Ex1 computer vision

מגישים:

איתמר ארז

ת.ז. 308430115

אריאל זילברשטיין

ת.ז. 315314799

2.10.2

(1) הראה כי טרנספורמציה אפינית ישמרו את התנאי מעגל לאליפסה אלא להיפרבולה או פרבולה.

תשובה: את המשוואה של קוניק ניתן לכתוב בצורה הבאה:

$$C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

כדי לקבוע את הסוג של הקוניק (אליפסה, מעגל...)
נתבונן על המטריצה השמאלית העליונה בגודל
כלומר $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. הדטרמיננט שלו יגיד את סוג הקוניקה

כלומר: $\begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}$
אם: $ac - b^2/4 = 0$ אז מדובר ב: פרבולה
אם: $ac - b^2/4 > 0$ אז מדובר ב: אליפסה
אם $ac - b^2/4 < 0$ אז מדובר ב: היפרבולה.

כפי שראינו בפרק 2 של הספר המשוואה של C תחת טרנספורמציה ניתנת ע"י:

$$C' = H^{-T} C H^{-1}$$

לכן נקבל:

$$C' = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

נתבונן בתת המטריצה השמאלית העליונה של C'
כלומר ב: $A^T \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} A$

נקבל ש:

$$\left| A^T \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} A \right| = \det(A)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = (\det(A))^2 \left(ac - b^2/4\right)$$

מאחר ו- $(\det(A))^2>0$ לכל $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

אזי אם $ac-b^2/4=0$ אז נקבל:

$(\det(A))^2(ac-b^2/4)=0 \Leftarrow$ C' פרבולה,

אם $ac-b^2/4>0$ אז נקבל:

$(\det(A))^2(ac-b^2/4)>0 \Leftarrow$ C' אליפסה.

אם $ac-\frac{b^2}{4}<0$ אז נקבל:

$(\det(A))^2(ac-b^2/4)<0 \Leftarrow$ C' היפרבולה,

סך הכול קיבלנו כי C היפרבולה אם״ם גם C' היפרבולה
ונקבל השקילויות נוספות עבור אליפסה ופרבולה.

מכאן הוכחנו את הנדרש!

$\blacksquare$

(b) נתבונן בשתי נקודות:

$$Y=(y_1,y_2) \quad , \quad X=(x_1,x_2)$$

ונקודות התמונה שלהן X' ו-Y' לאחר טרנספורמציה אפינית כלשהי:

$$Y'=(y_1',y_2')$$

$$X'=(x_1',x_2')$$

כאשר:

$$y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2$$

$$y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2$$

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2$$

$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2$$

וכן Y' ו-X' מקיימים.

אז נקבל:

$$(y_1'-x_1')=a_{11}(y_1-x_1)+a_{12}(y_2-x_2)$$

$$y_2'-x_2'=a_{21}(y_1-x_1)+a_{22}(y_2-x_2)$$

נראה כי מתקיים:

$$XY = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$X'Y' = \sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(x_1-y_1)^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(a_{12}^2+a_{22}^2)(x_2-y_2)^2}$$

עכשיו נרצה את יחס הריבועים

$$\left(\frac{X'Y'}{XY}\right)^2 = \frac{(a_{11}^2+a_{21}^2)(x_1-y_1)^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(a_{12}^2+a_{22}^2)(x_2-y_2)^2}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

נחלק למקרים

אם: (x_1-y_1) אז נקבל:

$$= \frac{(a_{12}^2+a_{22}^2)(x_2-y_2)^2}{(x_2-y_2)^2} = a_{12}^2+a_{22}^2$$

כלומר יש תלות רק במקדמים a_{22}, a_{12} של המטריצה ולא בנקודות.
אחרת, נחלק ב $(x_1-y_1)^2$ ונקבל:

$$= \frac{(a_{11}^2+a_{21}^2)+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})\left(\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}\right)+(a_{12}^2+a_{22}^2)\left(\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}\right)^2}{1+\left(\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}\right)^2}$$

