Backtracking

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Santiago Cifuentes

Departamento de computación
FCEN – UBA

Agosto 2024

Técnicas algorítmicas

- Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva
- *Backtracking*
- *Divide&Conquer*
- Algoritmos Golosos
- Programación Dinámica

Técnicas algorítmicas

- Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva
- *Backtracking*
- *Divide&Conquer*
- Algoritmos Golosos
- Programación Dinámica

Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva

- Para problemas de búsqueda en un conjunto S.

Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva

- Para problemas de búsqueda en un conjunto S.
- Queremos hacer algo con los elementos que cumplan una cierta propiedad P.

Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva

- Para problemas de búsqueda en un conjunto S.
- Queremos hacer algo con los elementos que cumplan una cierta propiedad P.
- La idea más simple: recorremos todo S evaluando P en cada elemento.

Fuerza Bruta / Búsqueda exhaustiva

- Para problemas de búsqueda en un conjunto S.
- Queremos hacer algo con los elementos que cumplan una cierta propiedad P.
- La idea más simple: recorremos todo S evaluando P en cada elemento.
- La complejidad en general será $\Omega(|S|)$.

Esquema de Fuerza Bruta

for x $\in$ S **do**:
    if P(x):
        procesar x

- Hay que definir quiénes son S, P y **procesar**.

Esquema de Fuerza Bruta

for x $\in$ S **do**:
    if P(x):
        procesar x

- Hay que definir quiénes son S, P y **procesar**.
- Ejemplo: S es el conjunto de tableros de ajedrez con 8 reinas, P verifica que no se ataquen entre ellas, y **procesar** lleva la cuenta de la cantidad de tableros.

Esquema de Fuerza Bruta

for x $\in$ S **do**:
    if P(x):
        procesar x

- Hay que definir quiénes son S, P y **procesar**.
- Ejemplo: S es el conjunto de tableros de ajedrez con 8 reinas, P verifica que no se ataquen entre ellas, y **procesar** lleva la cuenta de la cantidad de tableros.
- Subproblema: ¿Cómo se genera S?

Backtracking

- Es una técnica para generar espacios de búsqueda "recursivos". En particular, lo hace mediante la extensión de **soluciones parciales**.

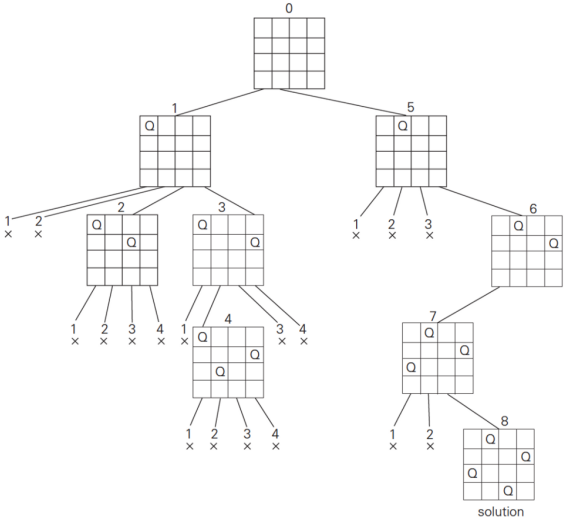
Backtracking

- Es una técnica para generar espacios de búsqueda "recursivos". En particular, lo hace mediante la extensión de **soluciones parciales**.
- La idea es definir este método de extensión, y mediante recursión generar *de forma ordenada* el espacio de soluciones S.

Backtracking

- Es una técnica para generar espacios de búsqueda "recursivos". En particular, lo hace mediante la extensión de **soluciones parciales**.
- La idea es definir este método de extensión, y mediante recursión generar *de forma ordenada* el espacio de soluciones S.
- La extensión muchas veces es una operación "local", y es fácil de definir e implementar.

Backtracking



Backtracking

```
algoritmo BT(a, k)
    si a es solución entonces
        procesar(a)
        retornar
    sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a, k)
            BT(a', k + 1)
        fin para
    fin si
    retornar
```

- La generación de S se redujo a implementar *Sucesores*.

Backtracking

```
algoritmo BT(a, k)
    si a es solución entonces
        procesar(a)
        retornar
    sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a, k)
            BT(a', k + 1)
        fin para
    fin si
    retornar
```

- La generación de S se redujo a implementar *Sucesores*.
- ¿Cómo es *Sucesores* para el caso del problema de las reinas?

Ejercicio: CD

Enunciado

Tenemos un CD que soporta hasta P minutos de música, y dado un conjunto de N canciones de duración p_i (con $1 \leq i \leq m$, y $p_i \in \mathbb{N}$) queremos encontrar la mayor cantidad de minutos de música que podemos escuchar.

Ejercicio: CD

Enunciado

Tenemos un CD que soporta hasta P minutos de música, y dado un conjunto de N canciones de duración p_i (con $1 \leq i \leq m$, y $p_i \in \mathbb{N}$) queremos encontrar la mayor cantidad de minutos de música que podemos escuchar.

Con $P = 5$ y una lista de $N = 3$ canciones con duraciones [1, 4, 2] la solución es 5.

Ejemplo: CD

- ¿Podemos definir un espacio de búsqueda? ¿Qué queremos hacer con cada solución?

Ejemplo: CD

- ¿Podemos definir un espacio de búsqueda? ¿Qué queremos hacer con cada solución?
- Podemos considerar todos los subconjuntos, y quedarnos con el que maximice la suma de minutos de música sin exceder P ¿Cuántos hay?

Ejemplo: CD

- ¿Podemos definir un espacio de búsqueda? ¿Qué queremos hacer con cada solución?
- Podemos considerar todos los subconjuntos, y quedarnos con el que maximice la suma de minutos de música sin exceder P ¿Cuántos hay?
- Hay que considerar 2^N subconjuntos, y para cada uno calcular la suma.

Ejercicio: CD

- Generemos S recursivamente, usando backtracking.

Ejercicio: CD

- Generemos S recursivamente, usando backtracking.
- ¿Hay una forma recursiva de generar los subconjuntos de un conjunto?

Ejercicio: CD

- Generemos S recursivamente, usando backtracking.
- ¿Hay una forma recursiva de generar los subconjuntos de un conjunto?

Ejercicio: CD

- Generemos S recursivamente, usando backtracking.
- ¿Hay una forma recursiva de generar los subconjuntos de un conjunto?

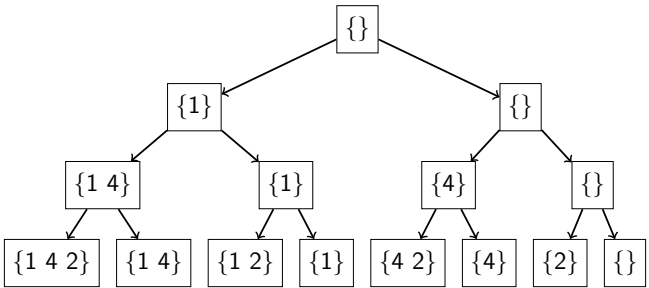
$$subsets(c : C) = c \times subsets(C) \cup subsets(C)$$

Ejercicio: CD

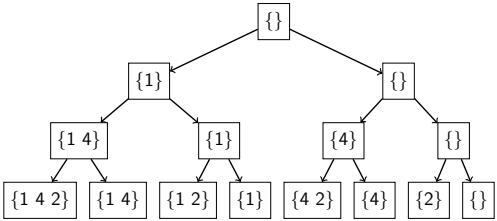
- Cada elemento puede o no estar en el subconjunto.

