Sistemas deductivos

PLP

2024

Por qué estudiar lógica

- Queremos lenguajes para modelar situaciones
- Queremos poder razonar y argumentar
- Queremos poder hacer esto formalmente
- y vamos a entender más sobre la computación y sus raíces

Sección 1

Lógica proposicional

Subsección 1

Sintaxis

Proposiciones o fórmulas

- símbolos

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \Rightarrow\ ,\ \Leftrightarrow\ ,\ (,\ )$$

- variables proposicionales (infinitas)

$$P\ ,\ Q\ ,\ R\ ,\ \ldots$$

- fórmulas o proposiciones
  - combinaciones apropiadas de símbolos y variables proposicionales
  - Ejemplo de combinación inapropiada: $(\wedge P(($

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si τ es una fórmula, $(\neg\tau)$ es una fórmula

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si τ es una fórmula, $(\neg\tau)$ es una fórmula
3. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \wedge \sigma)$ es una fórmula

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si τ es una fórmula, $(\neg\tau)$ es una fórmula
3. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \wedge \sigma)$ es una fórmula
4. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \vee \sigma)$ es una fórmula

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si τ es una fórmula, $(\neg\tau)$ es una fórmula
3. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \wedge \sigma)$ es una fórmula
4. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \vee \sigma)$ es una fórmula
5. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \Rightarrow \sigma)$ es una fórmula

Definición formal (inductiva)

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si τ es una fórmula, $(\neg\tau)$ es una fórmula
3. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \wedge \sigma)$ es una fórmula
4. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \vee \sigma)$ es una fórmula
5. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \Rightarrow \sigma)$ es una fórmula
6. si τ y σ son fórmulas, $(\tau \Leftrightarrow \sigma)$ es una fórmula

- Las fórmulas son un ejemplo de un conjunto inductivo
- Vienen provistos de
  - Esquema de prueba para probar propiedades sobre ellos (inducción estructural)
  - Esquema de recursión para definir funciones sobre el conjunto (recursión estructural)

Convenciones de notación

Ejemplos

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \quad (P \vee Q)$$

- ¿Y estas expresiones son fórmulas?

$$P(\wedge Q),\ \neg P$$

- Convenciones de notación
  - Precedencia: $\wedge$ y $\vee$ ligan más fuerte que $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$, $\neg$ liga más fuerte que el los demás
  - Omisión de paréntesis más externos y los de negaciones

Subsección 2

Semántica

Semántica clásica

- Consiste en asignarle valores de verdad a las fórmulas
- El conjunto de valores de verdad es

$$\{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$$

- Dos enfoques para darle semántica a las fórmulas de lógica proposicional
  1. Tablas de verdad
  2. Valuaciones
- Son equivalentes

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	
F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

τ	σ	$(\tau \Leftrightarrow \sigma)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

τ	σ	$(\tau \Leftrightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

τ	σ	$(\tau \Leftrightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

τ	σ	$(\tau \Leftrightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

τ	$(\neg\tau)$
V	F
F	V

τ	σ	$(\tau \wedge \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

τ	σ	$(\tau \vee \sigma)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

τ	σ	$(\tau \Rightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

τ	σ	$(\tau \Leftrightarrow \sigma)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V	V	
V	V	F	V	
V	F	V	F	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	V	F	F	
F	F	V	F	
F	F	F	F	

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	
V	F	V	F	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	V	F	F	
F	F	V	F	
F	F	F	F	

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	V	F	F	
F	F	V	F	
F	F	F	F	

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Ejemplo: tabla de verdad para $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Por cierto.... $P \wedge Q \Rightarrow R$ es la misma fórmula... ¿porqué?

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

“Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

“Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

$P =$ Juan está cursando
$Q =$ Juan no conoce a nadie
$R =$ Juan no tiene grupo

$$P \wedge Q \Rightarrow R$$

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

“Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

$P =$ Juan está cursando
$Q =$ Juan no conoce a nadie
$R =$ Juan no tiene grupo

$$P \wedge Q \Rightarrow R$$

Solución 2:

$P =$ Juan está cursando
$Q =$ Juan conoce a alguien
$R =$ Juan tiene grupo

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg R$$

Valuaciones

- Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \Rightarrow \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Una valuación satisface una proposición τ si $v \models \tau$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models P & \textit{sii} & v(P) = \mathrm{V} \\
v \models \neg\tau & \textit{sii} & v \not\models \tau \ (i.e. \text{ no } v \models \tau) \\
v \models \tau \vee \sigma & \textit{sii} & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \wedge \sigma & \textit{sii} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & \textit{sii} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \Leftrightarrow \sigma & \textit{sii} & (v \models \tau \text{ sii } v \models \sigma)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Dadas fórmulas τ y σ

