Soluciones de la clase de cálculo lambda 1.

Ejercicio 1

$$M ::= x \mid \underbrace{\lambda x:\sigma.M}_{\text{"abstracción"}} \mid \underbrace{M\ M}_{\text{"aplicación"}} \mid \text{true} \mid \text{false} \mid \underbrace{\text{if } M \text{ then } M \text{ else } M}_{\text{"if"}}$$

a) Sí: $\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ true$

var. ligada

- $\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ true$ — abs.
  - $x\ true$ — ap.
    - x
    - $true$

b) Sí: $x\ y\ (\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y)$

libre libre ligada libre

- $x\ y\ (\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y)$ — ap.
  - $x\ y$ — ap.
    - x
    - y
  - $\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y$ — abs.
    - $x\ y$ — ap.
      - x
      - y

c) Sí: $(\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y)(\lambda y:Bool.\ x)$

ligada libre libre

- $(\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y)(\lambda y:Bool.\ x)$ — ap.
  - $\lambda x:Bool\to Bool.\ x\ y$ — abs.
    - $x\ y$ — ap.
      - x
      - y
  - $\lambda y:Bool.\ x$ — abs.
    - x

d) No, falta el cuerpo de la abstracción:

$$\lambda x:Bool.\ \underbrace{\quad}_{\text{cuerpo}}$$

e) No, falta la anotación de tipos en la abstracción:

$$\lambda x:\underbrace{\quad}_{\text{tipo}}.\ x$$

f) Sí:

$\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z:Bool.\ z$

libre libre ligada

- $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z:Bool.\ z$ — if
  - x
  - y
  - $\lambda z:Bool.\ z$ — abs.
    - z

g) Sí: $x\ (\lambda y:Bool.\ y)$

libre ligada

- $x\ (\lambda y:Bool.\ y)$ — ap.
  - x
  - $\lambda y:Bool.\ y$ — abs.
    - y

h) Sí: $true\ false$

- $true\ false$ — ap.
  - $true$
  - $false$

i) No, "M" no es un término definido por la gramática

j) No, falta la parte del else:

$$\text{if } x \text{ then } \lambda x:Bool.\ x \text{ else } \underbrace{\quad}_{\text{un término}}$$

Ejercicio 2

$$M ::= x \mid \lambda x:\sigma.\,M \mid M\,M \mid \text{true} \mid \text{false} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M$$

Por inducción estructural en M:

Usamos la α-equivalencia de términos, siempre podemos asumir que las variables ligadas no aparecen en otros lugares porque podríamos renombrarlas.

- Si $M = x$

$$\underbrace{x\{x:=N\}}_{=N}\{y:=P\} = N\{y:=P\}$$

$$\underbrace{x\{y:=P\}}_{=x \text{ porque } x\neq y}\{x:=N\{y:=P\}\} = x\{x:=N\{y:=P\}\} \overset{\text{por def.}}{=} N\{y:=P\} \checkmark$$

- Si $M = y$

$$y\{x:=N\}\{y:=P\} \overset{x\neq y}{=} y\{y:=P\} = P$$

$$y\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\} = P\{x:=N\{y:=P\}\} \overset{x\notin fv(P)}{=} P \checkmark$$

- Si $M = z \neq x,\ z \neq y$

$$z\{x:=N\}\{y:=P\} \overset{z\neq x}{=} z\{y:=P\} \overset{z\neq y}{=} z$$

$$z\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\} \underset{z\neq y}{=} z\{x:=N\{y:=P\}\} \overset{z\neq x}{=} z \checkmark$$

- Si $M = \lambda z:\sigma.\,Q$

$$(\lambda z:\sigma.\,Q)\{x:=N\}\{y:=P\} = (\lambda z:\sigma.\,Q\{x:=N\})\{y:=P\}$$

$$= \lambda z:\sigma.\,Q\{x:=N\}\{y:=P\} \underset{HI}{=} \lambda z:\sigma.\,Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$$

$$= (\lambda z:\sigma.\,Q\{y:=P\})\{x:=N\{y:=P\}\}$$

$$= (\lambda z:\sigma.\,Q)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$$

- Si $M = Q\,R$

$$(QR)\{x:=N\}\{y:=P\} = (Q\{x:=N\}R\{x:=N\})\{y:=P\}$$

$$= Q\{x:=N\}\{y:=P\}R\{x:=N\}\{y:=P\}$$

$$= Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}R\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$$

