh kn + 1 atau lebih burung, dimana k adalah bilangan integer positif, maka paling sedikit satu sarang burung yang diisi oleh k+1 atau lebih burung.

Contoh 4.10

a) Carilah jumlah minimum dari pelajar di dalam kelas untuk meyakinkan bahwa tiga dari mereka lahir di bulan yang sama. Selanjutnya n = 12 bulan adalah sarang burung dan k + 1 = 3 atau k = 2. Selanjutnya diantara setiap kn + 1 = 25 pelajar (burung), tiga diantaranya lahir di bulan yang sama.
b) Sama dengan contoh 2.9(b). Disini ada n = 3 warna (sarang burung) dan k+1=4 atau k = 3. Selanjutnya diantara setiap kn + 1= 10 kaos kaki (burung), empat dari semuanya mempunyai warna yang sama.

Latihan Soal (Prinsip Sarang Burung)

1. Cari jumlah minimum n bilangan bulat yang dipilih dari S = { 1, 2, …, 9} yang menjadi :
   a) jumlah bilangan bulat dari n adalah genap ?
   b) selisih dua bilangan bulat adalah 5 ?

5.14. Prinsip Inklusi dan Eksklusi

A dan B menjadi himpunan terbatas, maka

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

dengan kata lain, untuk mencari jumlah n $(A \cup B)$ dari elemen dalam gabungan $A \cup B$, tambahkan n (A) dan n (B) dan kemudian kurangkan dengan n $(A \cap B)$; itu berarti inklusif n (A) dan n (B), dan eksklusif n $(A \cap B)$. Bentuk ini adalah fakta yang jika n (A) dan n (B) ditambahkan, hitung elemen dari $(A \cap B)$ kedua kalinya. Prinsip ini dipakai untuk semua jumlah himpunan.

Teorema 4

Untuk semua himpunan terbatas, A,B,C
mempunyai

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

yang berarti
n(A), n (B), n(C) adalah inklusif,
$n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ adalah eksklusif,
$(A \cap B \cap C)$ adalah inklusif.

Contoh 4.11

Cari jumlah dari mahasiswa matematika sebuah Perguruan Tinggi yang mengambil minimal satu bahasa Perancis, Jerman dan Rusia dengan data yang ada :

65 belajar bahas Perancis	20 belajar bahasa Perancis dan Jerman
45 belajar bahasa Jerman	25 belajar bahasa Perancis dan Rusia
42 belajar bahasa Rusia	15 belajar bahasa Jerman dan Rusia
	8 belajar 3 bahasa

yang ingin dicari n $(F \cup G \cup R)$ dimana F,G dan R ditulis himpunan dari pelajar yang belajar bahasa Perancis, Jeman dan Rusia. Dengan prinsip inklusi dan eksklusi

$$n(F \cup G \cup R) = n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) - n(F \cap R) - n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R)$$
$$= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100$$

Maka ada 100 mahasiswa belajar minimal satu bahasa.

Sekarang, andaikan punya beberapa angka terbatas dari himpunan terbatas, dikatakan A_1, A_2, ..., A_n. S_k menjadi jumlah dari kardinalitas $n(A_{i1} \cap A_{i2} \cap .. \cap A_{ik})$ dari semua kemungkinan k tuple irisan dari m himpunan yang diberikan. Prinsip umum inklusi dan eksklusi selanjutnya.

Teorema 5 $\quad n(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = S_1 + S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{m-1} S_m$

Latihan Soal (Prinsip Inklusi dan Eksklusi)

32 orang yang menyimpan kertas atau botol (atau keduanya) untuk didaur ulang. 30 orang menyimpan kertas dan 14 menyimpan botol. Cari jumlah m dari orang yang :

a) menyimpan keduanya ?
b) menyimpan kertas saja ?
c) menyimpan botol saja ?

5.15. Partisi yang diurutkan dan tidak diurutkan

Kantung A berisi tujuh kelereng yang diberi nomor 1 s/d 7. Hitung jumlah cara yang dapat dilakukan jika pengambilannya 2 kelereng kemudian 3 kelereng dan selanjutnya 2 kelereng dari kantung. Dengan kata lain akan dihitung jumlah dari partisi yang diurutkan.

$$[\, A_1, A_2, A_3 \,]$$

dari himpunan tujuh buah kelereng ke dalam sel A_1 yang berisi 2 kelereng, A_2 berisi 3 kelereng, A_3 berisi 2 kelereng. Dinamakan partisi yang diurutkan jika berbeda diantara [{1,2},{3,4,5},{6,7}] dan [{6,7},{3,4,5},{1,2}] sebagian dari perkiraan yang partisinya sama-sama dari A.

Mulailah dengan tujuh kelereng di dalam kantung, jadi disana ada $\binom{7}{2}$ cara yang dapat dilakukan untuk dua kelereng pertama, yang ditentukan untuk sel pertama A_1; ada 5 kelereng tersisa dalam kantung dan menjadi $\binom{5}{3}$ cara yang dapat dilakukan untuk tiga kelereng, untuk menentukan sel kedua A_2; akhirnya ada sisa dua kelereng dalam kantung jadi ada $\binom{2}{2}$ cara untuk menentukan sel

terakhir A_3. Hasilnya adalah :

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7.6}{1.2} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{2.1}{1.2} = 210$$

perbedaan partisi yang diurutkan dari A ke dalam sel A_1 yang berisi 2 kelereng, A_2 berisi 3 kelereng dan A_3 berisi 2 kelereng.

Sekarang perhatikan bahwa

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!}.$$

jika setiap pembilang setelah yang pertama diabaikan dengan pernyataan kedua dalam penyebut dari faktor selanjutnya.

Teorema 6

A berisi n elemen dan n_1 ; n_2, ... n_r menjadi bilangan bulat positif yang jumlahnya adalah n, ini berarti $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Kemudian disana ada

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_r!}.$$

partisi berbeda yang diurutkan dari A yang bentuknya $[A_1, A_2,... A_r]$ dimana A_1 berisi n_1 elemen, A_2 berisi n_2 elemen, ..., dan A_r berisi n_r elemen.

Contoh 4.12

Cari jumlah m cara dari 9 mainan yang dapat dibagikan kepada empat anak jika yang termuda mendapat 3 mainan dan yang lainnya mendapat 2 mainan. Untuk mencari jumlah m partisi yang diurutkan dari sembilan mainan kepada empat sel yang berisi 3,2,2,2 permainan secara berturut-turut dengan menggunakan teorema 6.

$$m = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!}. = 7560$$

5.16. Partisi yang tidak terurut

Himpunan A akan dipartisi ke dalam kumpulan dari subset $A_1, A_2, \ldots A_r$, dimana subsetnya sekarang tidak terurut. Hanya jumlah permutasi dengan pengulangan yang dihasilkan dari jumlah permutasi yang dibagi oleh k! dimana objek k adalah sama, jumlah partisi yang tidak terurut dapat juga dihasilkan dari jumlah partisi yang berurut dengan dibagi oleh k! dimana k adalah himpunan mempunyai jumlah elemen yang sama.

Contoh 4.13

Cari jumlah m cara dari 12 mahasiswa yang dapat dibagi dalam 3 tim A_1, A_2 dan A_3. Jadi semua tim berisi 4 pelajar.

Metoda 1

A adalah satu himpunan mahasiswa. Kemudian ada $\binom{11}{3}$ cara untuk memilih tiga pelajar lain untuk menjadi tim yang sama seperti A. B adalah mahasiswa yang timnya tidak sama dengan A, kemudian ada $\binom{7}{3}$ cara untuk memilih tiga pelajar dari mahasiswa yang ada untuk menjadi tim yang sama dengan B. Empat pelajar yang tersisa menjadi tim yang ketiga.

Selanjutnya jika disatukan, jumlah cara untuk mempartisi mahasiswa adalah

$$m = \binom{11}{3} . \binom{7}{3} = 165 . 35 = 5775$$

Metoda 2

Perhatikan semua partisi $\{A_1, A_2, A_3\}$ dari mahasiswa yang dapat diatur dalam 3! = 6 cara seperti partisi yang terurut.

Dengan teorema 8. ada $\frac{12!}{4!\,4!\,4!}$ = 34650 partisi yang terurut

selanjutnya ada m = 34650 / 6 = 5775 partisi yang tidak terurut.

Latihan Soal (Partisi yang berurut dan tidak berurut)

1. Dalam berapa cara sembilan mahasiswa dipartisi dalam tiga tim yang masing-masing berisi empat, tiga dua orang ?
2. Dengan berapa cara 10 mahasiswa dapat dibagi dalam tiga tim. Yang mana satu tim harus empat mahasiswa dan lainnya 3 mahasiswa ?

BAB V

TEORI PELUANG

6.1. Introduksi

Teori Peluang adalah model matematika dari fenomena perubahan atau acak. Jika sebuah koin dilemparkan, hasilnya akan kepala atau ekor, tetapi hasilnya tidak akan diketahui jika dilakukan satu kali pelemparan.
Anggap S adalah jumlah berapa kali bagian kepala muncul setelah dilakukan n kali pelemparan. Dengan penambahan n maka ratio f = S/n dinamakan frekuensi relatif dari "hasil".
Jika koin benar-benar seimbang, maka diharapkan koin akan muncul kepalanya kira-kira 50% dari pelemparan yang dilakukan atau dengan kata lain frekuensi relatif akan mendekati 1/2. Alternatif lain, asumsikan bahwa koin benar-benar seimbang, maka nilai kurang dari 1/2 dapat diterima.
Itu berarti setiap sisi dari koin adalah sama dengan sisi yang lainnya; kesimpulannya, kesempatan untuk muncul kepala adalah 1 : 2 yang berarti peluang dari munculnya kepala adalah 1/2.

Sebagai model matematika probabilistik dari fenomena acak yang didefinisikan dengan pernyataan "peluang" untuk semua kemungkinan yang akan keluar dari setiap percobaan.
Keandalan dari model matematika untuk percobaan yang dilakukan bergantung pada kedekatan dari pernyataan peluang dengan pembatasan nyata frekuensi relatif.

6.2. Ruang Sampel dan Kejadian

Himpunan S dari hasil peluang dari percobaan yang dilakukan dinamakan Ruang Sampel. Elemen dalam S dinamakan Nilai Sampel.
Kejadian A adalah himpunan dari hasil atau dengan kata lain subset dari ruang sampel S. Faktanya himpunan {a} berisi nilai sampel tunggal $a \in S$ yang dinamakan kejadian dasar. Selanjutnya, himpunan kosong $\varnothing$ dan S itu sendiri adalah subset dari S dan juga kejadian; $\varnothing$ kadang-kadang dinamakan kejadian yang tidak mungkin atau kejadian null.

Jika kejadian adalah himpunan, kejadian tersebut dapat dikombinasikan dengan bentuk baru kejadian dengan menggunakan variasi operasi himpunan.

i. $A \cup B$ adalah kejadian yang terjadi di A atau terjadi di B atau keduanya
ii. $A \cap B$ adalah kejadian yang terjadi di A dan terjadi di B
iii. A' , komplemen dari A, juga ditulis A, adalah kejadian yang di luar A

Dua kejadian A dan B dinamakan "mutually exclusive" jika tidak terjadi hubungan, ini berarti jika $A \cap B = \varnothing$. Dengan kata lain A dan B adalah "mutually exclusive" jika terjadi secara bersamaan.
Tiga atau lebih kejadian adalah "mutually exclusive" jika setiap dua dari lima adalah "mutually exclusive".

Contoh 5.1

a) Percobaan
Lemparkan sebuah dadu dan perhatikan angka yang muncul pada sisi yang paling atas.
Ruang sampel S berisi dari enam angka kemungkinan; adalah S = {1,2,3,4,5,6} A adalah kejadian bilangan genap yang muncul, B adalah kejadian bilangan ganjil yang muncul dan C adalah bilangan prima yang muncul; ini berarti :

A = {2,4,6}, B = {1,3,5}, C = {2,3,5}

$A \cup C$ = {2,3,4,5,6} adalah kejadian bilangan ganjil dan bilangan prima yang terjadi
$B \cap C$ = {3,5} adalah kejadian bilangan ganjil dan bilangan prima
C' = {1,4,6} adalah kejadian yang tidak termasuk bilangan prima

Catat bahwa A dan B adalah "mutually exclusive" : $A \cap B = \varnothing$. Dengan kata lain bilangan ganjil dan bilangan genap tidak dapat terjadi pada saat yang bersamaan.

b) Percobaan
Lempar sebuah koin sebanyak tiga kali dan perhatikan bagian kepala dan ekor yang muncul. Ruang sampel S berisi 8 elemen seperti di bawah ini :

S = {HHH, HHT, HTH, THH, THT, TTH, TTT}

A adalah kejadian yang kepalanya berurutan muncul dua kali atau lebih dan B adalah yang semua hasil lemparannya sama, ini berarti :

A = {HHH, HHT, THH } dan B = {HHH, TTT}

maka $A \cap B$ = {HHH} adalah kejadian dasar yang mana hanya kepala saja yang muncul.

c) Percobaan
Lempar sebuah koin sampai muncul bagian kepalanya, dan kemudian hitung jumlah pelemparan koin yang dilakukan. Ruang sampel dari percobaan adalah

S = {1,2,3,...},

jika bilangan bulat positif adalah elemen dari S, ruang sampel menjadi tidak terbatas.

Latihan Soal (Ruang Sampel dan Kejadian)

1. Andaikan A dan B adalah himpunan yang saling beririsan, gambarkan diagram venn dari kejadian di bawah ini :
   a) A tetapi tidak B
   b) Tidak A atau B dan tidak keduanya
   c) Tidak A dan tidak B
2. Sepasang Dadu dilemparkan dan dua angka muncul dipermukaan. Terangkan ruang sampel S dan cari Jumlah n(S) dari elemen S !

