Álgebra (27): 2do Parcial

- Transformaciones lineales:

$Nu\ F = F^{-1}(0_V) = \{x \in \mathbb{V} : F(x) = 0_W\}$

"Todos los vectores q' al aplicarles F van a parar al 0_W"

· La preimagen de un vector se puede pensar como todos los vectores q' al aplicarles F van a parar al vector.
$\hookrightarrow w$ $\hookrightarrow F(w)$ $\hookrightarrow v$ $\hookrightarrow v$

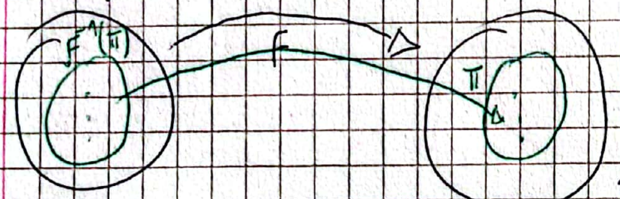
$F(w) = v$

$F^{-1}(\{v\}) = w$

~

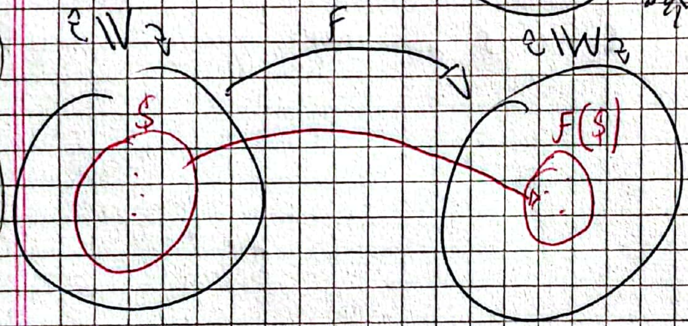
Base canónica.

$Im\ F$, se obtiene haciendo $F(E)$.



Obs: $F^{-1}(T) = \{v \in \mathbb{V} : F(v) \in T\}$

$\underbrace{F^{-1}(\quad)}_{\in\ Dom} \subseteq \mathbb{V}$



Obs: $F(\$) = \{F(s) : s \in \$\}$

$\underbrace{F(\quad)}_{\in\ Imag.} \subseteq \mathbb{W}$

~ $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ t.l. $\Rightarrow$

- F es monomorfismo $\Leftrightarrow$ $Nu\ F = \{0_V\}$
- F es epimorfismo $\Leftrightarrow$ $Im\ F = \mathbb{W}$
- F es isomorfismo $\Leftrightarrow$ mono y epi simultaneamente.

!

~ $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$\Rightarrow$ g es un endomorfismo

! Obs: Si g es endo y mono $\Rightarrow$ también es epi $\Rightarrow$ es iso

Si g es endo y epi $\Rightarrow$ tmb es mono $\Rightarrow$ es iso

Composición de TL:

$$F \circ g(v) = F(g(v))$$

Props:
- $Nu\ g \subseteq Nu\ F \circ g$
- $Im\ F \circ g \subseteq Im\ F$

~

TL inversibles:

$(F: V \to W)$, $(F^{-1}: W \to V)$ tq'

$F \circ F^{-1} = id_W$ y $F^{-1} \circ F = id_V$

$F(v) = w \iff F^{-1}(w) = v$

Props:
- F es inv $\iff$ F es iso.

Proyectores:

$P: V \to V$ (es decir, P endo)

P es proyector $\iff P \circ P(v) = P(v)$

Props:
- $Nu(P) \oplus Im(P) = V$
- $v \in Im(P) \Rightarrow P(v) = v$

~

Matriz de una t.l.:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \\ \cdot & & \end{pmatrix} = M(F) \to \boxed{M(F) \cdot v = F(v)}$$

Obs: Las columnas de $M(F)$ generan $Im(F)$
→ (No necesariamente es l.i).

→ en gral:

$$\boxed{M_{BB'}(F) \cdot (v)_B = (F(v))_{B'}}$$!

Cambio de Base:

Sale de: → $C_{BB'} = M_{BB'}(id) \cdot (v)_B = (id(v))_{B'} = (v)_{B'}$

$id(v) = v$

ej: → de como armar una matriz cambio de base.

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$$\Rightarrow C_B = C_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(1,1,1)_B$ $(1,1,0)_B$ $(1,0,0)_B$

$$C_{BB'}^{-1} = C_{B'B}$$

$$M_{B_1B_2}(F) = C_{B_4B_2} \cdot M_{B_3B_4}(F) \cdot C_{B_1B_3}$$ (!)

Matriz de una comp.

$$M(F \circ g) = M(F) \cdot M(g)$$

en gral:

$$M_{BB'}(F \circ g) = M_{B''B'}(F) \cdot M_{BB''}(g)$$ (!)

