Ejercicio 2

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación), ~~$\Leftrightarrow$ (equivalencia)~~ puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

faltaría agregar que $\perp$ es una fórmula

$$\tau ::= P \mid \neg\tau \mid \tau\wedge\tau \mid \tau\vee\tau \mid \tau\Rightarrow\tau \mid \perp$$

$\mathcal{P}(\tau) = \exists\, \tau'.\ \tau \equiv \tau' \wedge \tau'$ sólo usa $\neg$ y $\vee$.

- $\underbrace{\tau = P}$ ✓ P sólo usa $\neg$ y $\vee$.

(En este caso, la fórmula equivalente es la misma τ)

$\forall v'.\ v' \models \sigma'$ sii $v' \models \sigma$ ⇝ definición de la relación "$\equiv$"

- $\underbrace{\tau = \neg\sigma}$

por HI $\exists\, \sigma'$ tal que $\sigma' \equiv \sigma$ y σ' sólo usa $\neg$ y $\vee$.

$\underbrace{\neg\sigma'} \equiv \underbrace{\neg\sigma} = \tau$

que sólo usa $\neg$ y $\vee$.

Sea v una valuación. $v \models \neg\sigma'$ sii $v \not\models \sigma'$

$\sigma \equiv \sigma'$ sii $v \not\models \sigma$ sii $v \models \neg\sigma$

$\therefore \neg\sigma' \equiv \neg\sigma$

- $\tau = \sigma \wedge \rho$

Por HI, $\exists$ σ' tal que $\begin{cases} \circ\ \sigma' \text{ sólo usa } \neg \text{ y } \vee \\ \circ\ \sigma' \equiv \sigma \end{cases}$

Por HI, $\exists$ ρ' tal que $\begin{cases} \circ\ \rho' \text{ sólo usa } \neg \text{ y } \vee \\ \circ\ \rho' \equiv \rho \end{cases}$

QVQ

$\neg(\neg\sigma' \vee \neg\rho') \equiv \tau = \sigma \wedge \rho$

Sea v una valuación:

$v \models \neg(\neg\sigma' \vee \neg\rho')$ sii $v \not\models \neg\sigma' \vee \neg\rho'$

sii no ($v \models \neg\sigma'$ ó $v \models \neg\rho'$)

sii no ($v \not\models \sigma'$ ó $v \not\models \rho'$) sii ($v \models \sigma'$ y $v \models \rho'$)

sii $v \models \sigma$ y $v \models \rho$ sii $v \models \sigma \wedge \rho = \tau$ sii $v \models \tau = \sigma \wedge \rho$

$\therefore\ \neg(\neg\sigma' \vee \neg\rho') \equiv \tau$

$\underbrace{\tau = \sigma \vee \rho}$

por HI $\left[\begin{array}{ll} \exists\ \sigma', & \sigma' \equiv \sigma \\ \ \rho', & \rho' \equiv \rho \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} \sigma' \text{ sólo tiene } \neg \text{ y } \vee \\ \rho' \text{ sólo tiene } \neg \text{ y } \vee. \end{array}$

sólo uso $\neg$ y $\vee$

$\overbrace{\sigma' \vee \rho'} \overset{\text{QVQ}}{\equiv} \sigma \vee \rho = \tau$

Sea v una val.

$v \models \sigma' \vee \rho'$ sii $(v \models \sigma'$ ó $v \models \rho')$

sii $(v \models \sigma$ ó $v \models \rho)$ sii $v \models \sigma \vee \rho = \tau.$

$\sigma' \vee \rho' \equiv \tau$ $\therefore\ \sigma' \vee \rho' \equiv \tau$

$\tau = \sigma \Rightarrow \rho$

Por HI $\exists\, \sigma'$ • $\sigma' \equiv \sigma$ • σ' sólo usa $\neg$ y $\vee$

$\exists\, \rho'$ • $\rho' \equiv \rho$ • ρ' sólo usa $\neg$ y $\vee$

que $\underbrace{(\neg \sigma') \vee \rho'}_{\text{sólo usa } \neg \text{ y } \vee} \equiv \tau$. Sea v una val.