- τ es lógicamente equivalente a σ cuando $v \models \tau$ sii $v \models \sigma$ para toda valuación v

Una fórmula τ es

- una tautología si $v \models \tau$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \models \tau$
- insatisfactible si no es satisfactible

Un conjunto de fórmulas Γ es

- satisfactible si existe una valuación v tal que para todo $\tau \in \Gamma$, se tiene $v \models \tau$
- insatisfactible si no es satisfactible

Ejemplos

Tautologías

- $P \Rightarrow P$
- $\neg\neg P \Rightarrow P$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Fórmulas insatisfactibles

- $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge P$
- $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

Tautologías e insatisfactibilidad

Teorema

Una fórmula τ es una tautología sii $\neg\tau$ es insatisfactible

Demostración.

$\Rightarrow$. Si τ es tautología, para toda valuación v, $v \models \tau$.
Entonces, $v \not\models \neg\tau$ (i.e. v no satisface $\neg\tau$).

$\Leftarrow$. Si $\neg\tau$ es insatisfactible, para toda valuación v, $v \not\models \neg\tau$.
Luego $v \models \tau$. $\square$

Observación

Este resultado sugiere un método indirecto para probar que una fórmula τ es una tautología, a saber probar que $\neg\tau$ es insatisfactible

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	P	Q	R	$P \land Q$	$P \land Q \Rightarrow R$
v_1	V	V	V		
v_2	V	V	F		
v_3	V	F	V		
v_4	V	F	F		
v_5	F	V	V		
v_6	F	V	F		
v_7	F	F	V		
v_8	F	F	F		

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow R$
v_1	V	V	V	V	
v_2	V	V	F	V	
v_3	V	F	V	F	
v_4	V	F	F	F	
v_5	F	V	V	F	
v_6	F	V	F	F	
v_7	F	F	V	F	
v_8	F	F	F	F	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow R$
v_1	V	V	V	V	V
v_2	V	V	F	V	
v_3	V	F	V	F	
v_4	V	F	F	F	
v_5	F	V	V	F	
v_6	F	V	F	F	
v_7	F	F	V	F	
v_8	F	F	F	F	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow R$
v_1	V	V	V	V	V
v_2	V	V	F	V	F
v_3	V	F	V	F	
v_4	V	F	F	F	
v_5	F	V	V	F	
v_6	F	V	F	F	
v_7	F	F	V	F	
v_8	F	F	F	F	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow R$
v_1	V	V	V	V	V
v_2	V	V	F	V	F
v_3	V	F	V	F	V
v_4	V	F	F	F	V
v_5	F	V	V	F	V
v_6	F	V	F	F	V
v_7	F	F	V	F	V
v_8	F	F	F	F	V

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Sección 2

Deducción natural

Subsección 1

Definiciones

Verdades universales

- Fórmulas cuyo valor de verdad no depende de cómo se interpretan
  - En lógica proposicional son las tautologías
- Contamos con una caracterización semántica de las tautologías
  - Aquellas cuyas tablas de verdad tienen V en todas las filas
- Nos interesa tener una caracterización sintáctica
  - Conjunto de fórmulas que se puedan probar en un sistema deductivo
- Beneficio adicional de sistema deductivo:
  - analizar formas argumentativas
  - pruebas como objeto de estudio

Sistema deductivo basado en reglas de prueba

Secuente (*sequent*)

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$$

Denota que a partir de asumir que el conjunto de fórmulas $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ son tautologías, podemos obtener una prueba de la validez de σ

Sistema deductivo basado en reglas de prueba

Secuente (*sequent*)

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$$

Denota que a partir de asumir que el conjunto de fórmulas $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ son tautologías, podemos obtener una prueba de la validez de σ

Reglas de prueba (*proof rules*)

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \tau_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash \tau_n}{\Gamma \vdash \sigma} \text{ nombre}$$

Permiten deducir un secuente (conclusión) a partir de ciertos otros (premisas)