Ejercicio: CD

- Cada elemento puede o no estar en el subconjunto.

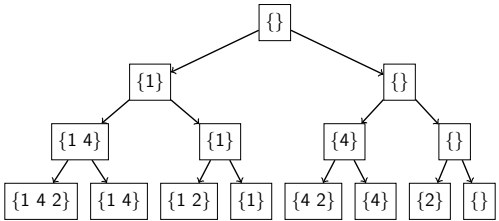


Ejercicio: CD



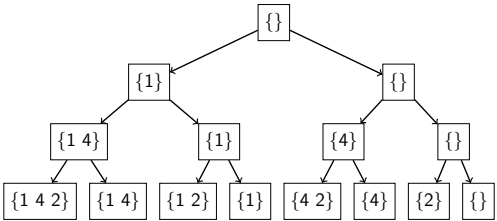
- ¿Qué representan las hojas?

Ejercicio: CD



- ¿Qué representan las hojas?
- ¿Qué representan los nodos del i-ésimo piso?

Ejercicio: CD



- ¿Qué representan las hojas?
- ¿Qué representan los nodos del i-ésimo piso?
- Cada nodo interno del nivel i representa un subconjunto de los primeros i elementos. Por ende para extender cada solución se agrega o no el elemento $i + 1$.

Pseudocódigo de CD

Algorithm $BT_{CD}(a, i)$ // a es una solución parcial

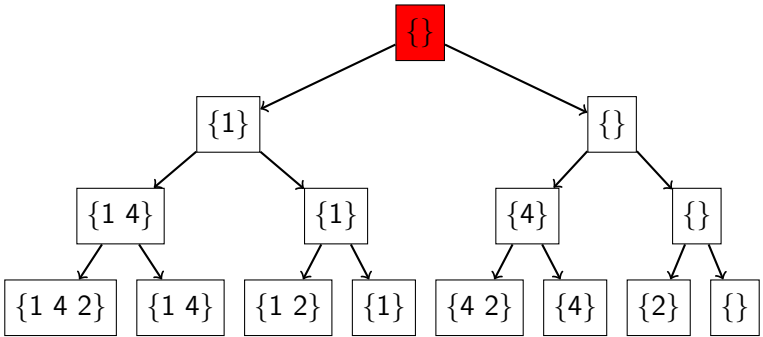
```
1: if i = N then
2:     if suma(a) ≤ P & suma(a) > mejorSuma then
3:         mejorSuma ← suma(a)
4:     end if
5: else
6:     BT_CD(a ∪ p_i, i + 1)
7:     BT_CD(a, i + 1)
8: end if
```

- La respuesta es $BT_{CD}(\{\}, 0)$

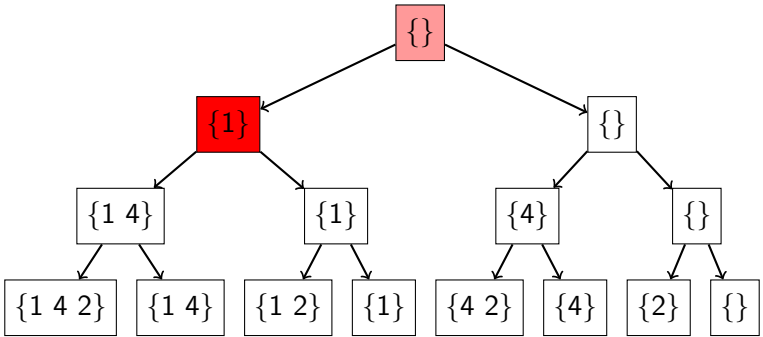
Pseudocódigo de Backtracking

```
algoritmo BT(a, k)
    si a es solución entonces
        procesar(a)
        retornar
    sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a, k)
            BT(a', k + 1)
        fin para
    fin si
    retornar
```