$\sim$

$$\left(M_{BB'}(F)\right)^{-1} = M_{B'B}(F^{-1})$$

Complejos:

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$

$|z| \rightsquigarrow$ teo. de Pitágoras.

obs: $|-2i| = |-2| = 2$

↳ el módulo de un imaginario puro es

↳ $|\operatorname{Im}(z)|$

distancia entre complejos:

Sean z y $w \in \mathbb{C}$

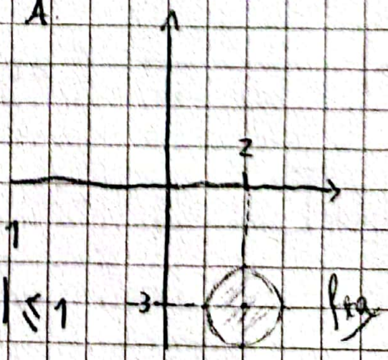
$\Rightarrow \operatorname{dist}(z, w) = |z - w|$

ej: $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 3i| \leq 1$

graficar A

$|z - 2 + 3i| \leq 1$

$|z - \underbrace{(2 - 3i)}_{w}| \leq 1$



extra:

↳ $(x - z) \cdot (x - \bar{z})$

$= x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2$

Props:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ } $\cdot\ z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ó $z^{-1} = \frac{1}{z}$ } $\cdot\ |\bar{z}| = |z|$
- $\bar{\bar{z}} = z$ } $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ } $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ } $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ } $|z.w| = |z|.|w|$

$\left(\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\right)$

obs:

$z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z - \bar{z} = 2\,Im(z)i$

Resolvente de complejos:

$z = \frac{-b + w}{2.a}$ con $w^2 = b^2 - 4.a.c$ (!)

obs: Si $w^2 = -k$, $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $w_1 = \sqrt{k}\,i$

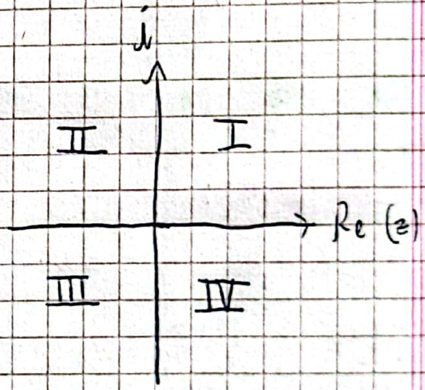
$w_2 = -\sqrt{k}\,i$

▷ caso contrario, Resuelvo la ec!

Tabla de Razones trigonométricas:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Sen(θ)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos(θ)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(!)



Forma trigonométrica: $z = a + bi$

$Sen(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}$, $Cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|}$

▷ Razonado con SOHCAHTOA

$$\Rightarrow \boxed{z = |z|.[Cos(\theta) + i.Sen(\theta)]}$$ (!)

obs:

$\bar{z} = |z|.[cos(-\theta) + i\,Sen(-\theta)]$

Producto de complejos:

$z = |z|.[cos(\alpha) + i\,sen(\alpha)]$

$w = |w|.[cos(\beta) + i\,sen(\beta)]$

(!)

$$\Rightarrow \boxed{z.w = |z|.|w|.[cos(\alpha+\beta) + i\,sen(\alpha+\beta)]}$$

Potencia:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \alpha) + i \operatorname{sen}(n \cdot \alpha)]$$

(*) $w = |w| \cdot [\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)]$

Inverso:

$$z^{-1} = |z|^{-1} \cdot [\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)]$$

Cociente:

(*) $$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

Igualdad de complejos:

en F. B =

$$z = w \iff \begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$$

en F. T =

$$z = w \iff \begin{cases} |z| = |w| \\ arg(z) = arg(w) \end{cases}$$

Resolver ec' complejas: (Raíces n-ésimas)

0) opero si es necesario

(*)

1) Pregunto: ¿$z = 0$ es solución?
- sí ⇒ guardo la sol. y busco el resto.
- No ⇒ busco el resto

2) Paso z a F. T (lo mismo con la otra parte igual)

ej: $z^6 = 1$

$z^6 = |z|^6 \cdot [\cos(6\alpha) + i \operatorname{sen}(6\alpha)]$, $1 = |1| \cdot [\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)]$

Por igualdad de complejos:

$$\begin{cases} |z|^6 = |1| \\ 6\alpha = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

⇒ Despejo...

obs: (Yapa)

$i = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

⋮

Opt II:

Igualo módulo y arg.

$|z|^6 = |1|$ y $arg(z^6) = arg(1)$

$$6 \cdot \alpha = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Características del arg.