HI en Q y R

$$= (Q\{y:=P\}R\{y:=P\})\{x:=N\{y:=P\}\}$$

$$= (QR)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$$

- Si $M = \text{true}$

$\text{true}\{x:=N\}\{y:=P\} = \text{true}\{y:=P\} = \text{true}$

$\text{true}\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\} = \text{true}\{x:=N\{y:=P\}\} = \text{true}$ ✓

- Si $M = \text{false}$ es análogo al true

- Si $M = \text{if } Q \text{ then } R \text{ else } S$

$(\text{if } Q \text{ then } R \text{ else } S)\{x:=N\}\{y:=P\}$
$= (\text{if } Q\{x:=N\} \text{ then } R\{x:=N\} \text{ else } S\{x:=N\})\{y:=P\}$

$= \text{if } Q\{x:=N\}\{y:=P\} \text{ then } R\{x:=N\}\{y:=P\} \text{ else } S\{x:=N\}\{y:=P\}$

$= \text{if } Q\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\} \text{ then } R\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

HI en Q, R y S

$\text{else } S\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

$= (\text{if } Q\{y:=P\} \text{ then } R\{y:=P\} \text{ else } S\{y:=P\})\{x:=N\{y:=P\}\}$

$= (\text{if } Q \text{ then } R \text{ else } S)\{y:=P\}\{x:=N\{y:=P\}\}$

Ejercicio 3

Mirando la definición de valores:

$$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x{:}\sigma.M$$

a) No (es un if) b) Sí, es una abstracción c) No, es una aplicación.

d) Sí e) No, tiene una variable libre f) Sí, es una abstracción.

g) Sí, es una abstracción.

Ejercicio 4

Al dar la reducción a un paso, escribimos los nombres de todas las reglas usadas en cada paso.

a) $((\lambda x{:}\text{Bool}.\lambda y{:}\text{Bool}.\text{if } x \text{ then true else } y)\ \text{false})\ \text{true}$

$\xrightarrow[\mu+\beta]{} (\lambda y{:}\text{Bool}.\text{if false then true else } y)\ \text{true}$

$\xrightarrow[\beta]{} \text{if false then true else true} \xrightarrow[\text{if}_f]{} \text{true}$

b) $(\lambda x:Bool.\ \lambda y:Bool\to Bool.\ y\,(y\,x))\,((\lambda z:Bool.\ true)\ false)\,(\lambda w:Bool.\,w)$

$$\xrightarrow[\mu+\nu+\beta]{} (\lambda x:Bool.\ \lambda y:Bool\to Bool.\ y\,(y\,x))\ true\ (\lambda w:Bool.\,w)$$

$$\xrightarrow[\mu+\beta]{} (\lambda y:Bool\to Bool.\ y\,(y\ true))\,(\lambda w:Bool.\,w)$$

$$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda w:Bool.\,w)\,((\lambda w:Bool.\,w)\ true)$$

$$\xrightarrow[\nu+\beta]{} (\lambda w:Bool.\,w)\ true \xrightarrow[\beta]{} true$$

Ejercicio 5

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:Bool\vdash x:Bool}\,axv \quad \dfrac{}{x:Bool\vdash x:Bool}\,axv \quad \dfrac{}{x:Bool\vdash x:Bool}\,axv}{x:Bool\vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } x : Bool}\,if}{\vdash \lambda x:Bool.\ \text{if } x \text{ then } x \text{ else } x : Bool\to Bool}\,\to i \qquad \dfrac{}{\vdash true:Bool}\,ax_t}{\vdash (\lambda x:Bool.\ \text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)\ true : Bool}\,\to e$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash x:Bool}\,axv \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash true:Bool}\,axt \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash y:Bool}\,axv}{\Gamma = x:Bool,\ y:Bool\vdash \text{if } x \text{ then } true \text{ else } y : Bool}\,if}{x:Bool\vdash \lambda y:Bool.\ \text{if } x \text{ then } true \text{ else } y : Bool\to Bool}\,\to i}{\vdash \lambda x:Bool.\lambda y:Bool.\ \text{if } x \text{ then } true \text{ else } y : Bool\to Bool\to Bool}\,\to i \qquad \dfrac{}{\vdash false:Bool}\,ax_f}{\vdash (\lambda x:Bool.\lambda y:Bool.\ \text{if } x \text{ then } true \text{ else } y)\ false : Bool\to Bool}\,\to e$$

