שיטות חישוביות בתכנון לא לינארי 52879 – סיכום הרצאות

מרצה: פרופ' יאן דולינסקי
המחלקה לסטטיסטיקה, הפקולטה למדעי החברה, האוניברסיטה העברית
שנה"ל תשפ"ב (2022/2021), סמסטר אביב

סיכום: אריאל וישנה
ariel.vishne@gmail.com

שיעור מספר 1

דרישות הקורס 0.1 – 3-4 תרגילי בית להגשה, יינתנו מדי כמה שבועות. לצד זאת מספר תרגילים תאורטיים לא להגשה ללא ציון. בסוף הסמסטר יתקיים מבחן. דרישות קדם הן בעיקר חדו"א בתחום של פונקציות של מספר משתנים ומושגים בסיסיים באלגברה לינארית.

1. תזכורת מחדו"א – פונקציות עם משתנה יחיד

הגדרה 1.1 נגזרת של פונקציה עם משתנה יחיד – תהי פונקציה של משתנה יחיד $f(x)$, נניח כי הפונקציה גזירה בנקודה x_0, אזי מתקיים $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נזכיר כי גזירות מודדת את השינוי בקצב מקומי.

משפט 1.2 משפט ערך הביניים – תהי פונקציה $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, נניח כי הפונקציה גזירה בקטע הפתוח (a,b) ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי קיימת לכל הפחות נקודה אחת c המקיימת $a < c < b$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

אינטואיטיבית, יש נקודת זמן אחת לפחות שבה המהירות הרגעית שווה למהירות הממוצעת.

משפט 1.3 משפט השארית של לגראנז' – הכללה למשפט ערך הביניים – תהי פונקציה f גזירה $n+1$ פעמים ברציפות (כלומר הנגזרת ה-$n+1$ של הפונקציה היא רציפה). תהי 'נקודת פיתוח' x_0, אזי ניתן להציג את $f(x)$ על ידי הסכום:

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$

כאשר P_n פולינום ממעלה n ו-R_n שארית כלשהי (Residual). הפולינום הינו פולינום טיילור מהצורה:

$$\boldsymbol{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{x!}}$$

לפי המשפט, יש נקודת ביניים בין x_0 ל-x, נקרא לה z, והיא מהצורה

$$\boldsymbol{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

הערה 1.4 – משפט שארית לגראנז' הוא הכללה למשפט ערך הביניים כיוון שאם ניקח $n = 0$ נקבל:

$$P_0(x) = f^{(0)}(x_0)\frac{(x-x_0)^0}{0!} = f(x_0)$$

$$R_0(x) = \frac{F'(z)}{1!}(x - x_0)$$

ומכך יוצא כי קיימת נקודה z (שלה קראנו קודם c) כך שמתקיים בדיוק:

$$f(x_0) + f'(z)(x - x_0) = f(x) \Rightarrow$$
$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הערה 1.5 – יישום עיקרי של משפט השארית של לגראנז' הוא בשביל קירוב פונקציות בעזרת פולינומים. למרות שאנחנו לא יודעים את נקודת הביניים המדויקת, נוכל להעריך את השארית.

דוגמה 1.6 – חשב את $cos\left(\frac{1}{100}\right)$ בדיוק של 10^{-6} (6 ספרות אחרי הנקודה) בעזרת פיתוח טיילור. אנחנו יודעים ש-$\cos(0) = 1$, ושהפונקציה cos גזירה אינסוף פעמים. עקרונית לא נדרש להגביל את מספר הנגזרות.

אבל כמובן שנרצה מאמץ חישובי מינימלי כדי לקבל את הדיוק הנדרש. נפתח לפיכך פיתוח טיילור סביב 0 ($x_0 = 0$ ו-$x = 0.01$), נרצה לדעת מהו ה-n המינימלי עבורו השארית תהיה $R_n(0) < 10^{-6}$. השארית תהיה מהצורה:

$$R_n(x) = \frac{\cos^{((n+1))}(z)}{(n+1)!}(0.01)^{n+1}$$

כיוון ש-cos פונקציה שכל נגזרת שלה תמיד קטנה מ-1 אזי נקבל:

$$R_n(x) \le \frac{(0.01)^{n+1}}{n+1} \le 10^{-6}$$

עבור $n = 2$ זה יהיה כבר נכון:

$$\left|\cos\left(\frac{1}{100}\right) - P_2\left(\frac{1}{100}\right)\right| \le 10^{-6}$$

כעת נחשב את הפולינום טיילור עצמו בפיתוח סביב $x_0 = 0$:

$$P_2(x) = \cos(x_0) + cos'(x_0)(x - x_0) + cos''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} = 1 + 0 - \frac{(x-x_0)^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$P_2\left(\frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{20000} = \frac{19999}{20000}$$

תזכורת 1.7 – נזכור כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, כלומר עבור $x \approx 0$ מתקיים $\sin(x) \approx x$. כמו כן נזכור כי פיתוח של $\sin(x)$ סביב 0 באמצעות טור טיילור הוא: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$.

דוגמה 1.8 – מצא קטע סביב 0 עבורו $|\sin(x) - x| \le 10^{-8}$. גם כאן נשתמש בפיתוח טיילור.

שיטה ראשונה - לפי התזכורת אזי $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots$. זהו טור עם סימן משתנה. אם נניח $-1 < x < 1$ אזי גם בערך מוחלט האיברים יורדים מונוטונית והאיבר הכללי שואף לאפס. עבור טור עם סימן משתנה ואיברים יורדים בערך מוחלט, מתקיים שהערך המוחלט של הטור קטן או שווה לערך המוחלט של האיבר הראשון. כלומר מכאן מתקיים:

$$|\sin(x) - x| \le \frac{|x|^3}{3!}$$

לכן

$$\frac{|x|^3}{3!} \le 10^{-8} \Rightarrow |x|^3 \le 6\cdot 10^{-8} \Rightarrow |x| \le \sqrt[3]{6\cdot 10^{-8}} \le 0.001$$

שיטה שניה - אם נרצה באמצעות פיתוח טיילור אז נוכל להפעיל את משפט לגראנז' עבור $n = 2$ עבור הפונקציה $f(x) = \sin(x) - x$ כאשר $x_0 = 0$. נקבל כי הפולינום מסדר 2 הוא:

$$P_2(x) = (\sin(0) - 0) + (\sin(x) - x)'^{(0)} \cdot x + (\sin(x) - x)''(0) \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

השארית:

$$R_2(x) = \frac{f'''(z)}{3!} \cdot x^3$$

גם כאן אנחנו יודעים כי כל הנגזרות של sin הינן בערך מוחלט קטן מ-1 ולכן:

$$|R_n(x)| \le \frac{x^3}{3!}$$

בסך הכל:

$$f(x) = \sin(x) - x = P_2(x) + R_2(x) = 0 + R_2(x) = R_2(x) \le \frac{x^3}{3!}$$

נדרוש:

$$\frac{x^3}{3!} \le 10^{-8} \Rightarrow x \le \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-8}}$$

דוגמה 1.9 – **קירוב של אינטגרל** – נרצה לקרב את $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ עד לדיוק של 10^{-6}.

שיטה ראשונה – לכל $0 < x < 1$ נקרב את e^{-x^2} עד לדיוק של 10^{-6}.

נזכור כי באופן כללי לכל קטע $[a, b]$ ולכל שתי פונקציות h_1, h_2 מתקיים:

$$\left|\int_a^b h_1(x)dx - \int_a^b h_2(x)dx\right| \le \int_a^b |h_1(x) - h_2(x)|dx \le (b-a) \cdot \max_{a\le x\le b} |h_1(x) - h_2(x)|$$

במקרה שלנו $a = 0, b = 1, |h_1(x) - h_2(x)| = 10^{-6}$. באופן ישיר נמצא פונקציה h_2 כלשהי שתתאים עבורנו באמצעות פיתוח טיילור. אם $x^2 = u$ אזי

$$e^{-x^2} = e^{-u} = P_n(u) + R_n(u)$$

כאשר $F(x) = e^{-x}$, עבור $0 < z < 1$:

$$R_n(u) = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(z)$$

נשים לב כי:

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$(e^{-x})'' = e^{-x}$$

ובסך הכל עבור $x \ge 0$:

$$\left|(e^{-x})^{(n)}\right| = |e^{-x}| \le 1$$

ולכן בגלל ש-$0 \le u \le 1$:

$$|R_n(u)| \le \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{1}{(n+1)!}$$

אנחנו דורשים

$$\frac{1}{(n+1)!} \le 10^{-6} \Rightarrow n = 9$$

עבור $n = 9$ מובטח לנו כי:

$$|e^{-u} - P_9(u)| \le 10^{-6}$$

אם נחשב ב-$x = 0$ נשים לב כי הנגזרות הזוגיות הן 1 והנגזרות האי-זוגיות הן (-1) לכן הפולינטום טיילור ממעלה 9 והקירוב לאינטגרל הם:

$$P_9(u) = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \Rightarrow P_9(x^2) = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \Rightarrow \int_0^1 P_9(x^2)dx = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$$

שיטה שניה – נזכור כי $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots$ לכן:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

לכן אם נעשה אינטגרציה (פורמלית דרוש לנמק מדוע ניתן לעשות זאת) נקבל:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!}\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$$

זהו טור לייבניץ לכן הערך המוחלט של 'הזנב' של הטור קטן או שווה לערך המוחלט של האיבר הראשון:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}\right| \le \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} \le 10^{-6} \Rightarrow (n+1)!\,(2n+3) \ge 10^6 \Rightarrow n = 8$$

כלומר מספיק לקחת:

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$$

2. סדרות מתכנסות וקצב התכנסות

הקדמה 2.1 – סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא אוסף בן-מניה של איברים. אם לסדרה יש גבול $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ נרצה להגדיר מהירות התכנסות לגבול.

הגדרה 2.2 – קצב התכנסות (לפחות) לינארי – נגיד כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L בקצב (לפחות) לינארי אם קיים קבוע כלשהו $C < 1$ כך שעבור n מספיק גדול מתקיים $|a_{n+1} - L| \le C \cdot |a_n - L|$.

הגדרה שקולה 2.3 – מתקיים 'כיווץ' אם הגבול העליון של המנה קטן מ-1 כלומר:

$$\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1} - L}{a_n - L}\right| < 1$$

דוגמה 2.4 - $a_n = \frac{1}{2^n}$. כמובן $L = 0$, ומתקיים לכל n:

$$\frac{a_{n+1} - 0}{a_n - 0} = \frac{1}{2} < 1$$

כלומר יש קצב התכנסות לינארי.

דוגמה 2.5 - $a_n = \frac{1}{2^{2^n}}$ כמובן $L = 0$. השאיפה לאפס היא בקצב מהיר הרבה יותר מאשר קצב לינארי, לכן לפחות לינארית. זאת משום ש-$a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n$ לכל n.

הגדרה 2.6 – קצב התכנסות (לפחות) סופר-לינארי – סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L בקצב (לפחות) סופר-לינארי אם הגבול העליון של הכיווץ שואף לאפס:

$$\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}-L}{a_n-L}\right|=0$$

הערה 2.7 – אינטואיטיבית, קצב התכנסות לינארי פירושו שהמרחק לגבול מתכווץ עם 'מקדם כיווץ' $c<1$. קצב התכנסות סופר-לינארי פירושו שמקדם הכיווץ עצמו שואף לאפס. יכול להיות עדין שהסדרה מתכנסת אבל באופן גבוה יותר מהתכנסות סופר-לינארית. פעמים רבות נרצה למצוא שיטות נומריות ונמדוד אותן מבחינת קצב התכנסות.

הגדרה 2.8 – קצב התכנסות (לפחות) אלפא - סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L בקצב $\alpha>1$ אם קיים קבוע כלשהו $C>0$ כך שהחל מ-n מסוים מתקיים:

$$|a_{n+1}-L|\le C\cdot|a_n-L|^{\alpha}$$

הגדרה שקולה 2.9 – באופן דומה ניתן להגדיר

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}-L}{|a_n-L|^{\alpha}}<\infty$$

הערה 2.10 – כדי שקצב התכנסות אלפא יהיה מהיר יותר מקצב התכנסות לינארי, נקודת ההתחלה a_1 צריכה להיות קרובה לגבול.

דוגמה 2.11 – $a_n=\frac{n}{2^n}$ כאשר $L=0$. נשים לב כי $\lim\frac{a_{n+1}-L}{a_n-L}=\frac{1}{2}$ לכן לכל $C>\frac{1}{2}$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<C$. כלומר זהו קצב התכנסות לינארי.

דוגמה 2.12 – נגדיר ברקורסיה את הסדרה הבאה:

$$X_1=1$$
$$X_{n+1}=\frac{X_n}{2}+\frac{1}{X_n}$$

ניתן להראות כי $L=\sqrt{2}$ וכי הסדרה מתכנסת בקצב ריבועי ל-$\sqrt{2}$. נשים לב כי:

$$X_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{X_n}{2}+\frac{1}{x_n}-\sqrt{2}=\frac{X_n^2+2-2\sqrt{2}X_n}{2X_n}=\frac{\left(X_n-\sqrt{2}\right)^2}{2X_n}=\frac{1}{2X_n}\left(X_n-\sqrt{2}\right)^2$$

נרצה להראות כי $\frac{1}{2X_n}$ חסום מלמעלה לכל n. זה שקול לכך ש-X_n לא יכול להיות קרוב מדי ל-0. נשים לב כי:

$$X_{n+1}=\frac{X_n}{2}+\frac{1}{X_n}=\frac{X_n^2+2}{2X_n}\overset{a^2+b^2\ge 2ab}{\ge}\frac{2\sqrt{2}X_n}{2X_n}\ge\sqrt{2}$$

לכן $\frac{1}{x_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ לכל $n\ge 2$ ו-$\frac{1}{x_1}=1$ עבור $n=1$ לכן בסך הכל:

$$\left|X_{n+1}-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{2}\left|X_n-\sqrt{2}\right|^2$$

נשים לב כי אם מתקיים אי-השוויון $|X_{n+1}-L|\le C|X_n-L|^2$ זה לא מבטיח ש-L הוא הגבול. ניתן להראות ישירות מהו הגבול, או לחילופין להסיק מאי-השוויון הנ"ל ומנקודת ההתחלה. כיוון ש-$X_1=1$ אזי ניתן לראות כי:

$$\left|X_2-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{2}\left|X_1-\sqrt{2}\right|^2=\frac{1}{2}\left|1-\sqrt{2}\right|^2\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2}{25}<\frac{1}{10}$$
$$\left|X_3-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\le\frac{1}{200}$$

ניתן לפיכך להראות באינדוקציה כי

$$\left|X_n-\sqrt{2}\right| \le 2^{-n}$$

הוכחה: בסיס האינדוקציה $n=1$ ומתקיים

$$\left|X_1-\sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}=2^{-1}$$

נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו ונראה כי היא לפיכך נכונה גם עבור $(n+1)$. ניקח:

$$\left|X_{n+1}-\sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|X_n-\sqrt{2}\right|^2 \overset{by\ induction}{\le} \frac{1}{2}(2^{-n})^2=2^{-2n-1}\le 2^{-n-1}$$

דוגמה 2.13 – התכנסות של סדרה בקצב פחות טוב מלינארי – סדרת אוילר $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n=e$. עבור סדרה זו לא קיים $C<1$ כך שהחל מ-n מסוים מתקיים $|X_{n+1}-e|\le C\cdot|X_n-e|$. באופן שקול $\lim\left|\frac{X_{n+1}-e}{X_n-e}\right|\ge 1$ ואילו אנחנו נראה כי מתקיים במקרה זה שוויון.

עבור $z>0$, נסתכל על

$$F(z)=\begin{cases}(1+z)^{1/z}, & z>0\\ e, & z=0\end{cases}$$

לכן:

$$X_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/(1/n)}=F\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow \lim_{z\to 0}F(z)=e$$

אנחנו נרצה להראות כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F\left(\frac{1}{n+1}\right)-F(0)}{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}=1$$

ממשפט ערך הביניים נקבל כי לכל n, יש נקודת ביניים $0<Z_n<\frac{1}{n}$ כך שמתקיים

$$\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}{1/n}=F'(Z_n)=\frac{(1+Z_n)^{\frac{1}{Z_n}}}{Z_n^2}\left(\frac{Z_n}{1+Z_n}-\ln(1+Z_n)\right)$$

כאשר החישוב נובע :

$$\left((1+z)^{1/z}\right)'=\left(e^{\frac{\ln(1+z)}{z}}\right)'=e^{\frac{\ln(1+z)}{z}}\cdot\left[\frac{\frac{1}{1+z}\cdot z-\ln(1+z)}{z^2}\right]=(1+z)^{1/z}\frac{\frac{1}{1+z}\cdot z-\ln(1+z)}{z^2}$$

נציב את הנקודות שבהן הנגזרות שווה לפי משפט ערך הביניים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F\left(\frac{1}{n+1}\right)-F(0)}{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}=\frac{\left[\frac{1}{n+1}-0\right]\cdot F'(Z_{n+1})}{\left[\frac{1}{n}-0\right]\cdot F'(Z_n)}=\frac{\frac{1}{n+1}\cdot F'(Z_{n+1})}{\frac{1}{n}\cdot F'(Z_n)}$$

נשים לב כי $\left(\frac{1}{n+1}\right)/\left(\frac{1}{n}\right)$ שואף ל-1. לכן נותר להראות כי קיים הגבול $\lim_{z\to 0^+}F'(z)$ ושהוא איננו אפס. באמצעות לופיטל:

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}\frac{\frac{1}{1+z}\cdot z-\ln(1+z)}{z^2}=\lim_{z\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+z}-\ln(1+z)}{z^2}\overset{l'hopitalle}{=}\lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+z)^2}-\frac{1}{1+z}}{z}$$
$$=\lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{z}{(1+z)^2}}{z}=\lim_{z\to 0^+}\frac{1}{(1+z)^2}=1$$

כאשר $(1+z)^{1/z}$ שואף ל-e.

שיעור מספר 2

3. שיטות לפתרון משוואות

הקדמה 3.1 תהי f פונקציה רציפה, נרצה למצוא פתרון כלשהו למשוואה $f(x)=0$ כאשר אין פתרון מפורש, כלומר אי אפשר למצוא פתרון אנליטי ולכן מוצאים פתרון נומרי.

תזכורת 3.2 הבסיס התאורטי לשיטת החצייה הוא משפט ערך הביניים. נזכיר כי לפי משפט ערך הביניים אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח $f(a)\cdot f(b)<0$ (כלומר אחד מהערכים חיובי ואחד שלילי), אז קיים לכל הפחות c אחד המקיים $a<c<b$ כך ש-$f(c)=0$. כלומר קיים שורש כלשהו שבו מתקיים $f(c)=0$.

הגדרה 3.3 - שיטת החצייה – שיטת החצייה דורשת רק שהפונקציה היא רציפה, הבעיה היא שזמני ההתכנסות שלה ארוכים יחסית כפי שנראה. צעד ראשון – לוקחים $x_1=\frac{a+b}{2}$. יש שלוש אפשרויות:

א. אם $f(x_1)=0$ סיימנו
ב. אם $f(x_1)\cdot f(a)<0$ (כלומר יש להם סימן שונה) אז מצמצמים את החיפוש לקטע $[a,x_1]$. ההצדקה לכך היא שממשפט ערך הביניים אנחנו יודעים בוודאות שבקטע זה יהיה שורש לפונקציה.
ג. אחרת $f(x_1)\cdot f(b)<0$, מתקיים בהכרח בגלל שהנחנו $f(a)\cdot f(b)<0$. במקרה זה מצמצמים את החיפוש לקטע $[x_1,b]$. גם כאן, ממשפט ערך הביניים בקטע זה בהכרח יהיה שורש לפונקציה.

נשים לב כי יכול להיות שיש מספר שורשים בקטע, כלומר מספר תנאים מתוך צעד ראשון יתקיימו. התנאי של משפט ערך הביניים בשיטת החצייה הוא תנאי מספיק אבל לא הכרחי.

חוזרים על צעד ראשון עבור חצי הקטע שנבחר בצעד הקודם באופן רקורסיבי. האלגוריתם עוצר כאשר לקחנו את אמצע הקטע קיבלנו נקודה שבה f מתאפסת, או עד שמגיעים לרמת הדיוק הנדרשת. נשים לב שאחרי N צעדים יהיה קטע כלשהו באורך $\frac{b-a}{2^n}$ שאנחנו יודעים שיש בו שורש. ה-N הראשון עבורו $\frac{b-a}{2^n}$ קטן מהדיוק שאנחנו רוצים זה ה-N שבו נעצור.

דוגמה 3.4 – עבור דיוק דרוש של 0.001 דרוש

$$\frac{b-a}{2^N}<0.001\Rightarrow 2^N>1000(b-a)\Rightarrow N>\log_2(1000(b-a))$$

הערה 3.5 יתרונות וחסרונות של שיטת החצייה

א. צריך למצוא קטע $[a,b]$ כך ש-$f(a)\cdot f(b)<0$, ועדיף שקטע זה יהיה קטן ככל הניתן.
ב. כדי להגיע לדיוק ε צריך מספר צעדים שיקיים $\frac{b-a}{2^N}<\varepsilon$ כלומר $N>\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$, כלומר זמן ההתכנסות גדול יחסית.
ג. נדרש רציפות בלבד עבור שימוש בשיטה

הערה 3.6 קצב ההתכנסות של שיטת החצייה – תיארנו שיטה שבונה ברקורסיה סדרה של קטעים $X_1,X_2,\dots,X_N,\dots$ שמתכנסת לשורש. מה קצב ההתכנסות? ניתן לראות כי $\left|X_{n+1}-\text{שורש}\right|\le\frac{1}{2}\left|X_n-\text{שורש}\right|$ כלומר קצב ההתכנסות הוא לינארי עם מקדם כיווץ $\frac{1}{2}$ (נחשבת שיטה "איטית" יחסית).

דוגמה 3.7 – מצא x חיובי בדיוק של 0.01 המקיים את המשוואה $x = 2\sin(x)$.

נפתור באמצעות שיטת החצייה, אנחנו מסתכלים על הפונקציה $f(x) = x - 2\sin(x)$ ונרצה למצוא שורש חיובי של f. נשים לב כי $2\sin(x) \le 2$ לכן $f(2) = 2 - 2\sin(2) > 0$. מצד שני $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 1 < 0$. כלומר בקטע $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$ יש שורש אותו נמצא בשיטת החצייה עד שנגיע לדיוק 0.01.

צעד ראשון: $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$

$$x_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)}{2} \approx 1.78 \Longrightarrow f(x_1) \approx -0.17 < 0$$

כיוון שהתוצאה שלילית אזי לפי אפשרות ג' נצמצם את החיפוש לקטע [1.78,2].

צעד שני: [1.78,2]

$$x_2 = \frac{1{,}78 + 2}{2} = 1.89 \Longrightarrow f(x_2) \approx -0.08 < 0$$

כיוון שהתוצאה שלילית אזי לפי אפשרות ג' נצמצם את החיפוש לקטע [1.89,2].

צעד שלישי: [1.89,2]

$$x_3 = \frac{1.89 + 2}{2} = 1.945 \Longrightarrow f(x_3) > 0$$

כיוון שהתוצאה חיובית אזי לפי אפשרות ב' נצמצם את החיפוש לקטע [1.89,1.945]

צעד רביעי: [1.89,1.945]:

$$x_4 = \frac{1.89 + 1.945}{2} = 1.9175 \Longrightarrow f(x_4) > 0$$

כיוון שהתוצאה חיובית אזי לפי אפשרות ב' נצמצם את החיפוש לקטע [1.89,1.9175]

צעד חמישי:

$$x_5 = \frac{1.89 + 1.9175}{2} = 1.90375 \Longrightarrow f(x_5) > 0$$

כיוון שהתוצאה חיובית אזי לפי אפשרות ב' נצמצם את החיפוש לקטע [1.89,1.90375]

צעד שישי:

$$x_6 = \frac{1.89 + 1.90375}{2} = 1.896875$$

אורך הקטע $\frac{1}{100} >$ [1.89,1.896875] וכן אורך הקטע $\frac{1}{100} >$ [1.896875,1.90375] ולכן מתקבל שורש עד כדי דיוק של $\frac{1}{100}$ כנדרש.

נשים לב כי אורך הקטע המקורי הינו $a = \frac{\pi}{2}, b = 2$ וחיפשנו $\frac{b-a}{2^N} < 0.01$ ולכן $N = 6$. עבור דיוק הרבה יותר טוב של 0.000001 היה נדרש $\frac{b-1}{2^N} < 10^{-6}$ היו נדרשות כבר כ-20 איטרציות. כלומר שיטת החצייה תמיד עובדת אבל אם רוצים דיוק טוב מספר האיטרציות גדל.