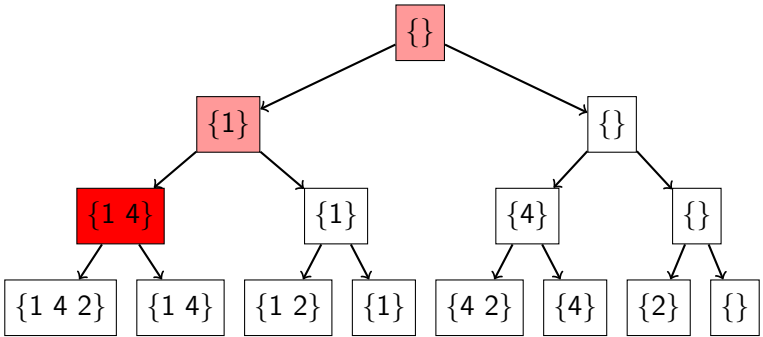
Recorrido en profundidad



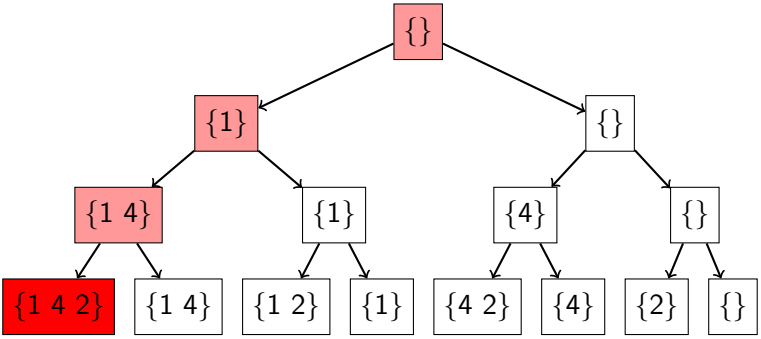
Recorrido en profundidad



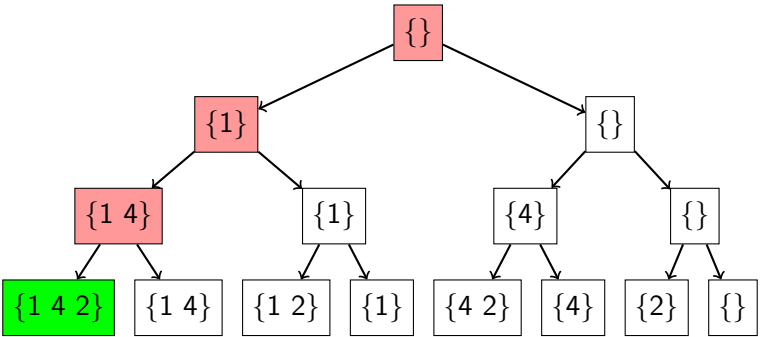
Recorrido en profundidad



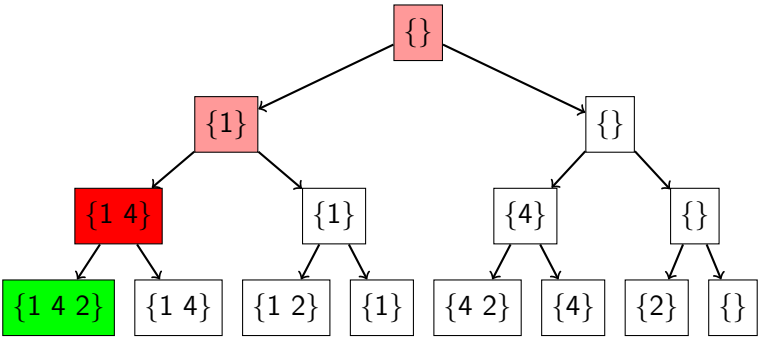
Recorrido en profundidad



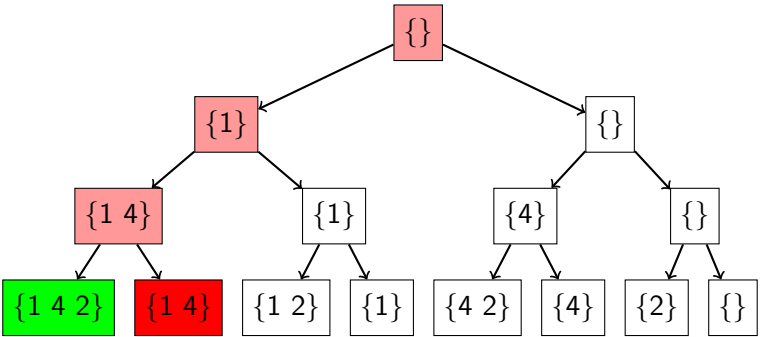
Recorrido en profundidad



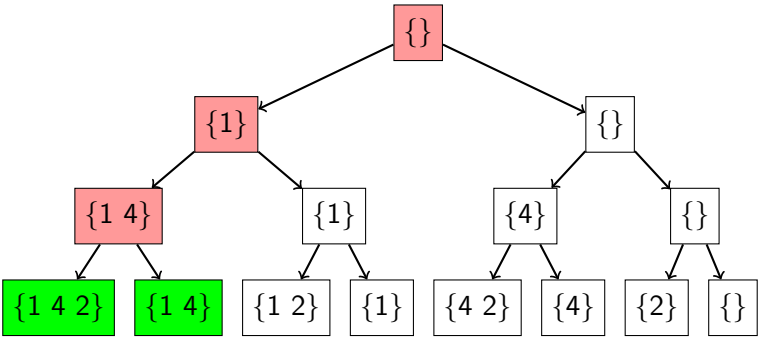
Recorrido en profundidad



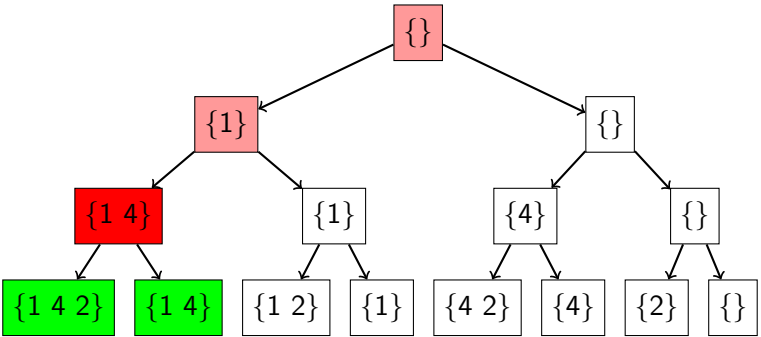
Recorrido en profundidad



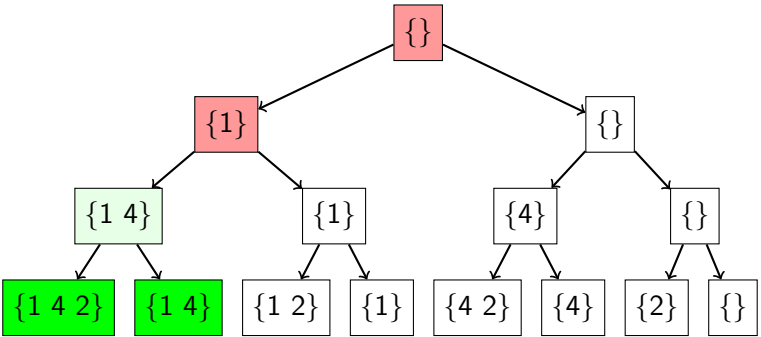
Recorrido en profundidad



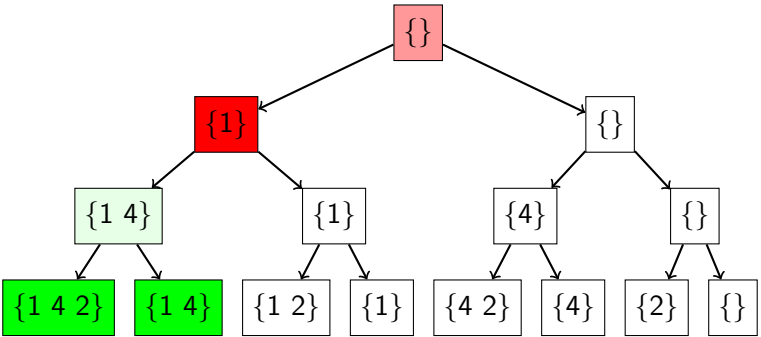
Recorrido en profundidad



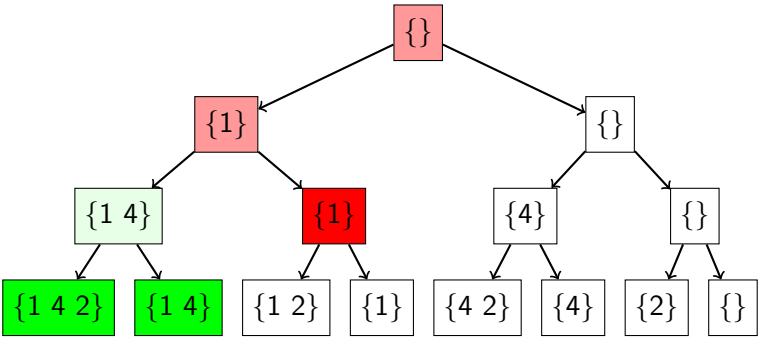
Recorrido en profundidad



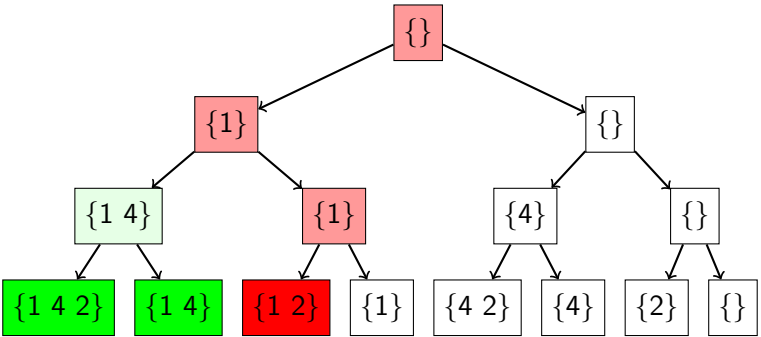
Recorrido en profundidad



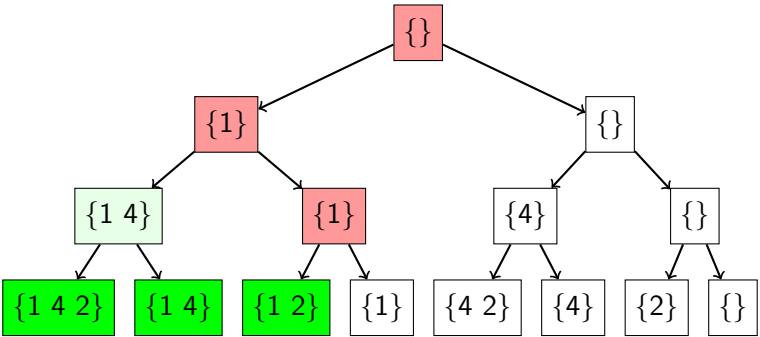
Recorrido en profundidad



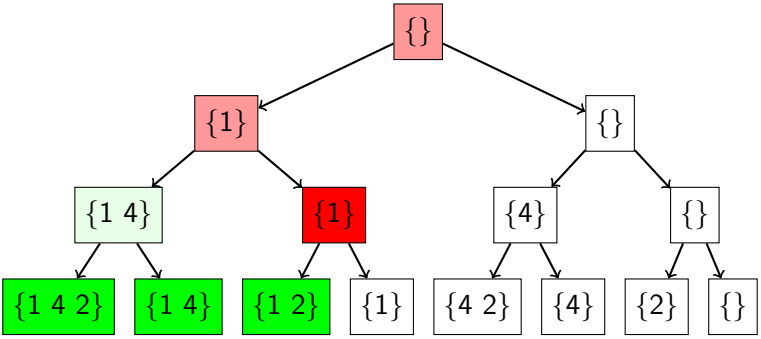
Recorrido en profundidad



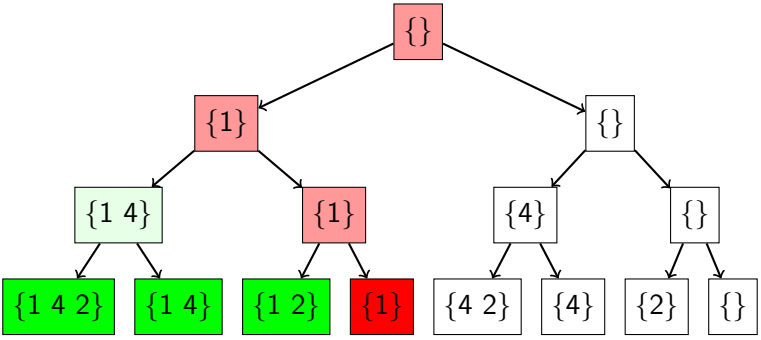
Recorrido en profundidad



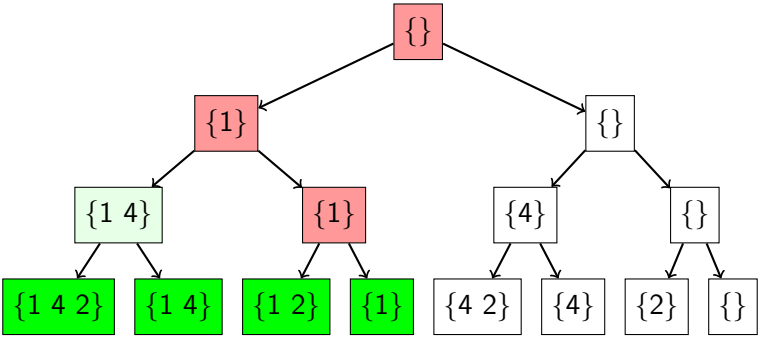
Recorrido en profundidad



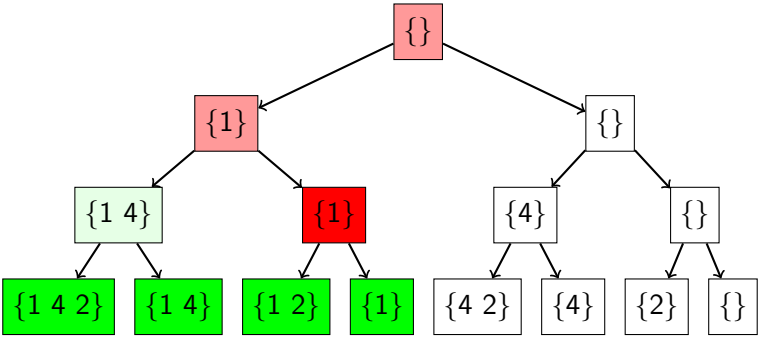
Recorrido en profundidad



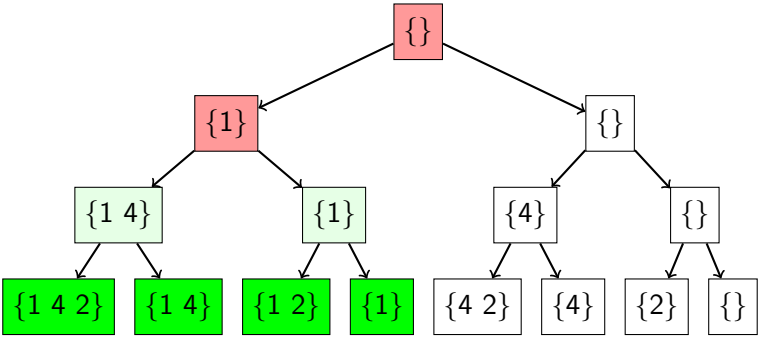
Recorrido en profundidad



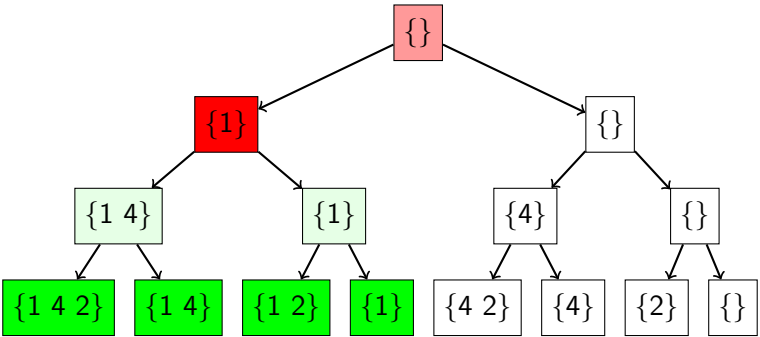
Recorrido en profundidad



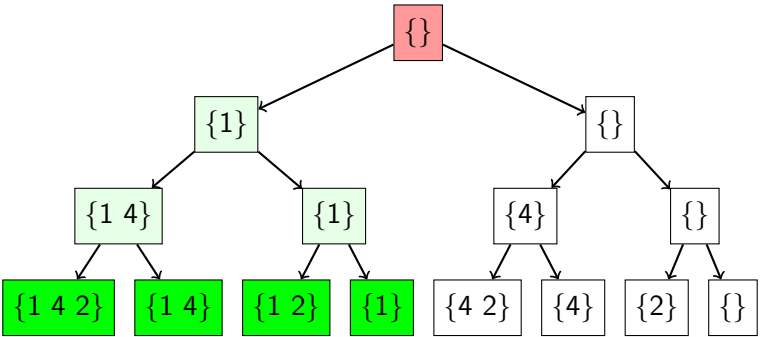
Recorrido en profundidad



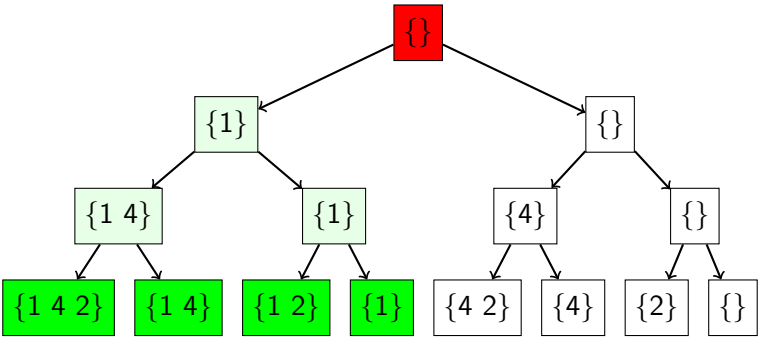
Recorrido en profundidad



Recorrido en profundidad



Recorrido en profundidad



Función recursiva de CD

El problema se puede pensar de otra forma: si quiero llegar a P, y agrego el primer elemento al CD...

Función recursiva de CD

El problema se puede pensar de otra forma: si quiero llegar a P, y agrego el primer elemento al CD...

- ¿A cuánto se quiere llegar con el resto de los temas?

Función recursiva de CD

El problema se puede pensar de otra forma: si quiero llegar a P, y agrego el primer elemento al CD...

- ¿A cuánto se quiere llegar con el resto de los temas?
- ¿Y si no se lo agrega?

Función recursiva de CD

El problema se puede pensar de otra forma: si quiero llegar a P, y agrego el primer elemento al CD...

- ¿A cuánto se quiere llegar con el resto de los temas?
- ¿Y si no se lo agrega?
- Si no quedan temas (N=0), ¿Qué valores de P son válidos?

Función recursiva de CD

El problema se puede pensar de otra forma: si quiero llegar a P, y agrego el primer elemento al CD...

- ¿A cuánto se quiere llegar con el resto de los temas?
- ¿Y si no se lo agrega?
- Si no quedan temas (N=0), ¿Qué valores de P son válidos?

