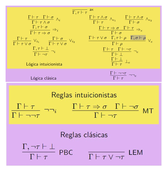

Ejercicio 4 ★

Demuestre en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula $\neg\varphi$ es un teorema si y sólo si φ es absurdo.

i. *Modus ponens relativizado:*
$((P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow R$

ii. Reducción al absurdo: $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow \bot, P \vdash P \Rightarrow \bot}\,ax \quad \dfrac{}{P \Rightarrow \bot, P \vdash P}\,ax}{P \Rightarrow \bot, P \vdash \bot}\,\Rightarrow_e}{P \Rightarrow \bot \vdash \neg P}\,\neg_i}{\vdash (P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow_i$$

iii. Introducción de la doble negación: $P \Rightarrow \neg\neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, \neg P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{}{P, \neg P \vdash \neg P}\,ax}{P, \neg P \vdash \bot}\,\neg_e}{P \vdash \neg\neg P}\,\neg_i}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}\,\Rightarrow_i$$

iv. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg P, P \vdash \neg\neg\neg P}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg P, P \vdash \neg\neg\neg P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg\neg\neg P, P \vdash P}\,ax}{\neg\neg\neg P, P \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg\neg\neg P \vdash \neg P}\,\neg_i}{\vdash \neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow_i$$

v. Contraposición: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow Q, \neg Q, P \vdash P \Rightarrow Q}\,ax \quad \dfrac{}{P \Rightarrow Q, \neg Q, P \vdash P}\,ax}{P \Rightarrow Q, \neg Q, P \vdash Q}\,\Rightarrow_e}{P \Rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\neg_i}{P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow_i}{\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)}\,\Rightarrow_i$$

vi. Adjunción: $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \Rightarrow R, P, Q \vdash P \wedge Q \Rightarrow R}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \Rightarrow R, P, Q \vdash P}\,ax \quad \dfrac{}{P \wedge Q \Rightarrow R, P, Q \vdash Q}\,ax}{P \wedge Q \Rightarrow R, P, Q \vdash R}\,\Rightarrow_e}{P \wedge Q \Rightarrow R, P \vdash Q \Rightarrow R}\,\Rightarrow_i}{P \wedge Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R}\,\Rightarrow_i}{\vdash (P \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R)}\,\Rightarrow_i$$

vii. de Morgan (I): $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), P \vdash \neg(P \vee Q)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), P \vdash P}\,ax}{\neg(P \vee Q), P \vdash P \vee Q}\,\vee_i}{\neg(P \vee Q), P \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}\,\neg_i}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}\,\wedge_i}{\neg(P \vee Q) \vdash (\neg P \wedge \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdash \neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

Idem

Idem

Vuelta

viii. de Morgan (II): $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$. Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg(P \wedge Q)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash Q}\,ax}{\neg(P \wedge Q), P \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P}\,\neg_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\,\vee_{i_1}}{\neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), Q \vdash Q}\,ax}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q}\,\neg_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash P \Rightarrow \neg Q}\,\Rightarrow_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\,\vee_{i_2}}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), Q \vdash \neg Q}\,ax}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \neg P \wedge \neg Q}\,\wedge_i}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q}\,\neg_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash P \Rightarrow \neg Q}\,\Rightarrow_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\,\vee_{i_2}}{\neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), Q \vdash \neg Q}\,ax}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \neg P \wedge \neg Q}\,\wedge_i}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q}\,\neg_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash P \Rightarrow \neg Q}\,\Rightarrow_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\,\vee_{i_2}}{\neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg P}\,ax \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), Q \vdash \neg Q}\,ax}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \neg P \wedge \neg Q}\,\wedge_i}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q}\,\neg_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash P \Rightarrow \neg Q}\,\Rightarrow_i}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\,\vee_{i_2}}{\neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

ix. Conmutatividad ($\wedge$): $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,ax}{P \wedge Q \vdash Q}\,\wedge_e \quad \dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,ax}{P \wedge Q \vdash Q \wedge P}\,\wedge_i}{\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)}\,\Rightarrow_i$$

x. Asociatividad ($\wedge$): $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash (P \wedge Q)}\,ax}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P}\,\wedge_e \quad \dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash R}\,ax}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge R}\,\wedge_i}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash Q \wedge (P \wedge R)}\,\wedge_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash (P \wedge Q)}\,ax}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash Q}\,\wedge_e \quad \dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash R}\,ax}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash Q \wedge R}\,\wedge_i}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)}\,\wedge_i}{\vdots}$$