הגדרה 3.8 – ***שיטת ניוטון*** – השיטה היא שיטה איטרטיבית, ודורשת שנניח כי f גזירה פעמיים ברציפות. אם c הוא השורש שרוצים לקרב נניח $f(c) \neq 0$, בפרט יש סביבה של c שבה הנגזרת לא מתאפסת, אפילו חסומה מלמטה על ידי $\varepsilon > 0$. נבחר x_0 נקודת התחלה ובאינדוקציה לכל $n \geq 0$ מתקיים

$$\boldsymbol{X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}}$$

הערה 3.9 - נשים לב כי אם $X_n \to A$ אז גם $X_{n+1} \to A$ כלומר

$$\lim_{n\to\infty} X_{n+1} = \lim_{n\to\infty} X_n - \frac{\lim_{n\to\infty} f(X_n)}{\lim_{n\to\infty} f'(X_n)} \Longrightarrow A = A - \frac{f(A)}{f'(A)} \Longrightarrow f(A) = 0$$

כלומר אם הסדרה מתכנסת היא חייבת להתכנס לשורש.

הערה 3.10 – המשמעות הגאומטרית של שיטת ניוטון – איתור המשיק בכל נקודה בסדרה. כלומר לוקחים את הקירוב הלינארי של הפונקציה לכל n בסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. שכן מחפשים:

$$y = f(X_n) + f'(X_n)(x - x_n) = 0 \Rightarrow$$
$$X - X_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$
$$X = X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(x_n)}$$

טענה 3.11 – קצב התכנסות של שיטת ניוטון – עבור פונקציה $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ אנחנו מגדירים:

$$X_{n+1} = X_n - g(X_n)$$

ומחפשים $c \in \mathbb{R}$ המקיים $g(c) = 0$. לכן ניתן לכתוב לפי פיתוח טיילור:

$$g(X_n) = g(c) + g'(c)(X_n - c) + \frac{g''(c)}{2}(X_n - c)^2 + \frac{g'''(\rho)(X_n - c)^3}{6}$$

כאשר ρ נקודת ביניים כלשהי. ניתן לרשום לפיכך:

$$g(X_n) = g(c) + g'(c)(X_n - c) + \frac{g''(c)}{2}(X_n - c)^2 + R(X_n)$$

כאשר השארית $R(X_n)$ המקיימת $\lim_{X\to c} \frac{R(X)}{(X-c)^2} = 0$. לכן עד כדי סדר 2 מתקיים:

$$X_{n+1} = X_n - g(X_n) \approx X_n - g(c) - g'(c)(X_n - c) - \frac{g''(c)(X_n - c)^2}{2}$$
$$\overset{g(c)=0}{=} X_n - g'(c)(X_n - c) - \frac{g''(c)(X_n - c)^2}{2}$$

נחסר את c משני האגפים ונקבל:

$$X_{n+1} - c = (X_n - c) - g'(c)(X_n - c) - \frac{g''(c)(X_n - c)^2}{2}$$

נראה כי $g'(c) = 1$ ולכן $(X_n - c) - g'(c)(X_n - c)$ שווה ל-0.

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{f'(x)f'(x) - f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = 1 - \frac{f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

ולכן בגלל ש-$f(c) = 0$ מתקבל:

$$g'(c) = 1 - \frac{f''(c)f(c)}{\left(f'(c)\right)^2} = 1 - 0 = 1$$

ולכן בסך הכל עבור ρ זניח כלשהו נקבל:

$$X_{n+1} - c = \left(\frac{g''(c)}{2} + \rho\right)(X_n - c)^2$$

כלומר קיבלנו קצב התכנסות ריבועי בשל החלוקה בנגזרת.

הערה 3.12 – ניתן היה להגדיר שיטה ללא חלוקה בנגזרת $X_{n+1} = X_n - f(X_n)$, נניח שהסדרה מתכנסת וגם במצב זה היה מתקיים $f(A) = 0$. אבל קצב ההתכנסות במקרה זה היה:

$$X_{n+1} - A = X_n - A + f(X_n) - f(A) = (X_n - A) + f'(\rho)(X_n - A) = \big(1 + f'(\rho)\big)(X_n - A)$$

לכן גם אם יש הכתנסות הקצב הוא לינארי.

דוגמה 3.13 – נרצה לחשב את $\sqrt{2}$ בעזרת 4 פעולות חשבון בלבד.

פתרון - $\sqrt{2}$ הוא פתרון חיובי למשוואה $x^2 - 2 = 0$. נתחיל בנקודה $X_0 = 2$ ונפעיל את שיטת ניוטון כלומר:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{X_n^2 - 2}{(X_n^2 - 2)'} = X_n - \frac{(X_n^2 - 2)}{2X_n} = \frac{2X_n^2 - (X_n^2 - 2)}{2X_n} = \frac{X_n^2 + 2}{2X_n} = \frac{X_n}{2} + \frac{1}{X_n}$$

ראינו זאת בדוגמה 2.12. נראה בשיטת ניוטון באיזה קצב נגיע ל-$\sqrt{2}$.

$$X_0 = 2$$
$$X_1 = \frac{X_0}{2} + \frac{1}{X_0} = \frac{3}{2}$$
$$X_2 = \frac{X_1}{2} + \frac{1}{X_1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 1.4167$$
$$X_3 = \frac{X_2}{2} + \frac{1}{X_2} = 1.4142$$

כלומר אחרי 3 איטרציות הגענו לדיוק של עד כדי 10^{-4}, וקצב ההתכנסות הוא ריבועי, כלומר ב-X_4 נהיה במרחק של 10^{-8}, ב-X_5 נהיה במרחק של 10^{-16} וכן הלאה.

לעומת זאת אם היינו מפעילים את השיטה שבה לא מחלקים בנגזרת אז האיטרציות היו:

$$X_0 = 2$$
$$X_1 = 1$$
$$X_2 = \frac{3}{2}$$
$$X_3 = \frac{11}{8}$$
$$X_4 = 1.4297$$
$$X_5 = 1.4077$$
$$X_6 = 1.4169$$

כלומר אחרי 6 איטרציות נהיה רק בדיוק של 10^{-4}.

דוגמה 3.14 – מציאת שורש חיובי למשווה $x = 2\sin(x)$. ראינו את הפתרון בשיטת החצייה. אם נשתמש בשיטת ניוטון ונתחיל ב-$X_0 = 2$ ו-$f(x) = x - 2\sin(x)$ אזי:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{X_n - 2\sin(X_n)}{1 - 2\cos(X_n)}$$

אזי:

$$X_0 = 2$$

$$X_1 = X_0 - \frac{X_0 - 2\sin(X_0)}{1 - 2\cos(X_0)} = 2 - \frac{2 - 2\sin(2)}{1 - 2\cos(2)} \approx 1.9010$$
$$X_2 = 18955$$

וכבר בשלב זה מתקבל דיוק של 10^{-2}, ולכן עבור X_3 הדיוק יתקבל ב-10^{-4} וכן הלאה. לעומת זאת בשיטת החציה אחרי היינו צריכים 6 איטרציות.

סיכום 3.15 השוואה של שיטת ניוטון ושיטת החצייה

	שיטת החצייה	שיטת ניוטון
קצב התכנסות	לינארי (איטי)	ריבועי (מהיר)
דרישות	רציפות	רציפות נגזרת שנייה (דורשת יותר תכונות רגולריות)
התנכסות	תמיד	רק אם מאותחל קרוב יחסית לשורש

שיעור מספר 3

תזכורת 3.16 – שיטת ניוטון מקיימת:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

ניתן לחשוב על X_{n+1} בתור פונקציה של X_n ($X_{n+1} = \Phi(X_n)$ ו-$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$). בהנחה שהנגזרת בנקודה p איננה מתאפסת כלומר $f'(p) \neq 0$ עקרונית אפשר שלא לחלק בנגזרת אבל אז קצב ההתכנסות היה שונה. אם רוצים לדעת מהו קצב ההתכנסות:

$$X_{n+1} - p = \Phi(X_n) - \Phi(p) \overset{taylor}{\sim} \Phi(p) + \Phi'(p)(X_n - p) + \frac{\Phi''(p)}{2}(X_n - p)^2 - \Phi(p)$$
$$= \Phi'(p)(X_n - p) + \frac{\Phi''(p)}{2}(X_n - p)^2$$

כאשר p נקודת שבת p המקיימת $\phi(p) = p$:

$$\Phi'(p) = 1 - \frac{(f')^2 - f \cdot f''}{(f')^2} \overset{f(p)=0}{=} 0$$

כאשר אם p לא היה נקודת שבת אז היינו מקבלים

$$\Phi'(p) = 1 - f'(p)$$

וההתאפסות קורית רק בגלל שזו נקודת שבת ואז מתקבל קצב התכנסות ריבועי.

הערה 3.17 – במקרה המנוון שבו $f(p) = 0$ וגם $f'(p) = 0$ אבל בסביבת הנקודה $f' \neq 0$ נרצה גם למצוא התכנסות ריבועית. לדוגמה $f(x) = x^3$ ו-$p = 0$. אזי $f'(x) = 3x^2$ עם מינימום ב-0 אבל ללא התאפסות בנקודה 0. אזי במקרה כזה עושים את המודיפיקציה הבאה:

$$\Phi(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x)}$$

הסיבה לכך שמכפילים ב-2 היא, בדומה למקרה הלא-מנוון:

$$X_{n+1} - p = \Phi(X_n) - \Phi(p) \overset{taylor}{\sim} \Phi(p) + \Phi'(p)(X_n - p) + \frac{\Phi''(p)}{2}(X_n - p)^2 - \Phi(p)$$

$$= \Phi'(p)(X_n - p) + \frac{\Phi''(p)}{2}(X_n - p)^2$$

אם נסתכל על הגבול של הנגזרת של x בהתקרבות ל-p (הנגזרת בנקודה איננה מוגדרת) ונשתמש בכלל המנה נקבל:

$$\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \lim_{x\to p}\frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

עקרונית היה ניתן להמשיך באמצעות כלל לופיטל. שיטה אחרת היא להסתכל באמצעות טורי טיילור על הקירובים הבאים לפי סדר ראשון:

$$f(x) \sim \frac{f(p)}{2}(x-p)^2$$
$$f'(x) \sim f'(x)(x-p)$$

ואז מקבלים:

$$\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \lim_{x\to p}\frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \lim_{x\to p}\frac{(f''(p))^2(x-p)^2 - \frac{\left(f''(p)\right)^2}{2}(x-p)^2}{\left(f''(p)\right)^2(x-p)^4} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

ולכן אם נציב את המקרה המנוון שהגדרנו לעיל נקבל:

$$\Phi'(p) = \lim_{x\to p}\Phi'(x) = 1 - 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

ואז ברגע שהנגזרת מתאפסת אז יש קצב ריבועי (אחרת קצב ההתכנסות איננו ריבועי).

הערה 3.18 – הכללה לכל סדר - באופן כללי ניתן להכליל לכל סדר על מנת שכל הנגזרות יתאפסו. אם מחפשים p כך ש-$f(p) = 0, f'(p) = 0, \dots f^{(k)} = 0, f^{(k+1)} \neq 0$, כלומר $(k+1)$ הוא הריבוי של השורש. אז נגדיר את שיטת ניוטון באמצעות:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{(k+1)f(x)}{f'(x+1)}$$

והשיטה תתכנס בקצב $k+1$.

הערה 3.19 – בדיקת קצב התכנסות מנתונים – נניח קיבלנו נתונים $X_1, X_2, \dots, X_n$ של התכנסות כתוצאה משיטת ניוטון אזי בהנחה שהשורש ידוע

$$|X_{n+1} - p| \sim C\cdot|X_n - p|^\alpha \Rightarrow$$
$$\log(|X_n - p|) = \log(C) + \alpha\cdot\log(|X_n - p|) \Rightarrow$$
$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(|X_{n+1} - p|)}{\log(|X_n - p|)}$$

כלומר עקרונית ניתן לדעת מהו קצב ההתכנסות אבל רק אחרי שיודעים מהו השורש. אם עושים זאת (למשל על דוגמאות שכבר ידועות התוצאות שלהן) אז עקרונית ניתן לדעת מה סדר ההתכנסות ואז למשל לשנות את המקדם בשיטת ניוטון, אם למשל מבינים שקצב ההתכנסות לא היה ריבועי כפי שציפינו.

סיכום 3.20 – למדנו שתי שיטות למציאת שורשים כפונקציה של משתנה יחיד – שיטת החצייה ושיטת ניוטון. עתה נעבור למציאת שורשים בפונקציות מרובות-משתנים

4. מציאת נקודות קיצון של פונקציות רבות-משתנים

תזכורת 4.1 פונקציה רבת-משתנים, גרדיאנט והסיאן – תהי פונקציה של כמה משתנים $f(x_1, \dots, x_n)$.
הגרדיאנט של הפונקציה היא וקטור הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה כלשהי: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.
ההסיאן של הפונקציה היא מטריצה שבה הקוארדינטה ה-(i,j) היא הנגזרת השניה לפי הרכיב ה-i ולפי הרכיב ה-j. כלומר $\left(H(f)\right)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. בסך הכל $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ והינה מטריצה סימטרית.

דוגמה 4.2 – ניקח $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot x_2$. חשב גרדיאנט והסיאן.

פתרון –

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (e^{x_1} \cdot x_2, e^{x_1})$$

אם נרצה לחשב בנקודה ספציפית $(x_1, x_2) = (0,2)$ אזי:

$$\nabla f_{(0,2)} = (e^0 \cdot 2, e^0) = (2,1)$$

ההסיאן $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מחושב על ידי:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cdot x_2 & e^{x_1} \\ e^{x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

למשל עבור הנקודה $(x_1, x_2) = (0,2)$ נקבל:

$$H(f)_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה 4.3 – הגרדיאנט דומה לנגזרת ראשונה וההסיאן לנגזרת השניה במקרה החד-ממדי.

הגדרה 4.4 – נגזרת כיוונית – נניח קיימת פונקציה של שני משתנים $f(x_1, x_2)$. נסתכל על הנקודה (a,b).
אזי הנגזרת הכיוונית מוגדרת על ידי

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f\left((a,b) + t \cdot \vec{d}\right) - f(a,b)}{t} = \nabla f_{(a,b)} \cdot \vec{d}$$

כאשר בדרך כלל לוקחים את d להיות וקטור היחידה כלומר $\|\vec{d}\| = 1$. אינטואיטיבית, הכוונה לערך של הפונקציה מנקודה (a,b) אם הולכים בכיוון כלשהו $\vec{d}$.

דוגמה 4.5 – ניקח $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. נניח שרוצים לחשב נגזרת כיוונית בנקודה $(x,y) = (1,2)$ בכיוון של הווקטור $(1,1)$, כלומר בכיוון 45 מעלות לכיוון הרביע הראשון. אזי (נשים לב שאנחנו צריכים לנרמל את הווקטור או לחילופין לחלק בנורמה במכנה כאשר $\|\vec{d}\| = \sqrt{2}$):

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0^+} \frac{f\left((1,2) + t \cdot (1,1)\right) - f(1,2)}{t \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left((1+t, 2+t)\right) - f(1,2)}{t \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^2 + (2+t)^2 + (1+t)(2+t) - (1^2 + 2^2 + 1 \cdot 2)}{t \cdot \sqrt{2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{3t^2 + 9t}{t \cdot \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{3t+9}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

נשים לב שגם מתקיים:

$$\nabla f = (2x+y, x+2y)$$

לכן:

$$\nabla f_{(1,2)} = (4,5)$$

ולכן לפי הנוסחה של נגזרת כיוונית מתקיים גם:

$$\nabla f_{(1,2)} \cdot \frac{1,1}{\|1,1\|} = \frac{(4,5)\cdot(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

הערה 4.6 – עבור וקטור לא מנורמל ניתן להסתכל על 2 הגדרות שקולות:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left((a,b)+t\cdot\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}\right)-f(a,b)}{t}$$

$$\lim_{\hat{t}\to 0^+}\frac{f\left((a,b)+\hat{t}\cdot\vec{d}\right)-f(a,b)}{\hat{t}\cdot\|\vec{d}\|}$$

נשים לב כי $\hat{t} = \frac{t}{\|\vec{d}\|}$ לכן ההגדרות שקולות.

הערה 4.7 – עבור פונקציה $f(x_1,\dots,x_n)$ הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ היא נגזרת כיוונית של הוקטור e_i (וקטור של אפסים למעט 1 בקואורדינטה ה-i).

הערה 4.8 – בהגדרה של הנגזרת הכיוונית אפשר לשנות גם לכתוב באופן כללי $\lim_{t\to 0}\frac{f\left((a,b)+t\cdot\vec{d}\right)-f(a,b)}{t}$ ולא בהכרח $\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left((a,b)+t\cdot\vec{d}\right)-f(a,b)}{t}$.

הגדרה 4.9 – נגזרת שנייה לפי כיוון – עבור פונקציה $f(x_1,\dots,x_n)$, נקודה כלשהי $a=(a_1,\dots,a_n)$ וכיוון $\vec{d}=(d_1,\dots,d_n)$ ניתן להגדיר לסקלר כלשהו $t\in\mathbb{R}$:

$$\phi(t) = f\big((a_1,\dots,a_n)+t\cdot(d_1,\dots,d_n)\big)$$

במקרה שבו $t=0$ הנגזרת הראשונה היא נגזרת כיוונית:

$$\phi'(0) = \nabla f_{(a_1,\dots,a_n)}\cdot(d_1,\dots,d_n)$$

אפשר לחשוב על הנגזרת השניה הכיוונית בתור:

$$\phi''(0) = (d_1,\dots,d_n)\cdot H(f)_{(a_1,\dots,a_n)}\cdot\begin{pmatrix}d_1\\ \dots\\ d_n\end{pmatrix}$$

דוגמה 4.10 – עבור $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ בנקודה $a=(a_1,a_2)=(1,2)$ וכיוון $\vec{d}=(d_1,d_2)=(1,1)$ נחשב נגזרת שניה בכיוון. אזי:

$$\varphi(t)=f\left((1,2)+t\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2}t^2+b\cdot t$$

כאשר b הוא פונקציה ליארית כלשהי של t שמתאפסת בנגזרת השניה. אזי הערך של הנגזרת השניה הוא:

$$\varphi''(0)=3$$

בשיטה השניה, אם נחשב את ההסיאן נקבל:

$$H(f)_{(1,2)}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

לכן:

$$\phi''(0)=(d_1,\dots,d_n)\cdot H(f)_{(a_1,\dots,a_n)}\cdot\begin{pmatrix}d_1\\ \dots\\ d_n\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\3/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

5. יישומים למציאות נקודות קיצון מקומיות בפונקציות של כמה משתנים

דוגמה 5.1 – תהי פונקציה $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$. נזכיר כי $\mathbb{R}_+^2=\{(x_1,x_2):x_1,x_2\geq 0\}$ כלומר כל הזוגות הסדורים ששניהם אי-שליליים. נרצה למצוא נקודות קיצון של הפונקציה – גם נקודות קיצון פנימיות וגם נקודות קיצון על השפה (על הציר). בנקודות קיצון פנימיות ניתן לנוע בכל כיוון של התחום. בנקודות קיצון בשפה אי אפשר לנוע בחלק מהכיוונים (כי יוצאים מהתחום).

הגדרה 5.2 – **כיוון בר-ביצוע** - עבור תחום n-ממדי כלשהו Ω נקודה כלשהי $X\in\Omega$ בתוך התחום. נאמר ש-$d\in\mathbb{R}^n$ הוא כיוון בר-ביצוע עבור X אם קיים סקלר כלשהו $\varepsilon>0$ כך ש-$X+t\cdot d\in\Omega$ לכל $0<t<\varepsilon$. כלומר ניתן לנוע בכיוון d, בצעד כלשהו (קטן ככל שיהיה), ועדין להישאר בתחום. אם נקודה היא על השפה של התחום אז הדבר איננו אפשרי.

הגדרה 5.3 – נקודה פנימית - $X\in\Omega$ היא נקודה פנימית של התחום Ω אם כל כיוון $d\in\mathbb{R}^n$ הוא כיוון בר-ביצוע של X.

הגדרה 5.4 – **נקודת שפה** – נקודה $X\in\Omega$ שאיננה נקודה פנימית של Ω תיקרא נקודת שפה.

דוגמה 5.5 - $\Omega=\mathbb{R}_+^2=\{(x_1,x_2):x_1,x_2\geq 0\}$ – כלומר התחום הוא הרביע הראשון של ממד 2, כולל השפה. בנקודה שבה $x_1=0$ או $x_2=0$ ישנם כיוונים שאינם ברי-ביצוע לכן נקודות אלו אינן נקודות פנימיות. לעומת זאת כל נקודה שבה $x_1>0,x_2>0$ היא נקודה פנימית.

הערה 5.6 – נקודות קיצון פנימיות ובשפה - אינטואיטיבית (נגדיר פורמלית בהמשך), מינימום מקומי הוא נקודה כלשהי שבסביבה כלשהי שלה כל הערכים של הסביבה גדולים או שווים מהערך של הפונקציה בנקודה. אם מדובר בנקודה פנימית אזי הגובה בנקודה הוא קטן או שווה לגובה בכל הכיוונים בסביבה כלשהי. אם מדובר בנקודת קיצון אז הגובה בנקודה הוא קטן או שווה לגובה בכל הכיוונים שנשארים בתחום ההגדרה.

טענה 5.7 – תנאי הכרחי מסדר ראשון לנקודת מינימום - נניח שאנחנו מחפשים נקודות פנים שהן נקודות קיצון מקומיות. נניח יש נקודת פנים a שהיא נקודת מינימום אז נגזרת כיוונית בכל כיוון $\vec{d}$ צריכה להיות גדולה או שווה ל-0 כלומר $\left(\nabla f_a,\vec{d}\right)\geq 0$ וגם בכיוון ההופכי $\left(\nabla f_a,-\vec{d}\right)\geq 0$ לכל כיוון $\vec{d}$. מכאן שבנקודת מינימום פנימית הגרדיאנט חייב להתאפס כלומר $\forall\vec{d}:\left(\nabla f_a,\vec{d}\right)=0\Rightarrow\nabla f_a=0$.

טענה 5.8 – תנאי הכרחי מסדר שני לנקודת מינימום – נזכור כי עבור פונקציה במשתנה יחיד כדי שנקודה תהיה נקודת מינימום תנאי מספיק הוא ש-$\varphi''(t_0)>0$ ותנאי הכרחי הוא ש-$\varphi''(t_0)\geq 0$ כאשר אם $\varphi''(t_0)=0$ צריך בדיקות נוספות כדי לוודא שזו אכן נקודת מינימום. בדומה, אם a היא מינימום מקומי של f אזי $\varphi^{\vec{d}}(t)=f\left(a+t\cdot\vec{d}\right)$. אז תנאי מספיק הוא $\varphi^{\vec{d}}(t)_{t=t_0}{}''>0$ בכל כיוון $\vec{d}$. תנאי הכרחי הוא ש-

$\varphi^d(t)''_{t=t_0} \geq 0$. אם התנאי ההכרחי מתקיים והתנאי המספיק לא מתקיים צריך לעשות בדיקות נוספות.
ראינו כי

$$\varphi^{\vec{d}''}(0) = (d_1, \dots, d_n) \cdot H(f)_{a_1,\dots,a_n} \cdot (d_1, \dots, d_n)^T$$

ונדרש כי $\varphi^{\vec{d}''}(0) > 0$ וזה שקול לכך שנדרש שמטריצת ההסיאן היא מוגדרת חיובית ממש. התנאי השני $\varphi^{d''}(0) \geq 0$ שקול לכך שמטריצת ההסיאן מוגדרת חיובית במובן החלש.

מסקנה 5.9 –

א. כדי שנקודת פנים תהיה נקודת מינימום מקומית הכרחי שההסיאן בנקודה יהיה מוגדר חיובית.
ב. אם מטריצת ההסיאן מוגדרת חיובית ממש אז הנקודה היא אכן מינימום בתנאי שהגדריאנט מתאפס.
ג. כדי שנקודת פנים תהיה מקסימום מקומי ההסיאן בנקודה צריך להיות מוגדר שלילי.
ד. אם מטריצת ההסיאן מוגדרת שלילית ממש אז הנקודה היא אכן מקסימום בתנאי שהגדריאנט מתאפס.

תזכורת 5.10 – עבור מטריצה סימטרית A התנאים הבאים שקולים:

א. A מוגדרת חיובית ממש $\Leftrightarrow$ כל הערכים העצמיים גדולים מ-0.
ב. A מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ כל הערכים העצמיים גדולים או שווים ל-0.
ג. A מוגדרת שלילית ממש $\Leftrightarrow$ כל הערכים העצמיים קטנים מ-0.
ד. A מוגדרת שלילית $\Leftrightarrow$ כל הערכים העצמיים קטנים או שווים ל-0.

דוגמה 5.11 – ניקח את $f(x,y) = x^3 - x^2y + 2y^2$ כאשר $f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$. נרצה למצוא מינימום מקומי ומקסימום מקומי, מינימום גלובלי ומקסימום גלובלי.

