UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 1: Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Aplicaciones

1. Representar graficamente en $\mathbb{R}^3$ las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra.

   (a) $y = -4$, (b) $x > 3$, (c) $0 \leq z \leq 6$,

   (d) $x = z$, (e) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, (f) $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$,

   (g) $x^2 + y^2 \leq 9$.

2. Mostrar que las siguientes ecuaciones representan una esfera. Dar su centro y su radio.

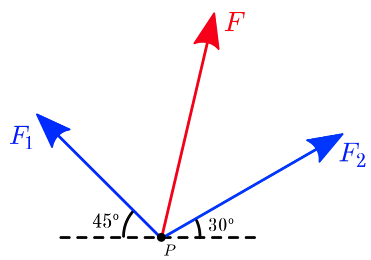
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$, (b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$.

3. En física e ingeniería los vectores son útiles en muchos aspectos. Por ejemplo, dado que una fuerza ejercida sobre un objeto está determinada por una magnitud y una dirección, se puede utilizar un vector para representarla. La unidad de medida clásica para la magnitud de una fuerza es newtons (N).

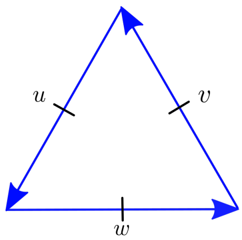
   Si una niña empuja un trineo por la ladera de una montaña con una fuerza de 50 N y la ladera de la montaña tiene una inclinación de 38° sobre la horizontal, calcular la componente horizontal y la vertical de dicha fuerza.

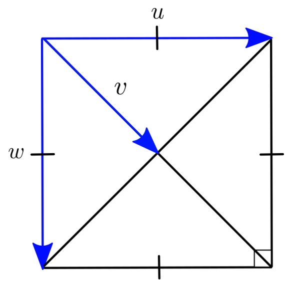
4. Si hay varias fuerzas actuando sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por dicho objeto es la suma de todas fuerzas.

   Dos fuerzas F_1 y F_2 con magnitudes de 10 N y 12 N respectivamente actúan sobre un objeto en un punto P como muestra la figura. Calcular la fuerza resultante F actuando sobre dicho objeto y su magnitud.



5. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma 1. Hallar $u \cdot v$ y $u \cdot w$ en los siguientes casos.





6. Para cada uno de los siguientes vectores u, v, hallar $p_u(v)$, la proyección de v sobre u.

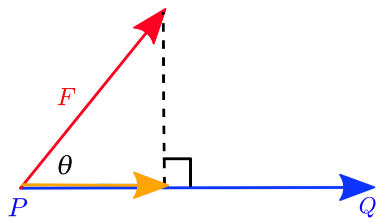
   (a) $u = (3, -4),\ v = (5, 0)$, (b) $u = (1, 2),\ v = (-4, 1)$,

   (c) $u = (3, 6, 2),\ v = (1, 2, 3)$.

7. Sean u, v vectores. Mostrar que el vector $o_u(v) = v - p_u(v)$ es ortogonal a u.

8. Sean u, v vectores no nulos. Dar condiciones necesarias y suficientes para que $p_u(v) = p_v(u)$.

9. Supongamos que para mover un objeto del punto P al punto Q aplicamos una fuerza constante F en una determinada dirección formando un ángulo θ con la horizontal, como muestra la imagen.



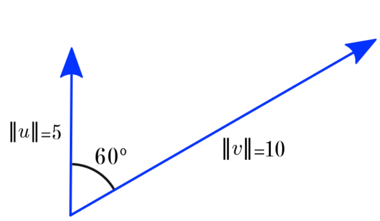
El **trabajo** W realizado por F sobre dicho objeto se define como el producto entre la distancia recorrida ($\|Q - P\|$) y la componente de la fuerza a lo largo de $\overrightarrow{PQ}$ ($\|F\| \cos\theta$), es decir,

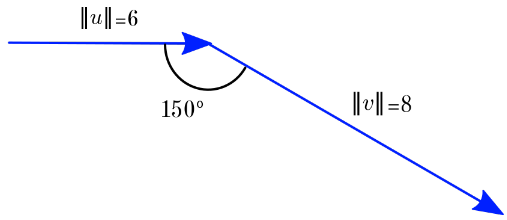
$$W = \|Q - P\| \|F\| \cos\theta = (Q - P) \cdot F.$$

Hallar el trabajo realizado por una fuerza F con una magnitud de 20 N aplicada en la dirección de 50° sobre la horizontal para desplazar un objeto 4 mts.

10. Hallar el trabajo realizado por una fuerza $F = (8, -6, 9)$ que mueve un objeto del punto $P = (0, 10, 8)$ al punto $Q = (6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

11. Decidir en que sentido apunta $u \times v$ y hallar $\|u \times v\|$ en cada uno de los siguientes casos.

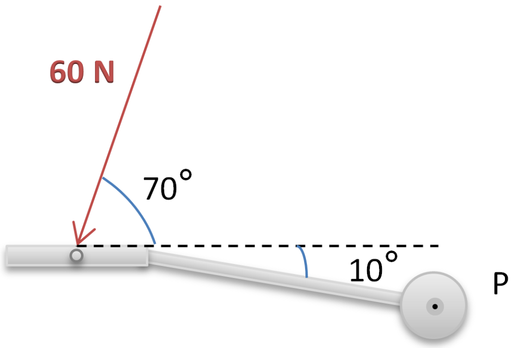




12. Hallar el área del paralelogramo de vértices $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 3, 6)$, $C = (3, 8, 6)$ y $D = (3, 7, 3)$.

13. Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, dicho cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. El **torque** o **momento** de una fuerza es la capacidad que tiene para producir dicho movimiento de rotación. El torque se calcula como el producto vectorial de los vectores de posición y fuerza.

    Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza F de 60 N como muestra la imagen. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Encontrar la norma del torque de F respecto al punto P.



14. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vectores. Probar que $u \cdot (v \times w) = \det(A)$ donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz que tiene a u, v y w como filas.

15. Sean $A = (2, 0, -1)$, $B = (4, 1, 0)$, $C = (3, -1, 1)$ y $D = (2, -2, 2)$. Calcular el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes AB, AC y AD.

16. Usar propiedades del producto escalar y del vectorial para decidir si los puntos $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, -1, 6)$, $C = (5, 2, 0)$ y $D = (3, 6, -4)$ están en el mismo plano.

17. (a) Encontrar una ecuación paramétrica del plano Π que pasa por los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (3, 4, 1)$.

    (b) Hallar N la normal y dar una ecuación implícita de Π.

18. (a) Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(1, -1, 2) + (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(-1, 1, 0) + (2, 0, 2).$$

(b) Encontrar una ecuación del plano que contiene a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$.

19. Para $a \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra (utilizar deslizadores puede ser útil).

    (a) $x + y + z = a$, (b) $x + y + az = 1$, (c) $\cos(a)y + \sin(a)z = 1$.