6.3. Ruang Kemungkinan Terbatas

Definisi

S adalah sampel terbatas, katakan $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ruang kemungkinan terbatas atau model kemungkinan adalah dihasilkan dari pernyataan untuk setiap nilai a_1 di dalam S sebuah bilangan real P_i, dinamakan kemungkinan dari a_i, untuk memenuhi batasan tersebut :

i) setiap P_i adalah tidak negatif, berarti $P_i >= 0$
ii) jumlah dari P_i adalah 1, ini berarti $P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$

kemungkinan dari kejadian A ditulis P(A), kemudian didefinisikan menjadi jumlah dari kemungkinan dari nilai di dalam A.

Himpunan tunggal $\{a_i\}$ dinamakan kejadian dasar dan untuk notasinya dituliskan $P\ \{a_i\}$ untuk $P\ (\{a_i\})$.

Contoh 5.2

Percobaan

Tiga koin dilemparkan dan perhatikan bagian kepala yang muncul. Ruang sampel adalah $S = \{0,1,2,3\}$. Pernyataan pada elemen dari S didefinisikan ruang kemungkinan :

$$P(0) = 1/8, \quad P(1) = 3/8, \quad P(2) = 3/8, \quad P(3) = 1/8$$

ini berarti kemungkinan adalah tidak negatif dan jumlah dari kemungkinan adalah 1. A adalah kejadian yang minimal kepalanya muncul satu kali, dan B menjadi kejadian yang semuanya kepala atau ekor, ini berarti $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{0,3\}$, selanjutnya didefinisikan :

$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8$ dan
$P(B) = P(0) + P(3) = 1/8 + 1/8 = ¼$

Latihan Soal (Ruang Kemungkinan Terbatas)

1. Sebuah koin diberi bobot dua kali kemunculan muka dibanding belakang. Cari P(T) dan P(H) !
2. Anggaplah A dan B adalah kejadian dengan $P(A) = 0,6$ $P(B) = 0,3$ dan $P(A \cap B) = 0,2$. Cari kemungkinan yang :
   a) A tidak terjadi
   b) B tidak terjadi
   c) A dan B terjadi
   d) A dan B tidak terjadi

6.4. Ruang kemungkinan yang sama

Karakteristik fisik dari sebuah percobaan berkesan bahwa variasi hasil dari ruang sampel menjadi pernyataan kemungkinan yang sama. Beberapa ruang kemungkinan terbatas S, dimana semua nilai sampel mempunyai kemungkinan yang sama, akan dinamakan "Ruang Kemungkinan Yang Sama". Faktanya, jika S berisi nilai n, maka kemungkinan dari semua nilai adalah 1/4. Lebih lanjut jika kejadian A berisi nilai r, maka kemungkinannya adalah r (1/n) = r/n, dengan kata lain :

$$P(A) = \frac{\text{jumlah elemen dari A}}{\text{jumlah elemen dari S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

atau

$$P(A) = \frac{\text{jumlah hasil yang sering muncul dari A}}{\text{total jumlah dari kemungkinan hasil}}$$

dimana n(A) dituliskan sebagai jumlah dari elemen dalam himpunan A.
Ditegaskan bahwa rumus di atas untuk P (A) hanya dapat dipakai yang berkenaan dengan ruang kemungkinan yang sama dan tidak dapat digunakan secara umum.
Ekspresi random hanya akan digunakan yang berkenaan dengan sebuah ruang kemungkinan yang sama. Pernyataan "pilih nilai secara acak dari himpunan S" seharusnya berarti bahwa setiap nilai sampel dari S mempunyai kemungkinan yang sama untuk dipilih.

Contoh 5.3

Pilihlah satu kartu dari sebungkus kartu yang terdiri dari 52 kartu.

A = {kartu hati hitam} dan B = {kartu raja}

(kartu raja adalah jack, queen, king). Hitung P (A), P (B) dan P ($A \cap B$). Jika punya ruang kemungkinan yang sama,

$$P(A) = \frac{\text{jumlah hati hitam}}{\text{jumlah kartu}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{\text{jumlah kartu raja}}{\text{jumlah kartu}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{jumlah kartu raja hati hitam}}{\text{jumlah kartu}} = \frac{3}{52}$$

6.5. Teorema Ruang Kemungkinan Terbatas

Teorema Ruang Kemungkinan Terbatas diambil dari fakta bahwa kemungkinan dari sebuah kejadian adalah jumlah masing-masing kemungkinannya.

Teorema 1

Fungsi kemungkinan P didefinisikan pada kelas dari semua kejadian dalam ruang kemungkinan terbatas yang mempunyai batasan :

[P_1] untuk setiap kejadian A, 0 <= P(A) <= 1
[P_2] P (S) = 1
[P_3] jika kejadian A dan B adalah "mutually exclusive", maka
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Selanjutnya, rumus teoremanya adalah bahwa jika P adalah kemungkinan yang terjadi pada kejadian E, maka 1 - P adalah kemungkinan E yang tidak akan terjadi (ini berarti jika memukul mengenai target P = 1/3 setiap waktu, maka yang tidak mengenai target 1 - P = 2/3 setiap waktu).

Teorema 2

A adalah setiap kejadian, maka P (A') = 1 - P (A)

Teorema 3

$\varnothing$ adalah himpunan kosong, dan Andaikan A dan B adalah setiap kejadian. Maka :

i) $P(\varnothing) = 0$
ii) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
iii) jika $A \subseteq B$, maka P (A) <= P (B)

Perhatikan bahwa batasan [P_3] dalam teorema 1 memberikan kemungkinan dari gabungan kejadian dalam kasus yang kejadiannya berhubungan. Rumus umumnya dinamakan Prinsip Penjumlahan.

Secara khusus

Teorema 4 (Prinsip Penjumlahan)

Untuk semua kejadian penjumlahan A dan B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Contoh 5.4

Mahasiswa yang dipilih secara acak dari 100 mahasiswa dimana 30 orang mengambil matematik, 20 orang mengambil kimia dan 10 orang mengambil matematik dan kimia. Temukan kemungkinan dari P yang mahasiswanya mengambil matematik atau kimia.

M = {mahasiswa matematik} C = {mahasiswa kimia}

jika ruangnya adalah kemungkinan yang sama,

$P(M) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ $\quad P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ $\quad P(M \text{ dan } C) = P(M \cap C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

selanjutnya dengan prinsip penambahan

$P = P(M \text{ atau } C) = P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

Latihan Soal (Ruang Kemungkinan yang Sama Terbatas)

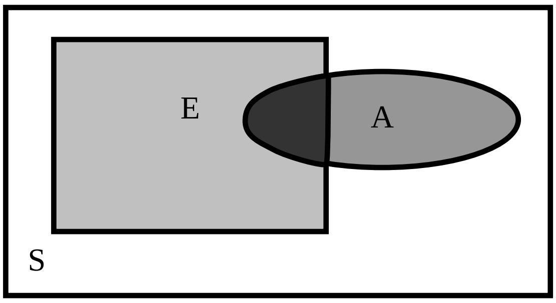
1. Sebuah kartu diambil dari satu set kartu sebanyak 52 buah. Cari kenungkinan :
   a) Kartu King
   b) Kartu Raja
   c) Kartu Hati Merah
   d) Kartu Raja Hati Merah
   e) Kartu Raja atau Hati Merah
2. Dua kartu diambil dari satu set Kartu sebanyak 52 buah. Cari kemungkinan :
   a) Keduanya hati hitam
   b) Satu Hati Hitam dan Satu Hati Merah
3. Kotak berisi dua kaos kaki putih dan dua kaos kaki biru. Dua kaos kaki diambil secara acak. Cari kemungkinan mengambil warna yang sama !
4. Lima Kuda berlomba. Ali memilih dua kuda yang sedang berlomba dan bertaruh untuknya. Cari kemungkinannya !

6.6. Kemungkinan Bersyarat

E adalah kejadian dalam ruang sampel S dengan P(E) > 0. Kemungkinan bahwa sebuah kejadian A terjadi satu kali E atau kemungkinan bersyarat A yang diberikan E dituliskan P (A/B) adalah didefinisikan seperti :

$$P(A\backslash E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Gambar di bawah ini, P (A/E) diukur dengan kegunaan tertentu, kemungkinan relatif dari A yang berkenaan dengan ruang E yang direduksi.



S adalah sebuah ruang kemungkinan yang sama, dan n (A) dituliskan jumlah dari elemen dalam kejadian A. Maka

$$P(A \cap E) = \frac{n\,(A \cap E)}{n\,(S)} \quad , \quad P\,(E) = \frac{n\,(E)}{n\,(S)} \quad \text{, dan juga}$$

$$P(A/E) = \frac{P\,(A \cap E)}{P\,(E)} = \frac{n\,(A \cap E)}{n\,(E)}$$

Teorema 5

S adalah ruang kemungkinan yang sama, dan A dan B adalah kejadian, maka

$$P(A\backslash E) = \frac{\text{jumlah elemen dalam } A \cap E}{\text{jumlah elemen dalam } E} = \frac{n\,(A \cap E)}{n\,(E)}$$

Contoh 5.5

a) Dua buah dadu dilemparkan. Ruang sampel berisi 36 pasangan terurut (a,b) dimana a dan b dapat terisi bilangan bulat dari 1 s/d 6. Kemungkinan dari setiap nilai adalah 1/36. Cari kemungkinan salah satu dadu bernilai 2 jika jumlahnya 6. Ini berarti cari P (A\E) dimana : E = {jumlahnya 6} dan
A = {angka 2 muncul minimal dalam 1 dadu} juga cari P (A).
Sekarang E berisi lima elemen, khususnya : E = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}
dua anggota (2,4) dan (4,2) anggota dari A; ini berarti $A \cap E$ = {(2,4), (4,2)}
dengan teorema 5 P (A/E) = 2/5
Disisi lain, A berisi 11 elemen:
A = {(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)} dan
S berisi 36 elemen. Kesimpulannya P (A) = 11/36.

b) Keluarga mempunyai 2 anak; ruang sampel adalah S = {LL, LW, WL, WW} dengan kemungkinan 1/4 untuk semua nilai. Cara kemungkinan P yang kedua anaknya adalah laki-laki jika diketahui bahwa :
   i) minimal satu anak laki-laki
   ii) anak pertama laki-laki
i) Disini ruang yang direduksi berisi 3 elemen, {LL, LW, WL} ; P = 1/3
ii) Disini ruang yang direduksi berisi 2 elemen, {LL, LW} ; P = 1/2

6.7. Teorema multiplikasi untuk kemungkinan bersyarat

Andaikan A dan B adalah kejadian ruang sampel S dengan P (A) > 0. Dengan definisi dari kemungkinan bersyarat,

$$P\,(B\backslash A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(A)}$$

Multiplikasi kedua sisi melalui P (A) memberikan hasil yang sangat berguna :

Teorema 6 (Teorema Multiplikasi untuk Kemungkinan Bersyarat) :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$$

Teorema multiplikasi menghasilkan rumus untuk kemungkinan A dan B keduanya terjadi. Sangat mudah untuk diperluas ke dalam tiga atau lebih kejadian $A_1, A_2, ..., A_n$; ini berarti

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) = P(A)\,.\,P(A_2/A_1)\,...\,P(A_m/A_1 \cap A_2 \cap\ ... \cap A_{m-1})$$

Contoh 5.6

Satu lot berisi 12 item, empat diantaranya cacat. Tiga item diambil dari lot yang sama.
Cari kemungkinan P yang ketiganya tidak cacat. Kemungkinan pertama bahwa item pertama tidak cacat adalah 8/12 jika 8 dari 12 item tidak cacat.
Jika item pertama tidak cacat, maka kemungkinan bahwa item selanjutnya adalah tidak cacat adalah 7/11 jika hanya 7 dari 11 item yang tersisa adalah tidak cacat.
Jika dua item pertama adalah tidak cacat, maka kemungkinan item yang terakhir tidak cacat adalah 6/10 jika hanya 6 dari 10 item tidak cacat yang ada.
Selanjutnya dengan teorema multiplikasi,

$$P = \frac{8}{12}\ .\ \frac{7}{11}\ .\ \frac{6}{10} = \frac{14}{35} \approx 0.25$$

Latihan Soal (Kemungkinan Bersyarat)

1. Tiga koin berbeda dilemparkan, lima puluh, seratus dan lima ratus. Cari kemungkinan yang semuanya muka jika :
   a) lima puluh muncul muka
   b) Paling sedikit satu koin muncul muka
2. Sebuah kelas terdiri dari 12 anak pria dan 4 anak wanita. Andaikan tiga orang anak dipilih secara acak dari kelas. Cari kemungkinan p yang semuanya pria !
3. Sepasang dadu dilemparkan. Jika yang muncul dua nilai yang berbeda. Cari kemungkina p :
   a) jumlahnya 6 b) salah satu nilai 1 c) Jumlah <=4

6.8. Kejadian yang berdiri sendiri

Kejadian A dan B dalam ruang kemungkinan S dikatakan berdiri sendiri jika kejadian yang satu dengan yang lainnya tidak saling mempengaruhi. B adalah berdiri sendiri dari A jika P (B) adalah sama dengan P (B/A). Sekarang tukarkan P (B) untuk P (B/A) dalam teorema multiplikasi $P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$ hasilnya

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Definisi :

Jika A dan B adalah berdiri sendiri jika $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$;
Berdiri sendiri adalah relasi simetris. Dalam kenyataan,
Persamaan

$$P(A \cap B) = P(A) \cup P(B)$$

keduanya termasuk $P(B/A) = P(B)$ dan $P(A/B) = P(A)$

Contoh 5.7

Koin dilemparkan 3 kali yang menghasilkan ruang kemungkinan yang sama :

S = { HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

Perhatikan kejadian :

A : Lemparan pertama muncul kepala = { HHH, HHT, HTH, HTT }
B : Lemparan kedua muncul kepala = { HHH, HHT, THH, THT }
C : Dua kepala dalam baris = { HHT, THH }

Secara jelas A dan B adalah kejadian yang berdiri sendiri, kenyataan ini di uji di bawah ini. Di sisi lain, hubungan antara A dan C atau B dan C tidaklah jelas.