$v \models \neg \sigma' \vee \rho'$ sii $(v \models \neg \sigma'$ ó $v \models \rho')$

sii $(v \not\models \sigma'$ ó $v \models \rho')$ sii $(v \not\models \sigma$ ó $v \models \rho)$

$\sigma' \equiv \sigma$
$\rho' \equiv \rho$

sii $v \models (\sigma \Rightarrow \rho) = \tau$

$\therefore\ \tau \equiv \neg \sigma' \vee \rho'$

$v \models \sigma \Rightarrow \tau$ sii $v \not\models \sigma$ ó $v \models \rho$

la definición de $v \models \rho$ en el caso $\rho = \sigma \Rightarrow \tau$

✨ Veamos que las reglas $\neg\neg_e$, PBC y LEM son equivalentes.

$\underline{\neg\neg e}$ "$\Rightarrow$" $\underline{\text{PBC}}$

(o sea, veamos que a partir de $\neg\neg e$ y las demás reglas básicas de DN se puede derivar la regla PBC)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg e$$

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

premisa de PBC [$\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg i}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg e$$

conclusión de PBC [$\Gamma \vdash \tau$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

PBC "$\Rightarrow$" LEM

(o sea, veamos que a partir de PBC y las demás reglas básicas de DN (sin $\neg\neg e$) se puede derivar la regla LEM)

no asumimos nada, LEM no tiene premisas

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \neg\tau \vdash \neg\tau$}
\RightLabel{vi2}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \neg\tau \vdash \tau \vee \neg\tau$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \neg\tau \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)$}
\RightLabel{$\neg e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \neg\tau \vdash \bot$}
\RightLabel{PBC}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \tau$}
\RightLabel{vi1}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \tau \vee \neg\tau$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)$}
\RightLabel{$\neg e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \bot$}
\RightLabel{PBC}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau$}
\end{prooftree}
$$

] conclusión de LEM

LEM "⇒" $\neg\neg e$

(o sea, veamos que a partir de LEM y las demás reglas básicas de DN (sin usar $\neg\neg e$) se puede derivar la regla $\neg\neg e$)

premisa de $\neg\neg e$

por hip

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\,\text{LEM}
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\text{ax}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau}\,\text{ax}
\qquad
\dfrac{[\,\Gamma \vdash \neg\neg\tau\,]}{\Gamma, \neg\tau \vdash \neg\neg\tau}\,\text{W}
}{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}\,\neg e
}{\Gamma, \neg\tau \vdash \tau}\,\bot e
}{\Gamma \vdash \tau\,]}\,\vee e
$$

conclusión de $\neg\neg e$

Ejercicio 6

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow \bot, P \vdash P \Rightarrow \bot}\,ax \qquad \dfrac{}{P \Rightarrow \bot, P \vdash P}\,ax}{P \Rightarrow \bot, P \vdash \bot}\Rightarrow e}{P \Rightarrow \bot \vdash \neg P}\neg i}{\vdash (P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P}\Rightarrow i
$$

Ejercicio 6
Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, \neg P \vdash P}\,ax \qquad \dfrac{}{P, \neg P \vdash \neg P}\,ax}{P, \neg P \vdash \bot}\,\neg e}{P \vdash \neg\neg P}\,\neg i}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}\,\Rightarrow i
$$

otra prueba posible, usando la regla derivada ¬¬i :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,ax}{P \vdash \neg\neg P}\,\neg\neg i}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}\,\Rightarrow i
$$

Ejercicio 7
Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas.
Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

$\neg\neg e$, LEM, PBC $\Big\}$ reglas clásicas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P \Rightarrow \bot, \neg P \vdash \neg P \Rightarrow \bot}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg P \Rightarrow \bot, \neg P \vdash \neg P}\,ax}{\neg P \Rightarrow \bot, \neg P \vdash \bot}\,\Rightarrow e}{\neg P \Rightarrow \bot \vdash \neg\neg P}\,\neg i}{\neg P \Rightarrow \bot \vdash P}\,\neg\neg e}{\vdash (\neg P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P}\,\Rightarrow i$$

$$\dfrac{\neg P \Rightarrow \bot, \neg P \vdash \bot}{\neg P \Rightarrow \bot \vdash P}\,PBC$$

(cuando PBC se puede acortar un paso de la derivación)

Ejercicio 8

Probar la siguiente propiedad:

Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

Asumimos que $\Gamma \vdash \sigma$ es válido $\Rightarrow$ existe un árbol que lo deriva:

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \rightarrow \text{x hip}$$

este árbol tiene alguna regla que es la última. dividimos en casos:

Queremos ver que $\Gamma, \tau \vdash \sigma$, vamos a construir un árbol que lo derive.

