תרגול 6: עוד על DFT

1 ריפוד באפסים (Zero Padding)

ראינו שעבור כניסה באורך N נקבל התמרת DFT באורך N כאשר במישור התדר אנחנו דוגמים ב-$\theta=\frac{2\pi k}{N}$. לעתים נרצה לדגום ברזולוציה טובה יותר לדוגמא $\theta=\frac{2\pi k}{M}$ עבור $M>N$. בכדי לבצע את זה אנחנו נרפד באפסים ב-$M-N$ את הסדרה המקורית $x[n]$ באופן הבא:

$$x_a[n]=\begin{cases}x[n] & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le M-1\end{cases}$$

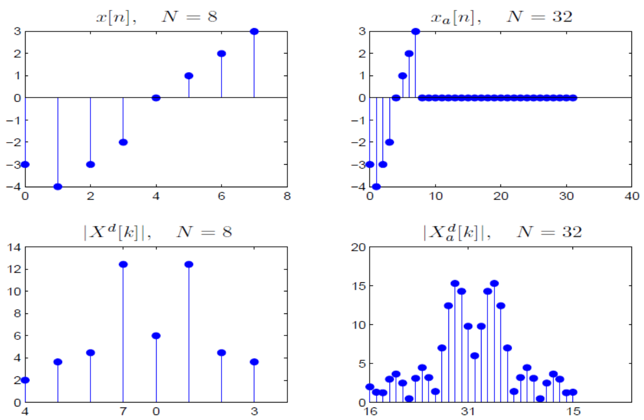
ה-DFT של האות המרופד נתון על ידי:

$$X_a^d[k]=\sum_{n=0}^{M-1}x_a[n]\exp\left(-\frac{j2\pi}{M}kn\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp\left(-\frac{j2\pi}{M}kn\right)=X^f(\theta[k])$$

עבור:

$$\theta[k]=\frac{2\pi k}{M},\qquad 0\le k\le M-1$$

כלומר $X_a^d[k]$ הוא אכן דגימה של $X^f(\theta)$ ב-M תדרים ברווחים שווים. חשוב לציין שפעולה זו אינה מוסיפה לנו מידע חדש שאינו מופיע בהתמרה המקורית, אלא זו בסה"כ אינטרפולציה בתדר. ניתן להשתמש בה כדי לקבל ויזואליציה טובה יותר של תגובת התדר. הדגמה של פעולה זו מופיעה באיור 1.



איור 1: ריפוד באפסים בזמן - אינטרפולציה בתדר

2 קונבולוציה מעגלית (ציקלית)

2.1 הגדרה

בהינתן שתי סדרות סופיות באורך N, $x[n]$ ו-$y[n]$. נגדיר את הקונבולוציה המעגלית שלהם באופן הבא:

$$z[n]=\{x\circledast y\}[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\,y[(n-m)\mod N],\quad 0\le n\le N-1$$

ניתן לקבל הגדרה שקולה אם נשתמש בהרחבה המחזורית של $x\left[n\right]$ ו־$y\left[n\right]$:

$$z\left[n\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}\left[m\right]\tilde{y}\left[n-m\right]$$

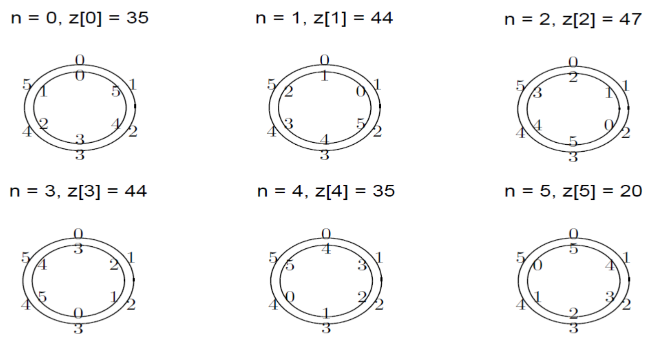
2.2 תיאור גרפי

את הקונבולוציה המעגלית ניתן לתאר בצורה גרפית באופן הבא:

1. נצייר שני מעגלים, אחד בתוך השני, ונחלק אותם ל־N חלקים שווים.
2. נכתוב את $x\left[n\right]$ עם כיוון השעון, כאשר נקודת ההתחלה בשעה 12.
3. נכתוב את $y\left[n\right]$ נגד כיוון השעון, כאשר נקודת ההתחלה בשעה 12 (הנקודה הבאה היא השעה 11)
4. כדי לחשב את $z\left[n\right]$ נסובב את $y\left[n\right]$ בכיוון השעון n צעדים, נכפיל את x ואת y איבר איבר ונסכום.
5. כך נבצע לכל $0\leq n\leq N-1$.

דוגמא

הדגמת החישוב של $z\left[n\right]$ עבור האותות $x\left[n\right]=y\left[n\right]=\left\{0,1,2,3,4,5\right\}$ מופיעה באיור 2.