שלב א' – מחפשים נקודות פנימיות שבהם הגרדיאנט מתאפס כלומר צריך שיתקיים:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 - 2xy, 4y - x^2) = (0,0) \Rightarrow$$
$$\frac{3x}{2} = \frac{x^2}{4} \xRightarrow{can\ divide\ by\ x\ because\ looking\ for\ internal\ points\ hence\ x \neq 0}$$
$$x = 6, y = 9$$

נמצא את ההסיאן ואת הערכים העצמיים. לפי סיווג מטריצת ההסיאן נוכל לדעת באיזו נקודה מדובר.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(4y - x^2) = -2x$$

לכן:

$$H(f)_{(6,9)} = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים של המטריצה אחד שלילי ואחד חיובי. המטריצה לא מוגדרת חיובית וגם לא מוגדרת שלילית לכן תנאי הכרחי מסדר שני לא מתקיים.

מסקנה – אין נקודות פנים שהן קיצון מקומי.

שיעור מספר 4

תזכורת 5.12 - ניקח את $f:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ כאשר $f(x,y) = x^3 - x^2y + 2y^2$. נרצה למצוא מינימום מקומי ומקסימום מקומי, מינימום גלובלי ומקסימום גלובלי. ראינו כי נקודת פנים חשודה לקיצון היא (6,9) וכי מטריצת ההסיאן בנקודה (6,9) איננה מוגדרת חיובית (קיימים שני ערכים עצמיים עם סימן שונה) לכן הנקודה (6,9) איננה נקודת קיצון אלא נקודת פיתול. נותר לבדוק נקודות קיצון בשפה.

המשך דוגמה 5.13 - נקודות שפה של הרביע הראשון הינן במקרים שבהם מתקיים אחד מהשנים:

א. $x = 0$ ו-$y \geq 0$
ב. $y = 0$ ו-$x \geq 0$

בחלקים הללו הפונקציה הינה פונקציה של משתנה יחיד.

עבור חלק א':

$$f(x,y) = f(0,y) = 2y^2$$

אם נגזור לפי y ונשווה ל-0 נקבל:

$$\frac{\partial 2y^2}{\partial y} = 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

כלומר נקודה יחידה חשודה לקיצון היא (0,0).

עבור חלק ב':

$$f(x,y) = f(x,0) = 3x^2 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial 3x^2}{\partial x} = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

גם כאן נקודה יחידה חשודה לקיצון היא (0,0).

נותר לבדוק האם ראשית הצירים (0,0) היא נקודת קיצון. כדי לבדוק אם זו נקודת קיצון צריך להגדיר מהם הכיוונים ברי הביצוע בנקודה תחת תחום ההגדרה. נזכור שכיוון שמדובר בנקודת שפה לא כל כיוון הוא בר-ביצוע. נדרש אם כן וקטור $\vec{d} = (d_1, d_2)$ כך ש-$d_1, d_2 \geq 0$.

תנאי הכרחי מסדר ראשון:

$$\nabla f_{(0,0)} = (3x^2 - 2xy, 4y - x^2)_{(0,0)} = 0$$

כלומר תנאי הכרחי מסדר ראשון מתקיים (נזכור שך=$\nabla f_{(0,0)}: d \geq 0$ אם זו נקודת מינימום ו-$\nabla f_{(0,0)}: d \leq 0$ אם זו נקודת מקסימום.

עתה, התנאי ההכרחי מסדר שני נבדק לפי ההסיאן:

$$H(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6x - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ניתן לבדוק שהערכים העצמיים הם:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$$

כלומר זוהי מטריצה חיובית במובן החלש.

נזכור כי תנאי הכרחי מסדר שני למינימום הוא ש-

$$(d_1, d_2) \cdot H(f) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

כלומר תנאי הכרחי למינימום מתקיים. לעומת זאת תנאי מספיק (גדול ממש) לא מתקיים. למשל עבור $d =$ (1,0) מתקיים:

$$(1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

לכן עקרונית לא ניתן להכריע שמדובר במינימום מקומי על בסיס התנאים שראינו. ניתן עקרונית לקחת נגזרת שלישית או למצוא נימוקים אחרים (למשל נימוקים נומריים).

אינטואיטיבית, עבור $0 < x, y < 0.001$ מתקיים $x < x^2 < x^3$ ו-$y < y^2 < y^3$ לכן האיבר הגדול ביותר בפונקציה יהיה דווקא $2y^2$. נרצה לנמק זאת פורמלית.

$$f(x,y) = x^2(x-y) + 2y^2$$

אם $y \geq x$ אזי $f(x,y) \geq 0$. לכן בהכרח (0,0) נקודת מינימום לכל ערך שבו $y \geq x$. לפיכך נניח $x \geq y$ אזי:

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + 2y^2 \geq 2y^2 - x^2y \geq 2y^2 - y^3 = (2-y)y^2 \overset{for\ 0\leq y\leq 2}{\geq} 0$$

כלומר הראינו כי לכל התחום $0 \leq x, y \leq 2$ הפונקציה $f(x,y)$ היא אי-שלילית. לכן למסקנה (0,0) היא נקודת מינימום מקומית.

הגדרה 5.14 מקסימום ומינימום גלובלי –

- נקודה $\hat{x} \in \Omega$ תיקרא מינימום גלובלי אם $f(\hat{x}) = \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$
- נקודה $\hat{x} \in \Omega$ תיקרא מקסימום גלובלי אם $f(\hat{x}) = \sup\limits_{x\in\Omega} f(x)$

טענה 5.15 –

- מינימום ומקסימום גלובלי לא בהכרח קיימים (יתכן שאין כאלו בכלל) ולא בהכרח יחידים (יתכן שיש יותר ממינימום גלובלי אחד ויתכן שיש יותר ממקסימום גלובלי אחד).
- כל נקודת מקסימום גלובלי היא גם נקודת מקסימום מקומי
- כל נקודת מינימום גלובלי היא גם נקודת מינימום מקומי

הערה 5.16 – אם התחום Ω הוא חסום ומכיל את השפה שלו (תחום סגור) אז לכל פונקציה רציפה יש מינימום גלובלי (לפחות אחד) ומקסימום גלובלי (לפחות אחד).

המשך דוגמה 5.17 – במקרה שלנו ברור שאין מקסימום גלובלי כיוון שלא מצאנו מקסימום מקומי. ניתן לראות כי אם ניקח $y = x$ אזי $f(x,x) = x^3 - x^3 + 2x^2 = 2x^2$ וזוהי פונקציה שאינה חסומה מלמעלה.

עבור מינימום גלובלי הנקודה היחידה שיכולה להיות היא (0,0). אנחנו צריכים למצוא אם $f(0,0) = 0$ היא נקודת מינימום גלובלי לכל ערך של x, y (ודווקא כאן לא מסתכלים על הסביבה של (0,0)). למשל עבור:

$$f(x,2x) = x^3 - 2x^3 + 8x^2 = 8x^2 - 2x^3 \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$$

כלומר

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}_2^+} f(x,y) = -\infty$$

לכן אין מינימום גלובלי של הפונקציה.

6. מציאת נקודות קיצון תחת אילוצים

דוגמה 6.1 – את התרגיל שפתרנו ניתן להציג באופן הבא: נדרש למצוא ערכים $\min\limits_{x,y} x^3 - x^2y + 2y^2$ תחת האילוצים $x \geq 0, y \geq 0$.

הגדרה 6.2 – נקודות קיצון תחת אילוצים - עבור n משתנים $x_1, \dots, x_n$, פונקציית מטרה $f(x_1, \dots, x_n)$, וסדרה של k אילוצים מהצורה $\{g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, המטרה היא ללמוד שיטה למציאת נקודות קיצון מקומיות תחת אילוצים.

דוגמה 6.3 – נניח רוצים למצוא את המקסימום של מכפלה של קואורדינטות של נקודות ברדיוס 2, כלומר דרוש למצוא $\max\limits_{x_1,x_2,x_3} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ תחת האילוץ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$. כלומר פונקציית המטרה היא $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ והאילוץ הוא $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$.

דוגמה 6.4 – נניח שנרצה למצוא נקודות על כדור שמביאות למקסימום את $\max\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4$ תחת אילוצים $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 16 = 0$ ו-$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8 = 0$. כלומר גם כאן:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4$$
$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 16 = 0$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8 = 0$$

הגדרה 6.5 – נקודת מינימום מקומית תחת אילוצים - נגיד ש-$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת מינימום מקומית של $f(x_1, \dots, x_n)$ תחת סדרת האילוצים $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_k(\vec{x}) = 0$ אם קיימת סביבה של הנקודה $\bar{x}$ כך שלכל x בסביבה של $\bar{x}$ עבורה $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$ מתקיים $f(x) > f(\bar{x})$.

הגדרה 6.6 – נקודת מקסימום מקומית תחת אילוצים – בדומה, נגיד ש-$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת מקסימום מקומית של $f(x_1, \dots, x_n)$ תחת סדרת האילוצים $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_k(\vec{x}) = 0$ אם קיימת סביבה של הנקודה $\bar{x}$ כך שלכל x בסביבה של $\bar{x}$ עבורה $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$ מתקיים $f(x) < f(\bar{x})$.

דוגמה 6.7 – נניח פונקציית מטרה $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ תחת האילוץ $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ כלומר מה הסכום המקסימלי של שתי נקודות על מעגל היחידה? נראה כי במקרה זה מתקיים שהמקסימום המקומי היא הנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ והמינימום המקומי היא הנקודה $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

הגדרה 6.8 תנאי הכרחי לנקודת מינימום מקומי תחת אילוצים מסדר ראשון – נניח $\bar{x}$ מינימום מקומי, כלומר פונקציית המטרה $f(x)$ עולה במובן החלש (לא יורדת) בכל כיוון בר-ביצוע $\vec{d}$. כלומר $\nabla f_{\bar{x}} \cdot \vec{d} \geq 0$ לכל $\vec{d}$ בר-ביצוע.

הגדרה 6.9 כיוון בר-ביצוע תחת אילוצים - במקרה שלנו, כיוון בר-ביצוע הינו כיוון שאם הולכים בו "קצת" האילוצים נשמרים, כלומר:

$$0 = g_i\left(\bar{x} + t \cdot \vec{d}\right) \sim g_i(\bar{x}) + t \cdot \left(\tilde{\nabla g_i} \cdot d\right)$$

כלומר $\vec{d}$ הוא כיוון בר-ביצוע אם ורק אם $\vec{d} \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ לכל אילוץ $1 \leq i \leq k$.

הערה 6.10 - בדומה למקרה ללא אילוצים, $\vec{d}$ הוא כיוון בר-ביצוע אם ורק אם $\left(-\vec{d}\right)$ הוא כיוון בר-ביצוע (נכון רק כאשר האילוצים הם שוויון ולא אי-שוויון). אם מתקיים $\nabla f_{\bar{x}} \cdot \vec{d} \geq 0$ וגם $\nabla f_{\bar{x}} \cdot \left(-\vec{d}\right) \geq 0$ אזי מסיקים כי $\nabla f(\bar{x}) \cdot \vec{d} = 0$ לכל $\vec{d}$ בר-ביצוע.

מסקנה 6.11 – תנאי הכרחי מסדר ראשון – אם $\bar{x}$ נקודת קיצון מקומית אז בהכרח לכל $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים שאם $\vec{d} \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$ (כלומר בכל כיוון בר-ביצוע תחת האילוצים) אזי $\vec{d} \cdot \nabla f(\bar{x}) = 0$.

הערה 6.12 – הגדרה שקולה היא שהגרדיאנט של f בנקודה $\bar{x}$ הוא צירוף לינארי של הגרדיאנטים של $g_1, \dots, g_k$.

הגדרה 6.13 - $\bar{x}$ תיקרא נקודה רגולרית של האילוצים $g_1, \dots, g_k$ אם הגרדיאנטים $\nabla g_1(\bar{x}), \dots \nabla g_k(\bar{x})$ בלתי תלויים.

הגדרה 6.14 – כופלי לגראנז' אם $\bar{x}$ נקודה רגולרית וקיצון מקומי, אזי $\nabla f(\bar{x})$ הוא צירוף לינארי יחיד של הגרדיאנטים של האילוצים $\nabla g_1(\bar{x}),\dots,\nabla g_k(\bar{x})$ כלומר קיימים סקלרים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הנקבעים ביחידות ומכונים כופלי לגראנז' כך ש-

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{x})$$

דוגמה 6.15 – נסתכל על

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$
$$g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

לכל נקודה על מעגל היחידה, כיוון בר-ביצוע הוא כיוון המשיק (באופן כזה נשארים על השפה של מעגל היחידה). המשיק הוא בדיוק הווקטור שמאונך לגרדיאנט. אם נסתכל על נקודה כלשהי (x_1,x_2) אזי הגרדיאנט של האילוצים הוא:

$$\nabla g(x_1,x_2) = (2x_1, 2x_2)$$

הגרדיאנט של פונקציית המטרה הוא:

$$\nabla f(x_1,x_2) = (1,1)$$

הכיוון בר הביצוע הנדרש הוא כיוון $\vec{d} = (d_1,d_2)$ המקיים:

$$\vec{d} \cdot \nabla g(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (d_1,d_2)\cdot(2x_1,2x_2) = 0 \Rightarrow 2x_1d_1 + 2x_2d_2 = 0$$

תנאי הכרחי מסדר ראשון הינו:

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\bar{x}) \Rightarrow (1,1) = \lambda(2\bar{x}_1, 2\bar{x}_2) \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

קיבלנו ששתי הנקודות הן שוות עבור מינימום ומקסימום באילוצים כלומר:

$$x_1^2 + x_1^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

שתי הנקודות היחידות אם כן שחשודות כנקודות קיצון הן $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. נמצא כופלי לגראנז' בנקודה A.

$$(1,1) = \lambda\left(2\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נמצא כופלי לגראנז' בנקודה B.

$$(1,1) = \lambda\left(-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

הגדרה 6.16 תנאים הכרחיים \ מספיקים מסדר שני – נניח $\bar{x}$ נקודה רגולרית שמקיימת תנאי הכרחי מסדר ראשון. יש כופלי לגראנז' יחידים עבורם:

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{x})$$

מסתכלים על פונקציית הלגראנז'יאן המוגדרת על ידי:

$$L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \cdots - \lambda_k g_k(x)$$

נשים לב כי:

$\nabla L(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) - \cdots - \lambda_k \nabla g_k(\bar{x}) = 0$

בודקים את ההסיאן של הלגראנזי'אן בנקודה $\bar{x}$ כלומר את $H(L)_{(\bar{x})}$. תנאי מספיק למינימום מסדר שני הוא שלכל כיוון בר-ביצוע $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ מתקיים כי ההסיאן חיובית ממש כלומר אם מתקיים:

$$(d_1, \dots, d_n) H(L)_{(\bar{x})} \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} > 0$$

ובדומה תנאי למקסימום מסדר שני הוא אם ההסיאן שלילית ממש כלומר אם מתקיים:

$$(d_1, \dots, d_n) H(L)_{(\bar{x})} \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} < 0$$

הגדרה 6.17 – **תנאי מספיק*** -

- אם ההסיאן של הלגראנג'יאן ב-$\bar{x}$ מוגדר חיובית ממש אז $\bar{x}$ מינימום מקומי.
- אם ההסיאן של הלנגראנג'יאן ב-$\bar{x}$ מוגדר שלילית ממש אז $\bar{x}$ מקסימום מקומי.

הגדרה 6.18 תנאי הכרחי למינימום מקומי

$\bar{x}$ מינימום מקומי אם לכל כיוון בר-ביצוע $d = (d_1, \dots, d_n)$ מתקיים:

$$(d_1, \dots, d_n) H(L)_{(\bar{x})} \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \geq 0$$

וכן $\bar{x}$ מקסימום מקומי אם לכל כיוון בר-ביצוע $d = (d_1, \dots, d_n)$ מתקיים:

$$(d_1, \dots, d_n) H(L)_{(\bar{x})} \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \leq 0$$

המשך דוגמה 6.19 – נבדוק תנאים מסדר 2 בנקודות A, B. עבור הנקודה $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. הלגראנזי'אן מוגדרת:

$$L_A(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

ההסיאן מוגדר על ידי:

$$H(L_A) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

כלומר המטריצה מוגדרת שלילית ממש לכן A נקודת מקסימום.

עבור הנקודה $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ הלגראנזי'אן הינו:

$$L_B(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

במקרה זה ההסיאן מוגדר על ידי:

$$H(L_B) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה מוגדרת חיובית ממש לכן B נקודת מינימום.

נמצא מינימום ומקסימום גלובלי. נשים לב כי f פונקציה רציפה והאילוץ מגדיר תחום חסום. לכן יש מקסימום גלובלי שחייב להיות כמו במקסימום המקומי היחיד (אם יש כמה נקודות מקסימום מקומיות, המקסימום הגלובלי חייב להיות המקסימום הגדול מבין המקסימומים המקומיים). ובאופן דומה כך גם לגבי המינימום.

דוגמה 6.20 – נרצה למצוא מקסימום של פונקציית המטרה

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$$

תחת האילוץ:

$$g_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3-3$$

התנאי מסדר ראשון הוא

$$\begin{aligned}&\nabla f(x_1,x_2,x_3)=\lambda\cdot\nabla g_1(x_1,x_2,x_3)\Rightarrow\\&(x_2+x_3,x_1+x_3,x_1+x_2)=\lambda(1,1,1)\Rightarrow\\&x_2+x_3=x_1+x_3=x_1+x_2=\lambda\Rightarrow\\&x_1=x_2=x_3=\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

הנקודה היחידה שחשודה כקיצון, אשר מקיימת את התנאי מסדר ראשון, היא הנקודה $(1,1,1)$ והכופל לגראנז' הוא $\lambda=2$.

תנאי מסדר שני – נבנה פונקציית לנגראנז'יאן על ידי:

$$L(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)-\lambda\cdot g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3-2x_1-2x_2-2x_3+6$$

ההסיאן:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2+x_3-2$$

התבנית סימטרית $\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)$ לכן:

$$H(L)_{(1,1,1)}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

נשים לב ש-$v_1=(1,1,1)^T$ הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי $\lambda_1=2$. מצד שני $tr\big(H(L)\big)=0$ ומכיוון שסכום הערכים העצמיים שווה לעקבה אז בוודאות יהיה ערך עצמי אחד שלילי, לכן המטריצה לא מוגדרת חיובית ממש ולא מוגדרת שלילית ממש. נשים לב כי נדרש התנאי:

$$(d_1,d_2,d_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$

רק עבור כיוונים ברי-ביצוע. כלומר אנחנו צריכים למצוא את התנאי רק עבור וקטור $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)^T$ שמקיים:

$$\begin{aligned}&(1,1,1)^T+t\cdot(d_1,d_2,d_3)^T=3\Rightarrow\\&(1+t\cdot d_1+1+t\cdot d_2+1+t\cdot d_3)=3\Rightarrow\\&t\cdot(d_1+d_2+d_3)=0\Rightarrow\\&d_1+d_2+d_3=0\end{aligned}$$

נבדוק למה שווה התבנית הריבועית עבור וקטורים שסכום הרכיבים שלהם הוא 0.

$$(d_1,d_2,d_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=(d_1,d_2,d_3)\begin{pmatrix}d_2+d_3\\d_1+d_3\\d_1+d_2\end{pmatrix}=(d_1,d_2,d_3)\begin{pmatrix}-d_1\\-d_2\\-d_3\end{pmatrix}=$$
$$-(d_1,d_2,d_3)\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=-d_1^2-d_2^2-d_3^2\overset{\vec{d}\neq\vec{0}}{<}0$$

למסקנה, תחת האילוצים, לכל כיוון בר-ביצוע הקירוב מסדר שני הוא שלילי, כלומר תנאי מספיק מסדר שני מתקיים לכן מדובר בנקודת מקסימום.

שיעור מספר 5

הערה 6.21 – עבור אילוצים לינאריים ההסיאן של לגרנז'יאן ושל פונקציית המטרה שווים (כלומר $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}$ לכל $1\le i\le n$).

הערה 6.22 – "מן הקל אל הקשה" - באופן עקרוני ניתן היה להתחיל בבדיקה רק עבור כיוונים ברי-ביצוע, הענין הוא שכאשר יש מספר אילוצים הפתרון תחת אילוצים נעשה מסובך מאוד. לכן נעדיף להתחיל בבדיקה כללית של כל הווקטורים (גם בכיוונים שאינם ברי-ביצוע) ואם לא נגיע לתוצאות חד-משמעיות (כמו בדוגמה 6.20) ננסה לצמצם את השאלה לפתרון עם כיווני בר-ביצוע.

7. בעיות קיצון עם אילוצים שאינם בהכרח שוויון (אי-שוויונים חלשים)

הגדרה 7.1 – נרצה למצוא עבור פונקציית מטרה כלשהי $f(x_1,..,x_n)\to min$ עם אילוצים משני סוגים

1. איצולים מסוג שוויון:

$$g_1(x_1,\dots,x_n)=0$$
$$\dots$$
$$g_k(x_1,\dots,x_n)=0$$

2. אילוצים מסוג אי-שוויון:

$$h_1(x_1,\dots,x_n)\le 0$$
$$\dots$$
$$h_m(x_1,\dots,x_n)\le 0$$

דוגמה 7.2 – נרצה להעביר את הדוגמה הבאה לתבנית כללית המתוארת ב-7.1. נניח כי אנחנו נדרשים להביא למקסימום את את $\max\limits_{x_1,x_2,x_3} x_1^2+7x_2x_3+x_3^2$ תחת האילוצים

$$4\le x_1<9$$
$$x_2-x_3\ge 8$$
$$x_1^2+x_2^2\le 100+x_3^2$$

אזי התבנית הכללית היא:

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-7x_2x_3-x_3^2$$

תחת האילוצים

$$x_1-9\le 0$$
$$4-x_1\le 0$$
$$8+x_3-x_2\le 0$$
$$x_1^2+x_2^2-100-x_3^2\le 0$$

הגדרה 7.3 – נקודת מינימום מקומית - $\bar{x}$ תיקרא מינימום מקומי אם קיימת סביבה כלשהי של $\bar{x}$ כך שלכל נקודה x בסביבה שמקיימת את התנאים מתקיים $f(\bar{x})\le f(x)$.

הגדרה 7.4 – נקודת מקסימום מקומית - $\bar{x}$ תיקרא מקסימום מקומי אם קיימת סביבה כלשהי של $\bar{x}$ כך שלכל נקודה x בסביבה שמקיימת את התנאים מתקיים $f(\bar{x}) \geq f(x)$.

דוגמה 7.5 – נסתכל על

$$\min_{x_1,x_2} 4x_1 + 5x_2$$

תחת האילוץ

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$$

כלומר אנחנו נדרשים למצוא את הערכים המינימליים של הפונקציה $f(x_1,x_2) = 4x_1 + 5x_2$ תחת האילוץ שהערכים חסומים בכדור ברדיוס 3 (כולל השפה).

הגדרה 7.6 – **אילוץ פעיל** - תהי $\bar{x}$ נקודה שמקיימת את כל האילוצים. נגיד ש-h_i הוא אילוץ פעיל ב-$\bar{x}$ אם $h_i(\bar{x}) = 0$. כלומר בעוד שהאילוצים עם שוויונות $g_1,..,g_k$ חייבים להתקיים בכל נקודה, הרי שהאילוצים עם אי-שוויונות יכולים להתקיים בכל הסביבה של $\bar{x}$ ואז יהיו אילוצים לא-פעילים.

הערה 7.7 – המסקנה מכאן היא שמה שמשפיע על משפחת הכיוונים ברי-הביצוע הם:

1. אילוצי השוויון
2. אילוצי אי-השוויון הפעילים

הגדרה 7.8 תנאי הכרחי מסדר ראשון לאילוצים עם אי-שוויון – נניח כי אנחנו מחפשים תנאי מסדר ראשון למינימום מקומי, כלומר ערך $\bar{x}$ עבורו אם הולכים בכל כיוון בר-ביצוע בסביבת $\bar{x}$ הפונקציה f לא יורדת.

אנחנו יודעים כי לכל כיוון בר-ביצוע $\vec{d}$ מתקיים: $\nabla f_{\bar{x}} \cdot \vec{d} \geq 0$.

נרצה להבין מהו אוסף הכיוונים ברי-הביצוע:

<u>אילוצי השוויון</u> – כמו קודם – צריך להתקיים $g(\bar{x}) = 0$ וגם לכל $\vec{d}$ צריך להתקיים:

$$g\left(\bar{x} + t \cdot \vec{d}\right) = 0 \Rightarrow g(x) + \nabla g \cdot \vec{d} = 0$$

כלומר צריך שיתקיים לכל $1 \leq i \leq k$ כי:

$$\vec{d} \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

<u>אילוצי האי-שוויון:</u> נסתכל על h_i ספציפי. יש שתי אפשרויות:

אפשרות א' - $h_i(\bar{x}) < 0$ (יש 'עודף') כלומר אפשר ללכת 'קצת' בכל כיוון ועדיין האילוץ יישמר. במצב זה האילוץ הוא אילוץ לא-פעיל.

אפשרות ב' - $h_i(\bar{x}) = 0$ (אין 'עודף') – אילוץ פעיל. מכאן מתקבל כי בכיוון בר-ביצוע אסור ל-h_i לעלות כלומר הנגזרת הכיוונית חייבת להיות אי-שלילית כלומר נדרש $\vec{d} \cdot \nabla h_i(\bar{x}) \leq 0$.