$\Gamma_1 \vdash \tau_1 \cdots \Gamma_n \vdash \tau_n$: premisas $\qquad \Gamma \vdash \sigma$: conclusión

Sistema deductivo basado en reglas de prueba

Secuente (*sequent*)

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$$

Denota que a partir de asumir que el conjunto de fórmulas $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ son tautologías, podemos obtener una prueba de la validez de σ

Reglas de prueba (*proof rules*)

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \tau_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash \tau_n}{\Gamma \vdash \sigma} \text{ nombre}$$

Permiten deducir un secuente (conclusión) a partir de ciertos otros (premisas)

$\Gamma_1 \vdash \tau_1 \cdots \Gamma_n \vdash \tau_n$: premisas $\Gamma \vdash \sigma$: conclusión

Prueba

- Aplicando reglas de prueba a premisas y conclusiones obtenidas previamente.
- Un secuente es válido si podemos construir una prueba

Pruebas

Un primer ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, R \vdash P}\,\text{ax} \quad \dfrac{}{P, Q, R \vdash Q}\,\text{ax}}{P, Q, R \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i \quad \dfrac{}{P, Q, R \vdash R}\,\text{ax}}{P, Q, R \vdash (P \wedge Q) \wedge R}\,\wedge_i$$

- Prueba de $(P \wedge Q) \wedge R$ a partir de asumir P, Q y R
- ax y $\wedge_i$ son los nombres de las reglas que se usan en la prueba
- $P, Q, R \vdash (P \wedge Q) \wedge R$ es un sequente válido, porque tenemos una prueba

Importancia de la elección de las reglas

- Deben permitir construir sólo pruebas que constituyan una argumentación válida
  - Deberían impedir probar secuentes tales como

$$P, Q \vdash P \wedge \neg Q$$

- Deberían permitir inferir todas las fórmulas que se desprenden de las premisas

Regla del axioma

Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \mathsf{ax}$$

- Si τ se asume válida, puede probar que τ es válida
- Se usa en combinación con las demás reglas

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

Volviendo al ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, R \vdash P}\ \text{ax} \quad \dfrac{}{P, Q, R \vdash Q}\ \text{ax}}{P, Q, R \vdash P \wedge Q}\ \wedge_i \quad \dfrac{}{P, Q, R \vdash R}\ \text{ax}}{P, Q, R \vdash (P \wedge Q) \wedge R}\ \wedge_i$$

Otro ejemplo

Ejemplo: $P \wedge Q, R \vdash P \wedge R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\ \text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P}\ \wedge_{e_1} \qquad \dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash R}\ \text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge R}\ \wedge_i$$

Reglas para la doble negación

Introducción de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i$$

No es primitiva, puede ser derivada (ver más adelante)

Eliminación de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Reglas para la doble negación

Ejemplo: $P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash \neg\neg P \wedge R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash P}\,\text{ax}}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash \neg\neg P}\,\neg\neg_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash \neg\neg(Q \wedge R)}\,\text{ax}}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash Q \wedge R}\,\neg\neg_e}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash R}\,\wedge_{e_2}}{P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash \neg\neg P \wedge R}\,\wedge_i$$

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

P: llovió

$P \Rightarrow Q$: Si llovió, está mojado

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (Q)

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

P: llovió

$P \Rightarrow Q$: Si llovió, está mojado

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (Q)

Eliminación de la implicación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Notar que dada una implicación, para inferir la conclusión debemos saber que vale su premisa

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $P, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P \Rightarrow Q \vdash R$

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $P, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P \Rightarrow Q \vdash R$

Sea $\Gamma = P, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P \Rightarrow Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\text{ax}}{\Gamma \vdash Q \Rightarrow R}\Rightarrow_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\text{ax}}{\Gamma \vdash Q}\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash R}\Rightarrow_e$$

Introducción de la implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash P \wedge Q \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ \text{ax}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge_{e_1}}{\vdash P \wedge Q \Rightarrow P}\ \Rightarrow_i$$

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash P \wedge Q \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,\mathrm{ax}}{P \wedge Q \vdash P}\,\wedge_{e_1}}{\vdash P \wedge Q \Rightarrow P}\,\Rightarrow_i$$

Ejemplo: $\vdash P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,\mathrm{ax}}{P \wedge Q \vdash Q}\,\wedge_{e_2} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,\mathrm{ax}}{P \wedge Q \vdash P}\,\wedge_{e_1}}{P \wedge Q \vdash Q \wedge P}\,\wedge_i}{\vdash P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P}\,\Rightarrow_i$$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash P \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\text{ax}}{\vdash P \Rightarrow P}\Rightarrow_i$$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash P \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\text{ax}}{\vdash P \Rightarrow P}\Rightarrow_i$$

- El hecho de que el conjunto de asumsiones sea vacío indica que la prueba de $P \Rightarrow P$ no depende de nada y es siempre válida (es una tautología).