איור 2: קונבולוציה מעגלית עבור $N=6$

2.3 תיאור מטריציוני

את הקונבולוציה המעגלית ניתן לתאר גם בצורה מטריציונית:

$$\begin{bmatrix}z\left[0\right]\\z\left[1\right]\\\vdots\\z\left[N-2\right]\\z\left[N-1\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\left[0\right]&y\left[N-1\right]&\cdots&y\left[2\right]&y\left[1\right]\\y\left[1\right]&y\left[0\right]&\cdots&y\left[3\right]&y\left[2\right]\\\vdots&\vdots&\ldots&\vdots&\vdots\\y\left[N-2\right]&y\left[N-3\right]&\cdots&y\left[0\right]&y\left[N-1\right]\\y\left[N-1\right]&y\left[N-2\right]&\cdots&y\left[1\right]&y\left[0\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\left[0\right]\\x\left[1\right]\\\vdots\\x\left[N-2\right]\\x\left[N-1\right]\end{bmatrix}$$

מטריצת בעלת מבנה מחזורי כזה נקראת circulant והיא ניתנת ללכסון ע"י מטריצת DFT:

$$\frac{1}{N}F_{N}CF_{N}^{\dagger}=\mathrm{diag}\left(Y^{d}\left[0\right],\ldots,Y^{d}\left[N-1\right]\right)$$

2.4 תכונות הקונבולוציה המעגלית

1. מקיימת את תכונות הקומוטטיביות ואסוציאטיביות כמו הקונבולוציה הרגילה:

$$x \circledast y = y \circledast x \qquad , \qquad (x \circledast y) \circledast z = x \circledast (y \circledast z)$$

2. קונבולוציה בזמן $\leftrightarrow$ מכפלה בתדר:

$$z[n] = \{x \circledast y\}[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad Z^d[k] = X^d[k]\, Y^d[k]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} Z^d[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[(n-m) \mod N] \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} \left(y[(n-m) \mod N] \right) \\ &\overbrace{=}^{\text{shift property}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, W_N^{-km} Y^d[k] \\ &= X^d[k]\, Y^d[k] \end{aligned}$$

3. קונבולציה בתדר $\leftrightarrow$ מכפלה בזמן:

$$z[n] = x[n]\, y[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad Z^d[k] = \frac{1}{N} \left\{ X^d \circledast Y^d \right\}[k]$$

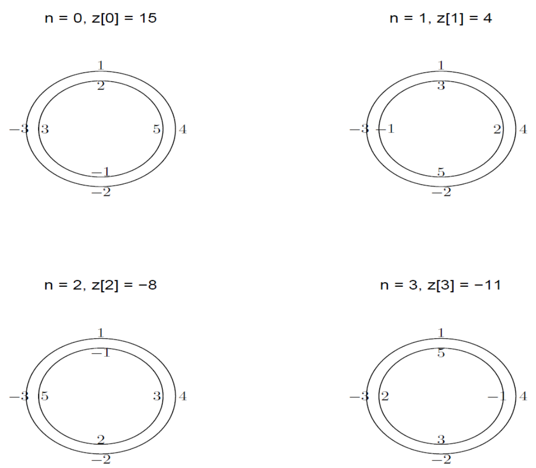
הוכחה: באופן דומה לקודם.

2.5 דוגמא (מהספר של בועז פורת)

$$x[n] = [2, 3, -1, 5] \quad , \quad x[n] = [1, 4, -2, -3]$$

נרצה למצוא את $z[n] = \{x \circledast y\}[n]$. נחשב בשלוש דרכים שונות:

דרך 1 - בשיטה גרפית



דרך 2 - בשיטה מטריציונית

$$\begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ z[2] \\ z[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ -8 \\ -11 \end{bmatrix}$$

דרך 3 - בעזרת DFT

מטריצת ה־DFT:

$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \qquad , \qquad W_4 = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$X^d[k] = \{9, 3+j2, -7, 3-j2\}$$

$$Y^d[k] = \{0, 3-j7, -2, 3+j7\}$$

$$Z^d[k] = \{0, 23-j15, 14, 23+j15\}$$

$$z[n] = \{15, 4, -8, -11\}$$

2.6 חישוב קונבולוציה לינארית באמצעות קונבולוציה ציקלית

בהינתן שתי סדרות $\{x[n], 0 \le n \le N_1 - 1\}$ ו־$\{y[n], 0 \le n \le N_2 - 1\}$, הקונבולוציה הלינארית שלהם היא:

$$z[n] = \sum_{m=m_1}^{m_2} x[m]\, y[n-m]$$

כיוון שאנו מוגבלים לתחום $0 \le m \le N_1 - 1$ ו־$0 \le n - m \le N_2 - 1$ נקבל שהתחום של m_1 ו־m_2 הוא:

$$m_1 = \max\{0, n+1-N_2\} \qquad , \qquad m_2 = \min\{N_1 - 1, n\}$$

זו למעשה הקונבולוציה שראינו עד כה באותות אינסופיים. אנו מכנסים זאת קונבולוציה לינארית כדי להבדיל בינה לבין הקונבולוציה המעגלית. נראה לחשב את הקונבולוציה הלינארית בעזרת חישוב הקונבולוציה המעגלית. היתרון בשיטה זו הוא היעילות. ראינו שכדי לחשב קונבולוציה מעגלית ניתן לחשב את ה־DFT ולבצע מכפלה בתדר. שימוש ב־FFT הופך שיטה זו ליעילה מאוד.
נפתור דוגמא ואחר כך נמשיך בפיתוח המתמטי.