$$CD(i,k) = \begin{cases} -\infty & \text{si } i = N \text{ y } k < 0 \\ 0 & \text{si } i = N \text{ y } k \geq 0 \\ \max(CD(i+1,k), CD(i+1,k-p_i)+p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

'La máxima cantidad de música que puedo obtener sin exceder k minutos empleando las canciones desde i hacia delante'

Función recursiva de CD

- Plantear funciones de esta pinta nos va a ser muy útil cuando hagamos programación dinámica.

Función recursiva de CD

- Plantear funciones de esta pinta nos va a ser muy útil cuando hagamos programación dinámica.
- Intuitivamente, el árbol de recursión de esta función es el mismo que el de los subconjuntos.

Función recursiva de CD

- Plantear funciones de esta pinta nos va a ser muy útil cuando hagamos programación dinámica.
- Intuitivamente, el árbol de recursión de esta función es el mismo que el de los subconjuntos.
- Sin embargo, en esta formulación queda claro que no importan qué elementos se fueron eligiendo, sino la suma de los pesos.

Podas

- Aprovechando la estructura del árbol podemos ‘podar‘ ramas que no nos lleven a soluciones útiles.

Podas

- Aprovechando la estructura del árbol podemos ‘podar‘ ramas que no nos lleven a soluciones útiles.
- Pueden (o no) recortar significativamente el espacio de búsqueda, y hay que considerar el *overhead* que consume calcularlas.

Podas para CD

- ¿Qué podas podemos usar en CD?

Podas para CD

- ¿Qué podas podemos usar en CD?
- En CD podemos dejar de avanzar si la solución parcial ya superó N (**factibilidad)**.

Podas para CD

- ¿Qué podas podemos usar en CD?
- En CD podemos dejar de avanzar si la solución parcial ya superó N (**factibilidad)**.
- También podemos ver si poniendo todas las canciones restantes no nos excedemos de k. Si ese es el caso, la mejor solución desde donde estamos es agregar todo (**optimalidad**).

Podas para CD

$$CD(i,k) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k < 0 \\ sumaRestante(i) & \text{si } sumaRestante(i) <= k \\ \max(CD(i+1,k), CD(i+1,k-p_i)+p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?
- En todos los nodos internos realizamos una cantidad constante de operaciones (asumiendo que *sumaRestante* está precalculado para cada i).

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?
- En todos los nodos internos realizamos una cantidad constante de operaciones (asumiendo que *sumaRestante* está precalculado para cada i).
- La complejidad final entonces es $O(2^N)$.

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?