Contoh 5.8

A dan C adalah berdiri sendiri, tetapi bahwa B dan C adalah saling berhubungan.

Sekarang

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

juga

$P(A \cap B) = P(\{HHH, HHT\}) = 1/4$ $\quad P(A \quad C) = P(\{HHT\}) = 1/8$
$P(B \cap C) = P(\{HHT, THH\}) = 0$

sesuai dengan

$P(A)\,P(B) = 1/2 \,.\, 1/2 = 1/4 = P(A \cap B)$ dan juga A dan B berdiri sendiri
$P(A)\,P(C) = 1/2 \,.\, 1/4 = 1/8 = P(A \cap C)$ dan juga A dan C berdiri sendiri
$P(B)\,P(C) = 1/2 \,.\, 1/4 = 1/8 = P(B \cap C)$ dan juga B dan C saling bergantungan

Kemungkinan A memukul tepat sasaran adalah 1/4, kemungkinan B memukul tepat sasaran adalah 2/5. Kedua lemparan tepat pada sasaran. Cari kemungkinannya yang minimal satu kali dari mereka mengenai sasaran, A atau B atau keduanya mengenai sasaran. P (A) = ¼ dan P (B) = 2/5, cari $P(A \cup B)$. Selanjutnya, kemungkinan bahwa A atau B memukul mengenai sasaran adalah tidak dipengaruhi oleh apa yang dilakukan oleh yang lain, ini berarti bahwa kejadian A mengenai sasaran adalah berdiri sendiri dari kejadian B mengenai sasaran juga berdiri sendiri,

itu berarti P

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \\ &= 1/4 + 2/5 - (1/4)(2/5) \\ &= 11/20 \end{aligned}$$

Definisi

S adalah ruang kemungkinan terbatas. Dengan ruang dari n percobaan berdiri sendiri yang diulang, artinya ruang kemungkinan S_n berisi n tuple yang berurut dari elemen dari S, dengan kemungkinan dari sebuah n tuple didefinisikan menjadi hasil dari kemungkinan dari komponen ini :

$$P((S_1, S_2, ..., S_n)) = P(S_1)\,P(S_2)\,...\,P(S_n)$$

Percobaan berdiri sendiri yang diulang, Distribusi Binomial

Contoh 5.9

Tiga kuda berlomba bersama-sama a,b dan c. Kuda-kuda tersebut mempunyai kemungkinan menang 1/2, 1/3, 1/6. Dengan kata lain S = {a,b,c}   P (a) = 1/2, P (b) = 1/3, P (c) = 1/6. Jika kuda-kuda tersebut berlomba dua kali, maka ruang sampel dari percobaan dua kali yang diulang adalah :

$$S_2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

Aturan penulisan, ac ditulis untuk pasangan berurut (a,c). Kemungkinan masing-masing nilai dalam S_2 adalah :

P (aa) = P (a) P (a) = 1/2 (1/2) = 1/4   P (ba) = 1/6   P (ca) = 1/12
P (ab) = P (a) P (b) = 1/2 (1/3) = 1/6   P (bb) = 1/9   P (cb) = 1/18
P (ac) = P (a) P (c) = 1/2 (1/6) = 1/12   P (bc) = 1/18   P (cc) = 1/36

Selanjutnya kemungkinan c menang dalam perlombaan yang pertama dan a menang pada perlombaan yang kedua adalah P (ca) = 1/12.

6.9. Percobaan berulang dengan dua hasil, Percobaan Bernaulli

Perhatikan sebuah eksperimen dengan hanya dua hasil. Percobaan berulang yang berdiri sendiri dari beberapa percobaan dinamakan Percobaan Bernaulli (ahli matematika Swiss Jacob Bernaulli, 1654-1705). Terminologi percobaan yang berdiri sendiri berarti bahwa hasil dari setiap percobaan tidak bergantung pada hasil selanjutnya. Satu dari hasil percobaan dinamakan sukses dan lainnya gagal.
P dituliskan sebagai kemungkinan dari sukses dalam percobaan Bernaulli, dan juga Q = 1 - P adalah kemungkinan dari gagal. Sebuah percobaan binomial berisi bilangan tertentu hasil percobaan Bernaulli. Notasinya B (n,p) akan digunakan dalam penulisan percobaan binomial dengan n percobaan dan p adalah kemungkinan sukses.

Teorema 7

Kemungkinan pasti sukses k dalam percobaan binomial B (n,p) adalah didapat melalui

$$P(k) = P(k \text{ sukses}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

kemungkinan satu kali sukses atau lebih adalah $1 - q^n$. Disini $\binom{n}{k}$ adalah koefisien binomial.

Contoh 5.10

Catatan

Fungsi P(k) untuk k = 0,1,2,...,n, untuk sebuah percobaan binomial B(n.p), dinamakan distribusi binomial jika berhubungan dengan terminologi sukses dari perluasan binomial :

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2}p^2 + ... + p^n$$

Latihan Soal (Percobaan berulang , Distribusi Binomial)

1. Sebuah keluarga mempunyai enam anak. Cari kemungkinan p yang
   a) tiga anak laki-laki dan 3 anak perempuan
   b) anak laki-laki lebih sedikit dari anak perempuan

   Andaikan kemungkinan lahir anak laki-laki adalah 1/2.
2. Andaikan 20% alat yang produksi oleh sebuah pabrik tidak efektif. Empat alat diambil secara acak. Cari kemungkinan :
   a) dua tidak efektif
   b) tiga tidak efektif
   c) tidak ada yang tidak efektif
3. Tim A mempunyai kemungkinan menang 2/3 setiap kali bermain. Andaikan A bermain empat kali. Cari kemungkinan p dari A yang nilai kemungkinannya > 1/2 setiap kali main.

6.10. Variabel Acak

S adalah sampel dari percobaan. Selanjutnya dituliskan sebagai hasil dari percobaan, atau nilai di dalam S, diperlukan tidak hanya angka.

Contoh 5.11.a

Perhatikan bahwa variabel acak x dalam contoh 11 yang menyatakan jumlah dari lemparan yang dilakukan dari sepasang dadu. Gunakan teorema 7 untuk mengisi distribusi dari x.
Hanya ada satu hasil (1,1) yang jumlahnya 2; selanjutnya P(2) = 1/36, ada 2 hasil (1,2) dan (2,1) yang jumlahnya 3, selanjutnya P(3) = 2/36, ada 3 hasil (1,3), (2,2) dan (3,1) yang jumlahnya 4; selanjutnya P(4) = 3/36. Dengan cara yang sama, P(5) = 4/36, P(6) = 5/36, ... P(12) = 1/36. Distribusi dari x diisi oleh nilai di dalam R_x dengan masing-masing kemungkinan

Dalam melempar koin, hasilnya kepala (H) atau ekor (T), dan pelemparan sepasang dadu, hasilnya sepasang bilangan bulat.
Namun demikian, seringkali dinyatakan dalam pernyataan bilangan khusus untuk setiap hasil percobaan.
Sebagai contoh, dalam pelemparan koin, dengan ketentuan pernyataan kepala dinyatakan dengan 1 dan ekor dengan 0, atau dalam pelemparan sepasang dadu, mungkin ingin dinyatakan dengan jumlah dari dua bilangan integer untuk hasilnya.
Pernyataan dari nilai numerik dinamakan sebuah Variabel Acak.

Definisi

Sebuah variabel acak x adalah aturan yang dinyatakan dalam nilai numerik untuk setiap hasil dari ruang sampel S.

R_x dituliskan sebagai himpunan dari sejumlah pernyataan dari variabel acak X.

Catatan

Dalam terminologi formal, x adalah fungsi dari S ke bilangan real R, dan R_x adalah daerah hasil dari x. Juga untuk beberapa ruang sampel yang tidak terbatas, tidak semua fungsi S ke R diperhatikan menjadi variabel acak. Bagaimanapun, ruang sampel disini adalah terbatas dan setiap fungsi nilai real didefinisikan pada ruang sampel terbatas adalah variabel acak.

Contoh 5.11.b

Sepasang dadu dilemparkan. Ruang sampel S berisi 36 pasang terurut (a,b) dimana a dan b adalah bilangan integer diantara 1 s/d 6, itu berarti

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots , (6,6)\}$$

x adalah pernyataan untuk semua nilai dalam S yang merupakan jumlah nilai; selanjutnya x adalah variabel random dengan ruang jelajah

$$R_x = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Y adalah pernyataan untuk semua nilai maksimum dari 2 bilangan; selanjutnya Y adalah variabel acak dengan ruang jelajah

$$R_y = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Contoh 5.11.c

Sebuah kotak berisi 12 item yang tiga diantaranya cacat. Sebuah sampel dari tiga item diambil dari kotak. Ruang sampel S berisi $\binom{12}{3}$ = 220. Sampel yang

berbeda dari ukuran 3. X dituliskan sebagai jumlah dari item yang cacat dalam sampel; maka X adalah variabel random dengan ruang jelajah $R_x = \{0,1,2,3\}$.

6.11. Distribusi kemungkinan dari variabel acak

R_x = {x1,x2,...,xn} menjadi ruang jelajah dari variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel terbatas S. Maka X menyebabkan pernyataan dari kemun gkinan pada ruang jelajah R_x seperti di bawah ini :

$$\begin{aligned} P_i &= P(X_i) \\ &= P(X = X_I) \\ &= \text{jumlah kemungkinan dari nilai dalam S yang menggambarkan } X_i \end{aligned}$$

Himpunan dari pasangan terurut (X_i, P_i), ..., (X_t, P_t), biasanya jika disusun dalam tabel

X_1	X_2	...	X_t
p_1	p_2	...	p_t

dinamakan distribusi dari variabel random X.

Dalam kasus bahwa S adalah ruang kemungkinan yang sama, dapat diisi distribusi dari variabel acak dengan mudah dari hasil dibawah ini :

$$R_x = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_t\}$$

maka :

$$P_i = P(x_i) = \frac{\text{jumlah nilai dalam S yang menggambarkan } X_i}{\text{jumlah nilai dalam S}}$$

Contoh 5.13

Perhatikan bahwa variabel acak x dalam contoh 11 yang menyatakan jumlah dari lemparan yang dilakukan dari sepasang dadu. Gunakan teorema 7 untuk mengisi distribusi dari x.
Hanya ada satu hasil (1,1) yang jumlahnya 2; selanjutnya P(2) = 1/36, ada 2 hasil (1,2) dan (2,1) yang jumlahnya 3, selanjutnya P(3) = 2/36, ada 3 hasil (1,3), (2,2) dan (3,1) yang jumlahnya 4; selanjutnya P(4) = 3/36. Dengan cara yang sama, P(5) = 4/36, P(6) = 5/36, ... P(12) = 1/36. Distribusi dari x diisi oleh nilai di dalam Rx dengan masing-masing kemungkinan

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_1	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Catatan

x menjadi sebuah variabel random pada ruang kemungkinan S = { a_1, a_2, ..., a_n} dan f(x) menjadi setiap polynomial. Maka f(x) adalah variabel random yang menyatakan $f(x(a_i))$ ke dalam nilai a_i atau dengan kata lain $f(x)(a_i) = f(x(a_i))$. Kesimpulannya, jika x diambil untuk nilai x_1, x_2, ..., x_n dengan masing-masing kemungkinan p_1, p_2, ..., p_n maka f(x) diambil dari nilai $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ dimana kemungkinan q_k dari y_k adalah jumlah dari p_i untuk $y_k = f(x_i)$.

6.12. Harapan dari sebuah variabel acak

x adalah variabel acak. Ada dua cara mengukur (atau parameter) yang penting yang terhubung dengan x, arti dari x dituliskan dengan μ dan μ_x, dan standar deviasi dari x dituliskan dengan σ atau σ_x. Arti dari μ adalah juga dinamakan harapan dari x, ditulis E(x). Dalam pengertian tertentu, arti ukuran μ adalah "Pusat kecenderungan" dari x, dan standar deviasi ukuran σ adalah "menyebarkan" atau "sebaran" dari x.

x adalah variabel acak pada ruang kemungkinan S = { a_1, a_2, ..., a_n }

Arti atau harapan dari x didefinisikan dengan

$$\mu = E(x) = x(a_1)P(a_1) + x(a_2)P(a_2) + \dots + x(a_m)P(a_m)$$
$$= \Sigma x(a_i)\, P(a_i)$$

kenyataannya, jika diberikan dengan distribusi

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

maka harapan dari x adalah

$$\mu = E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = \Sigma x_i\, P_i$$

Contoh 5.14

a) Koin dilemparkan sebanyak 6 kali. Jumlah kepala yang muncul dapat terjadi dengan kemungkinan gagal adalah seperti di bawah ini :

xi	0	1	2	3	4	5	6
pi	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

maka artinya atau harapan atau jumlah pemunculan kepala yang diharapkan adalah :

μ = E(x) = x(a) p(a) + x(b) p(b) + x(c) p(c)

= 0(1/64) + 1(6/64) + 2(15/64)+3(20/64)+4(15/64) + 5(6/64) + 6(1/64)

Latihan Soal (Variabel Acak, Harapan)

1. Dua angka dipilih diantara 1 sampai dengan 3 secara random dengan pengulangan yang diijinkan. X dituliskan sebagai jumlah dari nilai.
   a) Cari distribusi dari X
   b) Cari harapan dari E(X)
2. Koin dilemparkan sampai bagian muka atau lima kali bagian belakang muncul. Cari nilai harapan E dari pelemparan koin.