דוגמא

נתונים שני אותות $x\left[n\right]=\left\{1,2,3\right\}$ ו־$y\left[n\right]=\left\{8,9\right\}$. נרצה לחשב את הקונבולוציה הלינארית שלהם. לצורך כל נרשום את $y\left[n-m\right]$ מתחת ל־$x\left[m\right]$ ונכפיל איבר איבר:

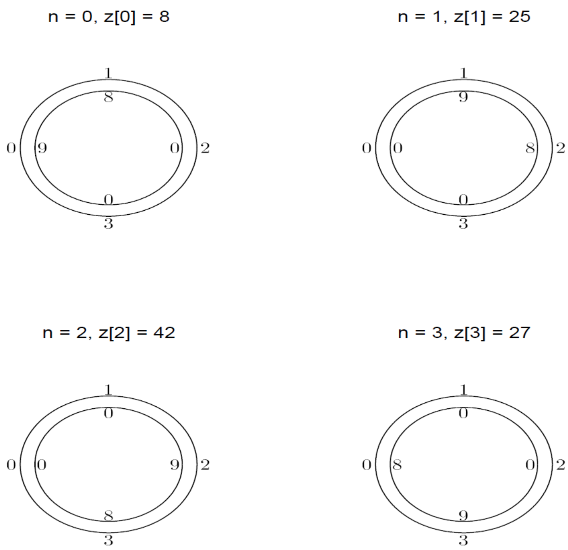
$$z\left[0\right]=\left\{\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & & \end{array}\right. \qquad =8$$

$$z\left[1\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ 9 & 8 & & \end{array}\right. \qquad =25$$

$$z\left[2\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ & 9 & 8 & \end{array}\right. \qquad =42$$

$$z\left[3\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ & & 9 & 8 \end{array}\right. \qquad =27$$

כעת נרפד באפסים את $x\left[n\right]$ ו־$y\left[n\right]$ כך ששניהם יהיו באורך 4 ונבצע קונבולוציה מעגלית:



ניתן לרשום זאת גם באופן דומה לרישום הקודם:

$$z\left[0\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right. \qquad =8$$

$$z\left[1\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right. \qquad =25$$

$$z\left[2\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right. \qquad =42$$

$$z\left[3\right]=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{array}\right. \qquad =27$$

וקיבלנו אותה תוצאה.
בניסוח מתמטי:
נרפד באפסים את $x\left[n\right]$ ו־$y\left[n\right]$ כך ששניהם יהיו באורך $N=N_1+N_2-1$ ונסמן את הסדרות כ־$x_a\left[n\right],y_a\left[n\right]$.
הקונבולוציה הלינארית בין $x_a\left[n\right]$ ל־$y_a\left[n\right]$ תהיה:

$$z\left[n\right]=\sum_{m=m_1}^{m_2}x_a\left[m\right]y_a\left[n-m\right]=\sum_{m=0}^{n}x_a\left[m\right]y_a\left[n-m\right], \qquad 0\leq n\leq N-1$$

הקונבולוציה המעגלית בין שני האותות תהיה:

$$z\left[n\right]=\left\{x_a\circledast y_a\right\}\left[n\right]=\sum_{m=0}^{N-1}x_a\left[m\right]y_a\left[\left(n-m\right)\mod N\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{n}x_a\left[m\right]y_a\left[n-m\right]+\sum_{m=n+1}^{N-1}x_a\left[m\right]y_a\left[n-m+N\right]$$

האיבר השמאלי הוא בדיוק הקונבולוציה הלינארית. נראה שהאיבר הימני מתאפס. כדי ש־$x_a\left[m\right]$ וגם $y_a\left[n-m+N\right]$ יהיו שונים מאפס צריך לתהקיים:

$$0\leq m\leq N_1-1$$

וגם:

$$0\leq n-m+N\leq N_2-1\qquad\Rightarrow\qquad -n-N\leq -m+N\leq N_2-N-n-1=-N_1-n$$

$$\Rightarrow\qquad N_1+n\leq m\leq N+n$$

החיתוך שני התחומים של הוא הקבוצה הריקה ועל כן האיבר הימני מתאפס. נקבל את התוצאה הבאה:

$$\left\{x*y\right\}\left[n\right]=\left\{x_a\circledast y_a\right\}\left[n\right],\qquad 0\leq n\leq N-1$$