c)

$$\dfrac{}{x:Bool\vdash true:Bool}\,ax_t$$

d) Intentemos derivarlo:

no son derivables porque el contexto es vacío

$$\dfrac{\vdash x:Bool \qquad \vdash x:Bool \qquad \vdash z:Bool}{\vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } z : Bool}\,if$$

por la forma del término es la única regla que se podría aplicar

e) Intentemos derivarlo:

no es posible derivarlo porque $Bool \neq Bool \to Bool$

$$
\dfrac{
\dfrac{}{x : Bool \vdash x : Bool}\,\text{axv}
\qquad
x : Bool \vdash x : Bool \to Bool
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{x : Bool, y : Bool \vdash y : Bool}\,\text{axv}}{x : Bool \vdash \lambda y : Bool . y : Bool \to Bool}\,\to i
}{
x : Bool \vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } (\lambda y : Bool . y) : Bool \to Bool
}\,\text{if}
$$

Ejercicio 6 Construimos las derivaciones de juicios de tipado de abajo hacia arriba, como las derivaciones en Deducción Natural.

a) Dado σ un tipo, el término $\lambda x : \sigma . x$ representa la identidad para ese tipo.

$$
\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{axv}}{\vdash \lambda x : \sigma . x : \sigma \to \sigma}\,\to i
$$

b) Dados σ, τ, ρ tipos, el término

$$\lambda f : \sigma \to \tau \to \rho . \lambda x : \tau . \lambda y : \sigma . f\ y\ x$$

es análogo a flip.

porque $(f : \sigma \to \tau \to \rho) \in \Gamma$ — porque $(y : \sigma) \in \Gamma$ — porque $(x : \tau) \in \Gamma$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash f : \sigma \to \tau \to \rho}\,\text{axv}
\quad
\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \sigma}\,\text{axv}
}{\Gamma \vdash f\ y : \tau \to \rho}\,\to e
\quad
\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \tau}\,\text{axv}
}{\Gamma = f : \sigma \to \tau \to \rho, x : \tau, y : \sigma \vdash f\ y\ x : \rho}\,\to e
}{f : \sigma \to \tau \to \rho, x : \tau \vdash \lambda y : \sigma . f\ y\ x : \sigma \to \rho}\,\to i
}{f : \sigma \to \tau \to \rho \vdash \lambda x : \tau . \lambda y : \sigma . f\ y\ x : \tau \to \sigma \to \rho}\,\to i
}{\vdash \lambda f : \sigma \to \tau \to \rho . \lambda x : \tau . \lambda y : \sigma . f\ y\ x : (\sigma \to \tau \to \rho) \to \tau \to \sigma \to \rho}\,\to i
$$

c) Dados σ, τ tipos, el término

$$\lambda x : \sigma . \lambda y : \tau . x$$

es análogo a const.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\sigma, y:\tau \vdash x:\sigma}\,\text{ax}_v}{x:\sigma \vdash \lambda y:\tau.\, x : \tau\to\sigma}\,\to_i}{\vdash \lambda x:\sigma.\lambda y:\tau.\, x : \sigma\to\tau\to\sigma}\,\to_i$$

d) Al aplicar las reglas de tipado, aparecen restricciones sobre σ, τ y ρ.

para que valga por ax_v:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\Gamma \vdash x:\gamma''\to\gamma\to\delta}^{\sigma=\gamma''\to\gamma\to\delta} \quad \overbrace{\Gamma\vdash z:\gamma''}^{\rho=\gamma''}}{\Gamma\vdash xz:\gamma\to\delta}\,\to_e \quad \dfrac{\overbrace{\Gamma\vdash y:\gamma'\to\gamma}^{\tau=\gamma'\to\gamma} \quad \overbrace{\Gamma\vdash z:\gamma'}^{\rho=\gamma'}}{\Gamma\vdash yz:\gamma}\,\to_e}{\Gamma = x:\sigma, y:\tau, z:\rho \vdash xz(yz):\delta}\,\to_e}{x:\sigma, y:\tau \vdash \lambda z:\rho.\, xz(yz) : \alpha' = \rho\to\delta}\,\to_i}{x:\sigma\vdash \lambda y:\tau.\lambda z:\rho.\, xz(yz): \alpha = \tau\to\alpha'}\,\to_i}{\vdash \lambda x:\sigma.\lambda y:\tau.\lambda z:\rho.\, xz(yz) : \underbrace{\sigma\to\alpha}}\,\to_i$$

en principio no sé que tipo tiene el término, pero para aplicar $\to_i$ debe ser de tipo flecha

