Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Primer Parcial - 08/06/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$y^2 + z^2 = 9, \qquad -x + y + z = 0.$$

(a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$.

(b) Verificar que el punto $P = (3, 3, 0)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^2(y+1)}{x^3 + (y+1)^3}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 27y^3}$.

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente en el punto $(1, 4, f(1, 4))$ es

$$z = 3x - 2y + 7.$$

Sean $x = g(s, t) = s^2 \cos(t)$ e $y = h(s, t) = (2s + t)^2$ y sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$.

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(-1, 0)$ y $\frac{\partial F}{\partial t}(-1, 0)$.

(b) Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de F en $(-1, 0, F(-1, 0))$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Primer Parcial - 21/10/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

Ejercicio 1: Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene al intersecar las superficies $9 = x^2 + 9y^2$ y $2 = z - x$.

(a) Hallar una función $r(t)$ cuya imagen sea la curva $\mathcal{C}$.

(b) Probar que $P = (3, 0, 5)$ pertenece a $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

Ejercicio 2: Hallar todos los $a \in (0, +\infty)$ tales que el siguiente límite existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^a}{x^2 + y^2}.$$

Ejercicio 3: Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos(y) + 3xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 4: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que el plano tangente a su gráfico en el punto $(2, 1, f(2,1))$ es

$$-x + 2y + z = 3.$$

Si $x = \mathrm{sen}(t) + 2$ e $y = s^2 + t$ y definimos $F(s,t) = f(x,y)$, calcular la derivada direccional de F en la dirección del vector $v = (3,1)$ en el punto $(s_0, t_0) = (1, 0)$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Primer Recuperatorio - Primer Parcial - 15/12/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la ecuación

$$x^2 - (y-1)^2 + z^2 = 0.$$

(a) Encontrar una función $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea la curva C que se obtiene al intersecar S con el plano $y + x - 2 = 0$.

(b) Hallar un número $t_0 \in \mathbb{R}$ de manera que $r(t_0) = (0, 2, 1)$.

(c) Determinar la recta tangente a C en el punto $(0, 2, 1)$.

2. Determinar el conjunto de puntos en los cuales f resulta continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) - x^2(y-1)}{2x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)\operatorname{sen}^2(y)3x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. De ser posible, dar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(0, 0, f(0,0))$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable cuyo plano tangente en $(1,2)$ es $2x + y + z = 3$, y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función

$$g(x,y) = (x + y^2, \operatorname{sen}(x) + 2).$$

Calcular el valor de $\nabla(f \circ g)$ en el punto $(0,1)$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Segundo Recuperatorio del Primer Parcial - 21/12/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad x = 1 + z.$$

(a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$. Calcular $Dom(r)$.

(b) Verificar que el punto $P = (0, 1, -1)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

2. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$ En el punto (0,0)

(b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-3)}{(x-1)^2 + (y-3)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,3), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,3). \end{cases}$$ En el punto (1,3)

3. Analizar la diferenciabilidad de la siguiente función en todo su dominio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y - \operatorname{sen}(x^3)}{x^2 + \frac{1}{3}y^2} + 2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables. Probar que si

$$z = f(x + 2t) + g(x - 2t),$$

entonces se verifica la siguiente identidad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Sugerencia: tomar $u = x + 2t$, $v = x - 2t$

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Primer Recuperatorio - Primer Parcial - 10/08/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

---

1. (a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la intersección de

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad y = 3z^2$$

(b) Para la función $r(t)$ hallada, encontrar valores t_1 y t_2 tales que $r(t_1) = (2, 0, 0)$ y $r(t_2) = (0, 12, 2)$

(c) Calcular el area del paralelogramo de vértices $\vec{0}$, $A = r(t_1)$, $B = r(t_2)$ y $C = A + B$.

2. Calcular el siguiente límite para $a = 0$ y $a = 1$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2x^2y^2 + a\sin(y^2)x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3x^3+2x^2y^2-3y^2x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Si existe dar la ecuación del plano tangente a f en $(0, 0, f(0,0))$

4. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = 3z^2 + e^{xz} - y^2z$.

(a) Probar que la ecuación $F(x,y,z) = 11$ define de manera implícita una función diferenciable $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$ tal que $f(0,1) = 2$.

(b) Hallar la dirección de más rápido crecimiento de f en $(0,1)$

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Segundo Recuperatorio del Primer Parcial - 18/08/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

---

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$x = \sqrt{1+y}, \qquad\qquad y^2 = 1+z.$$

(a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$. Calcular $Dom(r)$.

(b) Verificar que el punto $P = (1, 0, -1)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites

(a) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{3(x-1)^2+y^2},$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2)y}{x^2-y+x^4}.$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} y\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

(a) Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en el $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) = f(x^2+y^2, x^2-y, x)$. Sabiendo que el $\nabla f(2,0,1) = (1,2,3)$ y que $f(2,0,1) = 5$, hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1, 1, h(1,1))$.

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Simulacro del Primer Parcial - 01/06/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Considerar la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$

(a) Hacer esquemas de las trazas (horizontales y verticales) de S y utilizarlos para hacer un gráfico aproximado. Describir geométricamente la superficie.

(b) Hallar la curva intersección de S con el plano $z = 2$ y dar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa dicha curva.

(c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva descripta por r en el punto $P = (\sqrt{2}, 0, 2)$.

2. Sea

$$f(x,y) = \frac{y^3 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}.$$

(a) Hallar el dominio de f.

(b) Determinar si se puede definir f de forma continua en el punto $(0,0)$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\ \sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

Analizar la diferenciabilidad de f en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

4. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - xy$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que $g(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$, $g(1,2) = (1,1)$,

$$\frac{\partial x}{\partial s}(1,2) = 5, \qquad \frac{\partial x}{\partial t}(1,2) = 2$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial s}(1,2) = -1, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(1,2) = 3.$$

Sea $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g$.

(a) Hallar $\dfrac{\partial h}{\partial s}(1,2)$ y $\dfrac{\partial h}{\partial t}(1,2)$.

(b) Hallar $\dfrac{\partial h}{\partial v}(1,2)$ para $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.