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash P \Rightarrow P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\text{ax}}{\vdash P \Rightarrow P}\Rightarrow_i$$

- El hecho de que el conjunto de asumsiones sea vacío indica que la prueba de $P \Rightarrow P$ no depende de nada y es siempre válida (es una tautología).

Siempre se puede transformar un sequence de la forma $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ en un secuente de la forma $\vdash \tau_1 \Rightarrow \tau_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \tau_n \Rightarrow \sigma$ aplicando n veces $\Rightarrow_i$ en el siguiente orden $\tau_n, \tau_{n-1}, \ldots, \tau_1$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q$, podemos decir algo respecto de P?

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q$, podemos decir algo respecto de P?
  - Notar que si P fuese verdadero, entonces por $\Rightarrow_e$, Q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg Q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg P$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q$, podemos decir algo respecto de P?
  - Notar que si P fuese verdadero, entonces por $\Rightarrow_e$, Q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg Q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg P$.
- No es una regla primitiva (vamos a ver que se puede obtener como combinación de otras)

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau} \text{ MT}$$

Modus tollens

Ejemplo: $P, \neg R, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash \neg Q$

Sea $\Gamma = P, \neg R, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)}\,\text{ax} \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash P}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash Q \Rightarrow R}\,\Rightarrow_e \quad \cfrac{}{\Gamma \vdash \neg R}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash \neg Q}\,\text{MT}$$

Teoremas

Teorema

Llamamos teorema a toda fórmula lógica τ tal que el secuente $\vdash \tau$ es válido.

Ejercicio

Mostrar que $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ es un teorema

Reglas para la disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Reglas para la disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

Reglas para la disyunción

Ejemplo: $P \lor Q \vdash Q \lor P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \lor Q \vdash P \lor Q}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \lor Q, P \vdash P}\,\text{ax}}{P \lor Q, P \vdash Q \lor P}\,\lor_{i_2} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \lor Q, Q \vdash Q}\,\text{ax}}{P \lor Q, Q \vdash Q \lor P}\,\lor_{i_1}}{P \lor Q \vdash Q \lor P}\,\lor_e$$

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\tau \wedge \neg\tau$ o $\neg\tau \wedge \tau$

- Vamos a denotar una contradicción con $\perp$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\tau \wedge \neg\tau$ o $\neg\tau \wedge \tau$

- Vamos a denotar una contradicción con $\perp$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Eliminación de contradicción

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \perp_e$$

Pensar que $\tau \wedge \neg\tau \vdash \sigma$ se corresponde con $\vdash \tau \wedge \neg\tau \Rightarrow \sigma$

Reglas para la negación

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot} \; \neg_e$$

Reglas para la negación

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Introducción de la negación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i$$

Reglas para la negación

Ejemplo: $P \Rightarrow \neg P \vdash \neg P$

Reglas para la negación

Ejemplo: $P \Rightarrow \neg P \vdash \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow \neg P, P \vdash P}\;\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow \neg P, P \vdash P \Rightarrow \neg P}\;\text{ax} \quad \dfrac{}{P \Rightarrow \neg P, P \vdash P}\;\text{ax}}{P \Rightarrow \neg P, P \vdash \neg P}\;\Rightarrow_e}{\dfrac{P \Rightarrow \neg P, P \vdash \bot}{P \Rightarrow \neg P \vdash \neg P}\;\neg_i}\;\neg_e$$

Regla de debilitamiento (*Weakening*)

Debilitamiento

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ \mathsf{W}$$

- Nos permite agregar fórmulas a las premisas
- No cambia la validez de la prueba
- La vamos a demostrar en la clase de práctica

Reglas derivadas: *Modus tollens*

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \mathsf{MT}$$

Reglas derivadas: *Modus tollens*

$$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \mathsf{MT}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}{\Gamma, \tau \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \mathsf{W} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \mathsf{ax}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma, \tau \vdash \neg\sigma}\ \mathsf{W}}{\Gamma, \tau \vdash \bot}\ \neg_e}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i$$