מסקנה 7.9 – בנקודה $\bar{x}$ משפחת הכיוונים ברי-הביצוע הם כל הווקטורים $\vec{d}$ שעבורם מתקיימים התנאים הבאים:

$$\forall 1 \leq i \leq k: d \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$
$$\forall 1 \leq i \leq m, h_i(\bar{x}) = 0: \;\; d \cdot \nabla h_i(\bar{x}) \leq 0$$

דוגמה 7.10 – נסתכל על האילוץ $h_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9$ (כלומר כל הערכים שנמצאים בתוך רדיוס כדור בגודל 3). עבור נקודה שאינה על השפה כל כיוון הוא בר-ביצוע. לעומת זאת עבור נקודה בשפה, למשל ברביע הראשון, מתקיים:

$\nabla h_1(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$
$(d_1, d_2) \cdot (2x_1, 2x_2) \le 0$

כלומר הווקטורים ברי-הביצוע מקיימים את אי-השוויון הנ"ל (חוזרים חזרה 'לתוך' הכדור ולא יוצאים ממנו).

לאחר הבנת האינטואיציה נוכל לנסח תנאי דומה לכופלי לגראנז' במקרה של שוויונות.

הגדרה 7.11 – תנאי מסדר ראשון לנקודת קיצון עם אילוצים שבהם שוויונות ואי-שוויונות תנאי הכרחי ש-$\bar{x}$ היא מינימום מקומי זה $\nabla f_{\bar{x}} \cdot \vec{d} \ge 0$ לכל וקטור $\vec{d}$ שמקיים:

$\vec{d} \cdot \nabla g_i(\bar{x}) = 0$
$\vec{d} \cdot \nabla h_i(\bar{x}) \le 0$

כאשר התנאי השני מתקיים רק עבור האילוצים הפעילים. נקרא לאילוצים הפעילים $h_1, \dots, h_p$ ($p \le m$).

תנאי שקול 7.12 - אפשר להראות שהתנאי שניסחנו שקול לכך שקיימים סקלארים $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_p$ ($\mu_1, \dots, \mu_p > 0$) עבורם מתקיים:

$$\nabla f(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{x}) + \mu_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \dots + \mu_p \nabla h_p(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$$
$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

הערה 7.13 – אם $\bar{x}$ נקודה רגולרית כלומר נקודה שבה עבור אילוצים פעילים הווקטורים $\nabla g_i, \nabla h_j$ בלתי-תלויים אז הסקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_j$ נקבעים ביחידות.

עתה משהראינו תנאי מסדר ראשון נראה איך נראה התנאי מסדר שני. גם כאן הוא יהיה דומה לתנאי מסדר ראשון במקרה של שוויונות בלבד.

הגדרה 7.14 תנאי מסדר שני לנקודת קיצון עם אילוצים מסוג אי-שוויונות – מסתכלים על לגרנז'יאן שנקבע לפי הפונקציה:

$$L(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x) - \mu_1 h_1(x) - \dots - \mu_p h_p(x)$$

מסתכלים על ההסיאן $H(L)_{(\bar{x})}$ ועל התבנית הריבועית:

$$(d_1, \dots, d_n) \cdot H(L)_{(\bar{x})} \cdot (d_1, \dots, d_n)^T$$

התנאי המספיק למינימום הוא שהתבנית גדולה מ-0 לכל כיוון בר ביצוע:

$$(d_1, \dots, d_n) \cdot H(L)_{(\bar{x})} \cdot (d_1, \dots, d_n)^T > 0$$

התנאי ההכרחי הוא

$$(d_1, \dots, d_n) \cdot H(L)_{(\bar{x})} \cdot (d_1, \dots, d_n)^T \ge 0$$

דוגמה 7.15 – נרצה למצוא את המקסימום המקומי של:

$$f(x, y) = 6y + 14x - x^2 - y^2$$

תחת האילוצים:

$x + y \le 2$
$x + 2y \le 3$

פתרון – נתחיל ממקסימום מקומי (לאחר מכן נראה מה לגבי מקסימום גלובלי). נתחיל בלהעביר את הבעיה לבעיית מינימום, כלומר נדרש:

$$\min_{x_1,x_2} x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 - 14x_1 \Rightarrow \min_{x_1,x_2}(x_1-7)^2 - 49 + (y_2-3)^2 - 9$$

תחת האילוצים:

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

כלומר:

$$h_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 2$$
$$h_2(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 - 3$$

נסתכל על נקודה כלשהי $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ יש 4 אפשרויות בסך הכל:

1. 2 האילוצים פעילים (אנחנו בנקודת החיתוך)
2. אילוץ ראשון פעיל (אנחנו על הישר הראשון)
3. אילוץ שני פעיל (אנחנו על הישר השני)
4. אף אילוץ אינו פעיל

<u>אפשרות א'</u> – כאשר שני האילוצים פעילים נקודת החיתוך היא של האילוצים היא:

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

כלומר הנקודה היחידה היא $\bar{x} = (1,1)$. הגרדיאנטים של האילוצים הם:

$$\nabla h_1 = (1,1)$$
$$\nabla h_2 = (1,2)$$

הגרדיאנט של פונקציית המטרה:

$$\nabla f_{(1,1)} = (2x_1 - 14, 2x_2 - 6) \overset{for\ point\ (1,1)}{=} (-12,-4)$$

נדרש אם כן סקלרים $\mu_1, \mu_2 > 0$ כך שיתקיים:

$$(-12,4) + \mu_1(1,1) + \mu_2(1,2) \Rightarrow \mu_1 + 2\mu_2 = 4 \Rightarrow \mu_2 = -8$$

כלומר תנאי הכרחי מסדר ראשון לא מתקיים.

<u>אפשרות ב'</u> – כאשר $h_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = 0$ אבל $h_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) < 0$ דרוש:

$$\nabla f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \mu \cdot \nabla h_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = 0$$

כלומר דרוש בשל האילוץ:

$$I. \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 2$$

ובשל פונקציית המטרה:

$$(2\bar{x}_1 - 14, 2\bar{x}_2 - 6) + \mu(1,1) = 0 \Rightarrow$$
$$II. 2\bar{x}_1 - 14 + \mu = 0$$
$$III. 2\bar{x}_2 - 6 + \mu = 0$$

כלומר דרוש (מתוך חיסור 2 ו-3):

$$2\bar{x}_1 = 14 = 2\bar{x}_2 - 6 \Rightarrow 2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = 8 \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 8 \Rightarrow \bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = -1 \Rightarrow \mu = 8 > 0$$

כלומר קיבלנו סקלר $\mu > 0$ כמו שצריך, לבסוף אכן מתקיים כי האילוץ השני (הלא-פעיל) איננו משפיע:

$3+2(-1)<3$

כנדרש.

לכן הנקודה $\bar{x}=(3,-1)$ היא נקודת קיצון תחת אילוץ ראשון.

נבדוק מה קורה בסדר שני, לשם כך נחשב את ההסיאן. נשים לב כי ההסיאן יהיה קבוע בכל נקודה כיוון שפונקציית המטרה היא ריבועית והאילוצים הם לינאריים.

$$H(f)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

כלומר ההסיאן מוגדר חיובית ולכן לכל כיוון יתקיים:

$$(d_1,d_2)\cdot H(f)\cdot(d_1,d_2)^T>0$$

לכל וקטור $\vec{d}=(d_1,d_2)\neq 0$ כלומר הנקודה $\bar{x}=(3,-1)$ היא מינימום מקומי.

<u>אפשרות ג'</u> – כאשר $h_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0$ ואילו $h_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)<0$ כאשר $h_2(x_1,x_2)=x_1+2x_2-3$. בדומה לאפשרות ב', אילוץ אחד הוא האילוץ עצמו:

$$\bar{x}_1+2\bar{x}_2-3=0$$

ומתוך פונקציית המטרה נקבל:

$$\nabla f(x_1,x_2)+\mu\nabla h_2(x_1,x_2)=0\Rightarrow$$
$$(2\bar{x}_1-14,2\bar{x}_2-6)+\mu(1,2)=0\Rightarrow$$

כלומר מערכת המשוואות היא:

$$I.\ \ \bar{x}_1+2\bar{x}_2-3=0$$
$$II.\ \ 2\bar{x}_1-14+\mu=0$$
$$III.\ 2\bar{x}_2-6+2\mu=0$$

נקבל:

$$\bar{x}_2=-1$$
$$\bar{x}_1=5$$
$$\mu=4$$

אכן מתקיים $\mu=4>0$ אבל האילוץ הראשון לא מתקיים שכן:

$$5+(-1)-2>0$$

כלומר הנקודה שמצאנו לא בתחום.

<u>אפשרות ד'</u> – כאשר אף אילוץ לא פעיל כלומר $h_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)<0,h_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)<0$ אז האילוץ היחיד הוא הגרדיאנט של פונקציית המטרה כלומר:

$$\nabla f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0\Rightarrow$$
$$(2\bar{x}_1-14,2\bar{x}_2-6)=0\Rightarrow$$
$$\bar{x}=(7,3)$$

אבל נקודה זו איננה מקיימת את האילוצים כלומר מחוץ לתחום.

בסך הכל קיבלנו כי $\bar{x}=(3,-1)$ היא מינימום מקומי יחיד ולכן היא גם המינימום הגלובלי בתחום.

שיעור מספר 6

8. יישומים שונים לנלמד עד כה

דוגמה 8.1 אי-שוויון הממוצעים – (תודה לישי שור) – עבור $X_1, \dots, X_n > 0$ הוכח כי מתקיים

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} \le \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

הוכחה: אם אחד מבין $X_1, \dots, X_n$ מקיים $X_i = 0$ אזי הטענה ברורה כי:

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} = 0 \le \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

אחרת נניח $X_1, \dots, X_n > 0$. נסמן $A = X_1 + \cdots + X_n$

נסמן $\lambda_i = \frac{X_i}{A}$ לכל $1 \le i \le n$. כאשר $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \frac{X_1}{A} + \cdots + \frac{X_n}{A} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{A} = \frac{A}{A} = 1$. אזי:

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} = \sqrt[n]{\lambda_1 A \cdot \ldots \cdot \lambda_n A} = \sqrt[n]{A^n \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} = A\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}$$

ובמקביל:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{A}{n}$$

ולכן באופן שקול

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} \le \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \Leftrightarrow$$
$$A\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} \le \frac{A}{n} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} \le \frac{1}{n}$$

כאשר מן הסתם כיוון ש-$X_i > 0$ לכל i אז גם $A > 0$ ולכן גם $\lambda_i = \frac{X_i}{A} > 0$.

טענה – נגדיר את הפונקציה:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

ואת האילוץ:

$$g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1$$
$$h_i(\lambda_i) = -\lambda_i$$

נרצה למצוא מינימום ומקסימום גלובליים

$$\nabla f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} \lambda_i, \dots, \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n} \lambda_i \right)$$
$$\nabla g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (1, \dots, 1)$$
$$\nabla f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \theta \nabla g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} \lambda_i + \theta, \dots, \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n} \lambda_i + \theta \right) = (0, \dots, 0)^T \Rightarrow \left(-\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} \lambda_i, \dots, -\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n} \lambda_i \right) = (\theta, \dots, \theta) \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$$

ומתוך אילוץ השוויון מתקיים בהכרח:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

תוצאה זו מקיימת גם את אי-השוויונות כולם $h_1, \dots, h_n$. כדי לוודא שמדובר בנקודת מקסימום נחשב את ההסיאן. אילוצי השוויון הם לינאריים לכן ההסיאן של הפונקציה יהיה שווה להסיאן של הלגרנז'יאן.
ההסיאן על הפונקציה הינו:

$$H(L)_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 1,n}}^{n} \lambda_i \\ \dots & \dots & \dots \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 1,n}}^{n} \lambda_i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(L)_{\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \frac{1}{n^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n^{n-2}} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^{n-2}} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה לא מוגדרת חיובית ממש ולא מוגדרת שלילית ממש (סכום הערכים העצמיים הוא 0 כיוון שהעקבה של המטריצה היא 0).

עדין, נומרית ניתן לראות שזו נקודת מקסימום ובה אנחנו רואים שמתקיים:

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

כנדרש. כיוון שהפונקציה רציפה וחסומה אזי מקסימום מקומי הוא גם מקסימום גלובלי. כיוון שזו נקודת מקסימום לכל ערכים אחרים של $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ יתקיים אי-השוויון.

שוויון יתקיים רק כאשר $X_1 = \dots = X_n \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

דוגמה 8.2 בעיית מרקוביץ' (1952) – "בעיה של השקעה אופטימלית" – עבור סכום כסף כלשהו (שאותו נרמל ל-1) ואוסף נכסים $S_1, \dots, S_n$ ואנחנו יודעים שבעוד שנה הם ייתנו תשואה ממוצעת של E_i עם שונות V_i לכל נכס S_i. נניח שהקשענו סכום X אז כעבור שנה בממוצע הרווח יהיה $X \cdot E_i$ עם שונות V_i.

לדוגמה – נניח שנכס כלשהו S_i עולה עכשיו מיליון 10^6 וכעבור שנה יש שלושה תרחישים:

א. בהסתברות $\frac{1}{2}$ הנכס יעלה 1,200,000.
ב. בהסתברות $\frac{1}{4}$ הנכס יעלה 900,000.
ג. בהסתברות $\frac{1}{4}$ הנכס יעלה 1,000,000.

במקרה זה התשואה הממוצעת היא:

$$\mathbb{E}_i = \frac{1}{2} \cdot 0.2 + \frac{1}{4}(-0.1) + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.075$$

והשונות היא:

$$\mathbb{V}_i = 0.5 \cdot (0.2 - 0.075)^2 + 0.25 \cdot (-0.1 - 0.075)^2 + 0.25 \cdot (0 - 0.075)^2$$

נכס ודאי הוא נכס שבהסתברות 1 יהיה בעל תשואה ממוצעת חיובית (אם ההסתברות לערך כלשהו היא 1 אז כמובן השונות היא 0).

באופן כללי עבור $S_1, \dots, S_n$ עם תשואה ממוצעת E_i, שונות V_i ומקדם מתאם ρ_{ij} בין כל שני נכסים, נרצה למצוא דרך להשקעה אופטימלית.

לדוגמה, נגיד שיש שני בתים (X_1, X_2) שכיום מכיר שניהם הוא 1,000,000 וכעבור שנה יש 2 תרחישים:

א. בהסתברות $\frac{2}{3}$ הבית הראשון יהיה שווה 1.2 מיליון והבית השני יהיה שווה 1.1 מיליון.
ב. בהסבתרות $\frac{1}{3}$ המחיר של הבית הראשון לא ישתנה (יישאר 1 מיליון) והבית השני יהיה שווה 0.9 מיליון.

ניתן לראות כי:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_1) = 0.2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\
&\mathbb{E}(X_2) = 0.1 \cdot \frac{2}{3} + (-0.1) \cdot \frac{1}{3} \\
&\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}(X_1) = \frac{2}{3}\left(0.2 - \mathbb{E}(X_1)\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(0 - \mathbb{E}(X_1)\right)^2 \\
&\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}(X_2) = \frac{2}{3}\left(0.1 - \mathbb{E}(X_2)\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(-0.1 - \mathbb{E}(X_2)\right)^2
\end{aligned}$$

לכן מקדם המתאם הוא:

$$\begin{aligned}
\rho_{ij} &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1)(X_2 - \mathbb{E}(X_2)]}{\sqrt{V_1 V_2}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}[(0.2 - \mathbb{E}(X_1)(0.1 - \mathbb{E}(X_2)]}{\sqrt{V_1 V_2}} + \frac{\frac{1}{3}[(0.2 - \mathbb{E}(X_1)(0.1 - \mathbb{E}(X_2)]}{\sqrt{V_1 V_2}}
\end{aligned}$$

השאלה היא – מצא תשואה אופטימלית ב-3 הנכסים הבאים:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_1 = 2\%, \qquad \sigma_1 = \sqrt{\mathbb{V}_1} = 4\% \\
&\mathbb{E}_2 = 4\%, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\mathbb{V}_2} = 4\% \\
&\mathbb{E}_3 = 3\%, \qquad \sigma_3 = \sqrt{\mathbb{V}_3} = 4\%
\end{aligned}$$

נתון כי נכס ב' ב"ת בנכס א' ו-ג'.

ל-א' ו-ג' יש מקדם מתאם $\rho_{13} = 0.75$.

השאלה היא מה הפיזור הנכון של ההשקעות בנכסים. ההנחה היא שמותר לשים השקעה שלילית בנכס. נרצה למצוא השקעה שנותנת תשואה של 4% עם סיכון (שונות) מינימלי.

ראשית נתרגם את הבעייה לניסוח כבעיית אופטימיזציה. סכום ההשקעה הוא

$$1 = X_1 + X_2 + X_3$$

כלומר X_i הוא הפרופורציה המושקעת בנכס i מתוך כל סכום ההשקעות, כאשר נרשה ל-X_i להיות שלילי (זאת אומרת אפשר להלוות את הכסף, מכונה $short\ selling$).

אילוץ נוסף הוא:

$$\begin{aligned}
&X_1 \cdot \mathbb{E}_1 + X_2 \cdot \mathbb{E}_2 + X_3 \cdot \mathbb{E}_3 = 4\% \Rightarrow \\
&2X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 4
\end{aligned}$$

כאשר את הערכים אנחנו מקבלים מהנתון.

פונקציית המטרה היא להביא למינימום את:

$$\mathbb{V}(X_1S_1 + X_2S_2 + X_3S_3) \to min \Rightarrow$$
$$X_1^2 \cdot \mathbb{V}(S_1) + X_2^2 \cdot \mathbb{V}(S_2) + X_3^2 \cdot \mathbb{V}(S_3) + 2X_1X_3\sqrt{\mathbb{V}(S_1)\mathbb{V}(S_3)} \cdot \rho_{13} \to min \Rightarrow$$
$$16X_1^2 + 100X_2^2 + 64X_3^2 + 2X_1X_3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 32 \to min \Rightarrow$$
$$f: 16X_1^2 + 100X_2^2 + 64X_3^2 + 48X_1X_3 \to min$$

כלומר דרוש להביא את התבנית הריבועית הנ"ל למינימום תחת אילוצי השוויון:

$$g_1: 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 4$$
$$g_2: X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

ננסה למצוא מינימום מקומי כאשר ידוע :

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \Rightarrow$$
$$(32X_1 + 48X_3, 200X_2, 128X_3 + 48X_1) = \lambda_1(2,4,3) + \lambda_2(1,1,1)$$

מכאן יש לנו שלוש משוואות, שתי המשוואות האחרות הן האילוצים g_1, g_2 ובסך הכל 5 משוואות ב-5 נעלמים.

$$32X_1 + 48X_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2$$
$$200X_2 = 4\lambda_1 + \lambda_2$$
$$128X_3 + 48X_1 = 3\lambda_1 + \lambda_2$$
$$2X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 4$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

ניתן להגיע לתוצאות (יש לוודא את התוצאות מבחינת פתרון המשוואות):

$$X_1 = -\frac{25}{69}$$
$$X_2 = \frac{44}{69}$$
$$X_3 = \frac{50}{69}$$

שיעור מספר 7

9. שיטת הגרדיאנט - שיטה נומרית למציאת מינימום של פונקציה של כמה משתנים

הגדרה 9.1 – עבור פונקציה $f(x_1, \dots, x_n)$, שיטת הגרדיאנט היא שיטה איטרטיבית שבה מתחילים בנקודת התחלה כלשהי Z^0 ובכל צעד מ-Z^n מתקדמים ל-Z^{n+1}. נרצה ללכת בכיוון שבה הפונקציה 'יורדת' הכי הרבה.

נזכיר כי נגזרת כיוונית מוגדרת על ידי:

$$\nabla f(z) \cdot \vec{d} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(z + t \cdot \vec{d}\right) - f(z)}{t}$$

הכיוון שבו הנגזרת הכיוונית היא הכי קטנה הוא הכיוון $\vec{d} = -\nabla f$.

כלומר בכל נקודה נרצה ללכת בכיוון המנוגד לגרדיאנט בנקודה. לכן נגדיר את ההליכה בכיוון:

$$Z^{n+1} = Z^n - \alpha \cdot \nabla f(Z^n)$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר.

הערה 9.2 – כיצד להגדיר מהו הערך של α? מסתכלים על פונקציה חדשה:

$$g(\alpha) = f(Z^{n+1}) = f\left(Z^n - \alpha \cdot \nabla f(Z^n)\right)$$

מחפשים (בשיטות שלמדנו) איזשהו $\hat{\alpha}$ שמביא את הפונקציה למינימום כלומר $\hat{\alpha} = \min_{\substack{\alpha\in\mathbb{R} \\ \alpha\geq 0}} g(\alpha)$. בכל צעד נתקדם בכיוון המנוגד לגרדיאנט באותה נקודה כאשר נכפיל את הכיוון ב-$\hat{\alpha}$.

דוגמה 9.3 – ניקח f להיות תבנית ריבועית ב-$x_1, \dots, x_n$. כלומר:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1, \dots, x_n) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כאשר Q מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית.

נתחיל בנקודה כלשהי Z^n.

אזי:

$$Z^{n+1} = Z^n - \alpha \cdot \nabla f(Z^n)$$

נחשוב על כל הווקטורים כווקטורי עמודות.

טענה 9.3.1 - נשים לב כי:

$$\nabla f = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

חישוב:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

לכן הנגזרת החלקית לפי הרכיב ה-i היא:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(Q_{ii}x_i^2 + \sum_{j=2}^{n} Q_{ij}x_ix_j + \sum_{i=2}^{n} Q_{ij}x_ix_j\right)$$
$$= Q_{ii}x_i + \sum_{j=2}^{n} Q_{ij}x_j = \left(Q_{j1}, \dots, Q_{jn}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

באופן כללי:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

אם נחזור לתהליך האיטרטיבי נקבל:

$$Z^{n+1} = Z^n - \alpha \cdot \nabla f(Z^n) = Z^n - \alpha \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = Z^n - \alpha \cdot Q \cdot Z^n$$

לכן α יהיה המינימום של:

$$f(Z^{n+1})=\frac{1}{2}(Z^{n+1})^T\cdot Q\cdot Z^{n+1}=\frac{1}{2}(Z^n-\alpha\cdot Q\cdot Z^n)^T\cdot Q\cdot(Z^n-\alpha\cdot Q\cdot Z^n)$$

נשים לב כי $f(Z^{n+1})$ היא תבנית ריבועית ב-α (כלומר בגלל ש-Z^n ו-Q ידועות הרי שכל רכיב הוא תבנית לינארית של α ומכאן שמכפלה של שתי תבניות לינאריות ב-α היא תבנית ריבועית ב-α). לכן:

$$f(Z^{n+1})=\frac{1}{2}(\alpha^2(Q\cdot Z^n)^TQ(Q\cdot Z^n)-\alpha(Q\cdot Z^n)^TQZ^n-\alpha(Z^n)^TQQZ^n+(Z^n)^TQZ^n)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha^2(Z^n)^TQ^3Z^n-2\alpha(Z^n)^TQ^2Z^n+(Z^n)^TQZ)$$

נזכור כי Q מוגדרת חיובית לכן המקדם $(Z^n)^TQ^3Z^n$ של α^2 הוא חיובי, לכן זו נקודת מינימום של פרבולה. לכן:

$$\hat{\alpha}=\frac{(Z^n)^TQ^2Z^n}{(Z^n)^TQ^3Z^n}$$

לכן בסך הכל נקבל:

$$Z^{n+1}=Z^n-\frac{(Z^n)^TQ^2Z^n}{(Z^n)^TQ^3Z^n}\nabla f=\frac{(Z^n)^TQ^2Z^n}{(Z^n)^TQ^3Z^n}Q\cdot Z^n$$

טענה 9.3.2 - ננתח את קצב ההתכנסות של הערכים:

$$f(Z^{n+1})\xrightarrow{n\to\infty}\min f=0$$

נשים לב כי אם נסתכל על התבנית שהתקבלה בתור:

$$\frac{1}{2}(a\cdot\alpha^2-2b\cdot\alpha+c)\overset{\hat{\alpha}=\frac{b}{a}}{\Longrightarrow}\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a}-\frac{2b^2}{a}+c\right)=\frac{1}{2}\left(c-\frac{b^2}{a}\right)$$

לכן:

$$f(Z^{n+1})=\frac{1}{2}\left(c-\frac{b^2}{a}\right)=f(Z^n)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{((Z^n)^T\cdot Q^2\cdot Z^n)^2}{(Z^n)^T\cdot Q^3\cdot Z^n}\right)$$

ניתן לראות כי הערכים של הסדרה $f(Z^n)$ יורדים כי תמיד אנחנו לוקחים את הערך הקודם ומורידים ממנו ערך חיובי כלשהו. נרצה להביא את $f(Z^{n+1})$ כביטוי כלשהו של מכפלה של $f(Z^n)$ ושל גורם כיווץ כלשהו, ולהראות כי קצב ההתכנסות בסופו של דבר מביא את הפונקציה לאפס. לכן:

$$f(Z^{n+1})=f(Z^n)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{((Z^n)^T\cdot Q^2\cdot Z^n)^2}{(Z^n)^T\cdot Q^3\cdot Z^n}\right)=f(Z^n)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{((Z^n)^TQ^2Z^n)^2}{f(Z^n)(Z^n)^TQ^3Z^n}\right)$$
$$=f(Z^n)\cdot\left(1-\frac{((Z^n)^TQ^2Z^n)^2}{(Z^n)^TQZ^n(Z^n)^TQ^3Z^n}\right)$$

טענה 9.3.4 (הלמה של קנטרוביץ') – תהי Q מוגדרת חיובית ונניח כי הערך העצמי הקטן ביותר של Q הוא λ, והערך העצמי הגדול ביותר של Q הוא A. אזי לכל Z מתקיים:

$$\frac{((Z^n)^TQ^2Z^n)^2}{(Z^n)^TQZ^n(Z^n)^TQ^3Z^n}\geq\frac{4\lambda A}{(A+\lambda)^2}$$

הוכחה – נרצה לחסום מלמטה את הביטוי $\frac{((Z^n)^TQ^2Z^n)^2}{(Z^n)^TQZ^n(Z^n)^TQ^3Z^n}$ על ידי ערך חיובי ממש.

