

Práctica 3: Límites y continuidad

1. Para cada una de las siguientes curvas determinar dominio y conjunto de puntos en los cuales resulta continua.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$,

(b) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}, \ln(t^2 - t), t^2 \right)$,

(c) $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ donde $r_1(t) = \sqrt{t}$ y $r_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

2. (a) Usando la definición de límite demostrar que:

i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1$,

ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} xy = -8$.

- (b) Para $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$, encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |xy + 8| < \varepsilon.$$

3. Probar por definición que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} y \sin(xy - 6) = 0.$$

4. Analizar la existencia de los siguientes límites.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy, & \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xe^{xy}, \\
 \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}, & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}, \\
 \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}, & \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\
 \text{(g)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}, & \text{(h)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
 \text{(i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{(j)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + 2y^4}, \\
 \text{(k)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{x^2(y - 3)^2 e^x}{x^2 + (y - 3)^2}.
 \end{array}$$

5. Utilizar coordenadas polares para analizar la existencia de los siguientes límites.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), \\
 \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}, & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.
 \end{array}$$

6. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}, & \text{(b)} \quad f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}.
 \end{array}$$

7. Determinar el conjunto de puntos en los cuales las siguientes funciones son continuas.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x, y) = \frac{xy}{1 + e^{x-y}}, \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}, \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}
 \end{array}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \sin(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

8. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3 \cos(y)}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0), \\ a & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

Hallar, si es posible, $a \in \mathbb{R}$ de manera que f resulte continua en $(1, 0)$.

9. Sea

$$f(x, y) = \frac{20}{1 - x^2 - y^2}.$$

a) Calcular el dominio de f .

b) Graficar f utilizando GeoGebra.

c) ¿Es posible extender f a la circunferencia $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ de manera continua? ¿Por qué?

10. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

11. Demostrar que si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a, y) . Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo \mathbb{R}^2 :

$$(a) f(x, y) = \sin(x), \quad (b) f(x, y) = \sin(x^2) + e^y.$$

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a) f(x, y) = (x^2, e^x) \quad (b) f(x, y) = \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right).$$