Idem

$(P \wedge (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$

xi. Conmutatividad ($\vee$): $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vee Q, P \vdash P \vee Q}\,\vee_i \quad \dfrac{}{P \vee Q, Q \vdash P \vee Q}\,\vee_i}{P \vee Q, P \vee Q \vdash Q \vee P}\,\vee_e}{P \vee Q \vdash Q \vee P}\,\Rightarrow_i}{\vdash (P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

xii. Asociatividad ($\vee$): $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P}\,ax}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P \vee (Q \vee R)}\,\vee_i}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R), (P \vee (Q \vee R)) \vdash (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R) \vdash (P \vee (Q \vee R))}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P}\,ax}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P \vee (Q \vee R)}\,\vee_i}{((P \vee Q) \vee R), P \vdots (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R), (P \vee (Q \vee R)) \vdash (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R) \vdots (P \vee (Q \vee R))}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{((P \vee Q) \vee R), P \vdots P}\,ax}{((P \vee Q) \vee R), P \vdots P \vee (Q \vee R)}\,\vee_i}{((P \vee Q) \vee R), P \vdots (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R), (P \vee (Q \vee R)) \vdots (P \vee (Q \vee R))}\,\vee_e}{((P \vee Q) \vee R) \vdots (P \vee (Q \vee R))}\,\Rightarrow_i}{\vdots}$$

Ejercicio 7 ★

Demuestre en deducción natural que vale τ o para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**.

i. Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \bot) \Rightarrow \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg T \Rightarrow \bot, \neg T \vdash \neg T \Rightarrow \bot}\,ax \quad \dfrac{}{\neg T \Rightarrow \bot, \neg T \vdash \neg T}\,ax}{\neg T \Rightarrow \bot, \neg T \vdash \bot}\,\Rightarrow_e}{\neg T \Rightarrow \bot \vdash \neg\neg T}\,\neg_i}{\neg T \Rightarrow \bot \vdash T}\,\neg_e}{\vdash (\neg T \Rightarrow \bot) \Rightarrow T}\,\Rightarrow_i$$

ii. Ley de Peirce: $((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow \bot, \neg T \vdash T}\,ax \quad \dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdash T}}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdash \bot}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdash \neg\neg T}\,\neg_i}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdash P}\,\neg_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdash (T \Rightarrow P) \Rightarrow T}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdots P}}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdots (T \Rightarrow P)}}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdots T}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \vdots T \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots \neg T \Rightarrow P}\,ax \quad \dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots T}}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots \bot}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P \vdots \neg\neg T}\,\neg_i}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P \vdots T}\,\neg_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P \vdots T \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots \neg T \Rightarrow P}\,ax \quad \dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots T}}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P, \neg T \vdots \bot}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P \vdots \neg\neg T}\,\neg_i}{(T \Rightarrow P), \neg T \Rightarrow P \vdots T}\,\neg_e}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg T \vdots T}\,\vee_e \quad \dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg T \vdots \neg T}}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg T \vdots \bot}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P) \vdots (\neg T \Rightarrow P)}\,PBC$$

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{T \Rightarrow P \vdots (\neg T \Rightarrow P) = P}}{\vdash (T \Rightarrow P) \vdots (\neg T \Rightarrow P) \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i$$

iii. Tercero excluido: $\tau \vee \neg\tau$

iv. Contracarrera mágica: $(\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg T \Rightarrow T, \neg T \vdots T}}{\neg T \Rightarrow T \vdots T}}{\vdots (\neg T \Rightarrow T) \Rightarrow T}\,\Rightarrow_i$$

v. Contraposición clásica: $(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma, P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{\dots}{\Gamma, P \vdash P \vee \neg P}\,ax \quad \dfrac{\dots}{\Gamma, P \vdash P \vee \neg P}\,ax}{\Gamma \vdash P \vee \neg P}\,\vee_e}{\Gamma \vdash \{(P \Rightarrow \neg T), T \vdots P \vee \neg P\}}\,LEM$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdots (P \Rightarrow \neg T), T \vdots P}}{\Gamma \vdots (P \Rightarrow \neg T), T \vdots \neg P}}{\Gamma \vdots (P \Rightarrow \neg T) \vdots T \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i}{\vdots (P \Rightarrow \neg T) \vdots (T \Rightarrow P)}\,\Rightarrow_i}{\vdots (T \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg T)}\,\Rightarrow_i$$

vi. Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots \neg T \Rightarrow P}\,ax \quad \dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots T}}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots P}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P) \vdots (T \Rightarrow P) \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i \quad \dfrac{\dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots \neg P}}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P) \vdots (T \Rightarrow P) \Rightarrow P}\,MT$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots (T \Rightarrow P) \Rightarrow P}}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P), \neg P \vdots \bot}\,\Rightarrow_e}{(T \Rightarrow P), (\neg T \Rightarrow P) \vdots \neg\neg P}\,\neg_i$$

vii. Implicación vs. disyunción: $(\tau \Rightarrow \rho) \Leftrightarrow (\neg\tau \vee \rho)$

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdots (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow \neg Q)}}{\Gamma \vdots (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)}\,\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdots P}\,ax}{\Gamma, P \vdots \neg\neg P}}{\Gamma, P \vdots (P \Rightarrow \neg T)}}{\Gamma, P \vdots \neg T}\,MT}{\Gamma, P \vdots (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow \neg Q)}\,\vee_e}{\Gamma, P \vdots (P \Rightarrow \neg Q)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdots \neg T \vee P}\,\Rightarrow_i}{\vdots (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg T \vee P)}\,\Rightarrow_i$$