Reglas derivadas: $\neg\neg i$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i$$

Reglas derivadas: $\neg\neg i$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \neg\tau \vdash \tau}\ \mathsf{W} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau}\ \mathsf{ax}}{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}\ \neg_e}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg_i$$

Reglas derivadas: Reducción al absurdo

PBC (Proof by contradiction)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \mathsf{PBC}$$

Reglas derivadas: Reducción al absurdo

PBC (Proof by contradiction)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg_i}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

LEM (Law of the excluded middle)

Tertium non datur: la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau} \text{ LEM}$$

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

LEM (Law of the excluded middle)

Tertium non datur: la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

Sea $\Delta = \Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \tau}\ \text{ax}}{\Delta \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \vee_{i_1} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)}\ \text{ax}}{\Delta \vdash \bot}\ \neg_e}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \neg\tau}\ \neg_i}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \vee_{i_2} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)}\ \text{ax}}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \bot}\ \neg_e}{\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg(\tau \vee \neg\tau)}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \neg\neg_e}\ \neg_i$$

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

Ejemplo: $P \Rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$

Sea $\Gamma = P \Rightarrow Q$

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash P \vee \neg P}\,\text{LEM}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P \Rightarrow Q}\,\text{ax}
\quad
\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}\,\text{ax}
}{\Gamma, P \vdash Q}\,{\Rightarrow_e}
}{\Gamma, P \vdash \neg P \vee Q}\,{\vee_{i_2}}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, \neg P \vdash \neg P}\,\text{ax}
}{\Gamma, \neg P \vdash \neg P \vee Q}\,{\vee_{i_1}}
}{\Gamma \vdash \neg P \vee Q}\,{\vee_e}
$$

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).
- Sin embargo, ¡las tres son equivalentes! Podemos derivar una a partir de la otra.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).
- Sin embargo, ¡las tres son equivalentes! Podemos derivar una a partir de la otra.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).
- Sin embargo, ¡las tres son equivalentes! Podemos derivar una a partir de la otra.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

O mejor aún, ¿podríamos no querer utilizar la regla PBC? ¿Por qué?

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).
- Sin embargo, ¡las tres son equivalentes! Podemos derivar una a partir de la otra.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

O mejor aún, ¿podríamos no querer utilizar la regla PBC? ¿Por qué?

La respuesta está en las pruebas constructivas. En la lógica constructiva o intuicionista, no se permite la prueba por contradicción (PBC) ni el tercero excluido (LEM).

Lógica clásica vs constructiva / intuicionista

- Vimos 4 reglas derivadas: MT, $\neg\neg_i$, PBC y LEM.
- Las últimas dos utilizan la regla de eliminación de la doble negación ($\neg\neg_e$).
- Sin embargo, ¡las tres son equivalentes! Podemos derivar una a partir de la otra.

¿Qué sucede si no queremos utilizar la regla PBC?

O mejor aún, ¿podríamos no querer utilizar la regla PBC? ¿Por qué?

La respuesta está en las pruebas constructivas. En la lógica constructiva o intuicionista, no se permite la prueba por contradicción (PBC) ni el tercero excluido (LEM).

Si no podemos derivar LEM, la lógica se llama intuicionista o constructiva.

Reglas básicas (1/2)

Axioma	$\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \mathsf{ax}$	
	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$

Reglas básicas (2/2)

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$

Reglas derivadas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \text{MT}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

Subsección 2

Corrección y completitud

Corrección y completitud

¿Cuál es la relación entre la sintaxis y la semántica de lógica proposicional?

Sintaxis

- Conjunto de fórmulas τ tal que $\vdash \tau$ es un secuente válido

Semántica

- Conjunto de fórmulas τ tal que $v \models \tau$, para toda valuación v (i.e. tautologías).

Corrección

$\vdash \tau$ secuente válido implica que τ es tautología

Completitud

τ tautología implica que $\vdash \tau$ es secuente válido.

Corrección y completitud

¿Cuál es la relación entre la sintaxis y la semántica de lógica proposicional?

Sintaxis

- Conjunto de fórmulas τ tal que $\vdash \tau$ es un secuente válido

Semántica

- Conjunto de fórmulas τ tal que $v \vDash \tau$, para toda valuación v (i.e. tautologías).