Por lo tanto, para que sea tipable,

$$\sigma = \rho\to\gamma\to\delta$$
$$\tau = \rho\to\gamma$$

(y no hay restricción sobre ρ)

Pasando en limpio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash x:\rho\to\gamma\to\delta}\,\text{ax}_v \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash z:\rho}\,\text{ax}_v}{\Gamma\vdash xz:\gamma\to\delta}\,\to_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash y:\rho\to\gamma}\,\text{ax}_v \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash z:\rho}\,\text{ax}_v}{\Gamma\vdash yz:\gamma}\,\to_e}{\Gamma = x:\rho\to\gamma\to\delta, y:\rho\to\gamma, z:\rho \vdash xz(yz):\delta}}{x:\rho\to\gamma\to\delta, y:\rho\to\gamma\vdash \lambda z:\rho.\, xz(yz):\rho\to\delta}\,\to_i}{x:\rho\to\gamma\to\delta\vdash\lambda y:\rho\to\gamma.\lambda z:\rho.\, xz(yz):(\rho\to\gamma)\to\rho\to\delta}\,\to_i}{\vdash\lambda x:\rho\to\gamma\to\delta.\lambda y:\rho\to\gamma.\lambda z:\rho.\, xz(yz):(\rho\to\gamma\to\delta)\to(\rho\to\gamma)\to\rho\to\delta}\,\to_i$$

Ejercicio 7

$M = \lambda g : \tau \to \rho . \lambda f : \sigma \to \tau . \lambda x : \sigma . g (f x)$ composición de funciones

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash g : \tau \to \rho}\,\text{ax}_v \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash f : \sigma \to \tau}\,\text{ax}_v \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma}\,\text{ax}_v}{\Gamma \vdash f x : \tau}\,\to e}{\Gamma = g : \tau \to \rho, f : \sigma \to \tau, x : \sigma \vdash g (f x) : \rho}\,\to e}{\dfrac{g : \tau \to \rho, f : \sigma \to \tau \vdash \lambda x : \sigma . g (f x) : \sigma \to \rho}{g : \tau \to \rho \vdash \lambda f : \sigma \to \tau . \lambda x : \sigma . g (f x) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\to i}\,\to i}{\vdash \lambda g : \tau \to \rho . \lambda f : \sigma \to \tau . \lambda x : \sigma . g (f x) : (\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,\to i
$$

Ejercicio 8

Recordemos la definición de la relación $\to$:

- $(\lambda x : \sigma . M) V \to M\{x := V\}$ (β)
- $\text{if true then } M \text{ else } N \to M$ (if_t)
- $\text{if false then } M \text{ else } N \to N$ (if_f)

Si $M \to N$ entonces:

- $M O \to N O$ (μ)
- $V M \to V N$ (ν)
- $\text{if } M \text{ then } O \text{ else } P \to \text{if } N \text{ then } O \text{ else } P$ (if_c)

Sea M tal que $\begin{cases} M \to M_1 \\ M \to M_2 \end{cases}$, probemos que $M_1 = M_2$ por inducción en $\to$:

① Supongo que $M \to M_1$ usando la regla β.
Entonces, existen un tipo σ, un término N y un valor V tales que:

$$M = (\lambda x : \sigma . N) V \quad y \quad M_1 = N\{x := V\}$$

Como M sólo puede reducir usando β, $M_1 = M_2$.

② Supongo que $M \to M_1$ usando la regla if_t.

Entonces, existe un término N tal que:

$$M = \text{if true then } M_1 \text{ else } N$$

Como true es un valor, M sólo puede reducir usando if_t, y se tiene $M_1 = M_2$.

(3) Supongo que $M \to M_1$ usando la regla if_f.