טענת עזר 9.3.5 – יהי X משתנה מקרי בין 0 ל-1. אזי $Var(X) \le \frac{1}{4}$. השונות הגדולה ביותר היא 0 בהסתברות $\frac{1}{2}$ ו-1 בהסתברות $\frac{1}{2}$ ושם אכן $Var(X) = \frac{1}{4}$.

נניח בשלילה שהטענה לא נכונה, זאת אומרת שקיים מ"מ $0 \le X \le 1$ כך ש-$Var(X) > \frac{1}{4}$. נסתכל על המ"מ $1 - X$ שהוא גם בין 0 ל-1 ואז גם $Var(X) = Var(1 - X) > \frac{1}{4}$. נסתכל על המשתנה המקרי הנוצר מהרנדומיזציה:

$$Y = \begin{cases} X, & \frac{1}{2} \\ 1 - X, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X) + \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(1 - X)\right) = \frac{1}{2}$$

ומצד שני:

$$\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2}\mathbb{V}(X) + \frac{1}{2}\mathbb{V}(1 - X) = \mathbb{V}(X) > \frac{1}{4}$$

נשים לב גם כי מתקיים:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \le Y - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \\
&\mathbb{E}\left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow \\
&\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \\
&\mathbb{E}(Y^2) \le \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

אך מצד שני:

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + \left(\mathbb{E}(Y)\right)^2 > \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

בסתירה. ולמסקנה השונות של X היא לכל היותר $\frac{1}{4}$.

טענת עזר 9.3.6 (הכללה) – אם $\lambda \le X \le A$ מ"מ ($A, \lambda > 0$) אזי:

$$\mathbb{V}(X) \le \frac{(A - \lambda)^2}{4}$$

הוכחה – נגדיר

$$0 \le Z = \frac{X - \lambda}{A - \lambda} \le 1 \Rightarrow \mathbb{V}(Z) \le \frac{1}{4}$$

ולכן בגלל ש-$X = \lambda + Z(A - \lambda)$ אזי

$$\mathbb{V}(X) = (A - \lambda)^2\mathbb{V}(Z) \le \frac{(A - \lambda)^2}{4}$$

הוכחת הלמה של קנטרוביץ' (הוכחת 9.3.4)

$$f(Z^{n+1}) = f(Z^n) \cdot \left(1 - \frac{((Z^n)^T Q^2 Z^n)^2}{(Z^n)^T Q Z^n (Z^n)^T Q^3 Z^n}\right)$$

לפי הלמה של קנטרוביץ', לכל $Z^n \neq 0$ מתקיים כי:

$$\frac{((Z^n)^T Q^2 Z^n)^2}{(Z^n)^T Q Z^n (Z^n)^T Q^3 Z^n} \geq \frac{4\lambda A}{(A+\lambda)^2}$$

מסתכלים על משתנה חדש

$$Y = Q \cdot Z^n$$

והביטוי במונחים של Y הוא:

$$\frac{((Z^n)^T Q^2 Z^n)^2}{(Z^n)^T Q Z^n (Z^n)^T Q^3 Z^n} = \frac{(Y^T \cdot Y)^2}{(Z^n)^T Q Q^{-1} Q Z^n (Z^n)^T Q Q Q Z^n} = \frac{(\|Y\|^2)^2}{Y^T Q^{-1} Y Y^T Q Y} = \frac{\|Y\|^4}{(Y^T Q Y)(Y^T Q^{-1} Y)}$$

הערכים העצמיים של Q הם $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = A$. כיוון ש-$Q$ מטריצה סימטרית היא ניתנת ללכסון על ידי מטריצה אורתוגונלית P ($P^T = P^{-1}$) כך ש-$Q = P \cdot diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cdot P^{-1} = PDP^{-1}$. נסמן $U = P^{-1}Y$ ולכן (בגלל שהנורמה של U שווה לנורמה של Y):

$$\frac{\|U\|^4}{(U^T D U) U^T D^{-1} U}$$

נרצה לכן להוכיח כי:

$$\frac{\|U\|^4}{(U^T D U) U^T D^{-1} U} \geq \frac{4\lambda A}{(A+\lambda)^2}$$

נשים לב כי אם עמודות U הן $U = (U_1, \dots, U_n)$ אזי:

$$U^T D U = \lambda_1 U_1^2 + \cdots + \lambda_n U_n^2$$
$$U^T D^{-1} U = \frac{1}{\lambda_1} U_1^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} U_n^2$$

נגדיר את הערכים המנורמלים:

$$P_1 = \frac{U_1^2}{\|U\|^2}, \dots, P_n = \frac{U_n^2}{\|U\|^2}$$

ברור כי $P_i \geq 0$ וכי $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. לכן:

$$\frac{\|U\|^4}{(U^T D U) U^T D^{-1} U} = \frac{\|U\|^4}{(\lambda_1 U_1^2 + \cdots + \lambda_n U_n^2)\left(\frac{1}{\lambda_1} U_1^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} U_n^2\right)} \overset{divide\ by\ \|U\|^4}{=}$$

$$= \frac{1}{\frac{(\lambda_1 U_1^2 + \cdots + \lambda_n U_n^2)}{\|U\|^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\lambda_1} U_1^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} U_n^2\right)}{\|U\|^2}}$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)\left(\frac{1}{\lambda_1} P_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} P_n\right)}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{E}(\Gamma)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)}$$

כאשר Γ משתנה מקרי אשר מקבל ערך עצמי λ_i בהסתברות P_i ($\lambda < \Gamma < A$). לכן נותר להראות כי:

$$\mathbb{E}(\Gamma)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \leq \frac{(A+\lambda)^2}{4\lambda A}$$

באופן כללי

$$|\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\cdot\mathbb{V}(Y)}$$

אם ניקח $X = \Gamma, Y = \frac{1}{\Gamma}$ נקבל כי:

$$\left|\mathbb{E}(\Gamma)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) - 1\right| \leq \sqrt{\mathbb{V}(\Gamma)\mathbb{V}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)} \overset{9.3.6}{\leq} \sqrt{\frac{1}{4}(A-\lambda)^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{A}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(A-\lambda)^2\left(\frac{A-\lambda}{A\lambda}\right)^2}$$
$$= \frac{(A-\lambda)^2}{4A\lambda}$$

ומכאן:

$$\mathbb{E}(\Gamma)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \leq 1 + \frac{(A-\lambda)^2}{4A\lambda} = \frac{4A\lambda + (A-\lambda)^2}{4A\lambda} = \frac{(A+\lambda)^2}{4A\lambda}$$

כנדרש.

מסקנה 9.4 – אלמנט הכיווץ של קצב התכסנות של שיטת הגרדיאנט הינו:

$$f(Z^{n+1}) \leq f(Z^n)\cdot\left(1 - \frac{4\lambda A}{(A+\lambda)^2}\right) = f(Z^n)\left(\frac{(A-\lambda)^2}{(A+\lambda)^2}\right)$$

יש התכנסות לינארית של הערכים לשורש.

הערה 9.5 – אם $A = \lambda$ אז הכיווץ הוא 0, כלומר אחרי איטרציה בודדת מגיעים לשורש. אבל זהו מקרה 'מנוון' שבו כל הערכים העצמיים זהים, כלומר המטריצה Q היא כפולה של מטריצת היחידה. ככל שהמטריצה תהיה 'קרובה' יותר למטריצת היחידה כך הכיווץ יהיה מהיר יותר.

הערה 9.6 – באופן כללי, בפונקציה קמורה $f(x_1, \dots, x_n)$ (פונקציה שבה $H(f) > 0$ בכל נקודה) הגודל $\left(\frac{A-\lambda}{A+\lambda}\right)^2$ תלוי בנקודה. אבל אם הוא יהיה חסום במידה שווה על ידי מספר כלשהו $c < 1$ נקבל קצב התכנסות לינארי וההתכנסות תהיה למינימום (כאשר בפונקציה קמורה ההתכנסות היא למינימום גלובלי).

שיעור מספר 8

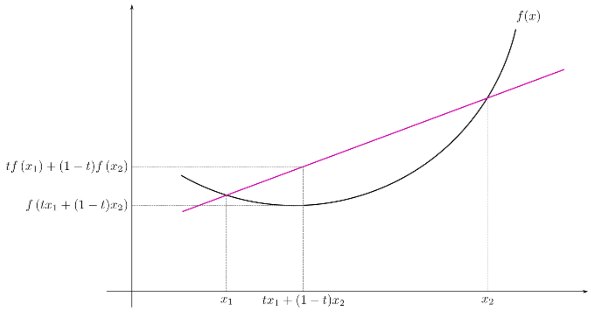
10. השלמה על פונקציות קמורות

הגדרה 10.1 – **פונקציה קמורה** - פונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ תיקרא פונקציה קמורה אם לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$ ולכל $0 \leq t \leq 1$ מתקיים:

$$f(t\cdot u + (1-t)\cdot v) \leq t\cdot f(u) + (1-t)\cdot f(v)$$

כלומר הערך של הפונקציה בנקודת הביניים המשוקללת קטן יותר מסכום הערכים של הפונקציה בנקודה.

הערה 10.2 – במקרה של $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (פונקציה של משתנה אחד) פירוש הדבר שאם לוקחים מיתר מהפונקציה אל הפונקציה, אזי המיתר נמצא מעל הגרף של הפונקציה.



נשים לב כי ההגדרה הזו של קמירות לא דורשת שהפונקציה תהיה גזירה. אולם ניתן בכל זאת להראות את הטענה הבאה (לא נוכיח)

טענה 10.3 – פונקציה קמורה היא בהכרח רציפה.

אינטואיטיבית, הסיבה לכך היא שבנקודת אי-רציפות הרי שניתן יהיה לפרוש מיתר שיעבור בתוך הקטע שבו יש אי-רציפות ואז המיתר יעבור מתחת לפונקציה.

טענה 10.4 – אם f היא גם רציפה פעמיים ברציפות (ההסיאן הוא רציף), אז f קמורה אם ורק אם ההסיאן $H(f)$ מוגדר חיובית בכל נקודה.

הגדרה 10.5 – **פונקציה קמורה ממש** - $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה קמורה ממש אם לכל $u \neq v \in \mathbb{R}^n$ ולכל $0 \leq t \leq 1$ מתקיים:

$$f(t \cdot u + (1-t) \cdot v) < t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v)$$

הערה 10.6 – אם הפקונציה גזירה פעמיים ברציפות תנאי מספיק לקמירות ממש זה שההסיאן מוגדר חיובית ממש בכל נקודה.

טענה 10.7 – תהי $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה קמורה ממש. אזי יש לכל היותר נקודת מינימום מקומי אחת. אם יש נקודה כזו היא גם מינימום גלובלי.

הוכחה 10.7 – נראה שלא יכולות להיות שתי נקודות מינימום מקומי שונות. נניח בשלילה שקיימות שתיים כאלה, כלומר קיימים $u, v \in \mathbb{R}^n$ ששתיהן נקודות מינימום מקומי. בלי הגבלת כלליות נניח $f(u) \geq f(v)$. נראה ש-u לא יכול להיות מינימום מקומי. נסתכל על הישר בין u ל-v ועל סביבה קרובה ל-u על הישר המוגדרת באמצעות $t \cdot u + (1-t) \cdot v$ כאשר t קרוב ל-1. אזי בשל קמירות:

$$\begin{aligned}
&f(t \cdot u + (1-t) \cdot v) \overset{by\ convexity}{<} \\
&t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v) \overset{by\ assumption\ f(v) \leq f(u)}{\leq} \\
&t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(u) = \\
&(t + 1 - t) \cdot f(u) = f(u)
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו סתירה לכך ש-u הוא מינימום מקומי, כלומר יש לכל היותר נקודת מינימום מקומית אחת.

עתה, נוכיח כי אם יש מינימום מקומי כלשהו אז הוא חייב להיות מינימום גלובלי. שוב, נניח בשלילה שיש מינימום מקומי כלשהו u שאיננו מינימום גלובלי, כלומר קיימת נקודה נוספת כלשהי v כך ש-$f(v) < f(u)$. לפי קמירות f נקבל:

$$f(t \cdot u + (1-t) \cdot v) < t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(u) < t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(u) = f(u)$$

כלומר אנחנו מקבלים שעל כל הקרן בין v ל-u הערכים קטנים מ-$f(u)$ בסתירה לכך ש-u מינימום מקומי (ומתוקף כך צריכה להיות סביבה כלשהי שבה $f(u)$ קטנה מכל הערכים האחרים של f בסביבה).

הערה 10.8 – יכולה להיות פונקציה קמורה בלי נקודת מינימום. דוגמה:

$$f(x) = -\ln(x)$$

הגדרה 10.9 – קריטריון סילבסטר – תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית, לכל i נסתכל על המינורים הראשיים המוגדרים על ידי הדטרמיננטה של תת-המטריצה עד האינדקס ה-i כלומר $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$. אזי:

- A מוגדרת חיובית אם ורק אם כל המינוריים הראשיים אי-שליליים.
- A מוגדרת חיובית ממש אם היא מוגדרת חיובית וגם הדטרמיננטה של המטריצה חיובית ממש.

דוגמה 10.10 (דוגמה לשאלה ממבחן) – נתונה פונקציה $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z$$

א. מצא נקודות קיצון מקומיות של f (כולל לקבוע אם אלו נקודות מינימום או מקסימום)
ב. מצא מינימום גלובלי ומקסימום גלובלי

פתרון – סעיף א' - אין אילוצים לכן נמצא נקודות חשודות לקיצון באמצעות גרדיאנט והשוואה לאפס $\nabla f = 0$. נחשב ונקבל:

$$\vec{0} = \nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$
$$= (4x + y - 6, x + 2y + z - 7, y + 2z - 8) \Rightarrow$$
$$I. \quad 4x + y = 6$$
$$II. \quad x + 2y + z = 7$$
$$III. \quad y + 2z = 8$$

נוכל לפתור את מערכת המשוואות ולקבל:

$$x = \frac{6}{5}$$
$$y = \frac{6}{5}$$
$$z = \frac{17}{5}$$

כלומר הנקודה היחידה החשודה כקיצון היא הנקודה $(x,y,z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$. נרצה לבדוק האם זוהי נקודת מינימום או מקסימום באמצעות חישוב ההסיאן.

$$H(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ניתן לחשב פולינום אופייני ולחשב ערכים עצמיים. שיטה אחרת היא להשתמש בקריטריון סילבסטר כדי לראות אם זו מטריצה מוגדרת חיובית בלי למצוא ערכים עצמיים. המינורים הראשיים הם:

$$A_{11} = |4| = 4 > 0$$
$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 7 > 0$$
$$A_{33} = |H(f)| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_2 \to 2L_2 - L_3}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right] = \frac{1}{2}[2 \cdot (4 \cdot 3 - 1 \cdot 2)]$$
$$= \frac{1}{2}[2 \cdot 10] = 10 > 0$$

קיבלנו לפי קריטריון סילבסטר כי ההסיאן מוגדר חיובי ממש, כלומר הנקודה $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ זו היא נקודת מינימום מקומי.

סעיף ב' – נשים לב כי $H(f)$ לא תלוי בנקודה והוא מוגדר חיובית ממש, לכן f קמורה ממש. כיוון ש-f קמורה ממש אז הנקודה $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ היא גם המינימום הגלובלי. מקסימום גלובלי בפונקציה אינו קיים, שכן נקודת מקסימום גלובלי חייב להיות גם מקסימום מקומי ולפונקציה קמורה לא יכולה להיות נקודת מקסימום מקומית (כיוון שההסיאן בנקודת מקסימום חייב להיות מוגדר שלילית).

11. שיטת ניוטון למציאת מינימום של פונקציה קמורה בלי אילוצים

שיטת ניוטון היא שיטה נומרית למציאה של נקודת מינימום של פונקציה קמורה ממש, בהנחה שנקודה כזו קיימת. השיטה דומה לשיטת ניוטון עם משתנה אחד שראינו בעבר (נושא 3).

הגדרה 11.1 שיטת ניוטון – תהי פונקציה $f: \mathbb{R}^n - \mathbb{R}$ קמורה שיש לה נקודת מינימום $\bar{X}$ (כלומר $\nabla f(\bar{X}) = 0$). נגדיר את השיטה האיטרטיבית הבאה:

1. מתחילים מנקודה כלשהי X_0, אשר בשאיפה צריכה להיות קרובה ל-$\bar{X}$.
2. מגדירים ברקורסיה:

$$X_{n+1} = X_n - H(f)^{-1}(X_n) \cdot \nabla f(X_n)$$

נשים לב כי $X_{n+1}, X_n, \nabla f(X_n) \in \mathbb{R}^n$ וקטורי עמודה מסדר n, וההיסאן $H(f)$ היא מטריצה מסדר $n \times n$.

הערה 11.2 – בשיטת ניוטון עם משתנה אחד רצינו למצוא שורש כלשהו $\bar{x}$ של פונקציה $g(\bar{x}) = 0$ הגדרנו $X_{n+1} = X_n - \frac{g(X_n)}{g'(X_n)}$ ועבור f קמורה היינו גם מגדירים את הריבוי השני $X_{n+1} = X_n - \frac{f'(X_n)}{f''(X_n)}$. במקרה הרב-ממדי אנחנו בעצם מגדירים $g = f' = \nabla f$ ו-$g' = f'' = H(f)$.

הערה 11.3 – כמו במקרה החד-ממדי, סדר ההתכנסות של שיטת ניוטון הוא 2, אבל נקודת ההתחלה צריכה להיות קרובה למינימום.

הערה 11.4 – במקרים של אתחול רחוק מהמינימום, יתכן כי שיטת ניוטון לא תעבוד. ניקח

$$f(x) = \int_0^x arctg(t)dt = x \cdot arctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

טענה - $f(x)$ קמורה ויש לה מינימום ב-$x = 0$.

קמירות ניתן להוכיח באמצעות:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1 + x^2} > 0$$

כאשר $arctg(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

שיטת ניוטון תוגדר על ידי:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f''(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{1/(1+X_n^2)}{arctg(X_n)}$$

ראינו (תרגיל בית 1) שעבור X_0 רחוק מדי מהראשית, האיטרציות לא יתכנסו ל-0.

דוגמה 11.5 – תהי פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1 x_2 + x_2^4$$

נתחיל מנקודה $Z_0 = (1,1)^T$ ונבצע איטרציה אחת.

נזכיר כי נוסחה לחישוב הופכי של מטריצה בגודל 2×2 היא:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

פתרון – אנחנו יודעים כי:

$$Z_1 = Z_0 - H(f)^{-1}(Z_0) \cdot \nabla f(Z_0)$$

כאשר:

$$\nabla f = (4x_1^3 + 2x_2, 4x_2^3 + 2x_1) \Rightarrow \nabla f(Z_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 2 \\ 2 & 12x_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(Z_0) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)^{-1}(Z_0) = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$Z_1 = Z_0 - H(f)^{-1}(Z_0) \cdot \nabla f(Z_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$$

12. רענון על מכפלה פנימית, נורמות והטלות

הגדרה 12.1 – **מכפלה פנימית** – יהי מרחב וקטורי V (סגור לחיבור ולכפל בסקלר). מכפלה פנימית (סקלרית) היא פונקציה $\langle u,v \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ של 2 משתנים שמקיימת את התנאים הבאים:

1. סימטריות $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$
2. פילוג $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$
3. כפל בסקלר $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$
4. אי-שליליות: $\langle u,u \rangle \geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $u = 0$.

דוגמה 12.2 – עבור $V = \mathbb{R}^n$ עם שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$ מכפלה הפנימית המכפלה הסקלרית:

$$\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = (u_1, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ניתן להראות כי כל 4 התנאים הנדרשים מתקיימים.

דוגמה 12.3 – גם עבור $V = \mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר מכפלה פנימית נוספת, עבור Q מוגדרת חיובית ממש (ובפרט סימטרית), באמצעות:

$$< u,v >_Q = (u_1,\dots,u_n)\cdot Q\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ \dots\\ v_n\end{pmatrix}$$

דוגמה 12.4 – ניקח את V להיות אוסף הפונקציות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ונגדיר את המכפלה הפנימית:

$$< f,g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

הוכחת סימטריות:

$$< f,g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = < g,f >$$

הוכחת פילוג:

$$< f_1+f_2,g > = \int_0^1 \big(f_1(x)+f_2(x)\big)g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = < f_1,g > + < f_2,g >$$

כפל בסקלר – הוכחה דומה לפילוג

$$< \lambda f,g > = \int_0^1 \lambda f(x)g(x)dx = \lambda\int_0^1 f(x)g(x)dx = \lambda < f,g >$$

אי-שלילות:

$$< f,f > = \int_0^1 f^2(x)dx \ge 0$$

אי-שלילי בגלל שזהו אינטגרל. כאשר $f(x)=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = 0$.

דוגמה 12.5 – הכללה (בדומה להכפלה במטריצה מוגדרת חיובית ממש), עבור פונקציה חיובית ממש $h(x)$ ניתן להגדיר:

$$< f,g > = \int_0^1 f(x)g(x)h(x)dx$$

הגדרה 12.6 – **נורמה** – עבור מרחב וקטורי V ומכפלה פנימית כלשהי $< u,v >$ נגדיר את הנורמה באמצעות:

$$\|u\| = \sqrt{< u,u >}$$

הערה 12.7 - נשים לב כי הנורמה מוגדרת היטב ואי-שלילית (בגלל אי-שליליות מכפלה פנימית – תנאי 4) ומתקיים $u=0 \Leftrightarrow \|u\|=0$.

טענה 12.8 – אי-שוויון קושי-שוורץ

$$|< u,v >| \le \|u\|\cdot\|v\|$$

טענה 12.9 – אי-שוויון המשולש – מתוך אי-שוויון קושי-שוורץ מתקיים גם אי-שוויון המשולש:

$$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$$

הגדרה 12.10 – הטלה – יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $<\cdot,\cdot>$ ויהי תת-מרחב $W\subseteq V$. יהי $u\in V$ וקטור. אזי ההטלה של u על W הוא הווקטור הכי "קרוב" ל-u שנמצא ב-W. זהו $P(u)$ המקיים:

$$\|u - P(u)\| = \min_{w \in W} \|w - u\|$$

טענה 12.11 – הטלה תמיד קיימת ויחידה.