Corrección

τ tiene una prueba implica que τ es tautología

Completitud

τ tautología implica que τ tiene una prueba.

Valuaciones

¡Repito el slide 14!

- Valuación: función $v : \mathcal{V} \Rightarrow \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Satisfactibilidad: v satisface τ si $v \models \tau$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models P & sii & v(P) = \mathrm{V} \\
v \models \neg\tau & sii & v \not\models \tau \ (i.e. \text{ no } v \models \tau) \\
v \models \tau \vee \sigma & sii & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \wedge \sigma & sii & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & sii & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \Leftrightarrow \sigma & sii & (v \models \tau \text{ sii } v \models \sigma)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Una proposición τ es

- una tautología si $v \models \tau$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \models \tau$
- insatisfactible si no es satisfactible

Consecuencia semántica (semantic entailment)

Consecuencia semántica

Para $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \sigma$ fórmulas de la lógica proposicional,

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vDash \sigma$$

cuando toda valuación v que satisface todas las premisas (esto es $v \vDash \tau_i$ para todo $i \in 1..n$) también satisface la conclusión ($v \vDash \sigma$).

Ejemplos

- $P \wedge Q \vDash P$
- $\neg Q, P \vee Q \vDash P$
- $P \vee Q \nvDash Q$
- $P \vDash Q \vee \neg Q$

Corrección y completitud (Generalizado)

- Conviene generalizar los enunciados de corrección y completitud
- Motivo: Facilita su demostración

Corrección

$\vdash \tau$ secuente válido implica que τ es tautología

Completitud

τ tautología implica que $\vdash \tau$ es secuente válido.

Corrección y completitud (Generalizado)

- Conviene generalizar los enunciados de corrección y completitud
- Motivo: Facilita su demostración

Corrección

$\vdash \tau$ secuente válido implica que τ es tautología

Corrección (generalizada)

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ secuente válido implica que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$

Completitud

τ tautología implica que $\vdash \tau$ es secuente válido.

Completitud (generalizada)

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$ implica que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es secuente válido.

Corrección

Teorema

Si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ entonces $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \sigma$

Demostración:

- Por inducción en la estructura de la prueba
- Procedemos analizando por casos la última regla aplicada en la prueba
- Arrancamos con el caso base
- Caso base) La prueba consiste únicamente de la regla ax: $\sigma = \tau_i$ para algún i. Como $v \models \tau_i$ por hipótesis, tenemos que $v \models \sigma$.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\wedge_i$) $\sigma = \eta_1 \wedge \eta_2$ con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \eta_1$ (1) y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \eta_2$ (2).
  - Por HI en (1) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \eta_1$.
  - Por HI en (2) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \eta_2$.

  Por def. de consecuencia semántica, para toda valuación v que satisface las premisas $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$,
  - $v \models \eta_1$
  - $v \models \eta_2$

  Luego $v \models \eta_1 \wedge \eta_2$ (es decir $v \models \sigma$) por definición de satisface. Finalmente, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \sigma$.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\wedge_{e_1}$) $\sigma = \eta_1$ con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \eta_1 \wedge \eta_2$. Aplicando HI,
$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Por definición de consecuencia semántica, si v satisface todas las premisas, entonces
$$v \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Luego, $v \vDash \eta_1$ (es decir $v \vDash \sigma$). Finalmente $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vDash \sigma$.
- Caso $\wedge_{e_2}$) análogo anterior.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\vee_e$) $\sigma = \rho$ con
  (1) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \vdash \eta_1 \vee \eta_2$
  (2) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \eta_1 \vdash \rho$
  (3) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \eta_2 \vdash \rho$.
  Usando hipótesis inductiva en (1-3), tenemos que
  (4) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \eta_1 \vee \eta_2$
  (5) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \eta_1 \models \rho$
  (6) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \eta_2 \models \rho$.
  Por (4), sabemos que para toda valuación v que satisface las premisas, $v \models \eta_1 \vee \eta_2$. Luego $v \models \eta_1$ o $v \models \eta_2$
  - Si $v \models \eta_1$, por (5) $v \models \rho$ y luego $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \rho$.
  - Si $v \models \eta_2$, por (6) $v \models \rho$ y luego $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \rho$.

  En los dos casos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \models \sigma$ (porque $\sigma = \rho$).