Entonces, existe un término N tal que:

$$M = \text{if false then } N \text{ else } M_1$$

Como false es un valor, M sólo puede reducir usando if_f, y se tiene $M_1 = M_2$.

(4) Supongo que $M \to M_1$ usando la regla μ.

Entonces, existen términos N, N' y O tales que $N \to N'$,

$$M = NO \quad \text{y} \quad M_1 = N'O$$

Como M es una aplicación, y N reduce, M sólo puede reducir usando la regla μ. Entonces existe N'' tal que

$$N \to N'' \quad \text{y} \quad M_2 = N''O$$

Por HI en N, como $\begin{cases} N \to N' \\ N \to N'' \end{cases}$ se tiene que $N' = N''$.

Por lo tanto, $M_2 = N'O = M_1$.

(5) Supongo que $M \to M_1$ usando la regla ν.

Entonces, existen términos N, N' y un valor V tales que

$$N \to N', \quad M = VN \quad \text{y} \quad M_1 = VN'$$

Como M es una aplicación, y V es valor, M sólo puede reducir usando la regla ν. Entonces, existe N'' un término tal que

$$N \to N'' \quad \text{y} \quad M_2 = VN''$$

Por HI en N, como $\begin{cases} N \to N' \\ N \to N'' \end{cases}$ se tiene que $N' = N''$.

Por lo tanto, $M_2 = VN' = M_1$.

(6) Supongo que $M \to M_1$ usando la regla if_c.

Entonces existen términos N, N', O y P tales que $N \to N'$,

$$M = \text{if } N \text{ then } O \text{ else } P \quad \text{y} \quad M_1 = \text{if } N' \text{ then } O \text{ else } P$$

Como M es un if y N reduce, M solo puede reducir usando la regla ifc. Entonces, existe N'' un término tal que $N \to N''$ y

$$M_2 = \text{if } N'' \text{ then } 0 \text{ else } P$$

Por HI en N, como $\begin{cases} N \to N' \\ N \to N'' \end{cases}$ se tiene que $N' = N''$.

Por lo tanto, $M_2 = \text{if } N' \text{ then } 0 \text{ else } P = M_1$.

Ejercicio 9

a)

$$\underline{0} = \text{succ}^0(\text{zero}) = \text{zero}$$

$$\underline{1} = \text{succ}^1(\text{zero}) = \text{succ}(\text{zero})$$

$$\underline{2} = \text{succ}^2(\text{zero}) = \text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))$$

son valores (en particular no reducen)

b)

- $\text{isZero}(\text{succ}(\text{pred}(\text{succ}(\text{zero})))) \xrightarrow[\text{isZero}_c + \text{succ}_c + \text{pred}]{} \text{isZero}(\text{succ}(\text{zero})) \xrightarrow{\text{isZero}_n} \text{false}$

- $\text{isZero}(\text{pred}(\text{succ}(\text{pred}(\text{zero}))))$ este término no reduce

  sin embargo no es un valor (observemos que tipa)

  por lo tanto es un error.

c)

-

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\text{Nat} \vdash x:\text{Nat}}\,\text{ax}_v}{x:\text{Nat} \vdash \text{succ}(x):\text{Nat}}\,\text{succ}}{\vdash \lambda x:\text{Nat}.\,\text{succ}(x):\text{Nat}\to\text{Nat}}\,{\to_i} \qquad \dfrac{}{\vdash \text{zero}:\text{Nat}}\,\text{ax}_0}{\vdash (\lambda x:\text{Nat}.\,\text{succ}(x))\ \text{zero}:\text{Nat}}\,{\to_e}$$

-

$$\dfrac{\dfrac{}{x:\text{Bool} \vdash \text{zero}:\text{Nat}}\,\text{ax}_0}{x:\text{Bool} \vdash \text{succ}(\text{zero}):\text{Nat}}\,\text{succ}$$

- Intentemos derivar el 3ero:

$$\dfrac{\dfrac{}{x:\text{Bool} \vdash x:\text{Bool}}\,\text{ax}_v \qquad x:\text{Bool} \vdash x:\text{Nat} \qquad \dfrac{}{x:\text{Bool} \vdash \text{zero}:\text{Nat}}\,\text{ax}_0}{x:\text{Bool} \vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else zero}:\text{Nat}}\,\text{if}$$

no se puede derivar porque $\text{Bool} \neq \text{Nat}$