- En todos los nodos internos realizamos una cantidad constante de operaciones (asumiendo que *sumaRestante* está precalculado para cada i).
- La complejidad final entonces es $O(2^N)$.
- ¿Y la espacial?

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?
- En todos los nodos internos realizamos una cantidad constante de operaciones (asumiendo que *sumaRestante* está precalculado para cada i).
- La complejidad final entonces es $O(2^N)$.
- ¿Y la espacial?

Complejidad de la solución de CD

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol que estamos recorriendo?
- Tiene $\sum_{i=0}^{N} 2^i = O(2^N)$ nodos.
- ¿Cuántas operaciones hacemos en cada nodo?
- En todos los nodos internos realizamos una cantidad constante de operaciones (asumiendo que *sumaRestante* está precalculado para cada i).
- La complejidad final entonces es $O(2^N)$.
- ¿Y la espacial? $O(n)$

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda?

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda?

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda? Todas las permutaciones de los naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$.
- ¿Cuáles son las soluciones parciales?

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda? Todas las permutaciones de los naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$.
- ¿Cuáles son las soluciones parciales?

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda? Todas las permutaciones de los naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$.
- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Los prefijos de las permutaciones.
- ¿Cuál es la operación de extensión?

Ejercicio: *Prime ring*

Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda? Todas las permutaciones de los naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$.
- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Los prefijos de las permutaciones.
- ¿Cuál es la operación de extensión?

Ejercicio: *Prime ring*

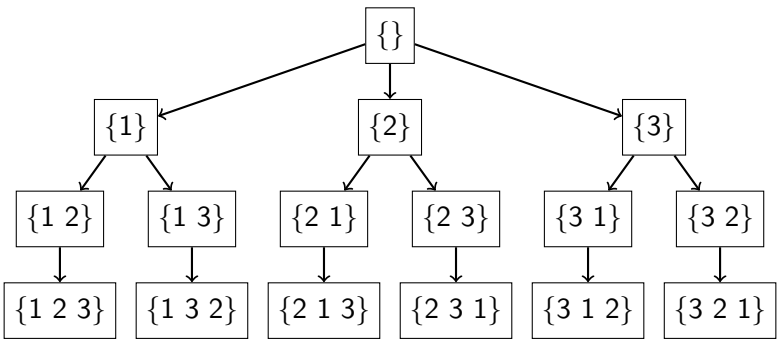
Prime Ring

Dados N números naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$, con $1 < p_i < 10N$, queremos saber cuántas permutaciones j de ellos hay que cumplan que $p_{j_i} + p_{(j_{i+1} \mod n)}$ sea primo para todo $0 \leq i \leq n-1$

- Lo vamos a resolver con backtracking.
- ¿Cuál es el espacio de búsqueda? Todas las permutaciones de los naturales $p_0, \ldots, p_{N-1}$.
- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Los prefijos de las permutaciones.
- ¿Cuál es la operación de extensión? Agregar un elemento al prefijo de permutación.