6.13. Varian dan Standar Deviasi dari Variabel Acak

Perhatikan sebuah variabel acak x dengan mean μ dan distribusi kemungkinan

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

Varian Var(x) dan standar deviasi σ dari x didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} Var(x) &= (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \ldots (x_n - \mu)^2 p_n = \Sigma(x_i - \mu)^2 p_i \\ &= E((x - \mu)^2) \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

Rumus di bawah ini lebih banyak digunakan untuk menghitung Var(x) dibandingkan dengan rumus di atas.

$$\begin{aligned} Var(x) &= x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + \ldots x_n{}^2 p_n = \Sigma x_n{}^2 p_n - \mu^2 \\ &= E(x^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Catatan

Menurut rumus di atas, Var (x) = σ^2 . Keduanya σ dan σ^2

Contoh 5.15

a) x dituliskan sebagai jumlah kemunculan bagian kepala yang terjadi ketika koin dilemparkan sebanyak enam kali. Distribusi dari x diperlihatkan pada contoh 15(a) dimana mean dari $\mu = 3$ setelah dihitung. Varian x dihitung seperti di bawah ini :

$$\mathrm{Var}(x) = (0 – 3)^2\ 1/64 + (1 – 3)^2\ 2/64 + \ldots + (6 – 3)^2\ 1/64 = 1{,}5$$

Alternatif lain :

$$\mathrm{Var}(x) = 0^2\ 1/64 + 1^2\ 6/64 + 2^2\ 15/64 + 3^2\ 20/64 + 4^2\ 15/64 + 5^2\ 6/64 + 6^2\ 1/64 - 3^2 = 1{,}5$$

Jadi standar deviasinya adalah :

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}225 kepala$$

b) Perhatikan variabel random x dalam contoh 15(b), dimana mean □ = 0,75 setelah dihitung.
Varian x nya adalah :
Var(x) = 02 84/220 + 12 108/220 + 22 27/220 + 32 1/220 - (0,75)2 = 0,46
Jadi standar deviasinya adalah :

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}66$$

6.14. Distribusi Binomial

Perhatikan percobaan binomial B(n,p). Itu berarti B(n,p) berisi dari n percobaan yang diulang berdiri sendiri dengan dua hasil, sukses atau gagal, dan p adalah kemungkinan sukses. Jumlah x dari k sukses adalah varaibel random dengan distribusi yang muncul:

k	0	1	2	…	n
P(k)	q^n	$\binom{n}{1} q^{n-1} p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} p^2$	…	p^2

aplikasi teoremanya :

Teorema 8

Perhatikan distribusi binomial B(n,p), kemudian :

i) Nilai harapan $E(x) = \mu = np$

ii) Varian $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = npq$

iii) Standar deviasi $\sigma = \sqrt{npq}$

Contoh 5.16

b) kemungkinan seseorang memukul sasarannya adalah p = 1/5.Jika memukul 100 kali, carilah nilai harapan μ dari pemukulan yang akan mengenai sasaran dan standar deviasi σ.

Disini p = 1/5 dan juga q = 4/5, kesimpulannya :

μ = np = 100 , 1/5 = 20 dan

a) Cari nilai harapan E(x) dari jawaban yang benar yang diisi dari pertanyaan benar atau salah. Disini p = ½.
Kesimpulannya E(x) = np = 5.1/2 = 2,5

Latihan Soal (Mean, Varian, Standar Deviasi)

1. Lima kartu diberi nomor 1 sampai dengan 5. Dua kartu diambil secara acak. X dituliskan sebagai jumlah dari pengambilan
   a) Cari distribusi dari x
   b) Cari mean, varian dan standar deviasi dari x.
2. Sepasang dadu dilemparkan. X dituliskan sebagai nilai maksimum dua angka yang muncul.
   c) Cari distribusi dari x
   d) Cari mean, varian dan standar deviasi dari x.
3. X dan Y adalah variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel yang sama yaitu S. Kemudian Z = X + Y dan W = XY adalah juga variabel random pada S yang didefinisikan dengan :
   Z(s) = (X+Y)(s) =X(s)+Y(s) dan W(s) = (XY)(s) = X(s)Y(s)
   a) Cari distribusi dan nilai harapan dari Z = X + Y
   b) Cari distribusi dan nilai harapan dari W = XY

BAB VI

TEORI GRAPH

7.1. Introduksi Struktur Data

Graph, Graph berarah dan pohon serta pohon biner muncul dalam beberapa bagian di Matematika dan Ilmu Komputer. Untuk mengetahui bagaimana objek ini dapat disimpan dalam memori dan memahami algoritmanya, diperlukan sedikit pengetahuan tentang struktur data.

7.1.1. Linked List and Pointer

Linked list dan pointer akan dijelaskan artinya dengan contoh di bawah ini. Andaikan sebuah perusahaan penyimpan datanya dalam record yang terdiri dari field nama customer dan salesman.

customer	Adam	Brown	Clark	Drew	Evans	Farmer	Geller	Hill	Inpeld
Salesman	Smith	Ray	Ray	Jones	Smith	Jones	Ray	Smith	Roy

Ada 2 Operasi dasar yang dapat menampilkan data sesuai keinginan.
Operasi A : Diketahui nama customer, cari nama salesman
Operasi B : Diketahui nama salesman, cari daftar nama customernya

Selanjutnya yang dibahas adalah jumlah cara dari penyimpanan data di dalam komputer yang mungkin dilakukan. Lebih jelasnya, file dapat disimpan komputer dalam array dengan dua basis (atau kolom) dari 9 nama customer.
Jika daftar customer disusun secara alfabet, sangat mudah sekali untuk melakukan operasi A. Untuk menampilkan urutan hasil operasi B. Harus dilakukan terlebih dahulu operasi pencarian pada array. Penyimpanan data pada contoh di atas dapat dilakukan dengan mudah dalam array dua dimensi dimana baris dihubungkan dengan daftar secara alfabet dari customer dan kolom dihubungkan dengan daftar secara alfabet dari salesman, disitu menggunakan angka 1 untuk mengindikasikan salesman dan customernya dan lainnya diisi dengan 0.
Representasi dari model ini mungkin akan banyak menggunakan memori yang tak terpakai sebab akan banyak nilai 0 dalam matrik.

Sebagai contoh, sebuah perusahaan mempunyai 1000 customer dan 20 orang salesman diperlukan 20.000 lokasi memori untuk data, tetapi digunakan hanya 1000. Dengan Link list, berarti elemen data dikumpulkan secara linier yang dinamakan simpul/nodes, dimana urutan liniernya diberikan melalui field yang berisi pointer jika disusun dengan bentuk link list gambarnya adalah seperti di bawah ini.

Customer	SLSM	NEXT
Adams	3	5
Brown	2	3
Clark	2	7
Drew	1	6
Evans	3	8
Farmer	1	0
Geller	2	9
Hill	3	0
Inpeld	2	0

Salesman	Start	
Jones	4	1
Roy	2	2
Smith	1	4

Gambar 1

Perhatikan bahwa di atas array dibagi untuk customer dan salesman. Dalam gambar di atas terdapat pointer array SLSM yang paralel dengan customer yang menunjukkan salesman dari customer.

Kesimpulan, operasi A dapat dilakukan dengan mudah dan cepat secara khusus, ada pointer start yang paralel dengan salesman untuk menunjukan customer pertama dari setiap salesman dan di dalam tabel tersebut juga ada pointer NEXT yang menunjukan lokasi dari customer selanjutnya dari daftar salesman (atau berisi nilai 0 untuk mengindikasikan akhir dari list). Sekarang operasi B dapat dilakukan dengan cepat dan mudah . Hal ini terjadi karena tidak diperlukan pencarian melalui daftar semua customer yang diurutkan.

Algoritma dalam pseudocode

```
Algoritma 1
{nama salesman dibaca, maka daftar customernya dicetak}

Langkah 1    Baca XXX
Langkah 2    Cari k yang mana salesman[k]=XXX {gunakan binary search}
Langkah 3    Set PTR := mulai[k]              {inisialisasi pointer PTR}
Langkah 4    Repeat selama PTR ≠ NULL
             a) cetak customer [PTR]
             b) set PTR := NEXT [PTR]    {Update PTR}
             akhir pengulang
Langkah 5    Keluar
```

7.1.2. Stack, Queue dan Prioritas Queue

Ada struktur data yang lain selain array dan link list yang akan digunakan

7.1.2.1. Stack

Stack yang juga dinamakan sistem Last In First Out (LIFO) adalah list linier yang mana penyisipan dan penghapusan hanya dapat dilakukan pada satu keluaran yang dinamakan 'top' dari list struktur ini sama dengan operasi tumpukan piring yang dicuci.

7.1.2.2. Queue

Queue yang juga dinamakan Sistem First In First Out (FIFO) adalah list linier yang proses penghapusannya dapat dilakukan dari satu sisi list, 'Front' dari list dan penyisipan hanya dapat dilakukan pada satu tempat pada sisi yang lain, 'rear' dari list. Struktur operasinya banyak kesamaan dengan antrian orang yang mengantri di kasir.

7.1.2.3. Prioritas Queue

S adalah himpunan elemen dimana elemen baru secara periodik disisipkan, tetapi dimana elemen terbesar yang ada (elemen dengan prioritas tertinggi) dihapus. Maka S dinamakan prioritas queue. Stack dan queue biasa adalah jenis khusus dari prioritas queue. Lebih spesifik lagi, elemen yang prioritasnya tertinggi di dalam stack adalah elemen terakhir yang disisipkan, tetapi elemen dengan prioritas tertinggi dalam queue adalah elemen pertama yang disisipkan.

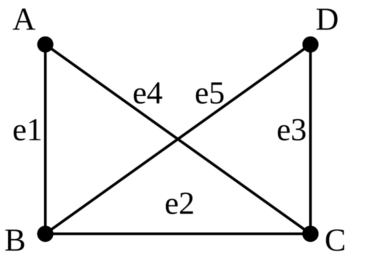
7.2. Graph dan Multigraph

Graph G berisi tentang dua hal
i. Sebuah himpunan V = V(G) dimana elemen vertice, point, simpul atau node dari G
ii. Sebuah himpunan E = E(G) dari pasangan yang tidak terurut dari simpul yang dinamakan sisi dari C (busur).

Beberapa Graph dituliskan dengan G(V,E) ketika dikembangkan dalam dua bagian dari G. Simpul U dan V dikatakan bertetangga jika ada busur e = {U, V} Dalam beberapa kasus U dan V dinamakan

simpul dari e, dan e dikatakan menghubungkan U dan V. Juga sisi e dikatakan menjadi incident dalam setiap simpul U dan V.
Graph adalah gambar dalam bentuk diagram dalam cara pemetaan yang biasa. Simpul b dalam V direpresentasikan dengan titik atau lingkaran kecil dan busur e={V_1, V_2} digambarkan dengan kurva yang menghubungkan simpul V_1 dan V_2. Sebagai contoh, Gambar 1 merepresentasikan Graph G(V,E) dimana
1. V berisi simpul A, B, C, D
2. E. Berisi busur e_1 = {A, B}, e_2 = {B, C}, e_3 = {C, D}, e_4 = {A, C}, e_5 = {B, D}

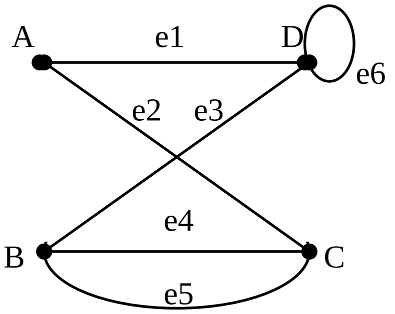
Jika daftar simpul dan sisi di atas digambarkan dalam bentuk diagram maka hasilnya



Gambar 1

7.2.1. Multigraph

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 2

Busur e_4 dan e_5 dinamakan dengan busur multiple jika terhubung dalam simpul yang sama dan sisi e_6 dinamakan 'loop' jika busur menghubungkan satu simpul. Beberapa gambar diagram dinamakan multigraph, definisi formalnya adalah graph dengan banyak sisi dan atau terdapat “loop”. Graph sederhana dapat juga didefinisikan sebagai multigraph yang tidak mempunyai bayak sisi dan/ atau “loop”

Catatan

Dalam beberapa buku kata graph sudah termasuk multigraph dan menggunakan kata graph sederhana untuk mengartikan graph tanpa busur multiple atau loop.

7.2.2. Derajat dari simpul

Derajat dari sebuah simpul V dalam sebuah graph G, dituliskan derajat (V), Hal ini sama artinya dengan jumlah busur dalam G yang terhubung dengan V, ini berarti berelasi dengan V.

Teorema 1

Jumlah derajat dari semua simpul dari Graph G adalah sama dengan dua kali jumlah busur dalam Graph G

Contoh :

Perhatikan gambar 1
Derajat (A) = 2, Derajat (B) = 3, Derajat (C) = 3, Derajat(D) = 2. Jumlah dari derajat adalah 10 yang mana sama dengan dua kali jumlah busur.

Simpul dapat dikatakan genap atau ganjil sesuai dengan jumlah derajat yang dimilikinya. A dan D dikatakan simpul genap dan B dan C dikatakan simpul ganjil.
Teorema 1 juga berlaku untuk multigraph dimana 'loop' dihitung dua kali.
Sebagai contoh dalam gambar 2, derajat (D) = 4 jika busur e_6 dihitung dua kali. Jadi D adalah simpul genap.