Los casos restantes casos quedan como ejercicio

Comentarios adicionales sobre corrección

- Es el resultado es esperado
- Muestra que las reglas lógica del sistema de Deducción Natural para lógica proposicional son "razonables"
- Beneficio adicional: se puede usar para probar que una fórmula no es demostrable
  - $\vdash P$ no es un secuente válido (¿Por qué?)

Completitud

Completitud

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$ implica que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es secuente válido.

- Estrategia: vamos a probar el contrarecíproco

Completitud (definición equivalente a la anterior)

$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ no es secuente válido implica que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \not\models \tau$.

Recordar:

- "$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ no es secuente válido" significa que no hay una prueba de τ a partir de las hipótesis $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.
- "$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \not\models \tau$" significa que existe una valuación v tal que $v \models \sigma_i$, para toda $i \in 1..n$ pero $v \not\models \tau$.

Nociones preliminares

Conjunto consistente de fórmulas

Γ se dice consistente si $\Gamma \nvdash \bot$.

- Γ es consistente si no se puede derivar una contradicción a partir de él

Ejemplos:

- $\{P, Q \Rightarrow R\}$ es consistente (¿Cómo lo pruebo?)
- $\{P, Q, Q \Rightarrow \neg P\}$ no es consistente

Nociones preliminares

Recordamos la definición de satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas

- Γ un conjunto de fórmulas

Definición

Γ tiene un modelo (o es satisfactible) si existe una valuación v tal que

$$v \models \tau, \text{ para toda } \tau \in \Gamma$$

Ejemplos:

- $\{P, Q \Rightarrow R\}$ tiene un modelo (¿Ejemplo de valuación?)
- $\{P, Q, Q \Rightarrow \neg P\}$ no tiene un modelo

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \not\models \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \not\models \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente (por L1)

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \not\models \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo (por L2)

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \not\models \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall \sigma \in \Gamma \cup \{\neg\tau\}$, $v \models \sigma$ (def. de tener modelo)

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \nvDash \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall\sigma \in \Gamma \cup \{\neg\tau\}$, $v \vDash \sigma$ (def. de tener modelo)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $v \nvDash \tau$ y $\forall\sigma \in \Gamma$, $v \vDash \sigma$ (def. de $\vDash$)

Completitud: $\Gamma \nvdash \tau$ implica $\Gamma \nvDash \tau$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \tau$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall\sigma \in \Gamma \cup \{\neg\tau\}$, $v \vDash \sigma$ (def. de tener modelo)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $v \nvDash \tau$ y $\forall\sigma \in \Gamma$, $v \vDash \sigma$ (def. de $\vDash$)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \nvDash \tau$ (def. de consecuencia semántica). $\square$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

> Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow$ $\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

$\Rightarrow$ $\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow$ $\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

¡Absurdo!

Por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente. $\square$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow$ $\Gamma, \neg\tau \vdash \perp$

$$\dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

¡Absurdo!

Por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente. $\square$

Estructura de la prueba

Sean las variables proposicionales

$$P = \Gamma \vdash \tau$$

$$Q = \Gamma \cup \{\neg\tau\} \text{ es consistente}$$

A la izquierda mostramos $\neg P, \neg Q \vdash P$.

¿Porqué eso es suficiente?

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \tau$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es inconsistente.

$\Rightarrow$ $\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$

$$\dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC}$$

¡Absurdo!

Por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\tau\}$ es consistente. $\square$

Estructura de la prueba

Sean las variables proposicionales

$$P = \Gamma \vdash \tau$$

$$Q = \Gamma \cup \{\neg\tau\} \text{ es consistente}$$

A la izquierda mostramos $\neg P, \neg Q \vdash P$.
¿Porqué eso es suficiente?

$$\dfrac{\dfrac{\neg P, \neg Q \vdash P \qquad \dfrac{}{\neg P, \neg Q \vdash \neg P}\ \text{ax}}{\neg P, \neg Q \vdash \bot}\ \neg_e}{\neg P \vdash Q}\ \text{PBC}$$

Sobre L2 – Primero una observación/ejercicio

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Onservación: Vale la vuelta también:

Si Γ tiene modelo, es consistente

Se deja como ejercicio. Tip: Probar por el absurdo.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$
- Si $\neg P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{F}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$
- Si $\neg P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{F}$.
- ¿Si $P \notin \Gamma$ y $\neg P \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$
- Si $\neg P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{F}$.
- ¿Si $P \notin \Gamma$ y $\neg P \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$?
  - Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$ y $v(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$ y $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$
- Si $\neg P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{F}$.
- ¿Si $P \notin \Gamma$ y $\neg P \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$?
  - Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$ y $v(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$ y $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \tau \in \Gamma$, $v \models \tau$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$
- Si $\neg P \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{F}$.
- ¿Si $P \notin \Gamma$ y $\neg P \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$?
  - Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$ y $v(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$ y $v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{V}$.