Árbol de *Prime ring*

- Árbol para $n = 3$, si $p = [1, 2, 3]$.



Árbol de *Prime ring*

- Cada nodo interno del piso I es una permutación de un subconjunto de i números.

Árbol de *Prime ring*

- Cada nodo interno del piso I es una permutación de un subconjunto de i números.
- En las hojas verificamos que se cumpla la condición de primalidad.

Prime ring

La función que hay que implementar entonces es:

$$primeRing(I) = \begin{cases} esValida(I) & \text{si } |I| = N \\ \sum_{p_i \notin I} primeRing(I \oplus p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

'La cantidad de permutaciones que extienden a I, usan todos los elementos de p y generan un anillo de primos'

Prime ring

La función que hay que implementar entonces es:

$$primeRing(l) = \begin{cases} esValida(l) & \text{si } |l| = N \\ \sum_{p_i \notin l} primeRing(l \oplus p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

'La cantidad de permutaciones que extienden a l, usan todos los elementos de p y generan un anillo de primos'

La solución al problema es $primeRing(\{\})$

Podas

- ¿Podas?

Podas

- ¿Podas?
- Podríamos verificar la condición de primalidad durante la selección de sucesores.

Podas

- ¿Podas?
- Podríamos verificar la condición de primalidad durante la selección de sucesores.
- El árbol cambia: ahora las soluciones parciales son las permutaciones de los subconjuntos que cumplen la condición de primalidad.

Podas

- ¿Podas?
- Podríamos verificar la condición de primalidad durante la selección de sucesores.
- El árbol cambia: ahora las soluciones parciales son las permutaciones de los subconjuntos que cumplen la condición de primalidad.
- ¿Hay que verificar algo en las hojas?
- En las hojas solo tenemos que verificar que cierre bien el anillo.

Podas

La función queda entonces como

$$primeRing(l) = \begin{cases} esPrimo(ultimo(l) + primero(l)) & \text{si } |l| = N \\ \sum_{\substack{p_i \notin l \\ esPrimo(p_i + ultimo(l))}} primeRing(l \oplus p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

Podas

La función queda entonces como

$$primeRing(l) = \begin{cases} esPrimo(ultimo(l) + primero(l)) & \text{si } |l| = N \\ \sum_{\substack{p_i \notin l \\ esPrimo(p_i + ultimo(l))}} primeRing(l \oplus p_i) & \text{cc} \end{cases}$$

Más podas

- Hay algunas podas interesantes que se pueden usar debido a que este es un problema de conteo.

Más podas

- Hay algunas podas interesantes que se pueden usar debido a que este es un problema de conteo.
- Podemos explotar simetrías: dada una permutación válida, se pueden obtener otras moviendo los elementos a la derecha x unidades.

Más podas

- Hay algunas podas interesantes que se pueden usar debido a que este es un problema de conteo.
- Podemos explotar simetrías: dada una permutación válida, se pueden obtener otras moviendo los elementos a la derecha x unidades.
- Podemos suponer fijo el primer elemento, y multiplicar por N la cantidad de permutaciones con ese elemento primero.

Más podas

La función queda entonces como

$$primeRing(l) = \begin{cases} esPrimo(ultimo(l) + primero(l)) & \text{si } |l| = N \\ \sum\limits_{\substack{P_i \notin l \\ esPrimo(P_i + ultimo(l))}} primeRing(l \oplus i) & \text{cc} \end{cases}$$

La función no cambia, pero ahora sabemos que la solución se puede escribir como $N * primeRing([p_0])$

Complejidad de la solución de *Prime Ring*

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol de recursión?

Complejidad de la solución de *Prime Ring*

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol de recursión?
- El árbol tiene $O(n-1!)$ nodos (en la práctica tienen que demostrar un caso similar).

Complejidad de la solución de *Prime Ring*

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol de recursión?
- El árbol tiene $O(n-1!)$ nodos (en la práctica tienen que demostrar un caso similar).
- En cada nodo hacemos $O(n)$ operaciones, y en particular $O(n)$ llamados a *esPrimo*.

Complejidad de la solución de *Prime Ring*

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol de recursión?
- El árbol tiene $O(n-1!)$ nodos (en la práctica tienen que demostrar un caso similar).
- En cada nodo hacemos $O(n)$ operaciones, y en particular $O(n)$ llamados a *esPrimo*.
- Si *esPrimo* es $O(1)$ (podemos precalcular la criba de Heratóstenes hasta $20n$ en $O(n \log\log n)$[1]), la complejidad final es $O(n \log\log n + (n-1)!\ n) = O(n!)$.

[1] Esto se puede hacer en $O(n)$, ver `https://cp-algorithms.com/algebra/prime-sieve-linear.html`

Detalles adicionales

- En realidad la complejidad es menor, ya que en cada paso hay a lo sumo $\frac{n}{2}$ opciones por la paridad.

Detalles adicionales

- En realidad la complejidad es menor, ya que en cada paso hay a lo sumo $\frac{n}{2}$ opciones por la paridad.
- Aparte, queda por explotar la simetría que surge de invertir las soluciones.

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Tableros incompletos.
- ¿Cuál es la función de extensión?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Tableros incompletos.
- ¿Cuál es la función de extensión?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Tableros incompletos.
- ¿Cuál es la función de extensión? Colocar un valor en algún casillero.
- ¿Qué verificamos en las hojas?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Tableros incompletos.
- ¿Cuál es la función de extensión? Colocar un valor en algún casillero.
- ¿Qué verificamos en las hojas?

Sudoku

Enunciado

Dado un tablero de Sudoku de $N \times N$ con algunas casillas ocupadas hay que decidir si se lo puede completar siguiendo las reglas del Sudoku.

- ¿Cuáles son las soluciones parciales? Tableros incompletos.
- ¿Cuál es la función de extensión? Colocar un valor en algún casillero.
- ¿Qué verificamos en las hojas? Revisamos si es un tablero válido.

Sudoku

$$sudoku(T,(i,j)) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } i = N \\ sudoku(T, sig(i,j)) & \text{si } T[i][j] \neq 0 \\ \bigvee_{1 \leq k \leq N} sudoku(T \oplus ((i,j) \to k), sig(i,j)) & \text{cc} \end{cases}$$

Sudoku

$$sudoku(T,(i,j)) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } i = N \\ sudoku(T, sig(i,j)) & \text{si } T[i][j] \neq 0 \\ \bigvee_{1 \leq k \leq N} sudoku(T \oplus ((i,j) \to k), sig(i,j)) & \text{cc} \end{cases}$$

Esta función toma un tablero (parcialmente completado) y un índice del mismo, y "prueba" todas las formas de llenar ese casillero y pasa al siguiente (donde el siguiente es el casillero a su derecha o bien el primero de la siguiente fila, si nos encontramos al borde).