7.2.3. Graph terbatas, Graph Trivial

Multigraph dikatakan terbatas jika mempunyai jumlah simpul terbatas dan jumlah busur terbatas. Jika sebuah graph mempunyai simpul yang terbatas, maka secara otomatis mempunyai busur yang terbatas. Graph terbatas dengan satu simpul dan tanpa busur (satu titik) dinamakan graph trivial.

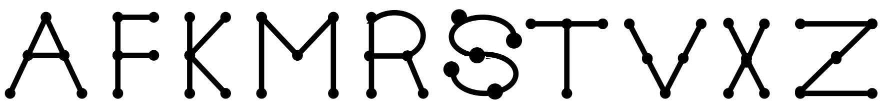
7.3. Sub Graph, Graph Isomorphik dan Homeomorphic

Perhatikan sebuah graph G = G (V, E). Sebuah graph H = H(V^1, E^1) dinamakan sub graph dari G jika simpul dan busur dari H adalah juga simpul dan busur dari G. Ini berarti jika V' $\subseteq$ V dan E' $\subseteq$ E. Faktanya

i. Sebuah sub graph H(V^1, E^1) dari G(V, E) dinamakan sub graph karena simpul V' dan busur E' juga merupakan simpul V dan busur E
ii. Jika v adalah simpul di dalam G, maka G - V adalah sub graph dari G yang dihasilkan dengan menghapus v dari G dan mengapus semua busur di dalam G yang berisi v.
iii. Jika e adalah sebuah busur dalam G, maka G - e adalah sub graph G yang disebabkan oleh penghapusan sederhana busur e dari G.

7.3.1. Graph Isomorfik

Graph G(V, E) dan G*(V*,E*) dapat dikatakan isomorfik jika ada hubungan satu ke satu f : V $\rightarrow$ V* yang berarti {U, V} adalah busur di G jika dan hanya jika {f(u),f(v)} adalah busur dari G*

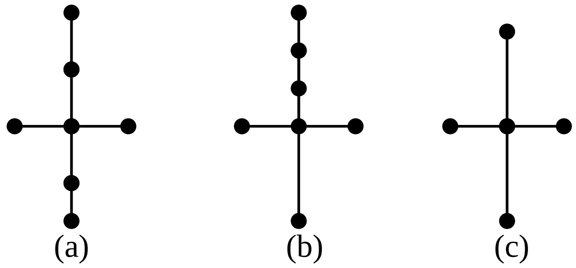


Gambar 3

A dan R dikatakan graph isomorfik juga F dan T, K dan X dan M, S, V dan Z adalah graph isomorfik

7.3.2. Graph Homeomorfik

Sebuah graph dapat menjadi graph yang baru dengan melakukan proses pembagian terhadap sebuah busur atau menambah simpul. Dua Graph G dan G* dikatakan homeomorfik jika dapat dibentuk dari graph yang sama atau isomorfik.



Gambar 4

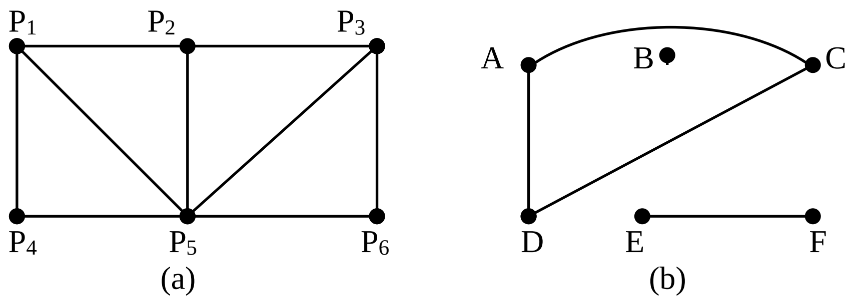
Pada gambar di atas, Graph (a) dan (b) adalah tidak isomorfik, tetapi keduanya adalah homeomorfik jika keduanya dapat dibentuk dari bentuk graph (c) dengan menambahkan beberapa simpul alur keterhubungan

7.4. Keterhubungan Alur

Sebuah alur dalam multi graph G berisi urutan alternatif dari simpul dari busur dari bentuk :

V_0 , e_0 , V_1 , e_1, V_2 , e_2 , ... , V_{n-1} , e_{n-1}, V_n , e_n

dimana semua busur e_1 berisi simpul V_{n-1} dan V_n (yang kelihatan pada sisi e_1 dalam urutan), jumlah n busur dinamakan panjang dari alur agar tidak membingungkan, alur dituliskan sebagai urutan dari simpul (V_0 , V_1 ,..., V_2). Alur dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$, dengan kata lain dapat dikatakan alur dari $v_0 = v_n$, atau antara $v_0 = v_n$ atau hubungan V_0 ke V_n .
Alur sederhana adalah akar yang mana semua simpulnya berbeda. (Alur yang semua simpulnya berbeda dinamakan tapak). Siklus adalah alur tertutup dari panjang 3 atau lebih simpul yang semua simpulnya memenuhi $V_0 = V_n$.
Semua siklus dari panjang k dinamakan k-siklus.



Gambar 5

Contoh 1

Dengan melihat gambar di atas, perhatikan urutan di bawah ini :

$\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$ $\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$
$\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$ $\sigma = (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$

- Urutan dari α adalah alur dari P_4 ke P_6 ; tetapi bukan tapak jika busur $\{P_1,P_2\}$ digunakan dua kali.
- Urutan β adalah bukan alur jika tidak ada busur $\{P_2,P_6\}$.
- Urutan γ adalah topak jika digunakan busur dua kali; tetapi bukan alur sederhana karena simpul P_5 digunakan dua kali.
- Urutan σ adalah alur sederhana dari P_4 dan P_6; tetapi bukan alur terpendek (dengan memperhatikan panjang) dari P_4 dan P_6.

Alur terpendek dari P_4 ke P_6 adalah alur sederhana (P_4, P_5, P_6) yang mempunyai panjang 2.

Dengan menghapus beberapa alur yang tidak diperlukan, tidak susah untuk untuk melihat bahwa semua alur dari simpul U ke simpul V jika dan hanya jika terdapat alur sederhana dari U ke V.

Teorema 2

Ada sebuah alur dari simpul U ke simpul V jika dan hanya jika terdapat alur sederhana dari U ke

7.4.1. Keterhubungan komponen yang terhubung

Sebuah graph G adalah terhubung jika terdapat alur diantara dua simpul.
Gambar 5(a) adalah gambar graph terhubung sedangkan gambar 5(b) adalah gambar graph tidak terhubung.

Andaikan G sebuah graph. H adalah sebuah subgraph yang terhubung dengan G yang dinamakan komponen yang terhubung dengan G jika H tidak berisi beberapa subgraph yang terhubung dari G. Secara jelas dapat dilihat bahwa setiap graph G dapat dibagi dalam komponen yang terhubung.

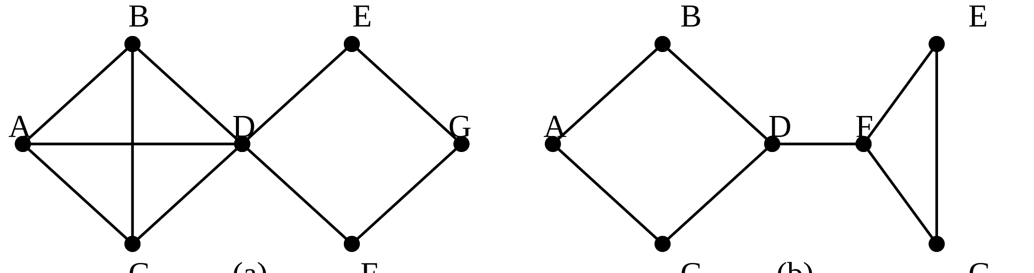
Pada gambar 5(b) terdapat tiga komponen yang terhubung, sub graph disebabkan oleh himpunan simpul {A,C,D}, {E,F} dan {B}. Simpul B dalam gambar 5(b) dinamakan simpul terisolasi jika B tidak menjadi anggota semua busur atau dengan kata lain derajat (B) = 0, Dalam gambar tersebut B bentuk sendiri dari sebuah komponen yang dihubungkan dengan graph.

Catatan

Asumsi setiap simpul U dihubungkan dengan dirinya sendiri, hubungan "U terhubung dengan V" adalah sama dengan hubungan pada himpunan dari simpul dalam graph G dan sama dengan kelas dari bentuk hubungan komponen yang terhubung dari G.

7.4.2. Jarak dan diameter

Perhatikan graph G yang terhubung, Jarak antara simpul U dan V dalam G ditulis d(U,V), adalah panjang dari cabang terpendek U dan V. Diameter G dituliskan diam(G), adalah jarak maximum diantara dua titik dalam G.



Gambar 6

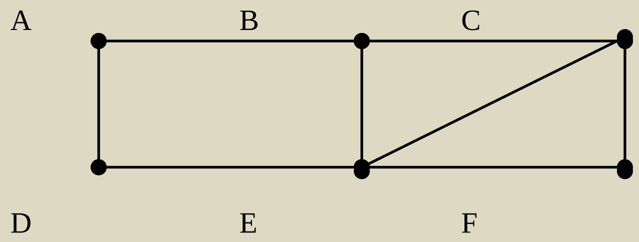
Contoh :

Pada gambar di atas 6(a) d(A,F) = 2 dan diam (G) = 3
Pada gambar di atas 6(b) d(A,F) = 3 dan diam (G) = 4

7.4.3. Titik potong dan jembatan

G adalah graph yang terhubung. Sebuah simpul V di dalam G dinamakan titik potong jika G - V tidak terhubung (ingat kembali bahwa G - V adalah graph yang didapatkan dari G dengan cara menghapus V dan semua busur yang ada pada V). Busur e dari G dinamakan jembatan jika G-e adalah tidak berhubungan / diputus (ingat kembali bahwa G - e adalah graph yang didapat dari G dengan cara menghapus semua busur. Dalam gambar 6(a). Simbol D adalah titik potong dan disana tidak ada jembatan. Pada gambar 6(b), busur e={D , F} adalah jembatan.

Latihan Soal (Terminologi Graph)

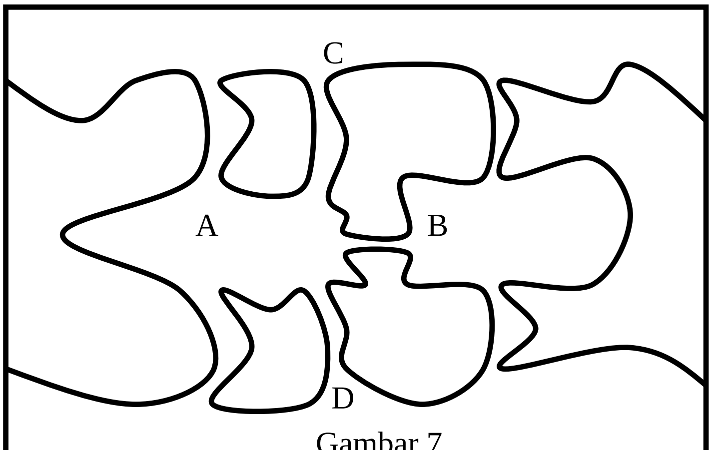


1. Cari
   a) Semua alur sederhana dari A ke F
   b) Semua tapak dari A ke F
   c) d(A,F); jarak antara A dan F
   d) diam(A,F); diameter A dan F
   e) Semua siklus yang melalui simpul A
   f) Semua siklus di G

2. Gunakan Graph seperti No.1. Cari Subgraph yang dihasilkan ketika sebagian simpul dihapus, Apakah G mempunyai titik potong ?
3. Berdasarkan Jawaban No. 2, graph yang manakah yang isomorfik ? Tunjukan yang isomorfik !

7.5. Jembatan Konisqberg, kunjungan multigraph

Pada abad 18 ke kota Prussian Timur di Konisqberg terdapat dua pulau dan tujuh jembatan yang menghubungkan kedua pulau tersebut seperti pada gambar di bawah ini :

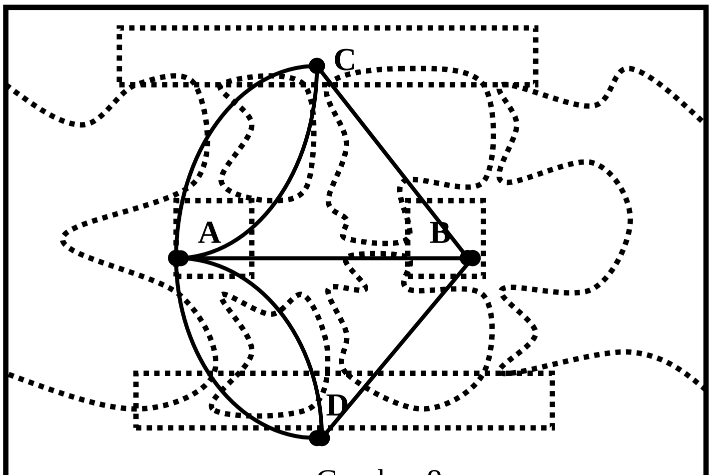


Gambar 7

Pertanyaan :

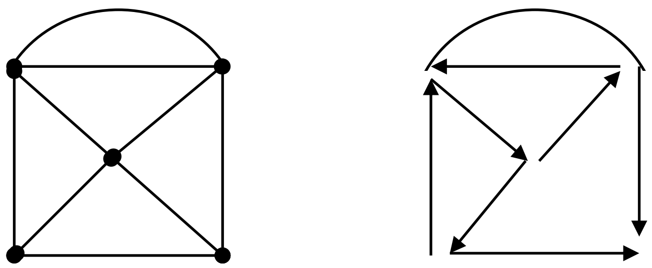
Dapatkah seseorang berjalan yang dimulai darimana saja dan berakhir dimana saja dengan melalui ke tujuh jembatan tersebut namun tidak boleh ada jembatan yang digunakan dua kali ?
Orang Konisqberg menulis surat kepada ahli matematika Swiss yang terkenal L.Euler tentang pertanyaan ini.