$0 \leq \arg < 2\pi$, $\arg(z^n) = n.\arg(z)$

$\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w)$, $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$

~ Sea $r > 0$

$\arg(r) = 0$, $\arg(-r) = \pi$, $\arg(r.i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-r.i) = \frac{3}{2}\pi$

Notación exponencial:

$|z|.e^{i\alpha} = |z|.[\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)] = z.$

$e^{i\alpha}.e^{i\beta} = e^{i.(\alpha+\beta)}$ } $(e^{i\alpha})^n = e^{i\alpha.n}$

Polinomios:

- Suma de Pol. $\rightsquigarrow$ se suman coef. con coef.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$\Rightarrow p + q = ax^3 + (b+\alpha)x^2 + (c+\beta)x + \gamma$

- grad. y coef.:

$P(x) = ax^9 - bx + c \sim Gr(P) = 9$

Coef. princ.: a

Térm. ind.: c.

Prop:

$Gr(P) = n$, $Gr(q) = m$

$Gr(P.q) = Gr(P) + Gr(q)$

Mult. de Pol:

$P.q(x) = (2x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{3}).(x^3 + x - 2) = \ldots$

↳ Prop. distrib.

Hallar Raíces: $P(x) = ix^3 + 1$

Busco $z \in \mathbb{C}$ $P(z) = 0$

$iz^3 + 1 = 0$

↳ Resuelvo...

Recordar.

- Algo. de div. de Pol.
- Crit. de Gauss.
- Regla de Ruffini

Multiplicidad de una Raíz:

$P(x) = (x - r)^k \cdot q(x)$ para $q \in \mathbb{K}[x]$

$mult(r, P) = k$ $q(r) \neq 0$

Ej: $P(x) = (x^4 - 1)^2 \cdot (x^2 + 2x - 3) \cdot x^5 \cdot (x^2 + 1)^3$

$Gr(P) = 21 \rightarrow 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 + 2 \cdot 3$

$mult(0, P) = 5$, $mult(1, P) = 3$, $mult(-3, P) = 1$, $mult(-i, P) = 5$

$mult(-1, P) = 2$

6 Raíces distintas (ej. de la carpeta)

Props:

$P \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$:

- z es Raíz de mult $K \iff \bar{z}$ es de mult K.

~

Relaciones entre coef. y las Raíces de un Pol:

- Sea P de grad. 2.

$$\begin{cases} r_1 \cdot r_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \\ r_1 + r_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} \end{cases}$$

- Sea P de grad 3.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Autovalores y autovectores:

- $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$; $\underset{A}{M(F)} = \underset{C_{BE}}{C} \cdot \underset{D}{M_B(F)} \cdot \underset{C_{EB}}{C^{-1}}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- Los autovalores se buscan resolviendo las raices del polinomio característico.

$P_A(\ ) = \det(A - \lambda \cdot Id)$ ⟶ lo mismo con $m(F)$

- Los autovectores se buscan resolviendo:

$(A - \lambda Id) v = \phi$ ⟶ sale de: $Av = \lambda v$
$Av - \lambda v = 0$
$(A - \lambda Id) v = \phi$

↳ con λ autovalor.

(A es inv. $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ no autovalor)

- A es diag. $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ se puede formar una base con autovectores.

- $E_{\lambda=0} = Nu(F)$ } si $\lambda = 0$ autovalor $\Leftrightarrow Nu(F) \neq 0$

Los subesp. compuestos por autovalores asoc. a un autovalor λ se llaman Autoespacios.

↳ $E_{\lambda=n} = $ (sub esp.)

(*) C inv. y D diagonal.

$A^2 = C \cdot D^2 \cdot C^{-1}$

} ⟶ A
Sea λ_1 autovalor asoc. al autovector v_1
En A^2 λ_1^2 es " " " " v_1
" A^{-1} $\frac{1}{\lambda_1}$ " " " " " v_1

(!)

⋮

~

$\det(M(F) - \lambda I) = P_F = \det(M_B(F) - \lambda I)$ ⟶ mismos Autovalores

Buscar autovectores en otra base:

$(M_B(F) - \lambda \cdot Id) \cdot (v)_B = \phi$ } ⟶ en E
$(m(F) - \lambda \cdot Id) \cdot v = \phi$

Extra:

(Hay cosas del 1er Parcial)

Sea $S = \langle s_1, s_2 \rangle$ $\quad \Pi = \langle t_1, t_2 \rangle$

$S \cap \Pi = a s_1 + b s_2 = c t_1 + d t_2$

~

es

Sea $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ y $\Pi = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_2 - x_3 = 0 \}$

$\Rightarrow S \cap \Pi$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \ldots$$

~

SCD $\iff \det(A) \neq 0 \iff$ A es inversible.

(*) SCI $\iff \det(A) = 0 \iff$ A no es inversible.

~

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$(v)_B = (2,0,1) \Rightarrow v = 2.(1,1,1) + 0.(1,1,0) + 1.(1,0,0) = (3,2,2)$

$(2,2,1)_B = \underbrace{(1,1,0)}_{\triangleright \text{ tanteo coords.}}$

~

Inversa de una matriz:

$$(A \mid Id) \sim\triangleright (Id \mid A^{-1})$$

~

- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) . \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) . \operatorname{sen}(\beta)$

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) . \cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha) . \operatorname{sen}(\beta)$