דוגמה 12.12 – ניקח את V להיות אוסף הפונקציות $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ונסתכל על W שהוא אוסף כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2. המכפלה הפנימית תהיה מוגדרת כפי שהגדרנו לעיל:

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

נרצה למצוא הטלה של $\sin(x)$ על W, כלומר נרצה למצוא פולינום ממעלה 1 שהוא הקרוב ביותר ל-$\sin(x)$ כלומר צריך למצוא $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם מתקיים $\|\sin(x) - (ax + b)\|$ הקטנה ביותר.

$$\|\sin(x) - (ax + b)\| = \sqrt{\int_0^1 (\sin(x) - ax - b)^2 dx}$$

שיטה ראשונה לפתרון היא באמצעות פתרון ישיר.

$$\sqrt{\int_0^1 (\sin(x) - ax - b)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2(x) + a^2x^2 + b^2 + 2abx - 2ax \cdot \sin(x) - 2b \cdot \sin(x)\, dx}$$
$$= \sqrt{\int_0^1 \sin^2(x)\, dx + a^2 \int_0^1 x^2 dx + b^2 + 2ab \int_0^1 x dx - 2a \int_0^1 x \cdot \sin(x) - 2b \int_0^1 \sin(x)\, dx}$$

צריך למצוא מינימום לתבנית הריבועית ב-a, b:

$$a^2 \cdot \frac{1}{3} + b^2 + ab - 2a \int_0^1 x \cdot \sin(x) - 2b \int_0^1 \sin(x)$$

נסמן $\alpha = \int_0^1 x \cdot \sin(x), \beta = \int_0^1 \sin(x)$ ונקבל:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + ab - 2 \cdot \alpha \cdot a - 2 \cdot \beta \cdot b$$

נחשב את ההסיאן (כאשר a, b משתנים):

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |H| = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$$

כלומר המטריצה מוגדרת חיובית לכן קיימות נקודות מינימום. עתה נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2a}{3} + b - 2\alpha \\ 2b + a - 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם נחשב נקבל:

$$b = 2\alpha - \frac{2a}{3}$$
$$2b = 4\alpha - \frac{4a}{3}$$
$$2b + a = 4\alpha - \frac{a}{3} = 2\beta$$
$$a = 12\alpha - 6\beta$$

$b = 4\beta - 6\alpha$

ההטלה היא פונקציה לינארית:

$(12\alpha - 6\beta)x + (4\beta - 6\alpha)$

הערה 12.13 - שיטה שניה אפשרית היא לא באמצעות חישוב ישיר אלא באמצעות תהליך גרהם-שמידט. נניח V הוא מרחב וקטורי ו-$W \subseteq V$ תת-מרחב עם בסיס אורתונורמלי $w_1, \dots, w_n$. הטלה של וקטור u על w היא באמצעות אחת משתי הדרכים הבאות (שקולות זו לזו):

א. הווקטור ב-w שהכי קרוב ל-u

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$

ב. מתקיים כי $u - P(u)$ מאונכת לכל וקטור ב-w. וקיים וקטור יחיד $P(u) \in W$.

ומתקיים:

$< u - (\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n), w_1 > = 0$

דוגמה 12.14 – עבור $V = \mathbb{R}^2, W = span\{(1,1)\}, u = (2,3)$. דרך אחת היא להגדיר מה הנקודה הקרוב ביותר ל-u על תת-המרחב. דרך שניה היא להגדיר שאנחנו רוצים שההטלה תהיה מאונכת לתת-המרחב W.

הערה 12.15 – בעזרת הגדרה ב' של הטלה ניתן להראות שאם $w_1, \dots, w_n$ הוא בסיס אורתונורמלי ל-W אזי ההטלה $P(u)$ היא בעצם:

$P(u) =< u, w_1 >\cdot w_1 + < u, w_2 >\cdot w_2 + \dots + < u, w_n >\cdot w_n$

שיעור מספר 9

נרצה לפתור את הבעיה מהשיעור הקודם באמצעות הטלה. ראשית תזכורת לגבי ביצוע ההטלה.

תזכורת 12.16 תהליך גרהם-שמידט – יהי מרחב וקטורי V ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב של V כך ש-$W = span\{v_1, \dots, v_n\}$. יהי וקטור $u \in V$ ונרצה לחשב הטלה של u על W. דרך לבצע זאת היא באמצעות מציאה של בסיס אורתונורמלי ל-W באמצעות תהליך גרהם-שמידט.

הוקטור הראשון מקיים:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

הוקטור השני הוא:

$$\mathrm{w}_2 = v_2 - a \cdot v_1$$

כאשר נדרש כי המכפלה הפנימית שווה ל-0:

$$< w_1, w_2 > = 0 \Rightarrow$$
$$< w_1, v_2 - a \cdot v_1 > = 0 \Rightarrow$$
$$a = \frac{< v_2, v_1 >}{\|v_1\|^2}$$

כלומר:

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1$$

ובאופן כללי עבור וקטורים אורתוגונליים:

$$w_k = v_k - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \cdots - \lambda_{k-1} w_{k-1}$$

נדרש:

$$\forall 1 \le i \le k-1: \quad < w_k, w_i > = 0 \Rightarrow$$
$$< w_k, w_i > \; = < v_k, w_i > \; -\lambda_i \|w_i\|^2$$

כאשר:

$$\lambda_i = \frac{< v_k, w_i >}{\|w_i\|^2}$$

בסך הכל תהליך גרהם שמידט הוא תהליך רקורסיבי שבו:

$$w_1 = v_1$$
$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< v_k, w_i >}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

הווקטורים $w_1, \dots, w_n$ מאונכים זה לזה. כל שנותר הוא לנרמל את הווקטורים באמצעות:

$$\widehat{w}_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

ואז מתקבל בסיס אורתונורמלי.

תזכורת 12.17 הטלה באמצעות תהליך גרהם-שמידט - אם $w_1, \dots, w_n$ בסיס אורתוגונלי ל-W אז הטלה של u על W ניתנת לחישוב באמצעות:

$$Pu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i$$

כאשר $u - Pu$ מאונך לכל וקטור $w \in W$. כלומר לכל וקטור $w \in W$ ובפרט לכל וקטור בבסיס w_i מתקיים:

$$< u - Pu, w_i > = \; 0 \Rightarrow$$
$$< u, w_i > \; - < \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j, w_i > =$$
$$< u, w_i > \; -\beta_i \|w_i\|^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\beta_i = \frac{< u, w_i >}{\|w_i\|^2}$$

ולכן ההטלה הינה:

$$Pu = \sum_{i=1}^{n} \frac{< u, w_i >}{\|w_i\|^2} w_i$$

חזרה לדוגמה 12.18 (המשך 12.12) - ניקח את V להיות אוסף הפונקציות $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ונסתכל על W שהוא אוסף כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2. המכפלה הפנימית תהיה מוגדרת כפי שהגדרנו לעיל: $< f, g > = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. נרצה למצוא הטלה של $\sin(x)$ על W, כלומר נרצה למצוא פולינום ממעלה 1 שהוא הקרוב ביותר ל-$\sin(x)$ כלומר צריך למצוא $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם מתקיים $\| \sin(x) - (ax+b) \|$ הקטנה ביותר.

נמצא בסיס אורתוגונלי ל-W. ניקח:

$$\mathrm{w}_1 = 1$$

כיוון ש-1 $f(x) =$ היא פונקציה ב-W.

את הווקטור השני נחשב באמצעות תהליך גרהם-שמידט:

$$\mathrm{w}_2 = x - \frac{< x, 1 >}{\|1\|^2} \cdot 1 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx}{\int_0^1 1^2 dx} = x - \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}{1} = x - \frac{1}{2}$$

כלומר w_1, w_2 הוא בסיס אורתוגונלי ל-W. ניתן לשים לב כי מתקיים:

$$< w_1, w_2 > = \ < 1, \mathrm{x} - \frac{1}{2} > \ = \int_0^1 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_0^1 = 0$$

כלומר הווקטורים אכן מאונכים זה לזה.

נמצא את ההטלה באמצעות 12.17:

$$P \cdot \sin(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{< \sin(x)\,, w_i >}{\|w_i\|^2} w_i = \frac{< \sin(x)\,, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{< \sin(x)\,, w_2 >}{\|w_2\|^2} w_2$$
$$= \frac{< \sin(x)\,, 1 >}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{< \sin(x)\,, x - \frac{1}{2} >}{\left\|x - \frac{1}{2}\right\|^2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

כמו בשיטה הקודמת נסמן:

$$\alpha = \int_0^1 \sin(x)\, dx$$
$$\beta = \int_0^1 x sin(x) dx$$

נמשיך בחישוב:

$$P \cdot \sin(x) = \frac{\alpha}{1} \cdot 1 + \left[\frac{\int_0^1 x \cdot \sin(x)\, dx - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(x)\, dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx}\right]\left(x - \frac{1}{2}\right) = \alpha + \frac{\beta - \frac{\alpha}{2}}{1/12}$$
$$= \alpha + (12\beta - 6\alpha)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= (12\beta - 6\alpha)x + (4\alpha - 6\beta)$$

ניתן לראות כי התוצאה שהתקבלה זהה לתוצאה הקודמת.

דוגמה 12.19 (שאלה ממבחן) – נתונה הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא פולינום ריבועי $P(x)$ שנותן מינימום לאינטגרל:

$$\int_0^1 |P(x) - e^x|^2 \cdot x dx$$

פתרון – אפשרות אחת היא לקחת $P(x) = ax^2 + bx + c$ ואז לחשב ישירות (באמצעות השוואת הגרדיאנט ל-0).

אפשרות שניה היא באמצעות הטלה. V היא מרחב הפונקציות על הקטע [0,1]. המכפלה הפנימית של שתי פונקציות מוגדרת על ידי:

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)x\,dx$$

והנורמה מוגדרת על ידי:

$$\|u\| = \int_0^1 u^2(x) \cdot xdx$$

ואז הבעיה מוגדרת באמצעות:

$$\int_0^1 |P(x) - e^x|^2 \cdot xdx = \|P(x) - e^x\|$$

לכן צריך למצוא הטלה של e^x על $W = span\{1, x, x^2\}$. לשם כך נצטרך בסיס אורתוגונלי ל-W עם המכפלה הפנימית החדשה שהגדרנו.

כמו קודם הווקטור הראשון הוא פשוט:

$$w_1 = 1$$

הווקטור השני הינו:

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 = x - \frac{< x, 1 >}{\|1\|^2} \cdot 1$$

כאשר:

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$< x, 1 > = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot xdx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ובסך הכל:

$$w_2 = x - \frac{1/3}{1/2} = x - \frac{2}{3}$$

ולבסוף הווקטור האחרון הוא:

$$w_3 = x^2 - \frac{< x^2, 1 >}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{< x^2, x - \frac{2}{3} >}{\left\|x - \frac{2}{3}\right\|^2}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

כאשר:

$$< x^2, 1 > = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot xdx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$\frac{< x^2, 1 >}{\|1\|^2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

המחובר השני:

$$< x^2, x-\frac{2}{3} > = \int_0^1 x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)xdx = \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

$$\left\|x-\frac{2}{3}\right\|^2 = \int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 xdx = \int_0^1 \left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)xdx = \left[\frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right] = \frac{1}{36}$$

לכן:

$$\frac{< x^2, x-\frac{2}{3} >}{\left\|x-\frac{2}{3}\right\|^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) = \frac{1/30}{1/36}\left(x-\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

בסך הכל מקבלים:

$$w_3 = x^2-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right) = x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}$$

ההטלה היא:

$$Pe^x = \frac{< e^x, 1 >}{\|1\|^2}\cdot 1 + \frac{< e^x, x-\frac{2}{3} >}{\left\|x-\frac{2}{3}\right\|^2}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) + \frac{< e^x, x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10} >}{\left\|x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}\right\|^2}\cdot\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}\right)$$
$$= \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 e^x\left(x-\frac{2}{3}\right)dx + \int_0^1 e^x\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}\right)dx$$

דוגמה 12.20 – הטלה של וקטור לתת-מרחב הנתון באמצעות מערכת משוואות לינאריות - יהי וקטור $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, ויהי תת-מרחב $W \in \mathbb{R}^n$ שנתון על ידי k משוואות לינאריות הומוגניות בלתי תלויות, כלומר W הוא מרחב הפתרונות למערכת המשוואות:

$$W = \left\{(x_1, \dots, x_n): \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

נרצה למצוא נוסחה להטלה של z על W.

נזכור כי הטלה P היא פונקציונל לינארי שמקיימת:

$$P(u+v) = Pu + Pv$$
$$P(\lambda u) = \lambda Pu$$

נרצה למצוא את המטריצה שמקיימת את ההטלה.

נסתכל על מטריצת המקדמים:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

ולכן תת-המרחב W ניתן להגדרה שקולה על ידי:

$$W = \{x | A\cdot x = 0\}$$

כאשר x וקטור עמודה.

כלומר Pz הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$Pz = \min_x \|x - z\|^2$$

תחת האילוצים:

$$Ax = 0$$

זוהי בעיית אופטימיזציה של תבנית ריבועית אי-שלילית (קמורה), לכן יש מינימום יחיד וכדי למצוא אותו נדרש למצוא תנאי מסדר ראשון. כלומר עבור $z = (z_1, \dots, z_n)$ נתון נדרש למצוא:

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - z_j\right)^2$$

את ה-$\frac{1}{2}$ נשים מטעמי נוחות. המינימיזציה היא תחת k אילוצי השוויון:

$$\forall 1 \le i \le k: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$$

לפי תנאי מסדר ראשון קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ כך שמתקיים:

$$\nabla\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - z_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\nabla\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

נגזור לפי כל אחד מהרכיבים:

$$\nabla\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - z_j\right)^2 = (x_1 - z_1, x_2 - z_2, \dots, x_n - z_n)$$

$$\nabla\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = (a_{i1}a_{i2}\dots a_{in})\begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \dots \\ x_n - z_n \end{pmatrix} = x - z = \lambda_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k\begin{pmatrix} a_{k1} \\ \cdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

כלומר בסך הכל התנאי מסדר ראשון הוא:

$$x - z = A^T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x = z + A^T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

נזכור כי x צריך לקיים את האילוץ כלומר $Ax = 0$. מקבלים אם כן:

$$A\left(z + A^T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$AA^T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = -Az$$

צריך לשים לב כי $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ כלומר $A^T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ולכן $AA^T \in \mathbb{R}^{k\times k}$. כיוון שהנחנו שכל האילוצים בלתי-תלויים אזי $rank(A) = k$ ולכן AA^T מטריצה הפיכה. מכאן נכפיל בהופכי של AA^T משמאל ונקבל:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_k\end{pmatrix} = -(AA^T)^{-1}Az$$

מכאן ניתן לקבל:

$$x = Pz = z + A^T(-AA^T)^{-1}Az)$$
$$= z - A^T(AA^T)^{-1}AZ$$

כלומר מטריצת ההטלה היא:

$$X = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)z$$

דוגמה 12.21 – ניקח $V = \mathbb{R}^4$. נרצה למצוא הטלה של $z = (1,2,-1,0)$ על תת-המרחב:

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4): \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{matrix}\right\}$$

נשים לב שהווקטור z מקיים את התנאי השני ולא מקיים את התנאי הראשון.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$AA^T = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$
$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$
$$(AA^T)^{-1}A = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$
$$A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$P = (I - A^T(AA^T)^{-1}A) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

ההטלה היא:

$$Pz = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\ 1/2\\ -1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

שיעור מספר 10

דוגמה 12.22 (שאלה ממבחן) – מצא מינימום ומקסימום גלובלי של הפונקציה

$$f(x,y) = x^2y(4-x-y)$$

תחת האילוצים:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x + y \leq 6$$

זהו תחום סגור וחסום על הרביע הראשון החסום בידי ציר ה-X, ציר ה-Y והישר $y = 6 - x$. כיוון שהתחום חסום וסגור אז בהכרח יש מקסימום ומינימום בתחום, בהנחה שהפונקציה רציפה.

פתרון:

- נחפש את כל הנקודות החשודות לקיצון
- נחשב בנקודות אלה את ערך הפונקציה
  - הנקודות שיתנו את הערך המקסימלי יהיו מקסימום גלובלי
  - הנקודות שיתנו את הערך המינימלי יהיו מינימום גלובלי

נבחין בין מקרים של נקודת פנים ונקודת שפה.

מקרה א' – הנקודה היא נקודת פנים, כלומר כל האילוצים הם לא פעילים. ניקח גרדיאנט ונשווה ל-0

$$f(x,y) = x^2y(4-x-y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y)$$

נשווה ל-0. בגלל ש-$x, y \geq 0$ ניתן לחלק בהם.

$$8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0 \Rightarrow 8 = 3x + 2y$$
$$4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0 \Rightarrow 4 = x + 2y$$

נחסר את המשוואות ונקבל:

$$x = 2$$
$$y = 1$$

ובפונקציה מתקבל הערך

$$f(2,1) = 4$$

מקרה ב' – מציאת נקודות קיצון על השפה. לשפה יש 3 חלקים, כאשר על הצירים $f(x,y) = 0$. נבדוק מה קורה בצלע השלישית כלומר על הישר $y = 6 - x$. ניתן להציב את $y = x - 6$ ואז נקבל:

$$f(x,y) = f(x, 6-x) = x^2(6-x) \cdot \big(4 - x - (6-x)\big) = -2x^2(6-x) = 2x^2(x-6)$$

אם נגזור ונשווה ל-0 נקבל:

$$\big(2x^2(x-6)\big)' = (2x^3 - 12x^2)' = 6x^2 - 24x = 6x(x^2 - 4)$$

מתקבל $x = 0{,}4$ כלומר הנקודות $(0,6), (4,2)$. הנקודה $x = 0$ ו-$y = 6$ מתקבלות עם ערכים 0. הנקודה האחרונה היא לא על הצירים אלא רק על הישר:

$$f(4,2) = -64$$

הערך הקטן ביותר שמתקבל הוא בערך $(4,2)$ לכן $(4,2)$ הוא מינימום גלובלי.

הערך הגדול ביותר שמתקבל הוא בערך (2,1) לכן (2,1) הוא מקסימום גלובלי.

13. אלגוריתם הטלה של הגרדיאנט

הגדרה 13.1 - אלגוריתם למציאת מינימום של פונקציה קמורה תחת אילוצים לינאריים

תהי פונקציה $f(x_1, \ldots, x_n): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ונרצה למצוא את הערכים בהם מתקבל המינימום של הפונקציה תחת האילוצים הלינאריים הבאים:

- k אילוצי שוויון

$$A_{k\times n} \coloneqq A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$$

- m אילוצי אי-שוויון:

$$\hat{A}_{m\times n} \coloneqq \hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_k \end{pmatrix}$$

תיאור האלגוריתם האיטרטיבי:

1. שלב א' – מוצאים נקודה $\bar{X} = X_0$ המקיימת את האילוצים
2. שלב ב' – נניח כי יש נקודה X_k בתהליך האיטרטיבי, על מנת לעבור ל-X_{k+1}:
   א. מחשבים את הגרדיאנט $\nabla f(X_k)$ ומחשבים את כל האילוצים הפעילים ב-X_k (כל אילוצי השוויון הנובעים מהמטריצה A וכל אילוצי אי-השוויון הפעילים, כלומר שהם בעצם שוויון, הנובעים מהמטריצה $\hat{A}$).
   ב. אם $\nabla f(X_k)$ הוא צירוף לינארי של הגרדיאנטים של האילוצים הפעילים והמקדמים של אילוצי $\hat{A}$ הם שליליים אז מתקיים תנאי מסדר ראשון ואז מצאנו מינימום (סיום האלגוריתם).
   ג. אם תנאי "ב" לא מתקיים אז מטילים את הגרדיאנט על תת-המרחב של האילוצים. מגדירים וקטור חדש V שהוא הטלה של $\nabla f(X_k)$ על תת-המרחב של הגרדיאנטים של האילוצים. בהתאם, מגדירים:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha \cdot v$$

   כאשר α הינו הצעד המקסימלי שעבורו X_{k+1} עדיין יקיים את האילוצים.

14. תכנון דינמי

דוגמה 14.1 – נניח שיש תקופת זמן מוגדרת שבה סוחרים באיזשהו מוצר, האינדקסים של ימי הסחר הם $0,1,\ldots,n$ וניתן לאפסן רק מוצר אחד בכל יום (היום האחרון מכונה "אופק" או $horizon$). סוחר קונה את המוצר מספק במחיר c ומנסה למכור אותו במחיר יותר גדול d (מניחים $d > c$). הימים בלתי תלויים זה בזה, בכל יום ההסתברות להצליח למכור היא p וההסתברות לא להצליח למכור היא $1 - p$. מה המדיניות שבה תוחלת הרווח תהיה מקסימלית?

ההיגיון לפתרון:

- כאשר יש מספיק זמן עד לאופק, הסוחר יקנה מהספק וינסה למכור את המוצר ($trading\ region$)
- כאשר לא נותר מספיק זמן, הסוחר לא יקנה יותר את המוצר ($non - trading\ region$)

צריך לחשב מהו "מספיק זמן". ההחלטה היא בינארית (כן לעצור או לא לעצור את הקניה) והשאלה היא שאלת $optimal\ stopping$ כפונקציה של d, c, p.

הפתרון מתקבל באמצעות תכנון דינמי (תהליכי החלטה מרקוביים) המוגדר על ידי נוסחת הנסיגה וההגדרות הבאות:

- $V_k(1)$ – תוחלת רווח כאשר נותרו k ימים עד לאופק ויש לנו את המוצר
- $V_k(0)$ – תוחלת רווח כאשר נותרו k ימים עד לאופק ואין לנו את המוצר

בכל יום מתרחש התהליך הבא:

- יש מוצר?
  - כן – מנסים למכור (הצלחה בהסתברות p)
  - לא – החלטה האם קונים מהספק?
    - כן – מנסים למכור באותו יום (הצלחה בהסתברות p)
    - לא – עוברים ליום הבא

תנאי הסף הם כאשר $k = 0$ ואז תוחלת הרווח היא 0 כיוון שלא נותר זמן למכור:

$$V_0(1) = V_0(0) = 0$$

נסתכל על מצב שבו $k > 0$. עבור מצב שבו אין את המוצר בתחילת היום:

$$V_k(0) = \max\{buy\ product, not\ buy\ product\} = \max\{-c + V_k(1), V_{k-1}(0)\}$$

עבור מצב שבו יש את המוצר בתחילת היום נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה $E\left[E[X|Y]\right] = E[X]$. במקרה שלנו X הוא משתנה מקרי שמתאר רווח במצב שנשארו לנו k ימי מסחר ויש לנו את המוצר. Y הוא אינדקטור לגבי הצלחה במכירה (מתפלג ברנולי עם הסתברות p):

$$V_k(1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right]$$

כאשר

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} d + V_{k-1}(0), & Y = 1 \\ V_{k-1}(1), & Y = 0 \end{cases}$$

ומכאן:

$$V_k(1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right] = \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{E}[X|Y=1] + \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{E}[X|Y=0]$$
$$= p\left(d + V_{k-1}(0)\right) + (1-p)V_{k-1}(1)$$

בסך הכל אנחנו מקבלים שתי נוסחאות נסיגה:

$$V_k(1) = p\left(d + V_{k-1}(0)\right) + (1-p)V_{k-1}(1)$$
$$V_k(0) = \max\{-c + V_k(1), V_{k-1}(0)\}$$

ביחד עם תנאי השפה:

$$V_0(0) = V_0(1) = 0$$

נפעיל את הנוסחאות:

$$V_1(1) = p\left(d + V_0(0)\right) + (1-p)V_0(1) \overset{\text{תנאי שפה}}{=} p(d+0) + (1-p)\cdot 0 = p\cdot d$$
$$V_1(0) = \max\{V_1(1) - c, V_0(0)\} = \max\{p\cdot d - c, 0\}$$

- אם $p\cdot d > c$ אז משתלם לקנות את המוצר
- אם $p\cdot d \le c$ אז לא משתלם לקנות את המוצר

נסתכל מה קורה בצעד הבא בהנחה ש-$p\cdot d \le c$:

$V_2(1)=p\big(d+V_1(0)\big)+(1-p)V_1(1)=p\cdot d+(1-p)\cdot p\cdot d$
$V_2(0)=\max\{-c+V_2(1),V_1(0)\}$
$=\max\{-c+pd+(1-p)\cdot p\cdot d,0\}=\max\{-c+d(2p-p^2),0\}=\max\{-c+d(1-(1-p)^2),0\}$

גם כאן יש שתי אפשרויות

- אם $d(1-(1-p)^2)>c$ קונים את המוצר כאשר נותרו 2 ימי מסחר
- אם $d(1-(1-p)^2)\le c$ לא קונים את המוצר

מסקנת ביניים (נסמן $q=1-p$):

1. אם $(1-q)d>c$ אז הסוחר ירצה להשיג את המוצר עד ליום המסחר האחרון
2. אם $(1-q)d\le c$ אבל $(1-q^2)d>c$ הסוחר ירצה להשיג את המוצר רק אם נשארו לפחות יומיים למסחר
3. אם $(1-q^2)d\le c$ אז הסוחר לא ירצה להשיג את המוצר אם יש רק יומיים או פחות לסיום המסחר.

נסתכל מה קורה בצעד הבא בהנחה ש-$d(1-q^2)\le c$.

$V_3(1)=p\big(d+V_2(0)\big)+qV_2(1)=p\cdot d+q(p\cdot d+q\cdot p\cdot d)=p\cdot d+q\cdot p\cdot d+q^2\cdot p\cdot d$
$=pd(1+q+q^2)=d(1-q^3)$
$V_3(0)=\max\{-c+V_3(1),V_2(0)\}=\max\{-c+d(1-q^3),0\}$

אם $d(1-q^3)>c$ נקנה את המוצר, אחרת לא.

מסקנה: נסתכל על

$$k=\min\{i\big|d\big(1-q^i\big)>c\}$$

ואז זמן עצירת המסחר הינו $N=n-k$. כלומר תקופת המסחר תהיה בימים $0,1,2,\dots,n-k$. כמובן אם $d(1-q^n)\le c$ אז אין טעם לסוחר להשיג את המוצר.

