ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA I - ANÁLISIS II (C)
1er. cuatrimestre 2022

TEMA 3

SEGUNDO PARCIAL - 02/07/2022

1	2	3	4	Nota

Recuerde justificar todas las respuestas.

NOMBRE Y APELLIDO: L.U.: TURNO:

---

1. (3 puntos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(-1,-1)$ está dado por
$$T_2(x,y) = 17 + 3x + 7y + x^2 + 3y^2 + xy.$$
   (a) Decidir si $P = (-1,-1)$ es punto crítico de f y, en tal caso, decidir si es máximo local, mínimo local o punto silla.
   (b) Calcular, si existe
$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{f(x,y) - 12}{\|(x+1, y+1)\|}$$

2. (2 puntos) Hallar los máximos y los mínimos absolutos de la función
$$f(x,y) = (x-1)(x+y)$$
en la región
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le \sqrt{5} \text{ y } x^2 - 5 \le y \le 0\right\}.$$

3. (3 puntos)
   (a) Calcular
$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} \int_{4x}^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\,dy\,dx.$$
   (b) Calcular el volumen en el primer octante del sólido acotado por $z = 2 - y$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$.

4. (2 puntos) Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\}$. Calcular la integral triple:
$$\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV.$$

Solución Tema 1

1.

Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y, y + e^x)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $h = g \circ f$. El polinomio de Taylor de orden 2 de h en $(0,0)$ es:

$$p(x,y) = 2x - y + x^2 + 3xy + 2y^2.$$

(a) Calcular $g(0,1)$ y $\nabla g(0,1)$

(b) Calcular, si existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

a) Notemos primero que $f(0,0) = (0,1)$, luego $h(0,0) = g(f(0,0)) = g(0,1)$. Como el polinomio de Taylor coincide con con h en $(0,0)$, tenemos:

$$g(0,1) = h(0,0) = p(0,0) = 0$$

Para calcular $\nabla g(0,1)$ derivamos la expresión $h = g \circ f$ respecto de x y de y usando regla de la cadena:

$$\nabla h(0,0) = \nabla g(f(0,0)) \cdot Df(0,0) = \nabla g(0,1) \cdot Df(0,0) \tag{1}$$

Necesitamos calcular $\nabla h(0,0)$ y $Df(0,0)$. Para el primero, sabemos que las derivadas primeras de h coinciden con las de p en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\nabla p(x,y) &= (2 + 2x + 3y, -1 + 3x + 4y),\\ \nabla h(0,0) &= \nabla p(0,0) = (2,-1)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}, \quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Juntando todo, si llamamos $(a,b) = \nabla g(0,1)$ la igualdad 1 nos queda:

$$(2,-1) = (a,b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (b, -a+b) \Longrightarrow (a,b) = (3,2)$$

b) Si llamamos p_1 al polinomio de Taylor de orden 1 de h en $(0,0)$, podemos escribir $h(x,y) = p_1(x,y) + R_1(x,y)$ donde $R_1(x,y)$ es el resto. El límite que queremos calcular queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{p_1(x,y)}{\|(x,y)\|} + \frac{R_1(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

Por propiedad del resto, sabemos que el término con R_1 tiende a cero. Basta ver si existe el límite del término con p_1. Calculemos primero $p_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= h(0, 0) + \nabla h(0, 0) \cdot (x, y) \\ &= 0 + (2, -1) \cdot (x, y) = 2x - y \end{aligned}$$

El límite nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{p_1(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Mirando por la recta $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x \to 0^+ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x \to 0^- \end{cases}$$

Por lo tanto este límite no existe y tampoco existe el límite original.

2.

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$.

(a) Analizar la existencia de máximos y mínimos locales y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Analizar la existencia de extremos absolutos de f en la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

a) Como f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, buscamos puntos críticos mirando dónde se anula ∇f:

$\nabla f(x, y) = (ye^{xy-1} - x, xe^{xy-1} - y)$

$\begin{cases} ye^{xy-1} - x = 0 \\ xe^{xy-1} - y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$ Si $x = 0$ resulta $y = 0$ y viceversa. $\to (0, 0)$ es solución. Supongamos desde ahora que $x, y \neq 0$.

Dividiendo las ecuaciones resulta: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y = \pm x$

- Si $y = -x \Longrightarrow -xe^{-x^2-1} = x \Longrightarrow -e^{-x^2-1} = 1$ y eso es absurdo.
- Si $y = x \Longrightarrow xe^{x^2-1} = x \Longrightarrow e^{x^2-1} = 1 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

$\Longrightarrow (1, 1), (-1, -1)$ son solución.