נסמן $m=\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}$ ונקבל:

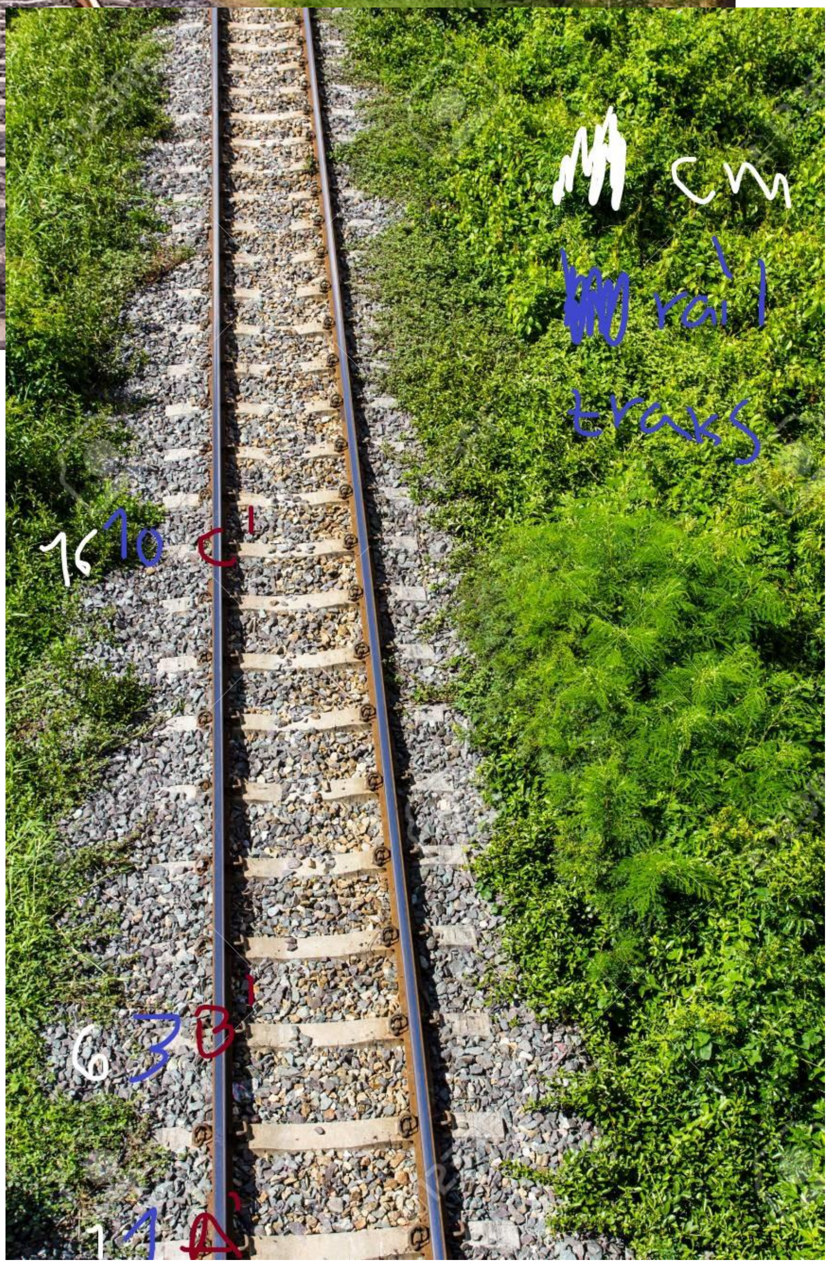
$$= \frac{a_{11}^2+a_{21}^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})m+(a_{12}^2+a_{22}^2)m^2}{1+m^2}$$

נשים לב כי A מהווה השיקוף של הקו
ישר $y=x$ שכן ~~ההופכית~~
נראה כי הביטוי שקיבלנו תלוי אך ורק בערכים
$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ של המטריצה וכן הזווית