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}$$

- caso ax

el árbol es así por hipótesis

$$\frac{}{\Gamma \vdash \sigma}\,ax$$

entonces: $\sigma \in \Gamma$

qvq $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

$\sigma \in \Gamma, \tau$

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\,ax$$

- caso $\wedge i$

el árbol es así x hip.

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}$$

quiero construir una derivación correcta

$$\Longrightarrow \quad \sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' \qquad \Gamma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \tau' \wedge \rho}\wedge i$$

(recordamos la regla $\wedge i$)

$$\frac{\overbrace{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma_1}}^{\pi_1 =} \qquad \overbrace{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma_2}}^{= \pi_2}}{\Gamma \vdash \sigma_1 \wedge \sigma_2}\wedge i$$

$$\frac{\dfrac{\text{por HI en } \pi 1}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1} \qquad \dfrac{\text{por HI en } \pi 2}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_2}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \wedge \sigma_2}\wedge i$$

HI en π_1: si $\Gamma \vdash \sigma_1$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1$ es válido.

HI en π_2: si $\Gamma \vdash \sigma_2$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma_2$ es válido.

Caso $\wedge e_1$:

hipótesis sobre el árbol

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge e_1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}$$

quiero construir esta derivación

mirando la regla $\wedge e_1$ sé más cosas sobre la derivación.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \rho \wedge \alpha}{\Gamma \vdash \rho}\wedge e_1$$

$$\dfrac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \alpha}\right] = \Pi}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge e_1$$

por Hi Π

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \alpha}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\wedge e_1$$

Hi en Π: si $\Gamma \vdash \sigma \wedge \alpha$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \alpha$ es válido.

caso $\Rightarrow i$

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow i \qquad\qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \tau}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \tau} \Rightarrow i$$

- $\sigma = \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$

- $$\frac{\left.\dfrac{\vdots}{\Gamma, \sigma_1 \vdash \sigma_2}\right] \pi}{\Gamma \vdash \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2} \Rightarrow i \qquad\qquad \frac{\dfrac{\text{por HI en } \pi}{\Gamma, \tau, \sigma_1 \vdash \sigma_2}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2} \Rightarrow i$$

HI en π: si $\underbrace{\Gamma, \sigma_1}_{\Gamma'} \vdash \sigma_2$ es válido entonces $\overbrace{\Gamma, \sigma_1, \tau}^{\Gamma'} \vdash \sigma_2$ es válido

la HI vale con cualquier contexto, no sólo Γ'.

Para completar la demo faltan ver los demás casos, son similares. (con las otras reglas básicas)

Ejercicio 14
Probar que si Γ es consistente maximal entonces para cada fórmula σ se tiene que $\Gamma \vdash \sigma$ implica $\sigma \in \Gamma$ (i.e. Γ es cerrada respecto a derivabilidad). *Ayuda:* razonar por el absurdo.

Conjunto consistente de fórmulas
Γ se dice consistente si $\Gamma \nvdash \bot$.

Conjunto consistente maximal
Γ es consistente maximal si
- ✨ Γ es consistente
- ✨ Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$

Sea Γ CM. Sea σ una fórmula tal que
$\Gamma \vdash \sigma$ y $\sigma \notin \Gamma$

Entonces: $\sigma \notin \Gamma$

$\Gamma \subsetneq \Gamma \cup \{\sigma\}$

QVQ $\Gamma \cup \{\sigma\}$ es consistente.

PRUEBA DE ESTO:

Vamos a ver que $\Gamma \cup \{\sigma\}$ es consistente:
Asumo que no lo es. Entonces $\Gamma, \sigma \vdash \bot$ es válido

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\sigma}\,\neg i \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg e$$

absurdo porque Γ es CM.

$\therefore \Gamma \cup \{\sigma\}$ es consistente.

ABSURDO pues Γ es CM. $\therefore \forall \sigma \; \Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma \in \Gamma$