Euler pada tahun 1736 membuktikan bahwa jalan tersebut tidak mungkin dilalui. Dia menggantikan pulau-pulau dan dua sisis dari sungai dengan titik dan jembatan dengan kurva seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 8

Perhatikan bahwa gambar di atas adalah multigraph. Multigraph dikatakan dapat dikunjungi jika dapat digambar tanpa terpotong dalam kurva dan tanpa ada pengulangan pada semua busur, itu berarti ada alur yang menuju semua simpul dan semua sisi digunakan hanya sekali. Semua alur harus dicoba (jika tidak ada busur yang digunakan dua kali) dan akan dinamakan tapak kunjungan. Jelasnya bahwa kunjungan multigraph harus terbatas dan terhubung.



(a) Gambar 9 (b)

Gambar 9(b) memperlihatkan tapak kunjungan dari multigraph pada gambar 9(a)

Sekarang tidak sulit untuk melihat bahwa jalan di Konisqberg adalah mungkin jika dan hanya jika gambar representasi graph Euler dapat dikunjungi.
Sekarang dapat diketahui bagaimana Euler dapat membuktikan bahwa multi graph representasi graph Euler tidak dapat dikunjungi dan disimpulkan bahwa jalan di Konisqberg tidak mungkin dilakukan. Ingat bahwa simpul dikatakan genap atau ganjil sesuai dengan jumlah derajat ganjil atau genap yang dimilikinya.
Andaikan sebuah multi graph yang dapat dikunjungi dan dari tapak kunjungan yang dilakukan tidak dapat diawali atau berakhir pada simpul P. Hal ini dapat dikatakan bahwa simpul P adalah genap, untuk setiap percobaan kunjungan yang masuk ke P melalui busur, itu harus selalu menjadi busur yang tidak dapat digunakan untuk selanjutnya, selanjutnya busur dalam tapak kunjungan dengan P harus berpasangan dan P juga adalah simpul genap.

Jika simpul Q adalah ganjil. Tapak kunjungan harus dimulai atau berakhir pada Q. Konsekuensinya sebuah multi graph dengan lebih dari dua simpul ganjil tidak dapat dikunjungi. Perhatikan multigraph yang berhubungan dengan permasalahan jembatan Konisqberg mempunyai empat simpul ganjil, maka seseorang tidak dapat melalui Konisqberg dengan menyeberangi jembatan hanya satu kali. Grpah G dinamakan graph euler jika terdapat tapak kunjungan tertutup dan dinamakan **Tapak Euler**.

Teorema 3 (Euler)

Graph yang terhubung terbatas adalah euler jika dan hanya jika semua simpul mempunyai derajat genap

Mewarnai

Setiap graph yang terhubung terbatas dengan dua simpul ganjil adalah dapat dikunjungi. Sebuah tapak kunjungan boleh dimulai pada salah satu simpul ganjil dan akan berakhir pada simpul ganjil yang lain.

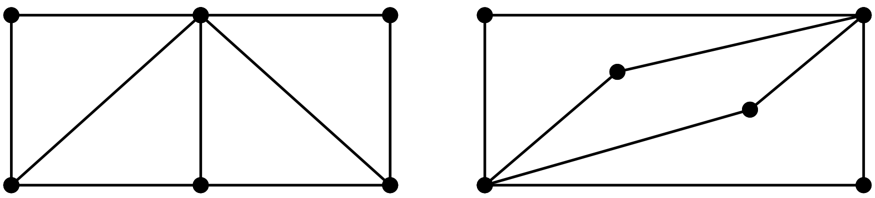
Graph Hamiltonian

Graph Euler lebih menekankan pada busur yang dikunjungi. Pada graph Hamiltonian lebih menekan pada kunjungan simpul. Sebuah sirkuit Hamiltonian dalam graph G, (dinamakan setelah ahli matematika Irlandia William Hamiltonian (1805 - 1865) pada abad sembilan belas) adalah alur tertutup yang setiap simpulnya dalam graph G hanya dikunjungi satu kali (setiap alur tertutup pasti siklus). Jika G diakui sebagai sebuah sirkuit Hamilton maka G dinamakan sebuah graph Hamilton.

Catatan

Sirkuit Euler melewati setiap busur hanya satu kali, tetapi boleh mengunjungi simpul berulang-ulang, sementara sirkuit Hamilton hanya mengunjungi simpul satu kali.

Gambar 10 adalah contoh simpul graph yang Hamiltonian tetapi bukan Euler dan sebaliknya.



(a) Hamiltonian dan bukan Euler (b) Euler dan bukan Hamiltonian

Gambar 10

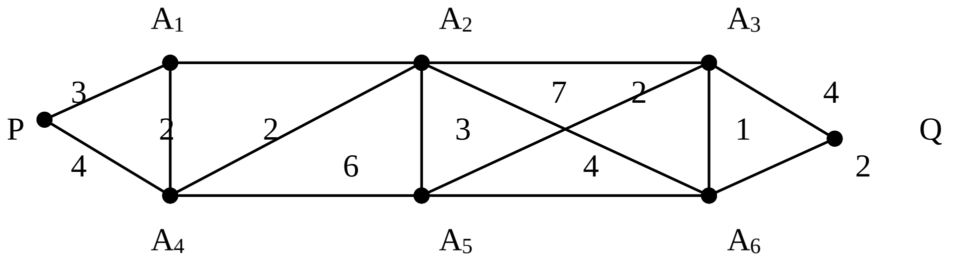
Sampai disini sudah jelas bahwa hanya graph yang terhubung yang dapat menjadi graph hamiltonian.

Teorema 4

G adalah graph yang terhubung dengan n simpul. Kemudian G adalah Hamiltonian jika n>= 3 dan n<= derajat (v) untuk semua simpul v di G

7.6. Penamaan dan Weighted Graph (Graph berbobot)

Graph G dinamakan graph yang bernama jika busurnya dan/atau simpulnya diberi satu jenis data atau lainnya. G dinamakan graph berbobot, jika semua busur e pada G diberi nilai non negatif W(e) yang dinamakan bobot atau panjang dari V. Gambar 11 memperlihatkan graph berbobot dimana berat setiap busur diberikan dengan sangat jelas. Bobot (atau panjang) dari alur dalam beberapa graph berbobot G didefinisikan menjadi jumlah dari bobot busur dalam alur.
Satu masalah penting dalam teori graph adalah mencari alur terpendek. Ini berarti mencari bobot (panjang minimum diantara dua simpul. Panjang dari alur terpendek pada gambar 11 diantara simpul P dan Q adalah : (P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q).



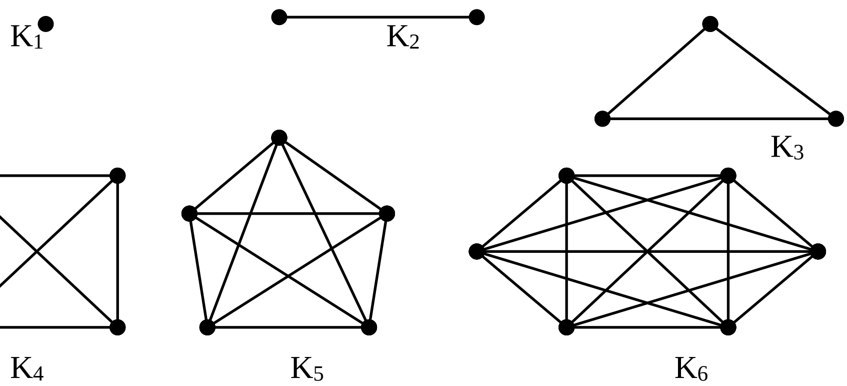
Gambar 11

7.7. Graph lengkap, Reguler dan Bipartit

Ada banyak jenis graph yang berbeda. Pada bagian ini akan dibahas tiga diantaranya. Graph lengkap, graph reguler dan graph Bipartit.

7.7.1. Graph Lengkap

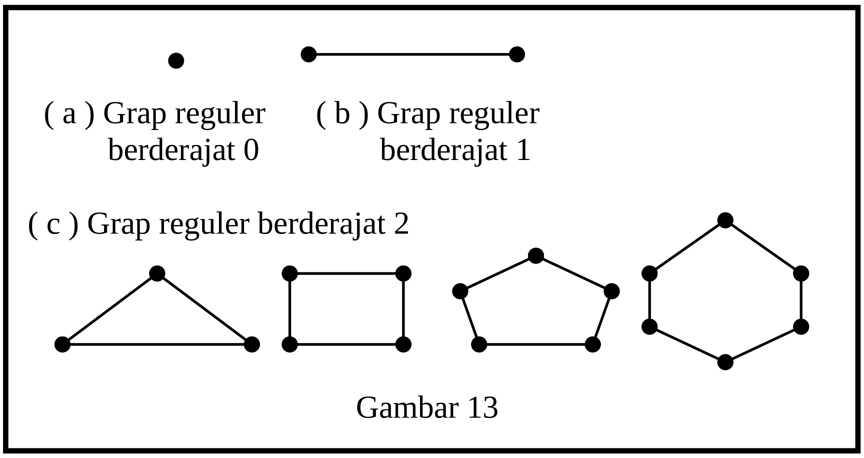
Graph G dikatakan graph lengkap jika setiap simpul dalam G terhubung dengan setiap simpul yang lain dalam G dan Graph lengkap G harus terhubung. Graph lengkap dengan n simbol dituliskan K_n. Gambar di bawah ini memperlihatkan graph K_1 sampai dengan K_6.



Gambar 12

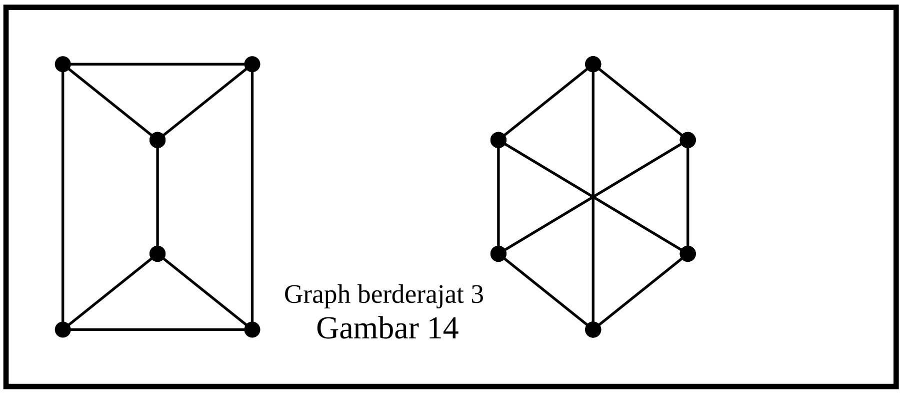
7.7.2. Graph Reguler

Graph G adalah reguler dari derajat k atau k reguler jika setiap simpul mempunyai derajat k. Dengan kata lain, graph reguler adalah graph yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Graph reguler yang terhubung yang mempunyai derajat 0,1 dan 2 dapat dengan mudah diterangkan. Graph reguler terhubung dengan derajat 0 adalah graph trivial dengan satu simpul dan tanpa busur. Graph reguler dengan derajat 1 adalah graph dua simpul dan satu busur yang terhubung. Graph reguler dengan derajat 2 adalah graph dengan n simpul yang berisi siklus tunggal.



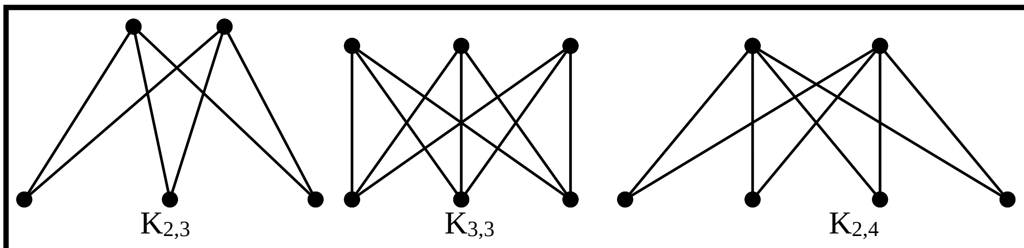
Gambar 13

Graph reguler dengan derajat 3 pasti mempunyai jumlah simpul genap jika jumlah derajat semua simpul adalah genap (teorema 1). Pada gambar di bawah ini diperlihatkan graph reguler dapat menjadi graph yang rumit. Sebagai contoh ada 19 graph reguler dengan derajat 3 dan mempunyai 10 simpul. Graph lengkap dengan n simpul K_n adalah graph reguler dengan derajat n-1.


Graph berderajat 3
Gambar 14

7.7.3. Graph Bipartit

Graph G dikatakan graph bipartit jika simpulnya dapat dibagi dalam dua subset M dan N dan semua busur dari G berhubungan dengan simpul dari M ke simpul N. Graph Bipartit lengkap artinya bahwa semua simpul dari M dihubungkan dengan semua simpul di N. Graph ini dituliskan dengan K_{mn} dimana m adalah jumlah simpul di M dan n adalah jumlah simpul di N, dan untuk standarisasi, asumsikan M<=N. Pada gambar 16 diperlihatkan graph $K_{2,3}$ dan $K_{2,4}$. Dari gambar di bawah dapat dilihat bahwa graph $K_{m,n}$ mempunyai mn busur.