מכאן נסיק כי הטרנספורמציה ~~[illegible]~~ משנה את
את הקו [illegible] ~~[illegible]~~ בגודל קבוע כלומר שתלוי בטרנספורמציה
, ובכן [illegible] ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ שווה

מכאן קווים מקבילים מועתקים והם הופכים לקווים
כי A השיפוע שלהם שווה ~~[illegible]~~ ובעלי
קווים לא מקבילים לא מועתקים והופכים שכן
השיפוע שלהם שונה.
כנדרש!

cross ratio:



q

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad B'=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}\quad C'=\begin{pmatrix}15\\1\end{pmatrix}\quad D'=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

נראה:

$$\mathrm{cross}(A,B,C,D)=\mathrm{cross}(A',B',C',D')$$

$$\frac{\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8&1\\1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&8\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&1\\1&0\end{vmatrix}}=\frac{(1-4)(-1)}{(1-8)(-1)}=\frac{3}{7}=\mathrm{cross}(ABCD)$$

$$\frac{\begin{vmatrix}1&6\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}16&1\\1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&15\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}6&1\\1&0\end{vmatrix}}=\frac{(1-6)(-1)}{(1-15)(-1)}=\frac{6}{14}=\mathrm{cross}(A',B',C',D')$$

ואכן קיבלנו כי הערכים בשתי התמונות מתואמים
כמרחקים נכונים זה מזה. כנדרש.

3.12 יהיו Π_1, Π_2 שני מישורים אז

$$\cos\theta = \frac{\Pi_1^T Q_\infty^* \Pi_2}{\sqrt{(\Pi_1^T Q_\infty^* \Pi_1)(\Pi_2^T Q_\infty^* \Pi_2)}}$$

הוכחה

יהיו Π_1, Π_2 מישורים כך שהייצוג בקורדינטות האוקלידיות שלהם הינו:

$$\Pi_2 = (n_2^T\ d_2)^T \qquad \Pi_1 = (n_1^T\ d_1)$$

ומאחר ו $Q_\infty^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז

$$\frac{\Pi_1^T Q_\infty^* \Pi_2}{\sqrt{(\Pi_1^T Q_\infty^* \Pi_1)(\Pi_2^T Q_\infty^* \Pi_2)}} = \frac{n_1^T n_2}{\sqrt{(n_1^T n_1)(n_2^T n_2)}}$$

רצה להראות כי תחת העתקות פרויקטיביות נשמרת הזווית בין המישורים

תהי H העתקה פרויקטיבית

מ 3.6 אנו מקבלים כי $\Pi_i' = H^{-T}\Pi_i$

מ 3.17 אנו מקבלים כי $Q_\infty^{*'} = H Q_\infty^* H^T$

נכתוב

$$\frac{\Pi_1'^T Q_\infty^{*'} \Pi_2'}{\sqrt{(\Pi_1'^T Q_\infty^{*'} \Pi_1')(\Pi_2'^T Q_\infty^{*'} \Pi_2')}} = \frac{(H^{-T}\Pi_1)^T (H Q_\infty^* H^T)(H^{-T}\Pi_2)}{\sqrt{((H^{-T}\Pi_1)^T H Q_\infty^* H^T H^{-T}\Pi_1)((H^{-T}\Pi_2)^T H Q_\infty^* H^T H^{-T}\Pi_2)}} =$$

$$= \frac{\Pi_1 H^{-1} H Q_\infty^* H^T H^{-T} \Pi_2}{\sqrt{(\Pi_1^T H^{-1} H Q_\infty^* H^T H^{-T}\Pi_1)(\Pi_2^T H^{-1} H Q_\infty^* H^T H^{-T}\Pi_2)}} = \frac{\Pi_1 Q_\infty^* \Pi_2}{\sqrt{(\Pi_1^T Q_\infty^* \Pi_1)(\Pi_2^T Q_\infty^* \Pi_2)}} =$$

ע"פ ההגדרה

$$= \cos\theta$$

כלומר קיבלנו שתחת העתקה פרויקטיבית הזווית נשמרת כנדרש.