Observación 1

- Primero "completar" Γ con todas sus consecuencias lógicas
  - $Th(\Gamma) = \{Q, Q \Rightarrow \neg P, \neg P, Q \wedge \neg P \ldots\}$
  - En general $Th(\Gamma) = \{\tau \mid \Gamma \vdash \tau\}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.
- ¿$\neg R$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg R$? No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.
- ¿$\neg R$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg R$? No.
- Entonces ni R ni $\neg R$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.
- ¿$\neg R$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg R$? No.
- Entonces ni R ni $\neg R$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en R?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.
- ¿$\neg R$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg R$? No.
- Entonces ni R ni $\neg R$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en R?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{Q, Q \Rightarrow \neg P\}$
- ¿R es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash R$? No.
- ¿$\neg R$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg R$? No.
- Entonces ni R ni $\neg R$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en R?

Observación 2

- Podemos usar L1 y agregarlo (R o $\neg R$) a Γ conservando consistencia

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vamos a definir una técnica que se encarga de atender ambas observaciones a la vez:
  - Agrega las consecuencias lógicas y además
  - Agrega las fórmulas que no son consecuencia lógica y que no generan inconsistencias
- Permite obtener la extensión consistente maximal de Γ y se escribe Γ^*
- Nuestro plan de prueba de L2 ahora será:
  1. Dado Γ, obtenemos Γ^*
  2. A partir de Γ^* obtenemos una valuación v
  3. Probamos que v satisface a todas las fórmulas de Γ

Conjunto consistente maximal

Γ es consistente maximal si

1. Γ es consistente
2. Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$

Observación

- (2) puede reemplazarse equivalentemente por:

$$\text{Si } \Gamma \subset \Gamma', \text{ entonces } \Gamma' \text{ es inconsistente}$$

Ejemplo

$\Gamma = \{\tau \mid v \vDash \tau\}$ para una valuación v cualquiera dada.

- Es consistente por vuelta de L2 (si tiene modelo es consistente)
- Si $\Gamma \subset \Gamma'$, entonces Γ' es inconsistente (¿por qué?)

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba

- Sea $\tau_0, \tau_1, \ldots$ la lista de todas las fórmulas de lógica proposicional
- Definimos una secuencia de conjuntos de fórmulas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\tau_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\tau_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{sino} \end{cases} \end{aligned}$$

- Luego definimos

$$\Gamma^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\Gamma_i \mid i \geq 0\}$$

- Es claro que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
- Veremos que Γ^* es consistente maximal

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ ¿Γ^* es consistente maximal?

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ ¿Γ^* es consistente maximal?

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\sigma \in \Delta$

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ ¿Γ^* es consistente maximal?

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\sigma \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\sigma = \tau_m$

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ ¿Γ^* es consistente maximal?

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\sigma \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\sigma = \tau_m$

$\Longrightarrow$ Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, $\Gamma_m \cup \{\tau_m\}$ consistente

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ ¿Γ^* es consistente maximal?

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\sigma \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\sigma = \tau_m$

$\Longrightarrow$ Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, $\Gamma_m \cup \{\tau_m\}$ consistente

$\Longrightarrow$ $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\tau_m\}$ y por ende $\tau_m \in \Gamma^*$ $\square$

Finalmente: Prueba de L2

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Prueba

- Por lema de saturación existe Γ^* consistente maximal que incluye a Γ
- Definimos:

$$v(p_i) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} V & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ F & \text{sino} \end{cases}$$

- Probamos que $v \models \tau$ sii $\tau \in \Gamma^*$
- Concluimos que $v \models \tau$ para todo $\tau \in \Gamma$ $\square$

Resumen de resultados

- Caracterización sintáctica y semántica de verdades universales

$$\vdash \qquad\qquad \models$$

- Ambas coinciden

Corrección

τ tiene una prueba implica que τ es tautología

Completitud

τ tautología implica que τ tiene una prueba.