Gambar 15

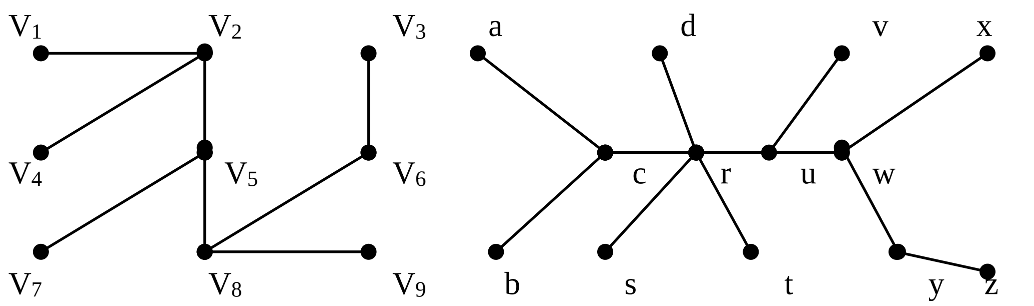
7.8. Graph Pohon

Graph T dinamakan pohon jika T terhubung dan T tidak mempunyai siklus. Sebagai contoh dari graph pohon dapat dilihat pada gambar 16. Hutan G adalah graph tanpa siklus. Kesimpulannya bahwa komponen yang terhubung dari hutan G adalah pohon. (Graph tanpa siklus adalah graph bebas siklus). Pohon yang berisi simpul tunggal dengan tanpa busur dinamakan pohon degenerate (pohon yang terdiri dari satu simpul).

Perhatikan sebuah pohon T. Secara jelas dapat dilihat bahwa terdapat hanya satu alur sederhana diantara dua simpul dari T, selain itu dua alur akan membentuk sebuah siklus, juga :

Andaikan tidak ada busur {U,V} di dalam T dan ditambahkan busur E = {U,V} di T. Selanjutnya alur sederhana dari U ke V dalam T dan e akan membentuk siklus; kesimpulannya T tidak menjadi pohon.

Pada hal lain, Andaikan ada sebuah busur e = {U, V} di T, kemudian e dihapus dari T. T menjadi tidak terhubung. (tidak dapat menjadi alur dari U ke V). Kesimpulan, T tidak lagi sebagai pohon.



Gambar 16

Teorema di bawah ini diaplikasikan pada graph terbatas.

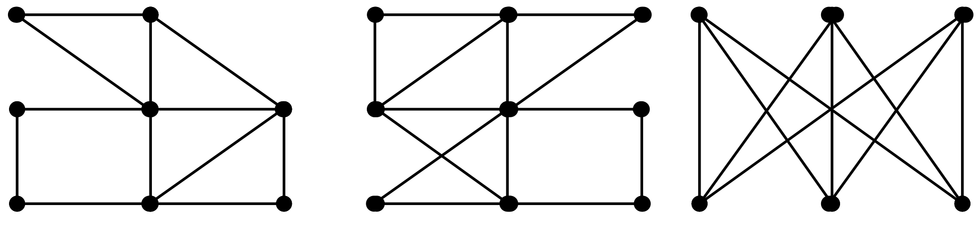
Teorema 5

G sebuah graph dengan n>1 simpul. Berarti :

1. G adalah pohon
2. G adalah bebas siklus dan mempunyai n-1 busur
3. G adalah graph yang terhubung dan mempunyai n-1 busur

Teorema ini berarti juga bahwa pohon T terbatas dengan n simpul pasti mempunyai n-1 busur. Sebagai contoh, pohon pada gambar 16(a) mempunyai 9 simpul dan 8 busur dan pohon pada gambar 16(b) mempunyai 13 simpul dan 12 busur.

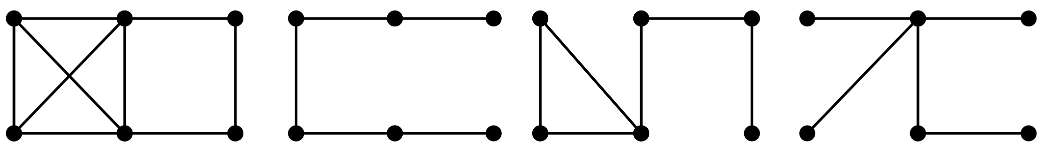
Latihan Soal (Kunjungan Graph, Sirkuit Euler dan Hamiltonian)



1. Dari Gambar di atas, yang mana graph yang dapat dikunjungi, berarti mempunyai alur Euler ? Yang mana yang Eulerian, berarti mempunyai sirkuit Euler, Terangkan mengapa ?
2. Dari Gambar di atas, graph yang mana mempunyai sirkuit Hamiltonian, ? Jika tidak terangkan mengapa ?
3. Gambarkan Graph $K_{2,5}$!

7.8.1. Spanning Tree

Sub graph T dari graph G yang terhubung dinamakan sebuah Spanning Tree dari G jika T adalah sebuah pohon dan T termasuk dalam semua simpul dari G. Pada gambar 16 diperlihatkan graph G yang terhubung dan Spanning Tree T_1, T_2 dan T_j dari G.



Gambar 17

7.8.2. Spanning Tree Minimum

G adalah graph berbobot terhubung. Ini berarti, setiap busur dari G diberi nilai non negatif yang dinamakan bobot dari busur. Kemudian setiap Spanning Tree T dari G adalah total bobot yang ada dengan menjumlahkan bobot dari busur dalam T. Spanning Tree minimal dari graph adalah Spanning Tree yang bobotnya paling kecil.

Algoritma 8a dan 8b di bawah ini membantu untuk mencari Spanning Tree T dari graph G yang terhubung yang mempunyai bobot dimana G mempunyai n simpul. (Dalam kasus T harus mempunyai n-1 busur)

Bobot dari Spanning Tree minimal adalah unik, tetapi Spanning Tree minimal itu sendiri tidak. Spanning Tree minimal yang berbeda dapat terjadi jika dua atau lebih busur mempunyai bobot sama. Dalam beberapa kasus, pengaturan busur pada langkah 1 dari algoritma 8A dan 8B tidak unik dan kesimpulannya dapat menghasilkan Spanning Tree minimal yang berbeda seperti yang diilustrasikan dalam contoh di bawah ini :

Algoritma 8A : Input : adalah panjang graph G yang terhubung dengan n simpul

Langkah 1 : Atur busur dari G secara berurutan sesuai bobot

Langkah 2 : Proses secara berurutan, hapus semua busur yang tidak berhubungan dengan graph sampai tersisi n-1 busur.

Langkah 3 : Keluar.

Algoritma 8B (Kruskal) : Input : adalah panjang graph G yang terhubung dengan n simpul

Langkah 1 : Atur busur dari G secara berurut naik sesuai panjang

Langkah 2 : Mulai hanya dengan simpul dari G dan proses secara berurutan, jumlahkan semua busur yang tidak menghasilkan siklus sampai n -1 busur yang dijumlahkan

Langkah 3 : Keluar.

Cari Spanning Tree minimal dari graph yang diberi nilai bobot dalam gambar 18(a) catatan bahwa Q mempunyai 6 simpul, jadi Spanning Tree minimal akan mempunyai lima busur.

(a) Aplikasi algoritma 8(b)

Langkah pertama adalah mengurutkan panjang busur secara menurun, selanjutnya menghapus busur berikutnya tanpa memutus Q sampai tersisa lima busur.

busur	BC	AF	AC	BE	CE	BF	AE	DF	BD
panjang	8	7	7	7	6	5	4	4	3
hapus ?	ya	ya	ya	Tidak	tidak	ya	tidak	tidak	tidak

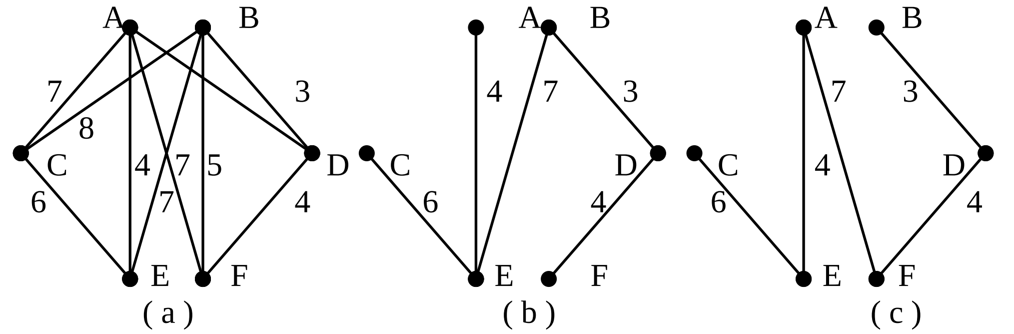
maka Spanning Tree minimal dari Q yang terjadi adalah berisi busur

BE CE AE DF BD

Panjang Spanning Tree minimal adalah 24 seperti yang diperlihatkan pada gambar 18(c). Perhatikan bahwa Spanning Tree minimal hasil algoritma 8(a) tidak sama dengan Spanning Tree hasil algoritma 8(b).

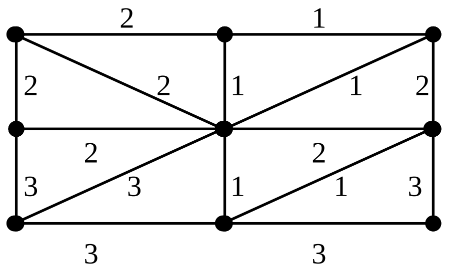
Catatan

Algoritma di atas sangat mudah dijalankan jika graph G relatif kecil seperti pada gambar 18.a. Andaikan G mempunyai 12 simpul dan seratus busur yang ditampilkan dalam bentuk daftar dari pasangan simpul. Maka kejadian apakah G terhubung menjadi tidak jelas ; ini mungkin memerlukan beberapa tipe algoritma Depth First Search (DFS) atau Breadth First Search (BFS).



Gambar 18

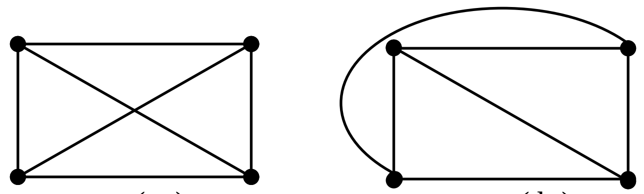
Latihan Soal (Spanning Tree)



1. Cari Spanning Tree minimal T untuk grap berbobot G di atas ! Gambarkan !

7.9. Graph Plannar

Graph atau multigraph yang dapat digambarkan dalam bidang datar dan busurnya tidak saling bersilangan dinamakan graph plannar. Graph lengkap dengan 4 (K_4) simpul biasanya digambarkan dengan busur yang bersilang seperti pada gambar 19(a). Gambar tersebut dapat juga digambar dengan tanpa ada busur yang bersilangan seperti pada gambar 19(b); kesimpulan K_4 adalah plannar. Bentuk graph pohon adalah kelas yang penting dari graph plannar.

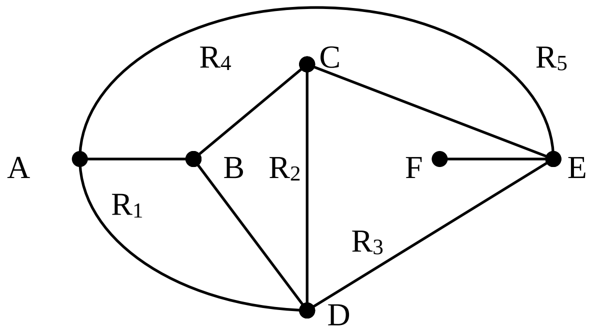


(a) (b)

Gambar 19

7.9.1. Pemetaan Daerah

Faktanya graph plannar adalah representasi multigraph plannar terbatas yang dinamakan pemetaan. Pemetaan dikatakan terhubung jika multigraph yang ada terhubung. Pemetaan terbagi dalam beberapa daerah. Pemetaan dengan enam simpul dan sembilan busur terbagi dalam lima adalah diperlihatkan pada gambar 20 di bawah ini :



Gambar 20

Perhatikan bahwa empat adalah terdapat di dalam area dan satu daerah terdapat di luar diagram, di luar batas. Tidak ada kekurangan secara umum dalam menghitung jumlah dari daerah jika

diasumsikan bahwa pemetaan berisi beberapa bujur sangkar yang besar jika dibandingkan dengan yang ada di daerahnya.
Perhatikan bahwa batasan dari setiap daerah dari pemetaan adalah busur. Kadang-kadang busur akan membentuk siklus, tapi kadang-kadang tidak sebagai contoh, dalam gambar 20. Batasan dari semua daerah adalah siklus kecuali untuk r_3.
Bagaimanapun jika dilakukan proses mengelilingi berlawanan arah jarum r_3 yang dimulai dari simpul c, maka alur tertutup adalah :

(C,D,E,F,E,C)

dimana busur {E,F} dilakukan dua kali.

Jika menuliskan derajat dari daerah r tertulis derajat (r), artinya panjang dari siklus atau batas r. Setiap busur menjadi batas dua daerah atau isi dari daerah dan akan terjadi dua kali dalam setiap jalan selama menjadi batas dari daerah.
Didapatkan teorema baru yang sama dengan teorema 1 untuk simpul.

Teorema 7

Jumlah dari derajat dari suatu daerah dalam suatu pemetaan adalah sama dengan dua kali jumlah busur.

Derajat dari daerah yang telihat pada gambar 20 adalah :

derajat (r_1) = 3 derajat (r_2) = 3 derajat (r_3) = 5
derajat (r_4) = 4 derajat (r_5) = 3

Jumlah derajatnya adalah 18 yang mana sama dengan dua kali jumlah busur.