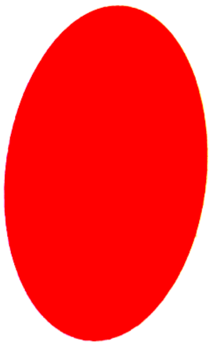
.5

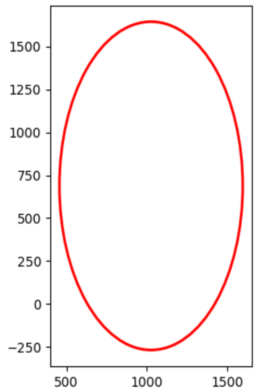
הסתבכנו בשימוש בנתונים אמתיים מאחר ולא היה הבדל שניתן להבחנה בין האליפסה והמעגל, ובדומה עם הפרבולה וההיפרבולה.על כן,בחרנו בהתאם לנאמר בפורום להשתמש בנתונים סינתטיים

הקוד בו בוצעו החישובים מצורף בתקיה.

ELLIPSE:

sample points are: [[70 745],[399 307],[1033 1259],[1670 220],[1979 641]]





A= -5.662469453370231e-07

B= -2.3982522867267063e-07

C= -1.5644619617484322e-06

D= 0.0013258774054656756

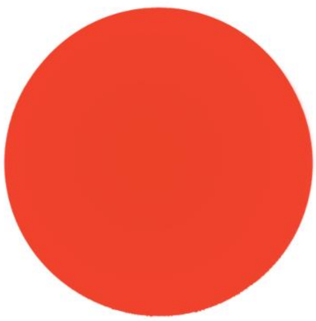
E= 0.002403739030398154

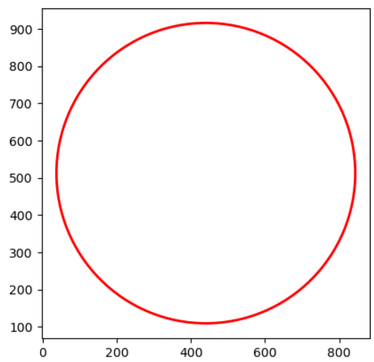
F= 1.0

discriminant: -3.4859710874361667e-12

CIRCLE:

sample points are: [[35 510],[157 797], [450 110],[732 235],[844 527]]





A= -3.4116046001525636e-06

B= 3.0822074383946496e-08

C= -3.4687788690903734e-06

D= 0.0029838988230167416

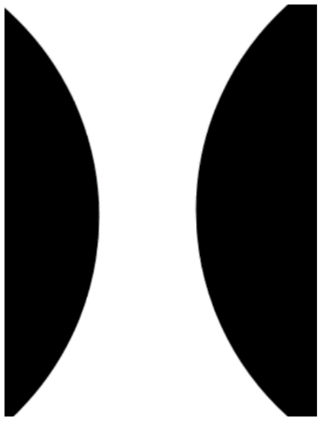
E= 0.003532199934612262

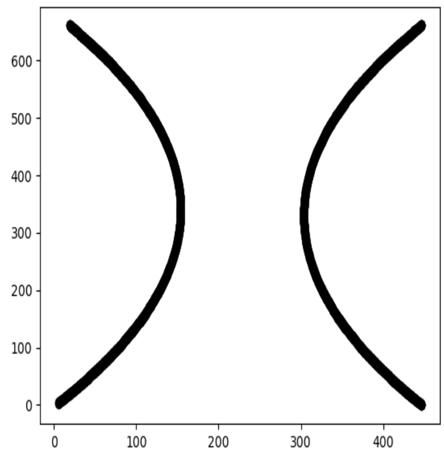
F= 1.0

discriminant: -4.733545778653357e-11

HYPERBOLA:

sample points are: [[116 170],[141 267],[137 442] ,[310 399][355 123]]