דוגמה 14.2 – **בעיית המזכירה** ($The\ Secretary\ Problem$) – נניח שיש חברת סטארט-אפ שמטרתה לעשות אקזיט עם רווח מקסימלי. ידוע כי יש n לקוחות פוטנציאליים, כאשר החברה מנהלת משא ומתן עם הלקוח ה-k היא יודעת מה הציעו לקוחות קודמים ויודעת כמה לקוחות נותרו אך לא יודעת מה הלקוחות שטרם נפגשו אתה יציעו. ניהול המשא ומתן מתנהל כך – או שמקבלים את ההצעה ועוצרים, או שמוותרים על הלקוח ה-k וממשיכים ללקוח הבא.

רוצים רווח מקסימלי, לכן אם ההצעה ביום ה-k נמוכה מאחת ההצעות הקודמות אז בהכרח נמשיך ליום הבא. כלומר תנאי הכרחי לקבלת ההצעה הוא שהיא יותר טובה מכל הקודמות.

ההגיון הוא (בדומה לדוגמה 14.1) שיש פרק זמן $N,\dots,0$ שבו ממשיכים לחפש ואז ברגע שמתקבלת הצעה יותר גבוהה מכל האחרות עוצרים ($stopping\ region$). מניחים שכל ההצעות שונות זו מזו.

גם כאן נוכל להגדיר באופן הבא:

- $V_k(1)$ – ההסתברות למצוא את ההצעה הכי טובה בהינתן שההצעה הנוכחית k היא הכי טובה עד כה
- $V_k(0)$ – ההסתברות למצוא את ההצעה הכי טובה בהינתן שאנחנו דוחים את ההצעה ביום ה-k

תנאי השפה הם:

$V_n(1)=1$
$V_n(0)=0$

בכל נקודה בזמן, אם עוצרים, ההסתברות לקבל את ההצעה הטובה ביותר היא $\frac{k}{n}$ (שכן מקבלים רק אם זו ההצעה הטובה ביותר עד כה, וסדר ההצעות הוא אקראי ולכן מתפלג באופן אחיד).

נוסחאות הנסיגה מוגדרות על ידי:

$$V_k(1) = \max\left\{\frac{k}{n}, V_k(0)\right\}$$
$$V_k(0) = \frac{1}{k+1}V_{k+1}(1) + \frac{k}{k+1}V_{k+1}(0)$$

יהיה N כך שהחל ממנו יתקיים $\frac{k}{n} \geq V_k(0)$ אותו נמצא בשיעור הבא.

שיעור מספר 11

תזכורת 14.3 – בעיית המזכירה. עבור n מועמדים שיציעו n הצעות מחיר שונות, נרצה לבחור את ההצעה הכי טובה כאשר ההצעות מתקבלות אחת אחרי השניה. מרחב ההסתברות הוא בהתפלגות האחידה של הפרמוטציות σ האפשריות של המועמדים ($\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ פונקציה חח"ע ועל אשר נקראת פונקציית תמורה), בסך הכל יש $n!$ תמורות אפשריות ולכל תמורה הסתברות של $\frac{1}{n!}$ להופיע.

אנחנו מעוניינים באסטרטגיית עצירה

- אם המועמד שאנחנו רואים עכשיו איננו הכי טוב עד עכשיו, לא נעצור.
- אם המועמד שאנחנו רואים עכשיו הוא הכי טוב נשקול אם לעצור, כתלות במיקום שלו בסדרה.

אנחנו מחפשים $k(n)$ כך שאם עבור $i > k(n)$ המועמד בו היה הכי טוב עד עכשיו אז נבחר אותו. השאלה היא מהו $k(n)$.

כזכור, נגדיר באופן הבא:

- $V_k(1)$ – ההסתברות למצוא את ההצעה הכי טובה בהינתן שההצעה הנוכחית k היא הכי טובה עד כה
- $V_k(0)$ – ההסתברות למצוא את ההצעה הכי טובה בהינתן שאנחנו דוחים את ההצעה ביום ה-k (וממשיכים לחפש מועמד טוב ביום ה-$k+1$ והלאה). הדחיה יכולה להיות מכל סיבה שהיא.

תנאי השפה הם:

$$V_n(1) = 1$$
$$V_n(0) = 0$$

בכל נקודה בזמן, אם עוצרים ההסתברות לקבל את ההצעה הטובה ביותר היא $\frac{k}{n}$ (שכן מקבלים רק אם זו ההצעה הטובה ביותר עד כה).

נוסחאות הנסיגה מוגדרות על ידי:

$$V_k(1) = \max\left\{\frac{k}{n}, V_k(0)\right\}$$
$$V_k(0) = \frac{1}{k+1}V_{k+1}(1) + \frac{k}{k+1}V_{k+1}(0)$$

הסבר לנוסחה השניה - בזמן k יש שתי אפשרויות:

1. אפשרות אחת – המועמד ה-$k+1$ הוא הכי טוב מבין $(k+1)$ האופציות הראשונות, זאת בהסתברות של $\frac{1}{k+1}$, ובמקרה זה אנחנו עוברים ל-$V_{k+1}(1)$.
2. אפשרות שניה – המועמד ה-$(k+1)$ איננו הכי טוב מבין $(k+1)$ האופציות הראשונות, זאת בהסתברות של $\frac{k}{k+1}$, ובמקרה זה אנחנו עוברים ל-$V_{k+1}(0)$.

טענה 14.3.1 – הפתרון לנוסחאות הנסיגה הינו:

$$V_k(0)=\begin{cases}\frac{k(n)}{n}\left(\frac{1}{k(n)}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right), & k<k(n)\\ \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k(n)}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right), & k(n)<k<n\end{cases}$$

$$V_k(1)=\begin{cases}\frac{k(n)}{n}\left(\frac{1}{k(n)}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right), & k\le k(n)\\ \frac{k}{n}, & k>k(n)\end{cases}$$

הוכחה באינדוקציה (מהסוף להתחלה)

בסיס האינדוקציה יהיה $k=n-1$ ונלך משם אחורה עד ל-$k=0$.

לפי התבנית:

$$V_{n-1}(0)=\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

זה נכון כי ההסתברות להמשיך לחפש אחרי היום האחד לפני האחרון ולמצוא את המועמד הכי טוב היא פשוט ההסתברות לכך שהמועמד הכי טוב יהיה ביום האחרון, וההסתברות לכך היא כאמור $\frac{1}{n}$.

בדומה לפי התבנית:

$$V_{n-1}(1)=\frac{n-1}{n}$$

זה נכון כי ההסתברות לכך שאנחנו נבחר את המועמד ה-$n-1$ והוא יהיה המועמד הכי טוב היא ההסתברות לכך שהמועמד ה-$n-1$ הכי טוב בהינתן שהוא הכי טוב עד עכשיו (אחרת אנחנו לא בוחרים בו) כלומר $\frac{n-1}{n}$.

צעד האינדוקציה – נראה שאם הטענה נכונה ל-k היא נכונה ל-$(k-1)$.

$$V_k(0)=\frac{1}{k+1}V_{k+1}(1)+\frac{k}{k+1}V_{k+1}(0)$$

אפשרות א' - נניח $k<k(n)$ מתקיים $V_k(1)=V_k(0)$ ולכן:

$$V_{k-1}(0)=\frac{k-1}{k}V_k(0)+\frac{1}{k}V_k(1)=V_k(0)$$

אפשרות ב' – אם $k>k(n)$

הגודל $k(n)$ הוא המספר הטבעי עבורו שני הביטויים $\frac{k}{n}$ ו-$\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$ שווים. כיוון שמדובר במספר טבעי ליתר דיוק, הכוונה למספר הטבעי שבו הסימן של הביטוי $\left(\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}-1\right)$ הופך מחיובי לשלילי.

עבור n גדול מספיק, מתקיים $1=\ln\left(\frac{n-1}{k}\right)\sim\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{k}$ ולכן $k(n)\sim\frac{n-1}{e}$. ההסתברות להצלחה היא $V\sim\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$.

הגדרה 14.4 זמן עצירה – נניח שיש סדרת תצפיות כלשהי $X_1,\dots,X_n$ כאשר בזמן k אנחנו צופים בתצפית X_k. המידע הזמין עבור זמן k כולל את הערכים $X_1,\dots,X_k$. משתנה מקרי τ שמקבל ערכים $0,1,\dots,n$ ייקרא זמן עצירה ביחס לתצפיות אם לכל k המאורע $\{\tau=k\}$ נקבע לפי הערכים של $X_1,\dots,X_k$ בלבד.

אינטואיציה: אם זמן העצירה מייצג את הזמן שבו מוכרים מניה כלשהי, נקבע את הזמן לפי התצפיות בעבר ולא יכולה להיות "גלישה לעתיד".

דוגמה 14.5 – זמן דטרמיניסטי כלשהו הוא זמן עצירה. זמן דטרמיניסטי פירושו שקיים k_0 כך ש-$\tau = k_0$.

דוגמה 14.6 – נניח $\tau = \min\{k\colon\ X_k > c\} \wedge n$ כלומר הפעם הראשונה שבה התצפית גדולה מקבוע כלשהו c. החיתוך $\wedge n$ מייצג את זה שאם התצפיות אף פעם לא עוברות את הרף c אז תהיה עצירה בתצפית האחרונה.

דוגמה 14.7 – נניח $\tau = \min\{k\colon\ \ X_k(X_1, \dots, X_{k-1})\} \wedge n$ כלומר הפעם הראשונה שבה התצפית ה-k גדולה יותר מכל הקודמות לה.

דוגמה 14.8 - $\tau = \min\{k\colon\ X_k = max(X_1, \dots, X_n)\} \wedge n$ איננו זמן עצירה כי אנחנו תלויים גם בתצפיות בעתיד.

הגדרה 14.9 – בעיית עצירה אופטימלית $\boldsymbol{Optimal\ Stopping}$ בזמן בדיד – תהיינה סדרת תצפיות (מ"מ) $X_1, \dots, X_n$ ונניח כי יש "גמול", שהוא פונקציה של התצפיות עד כה $Y_i = F_i(X_1, \dots, X_i)$ הגמול בזמן i.
בעיית עצירה אופטימלית מחפשת זמן עצירה הממקסם את התוחלת של פונקציית הגמול:

$$\hat{\tau} = \max_{\tau} \mathbb{E}[Y_\tau]$$

הגודל n נקרא "אופק" \ $horizon$.

דוגמה 14.10 – נניח כי X_i מייצג את קצב השינוי של מניה כלשהי ביום ה-i, משתנה מקרי שערכיו:

$$X_i = \begin{cases} +10\%, & \frac{1}{2} \\ -5\%, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

נניח כי $X_1, \dots, X_n$ בלתי-תלויים שווי התפלגות. הערך של המניה ביום ה-k, מיוצג על ידי S_k המחיר ביום ההתחלתי S_0 במכפלה עם השינויים בימים $1, \dots, k$, יהיה:

$$S_k = S_0 \cdot X_1 \cdot \ldots \cdot X_k$$

הערה 14.11 – פתרון של בעיית עצירה אופטימלית יהיה בעזרת נוסחאות רקורסיביות מהסוף להתחלה, כלי מרכזי בכך יהיה שימוש בתוחלת מותנית. נזכיר כי:

$$\mathbb{E}[Y|X_1, \dots, X_k] = h(X_1, \dots, X_k)$$

כאשר אם Y מ"מ בדיד:

$$h(x_1, \dots, x_k) = \sum_{y \in Y} \mathbb{P}(Y = y|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$$

הגדרה 14.12 backward recursion – בהינתן ערכי גמול מסוימים $Y_1, \dots, Y_n$, מגדירים סדרת מ"מ $V_1, \dots, V_n$ מהסוף להתחלה כאשר בסוף $V_n = Y_n$. מגדירים ברקורסיה, לכל $k < n$ את הגודל V_k להיות המקסימום בין הגמול Y_k בזמן k לבין התוחלת המותנית של הגמול Y_{k+1} בזמן $(k+1)$ בהינתן כל הערכים הקודמים:

$$V_k = \max\{Y_k, \mathbb{E}[V_{k+1}|X_1, \dots, X_k]\}$$

במצב זה, הערך של הבעיה במצב ההתחלתי הוא:

$$V_0 = \max_{\tau} \mathbb{E}[Y_\tau]$$

כלומר הערך שבו מתקבל מקסימום גמול. וזמן העצירה הוא הזמן המוקדם ביותר שבו הגמול מעצירה שווה לערך עצמו (כלומר לא משתלם להמשיך):

$$\tau^* = \min\{k: Y_k = V_k\}$$

דוגמה 14.13 – נניח $n = 2$ ונניח $X_0 = 0$ והמשתנים המקריים X_1, X_2 יכולים לעלות או לרדת ב-1 בהסתברות אחידה.

$$X_1 \overset{iid}{\sim} X_2 \sim \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

זמן העצירה הוא בתוך $\tau \in \{0,1,2\}$.

נניח כי הגמול הוא:

$$Y_0 = 10$$
$$Y_1 = \frac{11 + X_1}{1.2}$$
$$Y_2 = \frac{13 + X_1 + X_2}{1.3}$$

נרצה למצוא את Y שמביא למקסימום את הרווח ואת זמן העצירה.

פתרון 14.13 – באמצעות $backward\ recursion$ נגדיר $V_2 = Y_2$.

עבור הערך הבא נקבל:

$$\begin{aligned} V_1 &= \max\{Y_1, \mathbb{E}(V_2|X_1)\} \\ &= \max\left\{\frac{11 + X_1}{1.2}, \mathbb{E}\left(\frac{13 + X_1 + X_2}{1.3}\middle|X_1\right)\right\} \\ &\overset{\mathbb{E}(X_2)=0}{=} \max\left\{\frac{11 + X_1}{1.2}, \mathbb{E}\left(\frac{13 + X_1}{1.3}|X_1\right)\right\} \\ &= \max\left\{\frac{11 + X_1}{1.2}, \frac{13 + X_1}{1.3}\right\} \\ &= \begin{cases} 140/13, & X_1 = 1 \\ 120/13, & X_1 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

[לא בטוח לגבי זה] כלומר בצעד השני, אם $X_1 = 1$ נרצה להמשיך ואילו אם $X_1 = -1$ אז נרצה לעצור.

שלב אחרון:

$$V_0 = \max\{Y_0, \mathbb{E}(V_1)\} = \max\left\{10, \frac{1}{2} \cdot \frac{140}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{13}\right\} = 10$$

כלומר זמן העצירה המשתלם ביותר הוא בהתחלה כלומר:

$$\tau^* = \min_k\{k:\ Y_k = V_k\} = 0$$

ותוחלת הרווח היא 10.

דוגמה 14.14 –

$$X_1 \overset{iid}{\sim} X_2 \sim \begin{cases} 1, & \frac{2}{3} \\ -1, & \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$Y_0 = 10$$
$$Y_1 = \frac{11 + X_1}{1.1}$$
$$Y_2 = \frac{13 + X_1 + X_2}{a}$$

עבור מספר נתון כלשהו a.

פתרון 14.14

$$V_2 = Y_2$$
$$V_1 = \max\left\{Y_1, \mathbb{E}\left(\frac{13 + X_1 + X_2}{a}\middle|X_1\right)\right\} = \max\left\{Y_1, \frac{13 + X_1}{a} + \frac{\mathbb{E}(X_2)}{a}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{11 + X_1}{1.1}, \frac{13 + X_1 + 1/3}{a}\right\}$$

אם $X_1 = 1$ אנחנו מקבלים $V_1 = \max\left\{\frac{12}{1.1}, \frac{14+1/3}{a}\right\}$. כדי שיתקבל $Y_1 \geq V_1$ במקרה זה נדרש:

$$\frac{12}{1.1} \geq \frac{14 + 1/3}{a} \Rightarrow a \geq (14 + 1/3) \cdot \frac{1.1}{12} = 1.1972$$

לכן עבור ערך $a \geq 1.33$ נעצור ב-1 $\tau^* =$ עבור $X_1 = 1$

אם $X_1 = -1$ אנחנו מקבלים $V_1 = \max\left\{\frac{10}{1.1}, \frac{12+1/3}{a}\right\}$. בדומה במקרה זה נדרש כדי שיתקבל $Y_1 \geq V_1$:

$$\frac{10}{1.1} \geq \frac{12 + 1/3}{a} \Rightarrow a \geq (12 + 1/3) \cdot \frac{1.1}{10} = 1.3566$$

עבור ערכים קטנים יותר של a זמן העצירה יהיה $\tau^* = 2$.

למשל עבור $a = 1.33$ נעצור כאשר $X_1 = 1$ בזמן $\tau^* = 1$ ואילו כאשר $X_1 = -1$ נעצור רק בזמן $\tau^* = 2$.

שיעור מספר 12

תכנון דינמי עבור בעיות עצירה

דוגמה 14.15 – עבור אופק $n = 2$, תצפיות X_1, X_2 מ"מ ב"ת ש"ה המקיימים:

$$P(X_1) = P(X_2) = \begin{cases} 1.3, & 0.5 \\ 0.8, & 0.5 \end{cases}$$

ופונקציית רווח:

$$Y_0 = 70 - 65 = 5$$
$$Y_1 = \max\{0, 70 - 65 \cdot X_1\}$$
$$Y_2 = \max\{0, 70 - 65 \cdot X_1 \cdot X_2\}$$

יש למצוא זמן עצירה שממקסם את הרווח, ואת תוחלת הרווח בזמן עצירה זה. כלומר יש למצוא τ^* כך ש-:

$$\tau^* = \max_{\tau \leq 2} \mathbb{E}[Y_\tau]$$

ההחלטה היא החלטה בינארית, כלומר בכל איטרציה אנחנו צריכים להחליט האם לעצור או להמשיך על בסיס התצפיות הקודמות.

פתרון: נגדיר מהסוף להתחלה:

$$V_2 = Y_2$$
$$V_1 = \max\{Y_1, \mathbb{E}[V_2|X_1]\}$$

$V_0 = \max\{Y_0, \mathbb{E}[V_1|\emptyset]\} = \max\{Y_0, \mathbb{E}[V_1]\}$

זמן העצירה הינו:

$\tau^* = \min\{k: Y_k = V_k\}$

ניתן לתאר את התהליך כעץ שהשורש שלו בזמן 0 וכל הענפים שלו הינם בהסתברות $\frac{1}{2}$.

$$\xrightarrow{X_2=0.8} \max\{0, 70 - 65 \cdot 0.8 \cdot 1.3\} = 2.4$$

$$\xrightarrow{X_1=0.8} \max\{0,70 - 65 \cdot 0.8\} = 18$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_2=1.3} \max\{0, 70 - 65 \cdot 0.8 \cdot 0.8\} = 28.4$$

$$Y_0 = 5$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_2=0.8} \max\{0, 70 - 65 \cdot 1.3 \cdot 0.8\} = 2.4$$

$$\xrightarrow{X_1=1.3} \max\{0,70 - 65 \cdot 1.3\} = 0$$

$$\xrightarrow{X_2=1.3} \max\{0,70 - 65 \cdot 1.3 \cdot 1.3\} = 0$$

על בסיס העץ ניתן לחשב את V_2, V_1, V_0 לפי ההסתברויות שעל ענפי העץ. נשים לב שאנחנו מייצרים שני V_1 לכל אחד מענפי העץ (בהינתן התצפיות עד לאותו שלב):

$$(V_1|X_1 = 0.8) = \max\left\{18, 2.4 \cdot \frac{1}{2} + 28.4 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 18$$

$$(V_1|X_1 = 1.3) = \max\left\{0, 0 \cdot \frac{1}{2} + 2.4 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 1.2$$

$$V_0 = \max\left\{5, \frac{1}{2}(1.2 + 18)\right\} = 9.6$$

$$\tau^* = \min\{k: Y_k = V_k\} = \begin{cases} 1, & X_1 = 0.8 \\ 2, & otherwise \end{cases}$$

דוגמה 14.16 - $n = 3$, התצפיות X_1, X_2 מ"מ ש"ה ב"ת,

$$P(X_1) = P(X_2) = \begin{cases} 1.3, & 0.5 \\ 0.8, & 0.5 \end{cases}$$

X_1	X_2	$P(X_3 = 1.3)$	$P(X_3 = 0.8)$
1.3	1.3	1/3	2/3
0.8	0.8	2/3	1/3
1.3	0.8	1/4	3/4
0.8	1.3	1/4	3/4

כאשר

$S_0 = 65$

$$S_i = 65 \cdot \prod_{j=1}^{i} X_j$$

$Y_j = \max\{0{,}80 - S_i\}$

נדרש למצוא פתרון עצירה אופטימלי

פתרון בעזרת עץ:

$$\xrightarrow{X_3=0.8} 46.72$$

$$\xrightarrow{X_2=1.3} \max\{0,80 - 65 \cdot 0.8 \cdot 1.3\} = 12.4$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_3=1.3} 25.92$$

$$\xrightarrow{X_1=0.8} \mathrm{Y}_1 = \max\{0{,}80 - 65 \cdot 0.8\} = 28$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_3=0.8} 25.92$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_2=0.8} \max\{0,80 - 65 \cdot 0.8 \cdot 0.8\} = 38.4$$

$$\xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

$Y_0 = 80 - 65 = 15$

$$\xrightarrow{X_3=0.8} 25.92$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_2=0.8} \max\{0,80 - 65 \cdot 1.3 \cdot 0.8\} = 12.4$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

$$\xrightarrow{X_1=1.3} \mathrm{Y}_1 = \max\{0{,}80 - 65 \cdot 1.3\} = 0$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_3=0.8} 0$$

$$\xrightarrow{X_2=1.3} \max\{0{,}80 - 65 \cdot 1.3 \cdot 1.3\} = 0$$

$$\xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

כאשר ההסתברויות בענף השלישי הן לא שוות אלא תלויות בתצפיות הקודמות כפי שהגדרנו בטבלה. עתה ניתן להגדיר עץ חדש לערכים של V:

בשורה האחרונה של V מעתיקים את הערכים של Y, והולכים אחורה עד לשורש:

$$\xrightarrow{X_3=0.8} Y_3 = V_3 = 46.72$$

$$\xrightarrow{X_2=0.8} V_2 = \max\left\{Y_2 = 12.4, \frac{1}{4} \cdot 25.92 + \frac{3}{4} \cdot 0\right\} = 12.4$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_3=1.3} Y_3 = V_3 = 25.92$$

$$\xrightarrow{X_1=0.8} V_1 = \max\left\{Y_1 = 28, 12.4 \cdot \frac{1}{2} + 38.4 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 28$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_3=0.8} 25.92$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_2=1.3} V_2 = \max\left\{38.4, \frac{2}{3} \cdot 25.92 + \frac{1}{3} \cdot 46.72\right\} = 38.4$$

$$\xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

$$V_0 = \max\left\{Y_0 = 15{,}28 \cdot \frac{1}{2} + 9.72 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 18.86$$

$$\xrightarrow{X_3=0.8} 25.92$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_2=0.8} V_2 = \max\left\{12.4, \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 25.92\right\} = 19.44$$

$$\uparrow \qquad \xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

$$\xrightarrow{X_1=1.3} V_1 = \max\left\{0, \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 19.44\right\} = 9.72$$

$$\downarrow \qquad \xrightarrow{X_3=0.8} 0$$

$$\xrightarrow{X_2=1.3} V_2 = \max\left\{0, \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0\right\} = 0$$

$$\xrightarrow{X_3=1.3} 0$$

כלומר תוחלת הגמול היא 18.86 וזמן העצירה תלוי בשאלה מתי יש שוויון בין $Y_k = V_k$.

- בזמן 0 אין שוויון לכן בהכרח ממשיכים.
- בזמן 1 מתקיים $V_1 = Y_1 | X_1 = 0.8$ לכן עוצרים. אם $X_1 = 1.3$ ממשיכים.
- בזמן 2 מתקיים $V_2 = Y_2 | X_1 = 1.3, X_2 = 1.3$ לכן עוצרים. אם $X_1 = 1.3$ אבל $X_2 = 0.8$ ממשיכים
- בזמן 3 מתקיים $V_3 = Y_3 | X_1 = 1.3, X_2 = 0.8$ לכל ערך של X_3 ולכן עוצרים בזמן 3.

בסך הכל:

$$\tau^* = \min\{k: Y_k = V_k\} = \begin{cases} 1, & X_1 = 0.8 \\ 2, & X_1 = 1.3, X_2 = 1.3 \\ 3, & otherwise \end{cases}$$

הערה 14.17 – נשים לב כי $V_k = \max\{Y_k, \mathbb{E}(V_{k+1} | X_1, \dots, X_k)\}$ הוא משתנה מקרי שמודד את הגמול המקסימלי האפשרי בזמן k בהינתן תצפיות קודמות כלשהן $X_1, \dots, X_k$. תמיד מתקיים $V_k \geq Y_k$ ואם $V_k = Y_k$ כדאי לעצור, ועושים זאת בפעם הראשונה שבה זה קורה.

15. תכנון דינמי עבור בעיות החלטה לא בינאריות

הגדרה 15.1 – תיאור הבעיה – נניח שיש ברשותנו הון התחלתי כלשהו $V_0 = 100$, וישנם n משחקים ב"ת ש"ה. בכל משחק מחליטים על איזה סכום משחקים – בהסתברות p מכפילים את הסכום ובהסתברות $(1-p)$ מפסידים את הסכום.