7.9.2. Rumus Euler

Euler memberikan rumus mengenai hubungan sejumlah V dari simpul sejumlah E dari sejumlah R dari daerah untuk pemetaan yang berhubungan. Khususnya :

Teorema 8 (Euler) : V - E + R = 2

Perhatikan bahwa gambar 20, V = 6 ; E = 9 dan R = 5, maka dengan menggunakan teorema Euler :

$$V - E + R = 6 - 9 + 5 = 2$$

G adalah multigraph plannar yang terhubung dengan tiga atau lebih simpul. Jadi G bukan k_1 atau k_2. M menjadi representasi plannar G. Tidak sulit untuk melihat bahwa :

1) Daerah dari M dapat mempunyai derajat 1, jika dan hanya jika batasnya adalah “loop”
2) Daerah dari M dapat mempunyai derajat 2, jika dan hanya jika batasnya adalah dua busur multiple.

Jika setiap G adalah Graph, bukan multigraph, maka setiap daerah dari M pasti mempunyai derajat 3 atau lebih. Komentar ini secara bersamaan dengan rumus Euler digunakan untuk hasil pada graph plannar.

Teorema 9

G adalah multi graph plannar yang terhubung dengan V simpul dan q busur, dimana P >= 3 dan Q >= 3p - 6.

Ingat, bahwa teorema tersebut tidak benar untuk K_1 dimana P = 1 dan q = 0, dan tidak benar K_2 dimana p = 2 dan q = 1.

Bukti

r adalah jumlah dari daerah dalam representasi plannar dari G dengan rumus Euler : p - q + r = 2

Sekarang jumlah dari derajat dari daerah adalah sama dengan 2q sesuai dengan teorema 7. Tetapi setiap daerah mempunyai derajat 3 atau lebih.

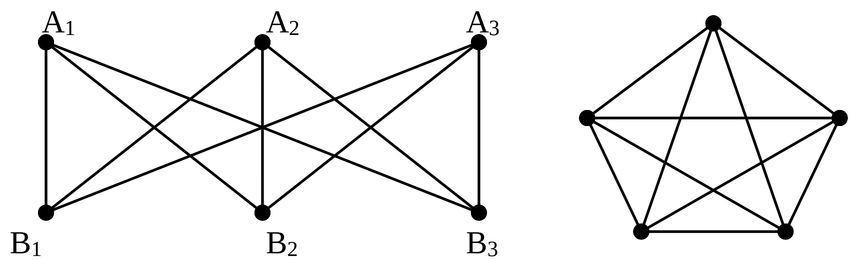
Kesimpulannya : 2q >= 3r
Selanjutnya : r >= 2q / 3 jika dilakukan substitusi pada rumus Euler

$$2 = p - q + r <= P - q + \frac{2/q}{3} \quad \text{atau} \quad 2 <= p - \frac{q}{3}$$

Mengalikan pertidaksamaan dengan 3 menjadi 6<=3p - q yang menjadi hasilnya.

7.9.3. Graph non Planar, teorema Kuratowski's

Perhatikan dua contoh graph non planar di bawah ini. Pertama perhatikan graph utility, disana ada tiga rumah A_1, A_2, A_3 yang berhubungan melalui saluran keluar untuk air, gas dan listrik. B_1 , B_2 , B_3 seperti yang terlihat pada gambar 21(a).
Perhatikan bahwa pada gambar tersebut terdapat graph $K_{3,3}$ yang mempunyai p = 6 simpul dan q = 9 busur.
Andaikan graph adalah plannar. Dengan rumus Euler, representasi plannar mempunyai r = 5 daerah. Perhatikan bahwa 3 simpul tidak terhubung satu sama lain.
Kesimpulannya bahwa derajat dari semua daerah pasti 4 atau lebih dan juga jumlah dari derajat dari daerah pasti 20 atau lebih.
Dengan teorema 9, graph pasti mempunyai 10 busur atau lebih. Ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa graph mempunyai q = 9 busur.
Selanjutnya graph utility $K_{3,3}$ adalah non plannar.



(a) $K_{3,3}$ (b) K_5

Gambar 21

Perhatikan selanjutnya graph bintang dalam gambar 21(b). Ini adalah graph lengkap K_5 pada P = 5 simpul dan mempunyai q = 10 busur. Jika graph tersebut plannar, maka dengan teorema 9.

$$10 = q <= 3p - 6 = 15 - 6 = 9$$

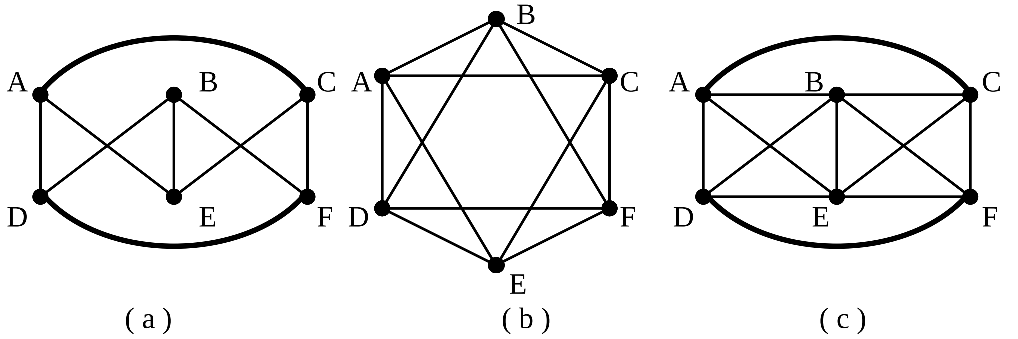
yang hasilnya tidak mungkin. Selanjutnya K_5 adalah non plannar. Beberapa tahun waktu yang dilakukan oleh para ahli matematika untuk membuat karakteristik graph plannar dan non plannar. Masalah ini akhirnya dapat dipecahkan pada tahun 1930 oleh ahli matematika Polandia yang bernama K. Kurowski.

Teorema 10 (Kurowski).

Sebuah graph dikatakan non plannar jika dan hanya jika graph tersebut berisi sebuah sub graph homeomorfik untuk $K_{3,3}$ atau K_5

Latihan Soal (Graph Plannar)

1. Gambar representasi Plannar dari setiap grap di bawah ini :



7.10. Pewarnaan Graph

Perhatikan sebuah graph G sebuah simpul berwarna atau warna sederhana dari G adalah sebuah pemberian tanda dari warna untuk simpul dari G yang berdekatan mempunyai warna yang berbeda. G dikatakan sebagai n berwarna jika disana terdapat pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. Jumlah minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai G dinamakan nilai kromatik dari G dan dituliskan dengan $\chi(G)$.

Untuk mewarnai graph G, dapat digunakan algoritma Welch dan Powel. Algoritma ini tidak selalu menghasilkan warna minimal dari G.

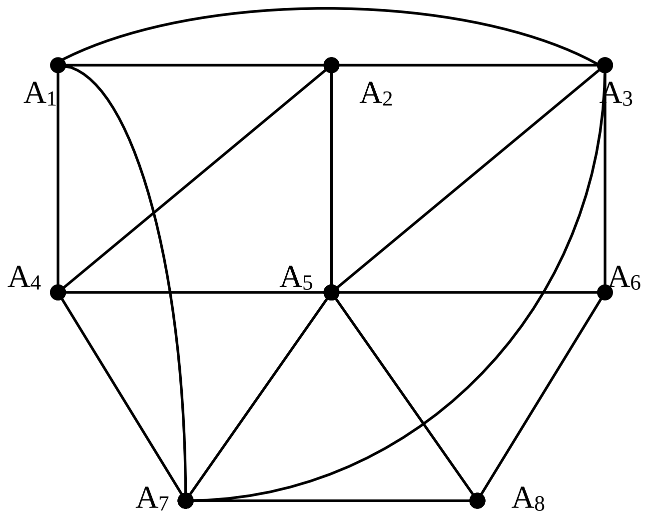
Algoritma 10 (Welch dan Powel) : input adalah graph G.

Langkah 1	Urutkan semua simpul dari G secara menurun menurut derajatnya.
Langkah 2	Tandai warna pertama dengan C_1 untuk simpul pertama dan selanjutnya, dalam urutan yang berurut, tandai C_1 untuk semua simpul yang tidak berdekatan ke simpul selanjutnya yang sudah ditandai C_1.
Langkah 3	Ulangi langkah ke 2 dengan warna ke 2 dengan C_2 dan sub urutan dan simpul yang belum diwarnai.
Langkah 4	Ulangi langkah ke 3 dengan warna ke 3 dengan C_3 , selanjutnya warna ke 4 dengan C_4 dan seterusnya sampai semua simpul diwarnai.
Langkah 5	Keluar.

Contoh 3

a. Perhatikan graph G pada gambar 22. Gunakan algoritma 10 (Welch dan Powell) untuk mewarnai G. Urutkan simpul yang ada secara urut turun sesuai dengan derajat yang dimilikinya.

Warna pertama adalah ditandai untuk simpul A_5 dan A_1. Warna kedua ditandai untuk simpul A_3 , A_4 dan A_8 . Warna ketiga ditandai untuk simpul A_7 , A_2 dan A_6 semua simpul telah diwarnai dan G juga adalah 3 warna. Perhatikan bahwa G tidak dua warna sejak simpul A_1 , A_2 dan A_3 yang terhubung satu sama lain, harus ditandai dengan warna yang berbeda. Ingatlah $\chi(G) = 3$



Gambar 22

Teorema 11
Di bawah ini adalah sama untuk sebuah graph GRAPH.

i) G adalah graph 2 warna
ii) G adalah bipartit
iii) Setiap siklus dari G mempunyai panjang genap

Tidak ada cara yang mudah untuk memperkirakan secara aktual apakah graph yang berubah-ubah adalah berwarna n. Meskipun demikian. Teorema di bawah ini memberikan karakteristik sederhana dari graph 2 warna.

Tidak ada pembatasan jumlah warna yang mungkin diperlukan dari sebuah pewarnaan dari graph yang berubah-ubah. Sebagai contoh graph lengkap K_n memerlukan n warna. Jika dibatasi untuk graph plannar, tanpa memperhitungkan jumlah simpul cukup lima warna.

Teorema 12

Setiap graph plannar adalah 5 warna

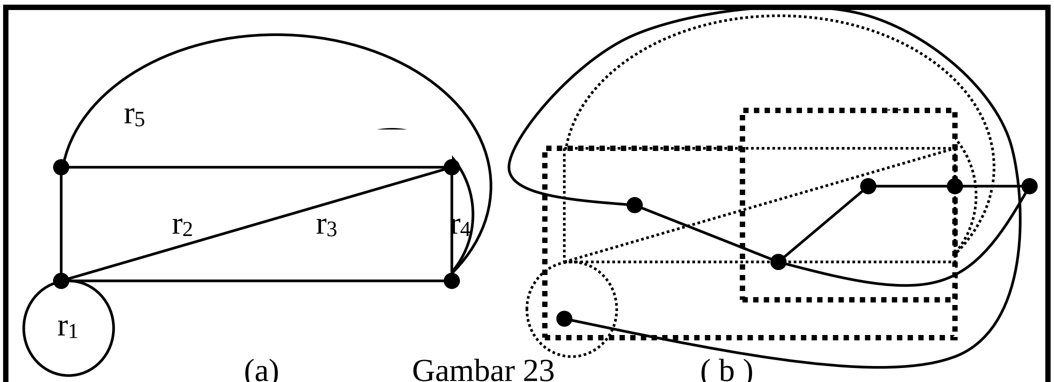
Teorema Empat warna (Appel dan Haken)

Setiap graph plannar adalah 4 warna

Sejak tahun 1850 para ahli matematika mempunyai perkiraan bahwa graph plannar adalah 4 warna. Kenneth Appel dan Wolfgang Haken akhirnya dapat membuktikan bahwa perkiraan ini benar pada tahun 1976.

Pemetaan rangkap dan teorema empat warna

Perhatikan sebuah pemetaan M seperti pada gambar 23(a). Dengan kata lain M adalah representasi graph plannar dari sebuah multigraph plannar. Dua daerah dari M dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai busur yang digunakan bersama.



(a) Gambar 23 (b)

Daerah r_2 dan r_5 pada gambar 23(a) adalah bertetangga, tetapi r_3 dan r_5 tidak. Dengan pewarnaan dari M, berarti menandai dengan warna setiap daerah dari M dimana yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Pemetaan M adalah n warna jika disana terdapat pewarnaan dari M yang menggunakan n warna.

Gambar 23(a) adalah 3 warna jika daerah dapat ditandai dengan warna seperti berikut ini :

r_1 Merah, r_2 Putih, r_3 Merah, r_4 Putih, r_5 Merah, r_5 biru.

Terdapat kesamaan diantara pewarnaan pemetaan dengan pewarnaan graph. Kenyataannya dengan menggunakan konsep dari pemetaan rangkap yang didefinisikan, pewarnaan dari pemetaan yang dapat diperlihatkan sama dengan pewarnaan untuk simpul dari sebuah graph plannar.

Perhatikan sebuah pemetaan M.

Dalam setiap daerah dari M dapat dipilih sebuah titik, dan jika daerah mempunyai busur yang bersamaan maka kurva ini dapat digambarkan sedemikian rupa sehingga tidak saling bersilangan. Maka terbentuklah pemetaan baru M* , yang dinamakan pemetaan rangkap dari M, Sebagian dari semua simpul dari M * berhubungan dalam satu daerah dari M. Gambar 23(b) memperlihatkan pemetaan rangkap dari gambar 23(a).

Dapat dibuktikan bahwa setiap daerah dari M* akan berisi secara pasti satu simpul dari M dan setiap busur dari M akan memotong secara pasti satu busur dari M.

Teorema Empat Warna (Appel dan Haken)

Jika setiap daerah dari setiap pemetaan M diwarnai sehingga daerah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda, maka tidak lebih dari empat warna diperlukan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Lipschutz, Seymour, "*Discrete Mathematics*", McGraw-Hill, Inc., 1997
2. Rosen, Kenneth H., "*Discrete Mathematics and its Aplications*" , 4th ,McGRAW-HILL, 1999
3. Munir, Rinaldi, "Matematika Diskrit"