A= -4.648188324504028e-05

B= -9.7695298511721e-08

C= 9.416145968489011e-06

D= 0.021172041512675228

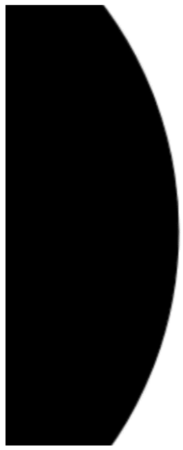
E= -0.006474686245457314

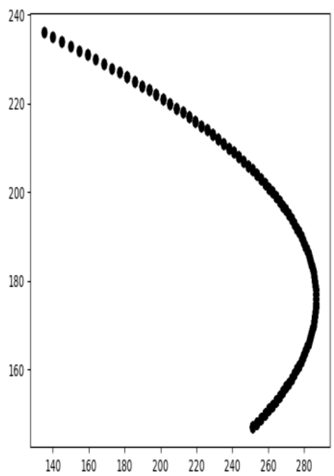
F= 1.0

discriminant: 1.750730334473603e-09

PARABOLA:

sample points are: [[165 143],[183 92] ,[221 22],[183 442],[161 155]]





A= -1.965478421371385e-05

B= -8.527383013838566e-06

C= -9.370205476248399e-07

D= 0.00885309325128112

E= 0.0020608800639641232

F= 1.0

discriminant: -9.514856048263261e-13

[illegible]

תהי I_0 תמונה פרספקטיבית ו-I_1 תמונה של I_0
ותהי התמונה המתקבלת I' נסמן ב-P את ייצוג המצלמה של I_0
וב-H את הייצוג של I_1
נרצה להראות כי התמונה המתקבלת I' ~~[illegible]~~ אינה המטריצה
המייצגת את המצלמה HP הינה בעלת מרכז זהה לזה של I_0
לפי ההגדרה מרכז המצלמה הינו הנקודה בה $PC=0$
כאשר P היא מטריצת המצלמה ו-C נקודה מהצורה

$$C=(X,Y,Z,T)^T$$

$$X=\det([p_2,p_3,p_4])$$
$$Y=\det([p_1,p_2,p_4])$$
$$Z=-\det([p_1,p_3,p_4])$$
$$T=-\det([p_1,p_2,p_3])$$

נשים לב כי אנו ~~[illegible]~~ צריך להראות $C'=C$
נסמן ב-$C'=(X',Y',Z',T')^T$ את מרכז המצלמה I'

כפי שכתוב בעמוד 164 בספר HP ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ מאחר ו-H אינה סינגולרית
המטריצה השמאלית בגודל 3x3 של HP אינה סינגולרית, ויכולה
להתפרק ל-KR כנדרש ל-$k\neq 0$ [illegible]
כי מכפלה של מטריצה ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ בוקטור שווה ל-0 אם המטריצה סינגולרית
כלומר נקבל כי יתכן רק שהמכפלה $PC=0$ ולכן H
תהיה אשר תהיה אינה משנה את מרכז התמונה
נותר להראות כי שאר הפרמטרים ישתנו כפי שרצינו

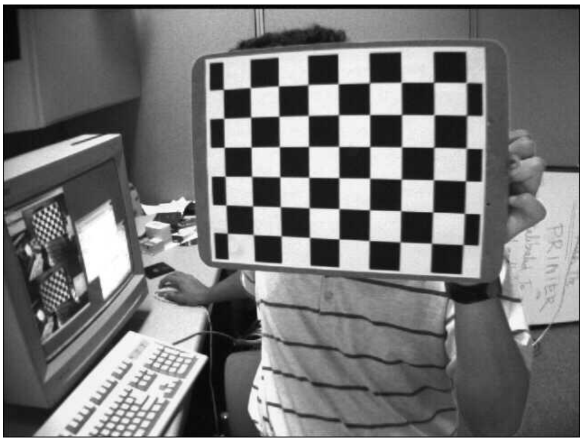
מאחר והכפלנו את המטריצה P במטריצה H שהינה
מטריצה הומוגרפית ~~[illegible]~~ לא סינגולרית שמהווה הטלה
פרספקטיבית מתמונה ומשווה לשנות כל אחד מהפרמטרים של P