Sudoku

$$sudoku(T,(i,j)) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } i = N \\ sudoku(T, sig(i,j)) & \text{si } T[i][j] \neq 0 \\ \bigvee_{1 \leq k \leq N} sudoku(T \oplus ((i,j) \to k), sig(i,j)) & \text{cc} \end{cases}$$

Esta función toma un tablero (parcialmente completado) y un índice del mismo, y "prueba" todas las formas de llenar ese casillero y pasa al siguiente (donde el siguiente es el casillero a su derecha o bien el primero de la siguiente fila, si nos encontramos al borde).
La solución es $sudoku(T,(0,0))$

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol? $O(n^{n^2})$
- ¿Cuántas operaciones hacemos en los nodos internos?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol? $O(n^{n^2})$
- ¿Cuántas operaciones hacemos en los nodos internos?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol? $O(n^{n^2})$
- ¿Cuántas operaciones hacemos en los nodos internos? $O(n)$
- ¿Y en las hojas?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol? $O(n^{n^2})$
- ¿Cuántas operaciones hacemos en los nodos internos? $O(n)$
- ¿Y en las hojas?

Sudoku

- ¿Cuántos nodos tiene el árbol? $O(n^{n^2})$
- ¿Cuántas operaciones hacemos en los nodos internos? $O(n)$
- ¿Y en las hojas? $O(n^2)$
- La complejidad final se puede acotar por $O(n^{n^2} n^2)$

Podas

- ¿Qué podas podemos implementar?

Podas

- ¿Qué podas podemos implementar?
- No pongamos números que ya están prohibidos. Para eso revisamos las filas, columnas y subcuadrados en cada paso.

Podas

- ¿Qué podas podemos implementar?
- No pongamos números que ya están prohibidos. Para eso revisamos las filas, columnas y subcuadrados en cada paso.
- ¿Hace falta ir en orden?

Podas

- ¿Qué podas podemos implementar?
- No pongamos números que ya están prohibidos. Para eso revisamos las filas, columnas y subcuadrados en cada paso.
- ¿Hace falta ir en orden?
- No, usemos siempre la posición mas condicionada (o sea, la posición en la cual hay una menor cantidad de opciones válidas restantes).

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

- La solución es $sudoku(T)$

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

- La solución es $sudoku(T)$

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

- La solución es $sudoku(T)$
- ¿La complejidad cambia?

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

- La solución es $sudoku(T)$
- ¿La complejidad cambia?

Sudoku

$$sudoku(T) = \begin{cases} esValido(T) & \text{si } mas\_cond(T) = \bot \\ \bigvee_{k \in cand(mas\_cond(T))} sudoku(T \oplus (max\_cond(T) \to k)) & \text{cc} \end{cases}$$

- La solución es $sudoku(T)$
- ¿La complejidad cambia? En parte depende de la implementación de las podas, pero también es seguro que el árbol de recursión ahora es mucho más chico (aunque es difícil contar con precisión cuántos nodos tiene).

Sudoku

Pruning Condition		Puzzle Complexity		
`next_square`	`possible_values`	Easy	Medium	Hard
arbitrary	local count	1,904,832	863,305	never finished
arbitrary	look ahead	127	142	12,507,212
most constrained	local count	48	84	1,243,838
most constrained	look ahead	48	65	10,374

The algorithm design manual, Skiena

La poda *most constrained* es precisamente la que usa como siguiente casillero la posición con menos opciones restantes. La heurística de *local count* es la que emplea únicamente valores válidos, mientras que *look ahead* también revisa si algún casillero del tablero ya tiene 0 opciones posibles (en mi código esto ya lo hace la heurística de *most contrained*, pero Skiena no lo hacía, ver libro)

Dobra

Enunciado

Tenemos una cadena I de N caracteres que son letras en mayúscula o bien comodines _. Queremos ver cuántas cadenas podemos formar si reemplazamos los comodines por mayúsculas, teniendo en cuenta que:

- No queremos que haya 3 vocales ni 3 consonantes seguidas.
- Tiene que haber una L en la palabra.

Dobra

Enunciado

Tenemos una cadena I de N caracteres que son letras en mayúscula o bien comodines _. Queremos ver cuántas cadenas podemos formar si reemplazamos los comodines por mayúsculas, teniendo en cuenta que:

- No queremos que haya 3 vocales ni 3 consonantes seguidas.
- Tiene que haber una L en la palabra.

- ¿Un posible espacio de búsqueda? ¿Soluciones parciales? ¿Extensión?

Dobra

Enunciado

Tenemos una cadena I de N caracteres que son letras en mayúscula o bien comodines _. Queremos ver cuántas cadenas podemos formar si reemplazamos los comodines por mayúsculas, teniendo en cuenta que:

- No queremos que haya 3 vocales ni 3 consonantes seguidas.
- Tiene que haber una L en la palabra.

- ¿Un posible espacio de búsqueda? ¿Soluciones parciales? ¿Extensión?
- ¿Qué verificamos en las hojas?

Dobra

Enunciado

Tenemos una cadena I de N caracteres que son letras en mayúscula o bien comodines _. Queremos ver cuántas cadenas podemos formar si reemplazamos los comodines por mayúsculas, teniendo en cuenta que:

- No queremos que haya 3 vocales ni 3 consonantes seguidas.
- Tiene que haber una L en la palabra.

- ¿Un posible espacio de búsqueda? ¿Soluciones parciales? ¿Extensión?
- ¿Qué verificamos en las hojas?
- ¿Cuántas opciones tenemos en cada _?

Dobra

$$dobra(i, l) = \begin{cases} verificar(l) & \text{si } i = n \\ dobra(i+1, l) & \text{si } l[i] \neq \_ \\ \sum_{c \in MAYUS} dobra(i+1, l \oplus (i \to c)) & cc \end{cases}$$

Dobra

$$dobra(i, l) = \begin{cases} verificar(l) & \text{si } i = n \\ dobra(i+1, l) & \text{si } l[i] \neq \_ \\ \sum_{c \in MAYUS} dobra(i+1, l \oplus (i \to c)) & cc \end{cases}$$

- En los casos recusivos probamos cada forma de completar el i-ésimo caracter (si es un comodín). En el caso base devolvemos 1 o 0 dependiendo de si la cadena es válida.
- ¿Complejidad?

Dobra

$$dobra(i, l) = \begin{cases} verificar(l) & \text{si } i = n \\ dobra(i+1, l) & \text{si } l[i] \neq \_ \\ \sum_{c \in MAYUS} dobra(i+1, l \oplus (i \to c)) & cc \end{cases}$$

- En los casos recusivos probamos cada forma de completar el i-ésimo caracter (si es un comodín). En el caso base devolvemos 1 o 0 dependiendo de si la cadena es válida.
- ¿Complejidad?
- El árbol tiene una cantidad de nodos acotable por $O(26^N)$. En las hojas hacemos $O(N)$ operaciones.

Dobra

$$dobra(i, l) = \begin{cases} verificar(l) & \text{si } i = n \\ dobra(i+1, l) & \text{si } l[i] \neq \_ \\ \sum_{c \in MAYUS} dobra(i+1, l \oplus (i \to c)) & cc \end{cases}$$

- En los casos recusivos probamos cada forma de completar el i-ésimo caracter (si es un comodín). En el caso base devolvemos 1 o 0 dependiendo de si la cadena es válida.
- ¿Complejidad?
- El árbol tiene una cantidad de nodos acotable por $O(26^N)$. En las hojas hacemos $O(N)$ operaciones.

¿Qué llamado resuelve el problem?