Los puntos críticos son: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$. Usamos el Criterio del Hessiano para determinar si son o no extremos:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy-1}-1 & e^{xy-1}(1+yx) \\ e^{xy-1}(1+yx) & x^2e^{xy-1}-1 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & e^{-1} \\ e^{-1} & -1 \end{pmatrix}, det(Hf(0,0)) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0,$$

$$Hf(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, det(Hf(\pm 1, \pm 1)) = -4 < 0$$

Por el Criterio, resulta $(0,0)$ máximo local y $(\pm 1, \pm 1)$ puntos silla.

b) La región D es un disco de radio $\sqrt{2}$. Como es compacto y f es continua, por Weierstrass existen máximo y mínimo absolutos de f sobre D.

Si miramos en el interior de D, los candidatos son aquellos puntos donde se anule ∇f y ya los calculamos antes; el único de esos tres en el interior de D es el $(0,0)$.

Miramos ahora en el borde de D, $\partial D = \{x^2+y^2=2\}$. Definiendo $g(x,y) = x^2+y^2$, el borde se escribe como $\partial D = \{(x,y) : g(x,y) = 2\}$. Usamos Multiplicadores de Lagrange para buscar candidatos sobre ∂D:

$$\nabla g = (2x, 2y) \text{ solo se anula en } (0,0), \text{ pero } (0,0) \notin \partial D.$$

Miramos entonces soluciones al sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{xy-1} - x = \lambda 2x \\ xe^{xy-1} - y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{xy-1} = x(2\lambda+1) & \text{(I)} \\ xe^{xy-1} = y(2\lambda+1) & \text{(II)} \\ x^2+y^2 = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Si $x=0$, en (I) resulta $y=0$ (y viceversa mirando (II)). Del mismo modo, si $\lambda = -\frac{1}{2}$, de (I) y (II) resulta $x, y = 0$. Como $(0,0)$ no satisface (III), lo descartamos.
Supongamos desde ahora que $x, y \neq 0, \lambda \neq -\frac{1}{2}$ (para poder hacer lo siguiente): dividiendo las ecuaciones (I) y (II) queda

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y = \pm x$$

• Si $y = \pm x$, mirando en (III) queda $2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$. Luego, los candidatos del borde son $(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)$.

Evaluamos en f todos los candidatos y comparamos:

$$f(0,0) = e^{-1}, \quad f(1,1) = f(-1,-1) = 0, \quad f(1,-1) = f(-1,1) = e^{-2} - 1$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es máximo absoluto y $(1,-1)$ y $(-1,1)$ son mínimos absolutos de f sobre D.

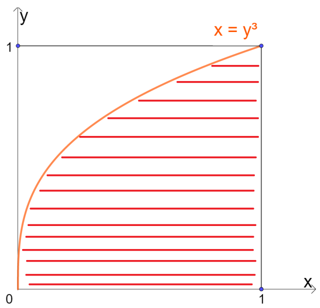
3.

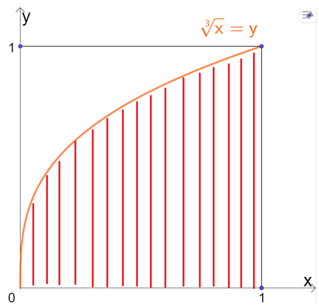
Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^3}^1 y^2 sen(x^2) dxdy.$

(b) $\displaystyle\iiint_E xz\, dV$ donde E es el sólido delimitado por el plano $4x+y+2z=2$ en el primer octante.

a) Como no podemos calcular una primitiva de $sen(x^2)$ respecto de x, cambiemos el orden de integración. Para eso, hay que describir la región como de tipo I:





Tipo II	$\longrightarrow$	Tipo I
$0 \leq y \leq 1$		$0 \leq x \leq 1$
$y^3 \leq x \leq 1$		$0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}$

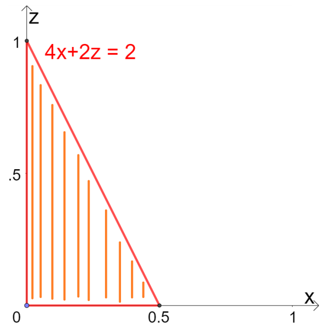
Usando Fubini para cambiar el orden de integración, resulta:

$$\int_0^1 \int_{y^3}^1 y^2 sen(x^2) dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} y^2 sen(x^2) dydx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} sen(x^2) \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} sen(x^2) dx$$

$$\text{(sustituyendo } u = x^2\text{)} \quad = \left(\frac{-cos(x^2)}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{-cos(1)+1}{6}$$

b) En el primer octante tenemos $x, y, z \geq 0$. Despejando y en la ecuación del plano, nos queda $0 \leq y \leq 2 - 4x - 2z$. Veamos entonces cómo se relacionan x, z: en el plano (x, z) (es decir, tomando $y = 0$) la región está delimitada por la recta $4x + 2z = 2$ en el primer cuadrante



$$4x + 2z = 2 \longrightarrow z = 1 - 2x$$

$$0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}$$
$$0 \leq z \leq 1 - 2x$$

Luego, podemos expresar la integral como:

$$\iiint_E xz\ dV = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} \int_0^{2-4x-2z} xzdydzdx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} (xzy)\Big|_{y=0}^{y=2-4x-2z} dzdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} xz(2-4x-2z)dzdx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} 2zx(1-2x) - 2xz^2\ dzdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(z^2x(1-2x) - \frac{2}{3}xz^3 \right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-2x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)^3 - \frac{2}{3}x(1-2x)^3\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}x(1-2x)^3 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x - 6x^2 + 12x^3 - 8x^4\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{240}$$

4.

Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{zx^3}{3} + zy^2x, xy^2e^{x^2}, -2xyze^{x^2} \right).$$

Calcular

$$\iiint_D div(F)dV,$$

donde D es la región encerrada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$.

- Calculemos primero la función

$$div(F) = F_x + F_y + F_z = zx^2 + zy^2 + \cancel{2xye^{x^2}} - \cancel{2xye^{x^2}} = z(x^2 + y^2)$$

- Para calcular la *sombra* de la región sobre el plano (x,y), veamos dónde se intersecan las superficies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 6 - 2(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \begin{array}{r} \longrightarrow x^2 + y^2 = 6 - 2(x^2 + y^2) \\ \longrightarrow 3(x^2 + y^2) = 6 \\ \longrightarrow x^2 + y^2 = 2 \end{array}$$

Es decir, el sólido D se escribe como:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - 2(x^2 + y^2)\}$$

Haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \\ z = z \end{cases} \text{ la región se describe como } \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 6 - 2r^2 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variables, la integral queda:

$$\iiint_D z(x^2 + y^2) dV(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{6-2r^2} zr^2.r \ dzdrd\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r^3 \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=r^2}^{z=6-2r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3((6 - 2r^2)^2 - (r^2)^2) dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} 36r^3 - 24r^5 + 3r^7 \ dr = \pi \left(9r^4 - 4r^6 + \frac{3r^8}{8} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 10\pi$$

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Segundo Parcial - 09/12/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $p(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $(0, 0)$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x - y) + 2g(x, y)$.

(a) Encontrar el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0, 0)$.

(b) Decidir si f tiene un extremo local en $(0, 0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$. Encontrar extremos absolutos de f en la región $D \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

3. (a) Calcular $\displaystyle\iint_D e^x y^3 \, dA$, donde D es la región delimitada por $x = y^4$ y $x = 1$.

(b) Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante que está delimitado por las superficies $x + 2y = 2$ y $z = x^2 + y^2$.

4. Determine el valor de la integral

$$\iiint_E (x^2 + z^2) y \, dV,$$

donde $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 + z^2 \leq 1\Big\}$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Primer Recuperatorio - Segundo Parcial - 10/08/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $f(x,y) = xe^{2y}$ definida en $\mathbb{R}^2$. Hallar un valor aproximado de $1,01e^{0,01}$ usando el polinomio de Taylor de orden dos de f.

2. Encontrar los puntos más lejanos y más cercanos de la superficie de ecuación

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

al punto $(0,0,2)$.

3. Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dxdy$

(b) $\displaystyle\iiint_E (y+z)\, dV$ donde E es el sólido delimitado por el plano $z = 1-y$ y la superficie $x = y^2$ en el primer octante.

4. La densidad de un sólido esférico de radio R está dada por $(1+\rho^3)^{-1}$ donde ρ es la distancia al centro de la esfera. Calcular la masa total de la esfera.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Segundo Recuperatorio del Segundo Parcial - 18/08/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(y)e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2}.$$

2. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $F(x,y) = (3x^2 - 4y, 4y - 4x)$.

(a) Probar que F es un campo vectorial gradiente.

(b) Hallar los extremos relativos y los puntos silla de su función potencial f.

3. Calcular las siguientes integrales

(a) $\iint_D (2x+1)dA$ donde D es la región encerrada entre la curva $y = x^2$ y la recta $x + y = 2$,

(b) $\iiint_E x\, dV$ donde E es el sólido encerrado entre las superficies $z = e^{x^2}$ y $z = -y$ para (x,y) en el rectángulo $R = [1,2] \times [0,2]$ del plano xy.

4. Calcular

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\, dA$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 16,\ -x \le y \le x\}$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Simulacro Segundo Parcial

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

---

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,1)$ es

$$p(x,y) = 2x^2 - xy + 5x - y + 5.$$

(a) Decidir si f tiene un extremo local en $(-1,1)$.

(b) Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{f(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|}$$

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy^2 + 2y^2 + 1$. Hallar los máximos y mínimos absolutos de f en

$$D = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\right\}.$$

3. Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{1+x^4} dxdy.$

(b) $\displaystyle\iiint_E xz^2\ dV$ donde E es el sólido debajo de la superficie $z = x^2$ y arriba del rectángulo $R = [0,1] \times [2,3]$ en el plano xy.

4. Hallar el volumen del sólido acotado por las superficies

$$z = e^{4x^2+4y^2} \quad y \quad z = e^4.$$