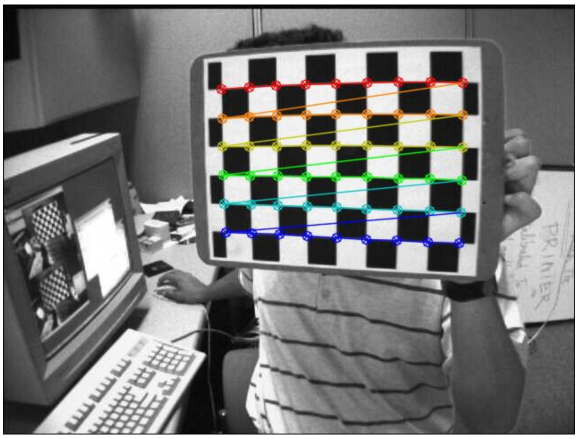
נציג הסבר לכך שהשינויים של פורטרטים "עוקבים אחרינו"
"עוקבות אחרינו" בסוף החדר: מרכז התמונה נשאר כשהיה
ולא משתנה ביחס למיקום שלנו בחדר אבל הדבר שמשתנה
הוא הזווית שאנו נמצאים ביחס לפורטרט בחדר כלומר כאשר
כשאנו מסתובבים בחדר אנחנו מבצעים הזזת שוני של התמונה
על משנה פרספקטיבי שבכוון המרכז נשאר כשהיה ולכן
אנו מקבלים את תכונת העוקב.

7:

In this suction we will do one case of full camera calibration from known structure, including radial distortion. The structure is going to be a chess board. The images of the board are taken from different angels, and all of them have radial distortion. The code that is in the in the zip folder contain the calculations for all images, but from connivant reasons we will show here only one of the images.

The image is





With cv2 package we recognized the edges of slots on the chess board. The points will be used to define the matrix that we will use to determent the homographie based on each of the images.

After detecting the points on the chess bord normalized the data and computed the image based homographies.

```
Homography for View :
 [[ 26.82754545   1.94973451 243.49568314]
 [ -2.08724743  33.59046847  91.72990654]
 [ -0.01375788   0.00480862   1.        ]]
```

After generalizing of all of the images in the folder the Intrinsic Camera Matrix is:

the computation of the Camera Matrix is estimated to be:
[[544.51870191 -3.2650593 301.56136678]
 [0.   540.99720242 250.29553478]
 [0.   0.   1.   ]]

Therefor we can calculate the extrinsic matrices:

We got that the extrinsic matrix is
[[-0.90445156 -0.0254109   0.42581881 4.76671966]
 [-0.08042725 -0.97016312 -0.22872468 -1.27078405]
 [0.4189258 -0.24111783 0.87542182 22.62597546]]

Were the first three columns are R and the last one is T
The third column is an estimation based on the cv2 algorithm. This can be ignored or be set to zero.

After calculating the homographie the Intrinsic and extrinsic matrices we can continue to the distortion:

We used the camera matrix that we calculated as parameter "get Optimal New Camera Matrix" function of the cv2 library that computes the distortion based on detecting the center of the radial distortion point (xc,yc)

$$\hat{x} = x_c + L(r)(x - x_c) \qquad \hat{y} = y_c + L(r)(y - y_c)$$

As written in the book "Multiple View Geometry in Computer Vision" page 191 The algoritham of the cv2 uses a similar approach of computing the function L(r): " by the requirement that images of straight scene lines should be straight. A cost function is defined on the imaged lines (such as the distance between the line joining the imaged line's ends and its mid-point) after the corrective mapping by L(r). This cost is iteratively minimized over the parameters κi of the distortion function and the centre of radial distortion "

The result image is:

You can see the rest of the results and the calculations, by running the code provided in camara_calibration.py