Dobra

$$dobra(i, l) = \begin{cases} verificar(l) & \text{si } i = n \\ dobra(i+1, l) & \text{si } l[i] \neq \_ \\ \sum_{c \in MAYUS} dobra(i+1, l \oplus (i \to c)) & cc \end{cases}$$

- En los casos recusivos probamos cada forma de completar el i-ésimo caracter (si es un comodín). En el caso base devolvemos 1 o 0 dependiendo de si la cadena es válida.
- ¿Complejidad?
- El árbol tiene una cantidad de nodos acotable por $O(26^N)$. En las hojas hacemos $O(N)$ operaciones.

¿Qué llamado resuelve el problem? $dobra(0, l)$

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?
- Vamos verificando si los reemplazos que hacemos de los comodines son válidos _.

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?
- Vamos verificando si los reemplazos que hacemos de los comodines son válidos _.
- Por otro lado, ¿Importa *cuál vocal / consonante* usamos?

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?
- Vamos verificando si los reemplazos que hacemos de los comodines son válidos _.
- Por otro lado, ¿Importa *cuál vocal / consonante* usamos?
- Qué vocal se usa es irrelevante. Solo importa el hecho de que usamos una vocal, y entonces podemos usar una vocal cualquiera y multiplicar por 5.

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?
- Vamos verificando si los reemplazos que hacemos de los comodines son válidos _.
- Por otro lado, ¿Importa *cuál vocal / consonante* usamos?
- Qué vocal se usa es irrelevante. Solo importa el hecho de que usamos una vocal, y entonces podemos usar una vocal cualquiera y multiplicar por 5.
- ¿Podemos hacer lo mismo para las consonantes?

Podas

- ¿Qué podas podemos hacer?
- Vamos verificando si los reemplazos que hacemos de los comodines son válidos _.
- Por otro lado, ¿Importa *cuál vocal / consonante* usamos?
- Qué vocal se usa es irrelevante. Solo importa el hecho de que usamos una vocal, y entonces podemos usar una vocal cualquiera y multiplicar por 5.
- ¿Podemos hacer lo mismo para las consonantes?
- Hay que controlar si usamos o no una L.

Vamos a definir una función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ que

- Toma un índice i
- Una cadena de caracteres l tal que de 1 a i la cadena no tiene comodines _, y cumple las condiciones del enunciado en las primeras i posiciones (i.e. no tiene 3 vocales ni 3 consonantes seguidas).
- Un booleano $tiene\_L$ que indica si la cadena tiene una L entre los caracteres de las posiciones 1 a i.

Esta función devolverá la cantidad de formas de completar la cadena l respetando las restricciones que nos piden.

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$:

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$:

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$: verificamos que la cadena hasta $i + 1$ esté bien (o sea, que los caracteres $l[i-2]l[i-1]l[i]$ no formen una subcadena inválida), y en caso afirmativo seguimos con $dobra(i + 1, l, tiene\_L \vee l[i] == L)$. Sino, devolvemos 0.
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una consonante, pero si una vocal (cosas que podemos chequear mirando l):

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$: verificamos que la cadena hasta $i + 1$ esté bien (o sea, que los caracteres $l[i-2]l[i-1]l[i]$ no formen una subcadena inválida), y en caso afirmativo seguimos con $dobra(i + 1, l, tiene\_L \vee l[i] == L)$. Sino, devolvemos 0.
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una consonante, pero si una vocal (cosas que podemos chequear mirando l): hacemos recursión con $5 * dobra(i + 1, l \oplus (i \to A), tiene\_L)$
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una vocal, pero si una consonante:

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$: verificamos que la cadena hasta $i+1$ esté bien (o sea, que los caracteres $l[i-2]l[i-1]l[i]$ no formen una subcadena inválida), y en caso afirmativo seguimos con $dobra(i+1, l, tiene\_L \vee l[i] == L)$. Sino, devolvemos 0.
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una consonante, pero si una vocal (cosas que podemos chequear mirando l): hacemos recursión con $5 * dobra(i+1, l \oplus (i \to A), tiene\_L)$
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una vocal, pero si una consonante: hacemos dos recursiones, devolviendo $20 * dobra(i+1, l \oplus (i \to B), tiene\_L) + dobra(i+1, l \oplus (i \to L), true)$.
- Si $l[i] = \_$ y podemos tanto vocal como consonante:

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$: verificamos que la cadena hasta $i+1$ esté bien (o sea, que los caracteres $l[i-2]l[i-1]l[i]$ no formen una subcadena inválida), y en caso afirmativo seguimos con $dobra(i+1, l, tiene\_L \vee l[i] == L)$. Sino, devolvemos 0.
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una consonante, pero si una vocal (cosas que podemos chequear mirando l): hacemos recursión con $5 * dobra(i+1, l \oplus (i \to A), tiene\_L)$
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una vocal, pero si una consonante: hacemos dos recursiones, devolviendo $20 * dobra(i+1, l \oplus (i \to B), tiene\_L) + dobra(i+1, l \oplus (i \to L), true)$.
- Si $l[i] = \_$ y podemos tanto vocal como consonante: sumamos los casos anteriores.
- Caso contrario:

Dobra

Los casos de la función recursiva $dobra(i, l, tiene\_L)$ quedan en

- Si $i == N$: Devolvemos $tiene\_L$.
- Si $l[i] \neq \_$: verificamos que la cadena hasta $i+1$ esté bien (o sea, que los caracteres $l[i-2]l[i-1]l[i]$ no formen una subcadena inválida), y en caso afirmativo seguimos con $dobra(i+1, l, tiene\_L \vee l[i] == L)$. Sino, devolvemos 0.
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una consonante, pero si una vocal (cosas que podemos chequear mirando l): hacemos recursión con $5 * dobra(i+1, l \oplus (i \to A), tiene\_L)$
- Si $l[i] = \_$, no puede ir una vocal, pero si una consonante: hacemos dos recursiones, devolviendo $20 * dobra(i+1, l \oplus (i \to B), tiene\_L) + dobra(i+1, l \oplus (i \to L), true)$.
- Si $l[i] = \_$ y podemos tanto vocal como consonante: sumamos los casos anteriores.
- Caso contrario: devolvemos 0;

Dobra

- ¿Cuál es la complejidad de esta nueva solución?

Dobra

- ¿Cuál es la complejidad de esta nueva solución?
- Hay a lo sumo 3^n nodos, y hacemos $O(1)$ operaciones en cada paso.

Dobra

- ¿Cuál es la complejidad de esta nueva solución?
- Hay a lo sumo 3^n nodos, y hacemos $O(1)$ operaciones en cada paso.
- Complejidad final: $O(3^n)$.

Contando bien

- ¿El árbol siempre se abre en 3?

Contando bien

- ¿El árbol siempre se abre en 3?
- Se puede probar que este árbol tiene $\Theta(n2^n)$ nodos en el peor caso, y por lo tanto la complejidad es un poco mejor.

Contando bien

- ¿El árbol siempre se abre en 3?
- Se puede probar que este árbol tiene $\Theta(n2^n)$ nodos en el peor caso, y por lo tanto la complejidad es un poco mejor.
- El árbol de recursión funciona como una herramienta para acotar la complejidad del algoritmo.
- Con programación dinámica podremos podas más, llegando a una complejidad de $O(n)$.