רוצים למקסם את התועלת (utility) מהמשחקים:

$$\max \mathbb{E}[u(V_n)]$$

לרוב התועלת היא פונקציה קעורה ועולה, כלומר $u'' < 0$ ולכן u' פונקציה יורדת.

כלומר אנחנו רוצים להחליט על כמה הון להמר בכל משחק.

אינטואיציה 15.2 - ההגיון הכלכלי – רווח אבסולוטי של סכום מסוים הוא בעל משמעות שונה ותלוי בהון שנמצא ברשותך. נניח שלשני אנשים יש הון – לאחד יש x ולאחד יש y, והמדד ל'אושר' מרווח של שקל אחד הוא $u(x+1)-u(x)$ ו-$u(y+1)-u(y)$ בהתאמה. אם $x<y$ אז התועלת השולית יורדת כלומר

$$u(y+1)-u(y)<u(x+1)-u(x)$$

ובאופן כללי לכל סכום $z>0$ מתקיים:

$$u(y+z)-u(y)<u(x+z)-u(x)$$

וזה מתקיים באופן שקול לכך ש-u' יורדת כלומר $u''<0$.

דוגמה 15.3 – דוגמאות לפונקציות תועלת

1. $u(x)=\ln(x)$. מניחים שההון x הוא אי-שלילי.
2. $u(x)=x^p$ כאשר $0<p<1$. גם כאן מניחים שההון x הוא אי-שלילי.
3. $u(x)=1-e^{-x}$ אקספוננציאלי. כאן x מקבל כל ערך.

דוגמה 15.4 – נניח $u(x)=\ln(x)$. נפתור גם כאן באמצעות תכנון דינמי מהסוף להתחלה.

עבור משחקים $n,\dots,1$, נגדיר לכל משחק את הפונקציה $W_k(x)$ שמשמעותה שנכנסנו למשחק בסוף זמן k וההון ההתחלתי הוא x, כלומר ניתן לשחק רק במשחקים $(k+1),(k+2),\dots,n$:

$$W_k=\max\mathbb{E}[u(x)]=\max\mathbb{E}[\ln(V_n)]$$

תנאי השפה הוא (כאשר לא משחקים שום משחק, כלומר התועלת היא פשוט תועלת ההון):

$$W_n(x)=\ln(x)$$

נרצה לחשב את $W_k(x)$ בעזרת $W_{k+1}(x)$.

נניח שבכל משחק אנחנו מהמרים על y (כלומר בסכום $x-y$ לא נוגעים). בהסתברות p נקבל $x-y+2y=x+y$ ובהסתברות $(1-p)$ נשארים רק עם $x-y$ שלא הימרנו עליהם. תוחלת הרווח היא:

$$W_k(x)=\max_y p\cdot W_{k+1}(x+y)+(1-p)\cdot W_{k+1}(x-y)]$$

כאשר y יכול להיות תלוי ב-x וב-k.

פתרון:

$$W_n(x)=\begin{cases}\ln(x), & x>0\\ -\infty, & x\le 0\end{cases}$$

עבור השלב הלפני-אחרון מתקיים, עבור x נתון:

$$\max_y p\cdot\ln(x+y)+(1-p)\cdot\ln(x-y)$$

נשים לב כי אם $x\le 0$ אז הביטוי שווה ל-$-\infty$ לכל y ולכן לא משתלם בשום שלב להמר על סכום שגדול יותר מהסכום ברשותך. לכן נניח $x>0$. נעשה מקסימום על התחום $[-x,x]$ כדי שהערכים $(x+y),(x-y)$ יהיו גדולים מ-0.)

$$\max_{-x<y<x} p\cdot\ln(x+y)+(1-p)\cdot\ln(x-y)$$

נגזור לפי y ונקבל:

$$\frac{p}{x+y}-\frac{1-p}{x-y}=0\Rightarrow$$
$$px-py-(1-p)x-(1-p)y=0\Rightarrow$$

$y = (2p-1)x$

ולכן:

$$\begin{aligned}
W_{n-1}(x) &= p \cdot \ln(x+y) + (1-p) \cdot \ln(x-y) \\
&= p \cdot \ln(x + 2px - x) + (1-p) \cdot \ln\,(x - 2px + x) \\
&= p \cdot \ln(2px) + (1-p) \cdot \ln(2 - 2px) \\
&= p(\ln(2) + \ln(p) + \ln(x)) + (1-p)(\ln(2) + \ln(1-p) + \ln(x)) \\
&= \ln(2) + \ln(x) + p \cdot \ln(p) + (1-p)\ln(1-p) \\
&= \ln(2) + W_n(x) - H(p)
\end{aligned}$$

כאשר $H(p)$ הוא האנטרופיה של משתנה מקרי מתפלג ברנולי.

לכן ניתן להציג את הביטוי בתור:

$$W_{n-1}(x) = \ln(2) + p \cdot \ln(p) + (1-p)\ln(1-p) + \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ -\infty, & x \le 0 \end{cases}$$

באינדוקציה ניתן להראות כי הדבר קורה בכל צעד וצעד (כיוון שהאירועים בלתי-תלויים):

$$W_k(x) = (n-k) \cdot [\ln(2) + p \cdot \ln(p) + (1-p)\ln(1-p)] + \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ -\infty, & x \le 0 \end{cases}$$

ההשקעה האופטימלית תהיה בכל שלב $y = (2p-1)x$.

ובשלב ההתחלתי:

$$W_0(x) = \ln(x) + n\big(\ln(2) - H(p)\big)$$

כלומר האסטרטגיה האופטימלית היא להשקיע פרופורציה קבועה בכל משחק ואת השאר לשמור למשחק הבא.

דוגמה 15.5 – נניח $u(x) = \sqrt{x}$ עבור $x > 0$ ו-$u(x) = -\infty$ אחרת. גם כאן נניח n משחקים עם הסתברות p להכפיל את הסכום ו-$(1-p)$ להפסיד את הסכום.

הצעד נותר זהה לדוגמה הקודמת

$$W_k(x) = \max_y \big(p \cdot W_{k+1}(x+y) + (1-p) \cdot W_{k+1}(x-y)\big)$$

תנאי השפה הוא שמשתנה:

$$W_n(x) = u(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\infty, & x \le 0 \end{cases}$$

כמו קודם נחשב:

$$W_{n-1}(x) = \max_{-x \le y \le x} p \cdot \sqrt{x+y} + (1-p)\sqrt{x-y}$$

נגזור, נשווה ל-0 ונקבל:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\sqrt{x+y}} - \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{p}{1-p} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \Rightarrow$$
$$\frac{x+y}{x-y} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y = x \cdot \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 - 1}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + 1} = x \cdot \frac{p^2 - (1-p)^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

ולכן:

$$W_{n-1}(x) = p \cdot \sqrt{x + x \cdot \frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}} + (1-p) \cdot \sqrt{x - x \cdot \frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}}$$
$$= p \cdot \sqrt{x\left(1 + \frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}\right)} + (1-p) \cdot \sqrt{x\left(1 - x\frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}\right)}$$
$$= p \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}} + (1-p) \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}}$$
$$= p \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{2p^2}{p^2+(1-p)^2}} + (1-p) \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{2(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}}$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{p^2+(1-p)^2}{\sqrt{p^2+(1-p)^2}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{2(p^2+(1-p)^2)}$$

כאשר מתקיים $\sqrt{2(p^2+(1-p)^2)} \geq 1$ ולכן תוחלת הרווח אחרי n משחקים (באינדוקציה כמו בתרגיל הקודם):

$$W_0(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{2(p^2+(1-p)^2)}\right)^n$$

ולכן השקעה אופטימלית היא לסכן את הפרופורציה $\frac{p^2-(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}$ בכל משחק.

הרצאה מספר 13

16. תרגילי חזרה למבחן

תרגיל 16.1 תרגיל 3 שאלה 1

1. Let X_1, X_2, X_3 be i.i.d. random variables which satisfy

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2.$$

Define $Y_0 := 0$ and

$$Y_i := \prod_{j=1}^{i} X_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Find the optimal stopping value and the corresponding optimal stopping time for the problem

$$\sup_{\tau \leq 3} \mathbb{E}\left[Y_\tau\right].$$

עבור $n = 0,1,2,3$ מקבלים

$Y_0 = 0$
$Y_i = X_1 \cdot \ldots \cdot X_i$

מתקבל:

$$V_3 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

ואז רקורסיבית

$$V_2 = \max\big(X_1 \cdot X_2, \mathbb{E}(V_3|X_1, X_2)\big) = \max\big(X_1 \cdot X_2, \mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3|X_1, X_2)\big)$$
$$= \max\big(X_1 \cdot X_2, X_1 \cdot X_2 \cdot \mathbb{E}(X_3|X_1, X_2)\big)$$
$$= \max(X_1 \cdot X_2, X_1 \cdot X_2 \cdot 0)$$
$$= \max(X_1 \cdot X_2, 0)$$

עבור V_1:

$$V_1 = \max\big(X_1, \mathbb{E}(V_2|X_1)\big) =$$
$$\max\big(X_1, \mathbb{E}(max(X_1 \cdot X_2, 0)\ |X_1)\big) =$$
$$\max\big(X_1, \mathbb{E}(max(X_1 \cdot X_2, 0)\ |X_1)\big) =$$
$$\max\left(X_1, \frac{1}{2}\right)$$

ולבסוף:

$$V_0 = \max\big(0, \mathbb{E}(V_1)\big) = \frac{1}{2}\max\left(1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\max\left(-1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

כדי לדעת מה זמן העצירה האופטימלי נקבל:

$$Y_0 = 0$$
$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_1 \cdot X_2$$
$$Y_3 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

בזמן $t = 0$ אנחנו מקבלים תמיד

$$Y_0 \neq V_0$$

בזמן $t = 1$ אנחנו מקבלים שאם $X_1 = 1$ יש שוויון

$$Y_1 = X_1 = \max\left(X_1, \frac{1}{2}\right) = V_1 \Leftrightarrow X_1 = -1$$

בזמן $t = 2$ אנחנו מקבלים שכדאי לעצור עבור $X_2 = -1$.

אם התנאים הקודמים לא מתקיימים כדאי לעצור רק בזמן העצירה האחרון.

ובסך הכל

$$\tau^* = \begin{cases} 1, & X_1 = 1 \\ 2, & X_2 = -1 \\ 3, & otherwise \end{cases}$$

תרגיל 16.2 - תרגיל 3 שאלה 2

2. Let $X_1, \ldots, X_{100}$ be i.i.d. random variables which satisfy

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2.$$

Let $\alpha \in \mathbb{R}$ be a given real (deterministic) number. Set Y_0 and

$$Y_k = \left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right]^2 - \alpha k, \quad k = 1, \ldots, 100.$$

Find the optimal stopping times value and the corresponding optimal stopping time for the problem

$$\sup_{\tau \le 100} \mathbb{E}[Y_\tau].$$

Notice that the optimal stopping time depends on α.

נתון כי $X_i = \pm 1$ (טעות בדפוס של התרגיל).

החישוב המקדים שנעשה הוא להסתכל עבור k כלשהו מה התוחלת המותנית:

$$\mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_{k+1})^2 | X_1, \ldots, X_k]$$

נחשב כך:

$$\begin{aligned}
&(X_1 + \cdots + X_{k+1})^2 \\
&\overset{X_{k+1}^2 = (\pm 1)^2 = 1}{=} (X_1 + \cdots + X_k)^2 + X_{k+1}^2 + 2(X_1 + \cdots + X_k) \cdot X_{k+1} \\
&= 1 + (X_1 + \cdots + X_k)^2 + 2(X_1 + \cdots X_k) \cdot X_{k+1}
\end{aligned}$$

ולכן התוחלת המותנית היא:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_{k+1})^2 | X_1, \ldots, X_k] \\
&= \mathbb{E}[(1 + (X_1 + \cdots + X_k)^2 + 2(X_1 + \cdots X_k) \cdot X_{k+1}) | X_1, \ldots, X_k] \\
&\overset{linearity\ of\ expectation}{=} 1 + (X_1 + \cdots X_k)^2 + 2(X_1 + \cdots X_k) \cdot \mathbb{E}(X_{k+1} | X_1, \ldots, X_k) \\
&\overset{iid\ therefore\ cond.expectation\ is\ the\ expectation}{=} 1 + (X_1 + \cdots X_k)^2 + 2(X_1 + \cdots X_k) \cdot 0 \\
&= 1 + (X_1 + \cdots X_k)^2
\end{aligned}$$

נחשב עתה את הנוסחה עבור V_k.

$$\begin{aligned}
&V_{100} = Y_{100} = (X_1 + \cdots + X_{100})^2 - 100 \cdot \alpha \\
&V_{99} = \max\big(Y_{99}, \mathbb{E}(V_{100} | X_1, \ldots, X_{99})\big) \\
&= \max((X_1 + \cdots + X_{99})^2 - 99 \cdot \alpha, (X_1 + \cdots + X_{99})^2 + 1 - 100 \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

מאיטרציה אחת אנחנו מבינים ש-

$$V_{99} = \begin{cases} (X_1 + \cdots + X_{99})^2 - 99\alpha, & \alpha \ge 1 \\ (X_1 + \cdots + X_{99})^2 + 1 - 100\alpha, & \alpha < 1 \end{cases}$$

נוכיח לפיכך באינדוקציה את הטענה הבאה לכל $0 \le k \le 100$:

$$V_k = \begin{cases} (X_1 + \cdots + X_k)^2 - k \cdot \alpha, & \alpha \ge 1 \\ (X_1 + \cdots + X_k)^2 + (100 - k) - 100\alpha, & \alpha < 1 \end{cases}$$

ההוכחה באינדוקציה תהיה לאחור – בסיס האינדוקציה יהיה ב-$k = 100$ ונראה שאם נכון ל-k אז נכון גם ל-$(k-1)$ על בסיס החישוב שביצענו.

בסיס האינדוקציה – עבור $k = 100$ מתקיים:

$$V_{100} = Y_{100} = (X_1 + \cdots X_{100})^2 - 100\alpha$$

נראה שאם הטענה נכונה עבור k אז היא נכונה גם עבור $(k-1)$.

ראשית - עבור $\alpha \geq 1$

$$V_{k-1} = \max\big(Y_{k-1}, \mathbb{E}(V_k|X_1, \dots, X_{k-1})\big) =$$
$$\max((X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 - \alpha(k-1), \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_k)^2 - \alpha \cdot k|X_1, \dots, X_k) =$$
$$\max((X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 - \alpha(k-1), (X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 + 1 - \alpha \cdot k)$$

כאשר $\alpha \geq 1$ הצד השמאלי יותר גדול ולכן

$$= (X_1 + \cdots + X_{k+1})^2 - \alpha(k-1)$$

שנית - עבור $\alpha < 1$:

$$V_{k-1} = \max\big(Y_{k-1}, \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_k)^2 + (100-k) - 100\alpha|X_1, \dots, X_{k-1})\big) =$$
$$\max((X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 - \alpha(k-1), ((X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 + 1 + 100 - k - 100\alpha)$$

עבור $\alpha < 1$ הביטוי הגדול הוא הימני

$$= (X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 + 1 + 100 - k - 100\alpha$$
$$= (X_1 + \cdots + X_{k-1})^2 + \big(100 - (k-1)\big) - 100\alpha$$

בסך הכל אנחנו מקבלים:

$$V_0 = \begin{cases} 0, & \alpha \geq 1 \\ 100(1-\alpha), & \alpha < 1 \end{cases}$$

לכן עבור $\alpha \geq 1$ אנחנו מקבלים:

$$Y_0 = 0 = V_0$$

אז עוצרים בתחילת התהליך ואילו אם $\alpha < 1$ זמן העצירה האופטימלי יהיה בסוף התהליך.

תזכורת 16.3 - תאוריה כללית של בקרה אופטימלית

יהיו $Z_1, \dots, Z_n$ מ"מ ב"ת המייצגים את האקראיות של המערכת והתפלגותם ידועה (לא בהכרח זהה לכל המשתנים). אנחנו מתארים מערכת דינמית שבה יש X_0 המהווה תנאי התחלה, ונוסחה רקורסיבית המציגה את המצב בזמן k לצד הבקרה (או הפעולה) בזמן המתאים וגורם אקראי כלשהו:

$$X_{k+1} = f_k(X_k, \alpha_k, Z_{k+1})$$

הבקרה היא הפעולה α_k, הפונקציה f_k ידועה.

אנחנו רוצים למקסם פונקציית תועלת ($utility$) כלשהי U ואנחנו מעוניינים למקסם את התוחלת $\mathbb{E}[U(X_n)]$. כאשר הבקרה בזמן k (שהיא α_k) נבחרת לפי התצפיות עד לזמן k, כאשר בשלב זה התצפיות מ-Z_{k+1} והלאה לא נצפות.

דוגמה 16.4 – נניח שמתחילים עם סכום מסוים (100 שקל) וישנם מספר כלשהו של משחקים בלתי תלויים (נניח 100). בכל משחק i, יש הסתברות כלשהי p_i לנצח והסתברות כלשהי $(1-p_i)$ להפסיד (ההסתברויות נתונות וידועות מראש), כאשר ניצחון מכפיל את הסכום ב-2 והפסד מפסיד את כל הסכום. בזמן i אנחנו נדרשים להחליט מה הסכום שאנחנו רוצים להמר עליו במסגרת המשחק ה-i.

במקרה זה $X_0 = 100$ ומתקיים

$$X_{k+1} = f_k(X_k, \alpha_k, Z_{k+1})$$

כלומר X_k הוא הסכום שברשותנו בזמן k.

הסכום שעליו מהמרים בזמן k הוא $\alpha_k \cdot X_k$, כאשר $1 \geq \alpha_k \geq 0$.

משתנה הרעש Z_{k+1} שווה ל-1 אם ניצחנו ו-מינוס 1 אם הפסדנו. ולכן:

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k - X_k \cdot \alpha_k, & Z_{k+1} = -1 \\ X_k + X_k \cdot \alpha_k, & Z_{k+1} = 1 \end{cases}$$

לפיכך ניתן להציג את הפונקציה f_k על ידי:

$$f_k(x, \alpha, z) = x(1 + \alpha \cdot z)$$

באופן כללי עבור סכום זכייה שאיננו זהה ניתן להציג באופן כללי (למשל אם הזכייה היא פי 3 מהסכום)

$$X_{k+1} = f(x, \alpha, z) = \begin{cases} x(1-\alpha)z, & Z_{k+1} = -1 \\ x(1+2\alpha)z, & Z_{k+1} = 1 \end{cases}$$

באופן כללי, אם כן, נרצה למקסם את התוחלת של פונקציית התועלת:

$$\mathbb{E}\big(u(X_n)\big)$$

כאשר התוחלת נגזרת מההתפלגות של $Z_1, \ldots, Z_n$ ובפונקציית התועלת.

המשך תזכורת 16.5 – לרוב u תהיה פונקציה מונוטונית עולה וקעורה המוגדרת על החלק החיובי של הישר. למשל:

$$u(x) = x^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$
$$u(x) = \ln(x)$$
$$u(x) = \sqrt{x}$$

נגדיר אלגוריתם דינמי באופן הבא.

נגדיר $u_k(x)$ בתור תוחלת הרווח כאשר נכנסים למערכת בזמן k עם הון X. כאשר זמן העצירה הוא n אז תנאי השפה הוא:

$$u_n(x) = u(x)$$

ואז מהסוף להתחלה:

$$u_k(x) = \max_\alpha \mathbb{E}\big[u_{k+1}\big(f_k(x, \alpha_k, z_{k+1})\big)\big]$$

כאשר מחשבים את הבקרה האופטימלית לפי המצב הנתון כלומר $\alpha_k = \alpha_k(x)$.

תרגיל 16.6 - תרגיל 3 שאלה 3

3. Consider an investor who invests in a stock market and has initial capital $x = 1$. Every day the investor decides how much of the wealth to invest in the market. The stock market has the following property. If you invest an amount y then with probability $1/3$ you double your money and with probability $2/3$ you loose half of the amount. Namely y becomes $2y$ with probability $1/3$ and y becomes $y/2$ with probability $2/3$. The days are independent. The goal is to maximize the expected value of the square root of your wealth after two days. Formally, the optimization problem is

$$\max \mathbb{E}\left[\sqrt{V_2}\right]$$

where $V_0 = 1$. Find the optimal strategy and the corresponding optimal value. Hint: the control is the proportion of the wealth that you wish to invest.

בנתוני השאלה אנחנו מכפילים את הסכום בהסתברות 1/3 ומפסידים חצי מהסכום בהסתברות 2/3. צריך לקבל את התוחלת של השורש.

האופק הוא $n = 2$.

כיוון ש-α מתפלג באופן זהה לאורך כל המשחקים אז הוא לא תלוי ב-k. בהנחה ש-Z_i הוא 1 אם הרווחנו בהימור ה-i ו-0 אם הפסדנו בהימור ה-i אזי:

$$X_{i+1} = f(x,\alpha,z) = \begin{cases} X_i(1-\alpha) + 2\cdot X_i\cdot\alpha, & Z_i = 1 \\ X_i(1-\alpha) + \dfrac{X_i\cdot\alpha}{2}, & Z_i = 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i(1+\alpha), & Z_i = 1 \\ X_i\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right), & Z_i = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי פונקציית התועלת היא $u_2(x) = \sqrt{x}$.

$$u_1(x) = \max_{\alpha} \mathbb{E}(u_2(f(x,\alpha,z))) = \frac{1}{3}\sqrt{x(1+\alpha)} + \frac{2}{3}\sqrt{x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

צריך לעשות אופטימיזציה לכן לגזור לפי α ולהשוות ל-0. נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\sqrt{x}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}} \Leftrightarrow \alpha = 0$$

כלומר ההשקעה האופטימלית היא לא להשקיע בכלל, לכן נקבל:

$$u_1(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}_2 + \frac{2}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x}$$

בדרך דומה

$$u_0(x) = \sqrt{x}$$

תרגיל 16.7 – ניקח $u(x) = \sqrt[3]{x}$, ונניח ההסתברויות הן בהתפלגות אחידה. שאר הנתונים כמו התרגיל הקודם. נניח $n = 3$. כלומר:

$$u_3(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$u_2(x) = \max_{\alpha}\frac{1}{2}\sqrt[3]{x(1+\alpha)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \max_{\alpha}\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\left[\sqrt[3]{(1+\alpha)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

שוב נגזור ונשווה ל-0:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\alpha)^{2/3}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\right) = 0 \Leftrightarrow (1+\alpha)^{2/3} = 2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3} \Leftrightarrow$$

$$1+\alpha = 2^{3/2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow 1+\alpha = \sqrt{8} - \sqrt{8}\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt{8}-1}{1+\sqrt{8}/2} = \frac{\sqrt{8}-1}{1+\sqrt{2}}$$

נסמן α שהתקבל בתור α^*.

ולכן נקבל

$$u_2(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\left[\sqrt[3]{(1+\alpha^*)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{\alpha^*}{2}\right)}\right]$$

נסמן:

$$A=\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(1+\alpha^*)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{\alpha^*}{2}\right)}\right]$$

ואז

$$u_2(x)=\sqrt[3]{x}\cdot A$$

ובגלל שההסתברויות שוות נקבל:

$$u_1(x)=\max_{\alpha}\left[\frac{1}{2}u_2\big(x(1+\alpha)\big)+\frac{1}{2}u_2\left(x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

נשתמש באותו $\alpha=\alpha^*$.

$$=A\cdot\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(1+\alpha^*)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{\alpha^*}{2}\right)}\right]=A^2\sqrt[3]{x}$$

ולבסוף

$$u_0(x)=\max_{\alpha}\left[\frac{1}{2}u_1\big(x(1+\alpha)\big)+\frac{1}{2}u_1\left(x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

וכמו קודם

$$=A^3\sqrt[3]{x}$$

תרגיל 16.8 – תרגיל כמו קודם, פונקציית התועלת היא $\ln(x)$.

$$u_3(x)=\ln(x)$$
$$u_2(x)=\max_{\alpha}\left[\frac{1}{2}\ln\big(x(1+\alpha)\big)+\frac{1}{2}\ln\left(x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$
$$=\max_{\alpha}\left[\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\ln(x)+\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$=\max_{\alpha}\left[\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

נגזור ונשווה ל=0:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha/2}=0\Leftrightarrow 1+\alpha=2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=2-\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{3}{2}$$

נגדיר $\alpha^*=\frac{3}{2}$ ו-:

$$A=\frac{\ln\left(1+\frac{3}{2}\right)}{2}+\frac{\ln\left(1-\frac{3}{2}\right)}{2}$$

ואז:

$$u_1(x)=\ln(x)+2A$$
$$u_0(x)=\ln(x)+3A$$

כלומר בכל השלבים נשקיע באותה פרופורציה, 150% מההון.

נספח א' - תאריכי שיעורים

מספר שיעור	תאריך
1	06.03.2022
2	13.03.2022
3	20.03.2022
4	27.03.2022
5	03.04.2022
6	10.04.2022
7	24.04.2022
8	01.05.2022
9	08.05.2022
10	15.05.2022
11	22.05.2022
12	29.05.2022
13	12.06.2022