# Grafos y Modelado - Ejercicios Resueltos

## 1. Algunas definiciones

- **Camino de aristas** es un conjunto de aristas $e_1, \ldots, e_n$ tal que las aristas $e_i$ y $e_{i+1}$ comparten un vértice.
- **Camino de vértices** análogo con vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que existe arista entre $v_i$ y $v_{i+1}$.
- **Camino simple** un camino tal que cada vértice se recorre solo una vez.
- **Longitud de camino** es la cantidad de aristas en el camino.
- **Distancia entre vértices** es la longitud del camino más corto entre dos vértices.
- **Grafo complemento de** $G$. Mismo conjunto de vértices. $u$ y $v$ están unidos por una arista en el complemento si y solo si no lo estan en $G$.
- **Grafo conexo** es un grafo tal que existe un camino entre cada par de vértices.
- **Subgrafo** se define $G' = (V', X')$ con $V' \subseteq V$ y $X' \subseteq X$.
- **Subgrafo inducido** se define $G' = (V', X')$ con $V' \subseteq V$ y $X'$ son todas las aristas que pertenecen a $X$ que corresponden a vértices de $V'$.
- **Componente conexa** es un subrafo conexo maximal.
- **Digrafo** es un grafo orientado, consideramos las aristas como un par ordenado.

## 2. Ejercicio 2.9 *(Julián Braier)*

Algunas veces es bastante fácil ver cómo un problema se podría modelar con un grafo. Por ejemplo si quiero ver cómo viajar en avión de una ciudad a otra puedo utilizar un grafo en el cual los nodos representan aeropuertos y las aristas vuelos. No es difícil imaginarse por qué eso es útil.
En otros problemas, como este, tal vez no sale tan directo representar el problema con un grafo. Pensar cómo hacerlo se les va a ir haciendo más intuitivo a medida que avance la materia.
Les propongo definir el grafo $G(V, X)$ de la siguiente manera.

- $V$ representa a las materias, un nodo por cada una.
- $uv \in X \iff$ los horarios de las materias $u$ y $v$ se superponen.

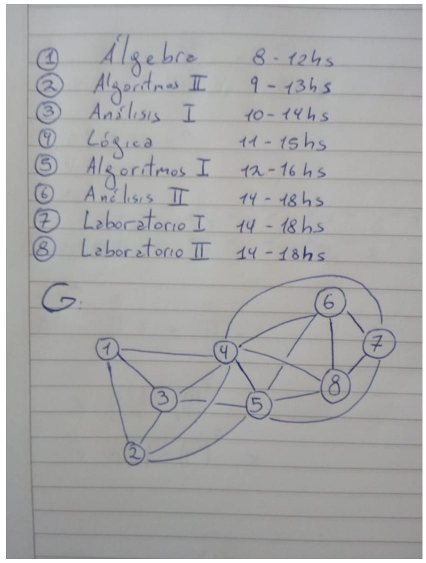


Figura 1: El grafo

Por qué sirve esto? Dónde quedan representadas las aulas?
Si no lo tienen bien presente les recomiendo que vean la página de la teórica 3 en donde se habla de coloreo de mapas antes de seguir.
`https://campus.exactas.uba.ar/pluginfile.php/184692/mod_resource/content/4/3-grafos.pdf`
En el problema del coloreo de mapas los nodos representaban territorios, y dos territorios estaban unidos por arista si y sólo si eran limítrofes. El objetivo se transformaba en asignarle un color a cada nodo de manera tal que no haya dos unidos por una arista que sean del mismo color.
En nuestro grafo los colores que le asignamos a los nodos representan a las aulas. Entonces, queremos ver si asignando uno de estos cuatro colores a cada nodo podemos lograr que no haya dos que sean vecinos y estén pintados igual. Eso sería equivalente a asignar a cada materia una de nuestras cuatro aulas, de manera tal que no haya dos materias que se den al mismo tiempo en el mismo aula.
Alcanzan las cuatro aulas? No. Demostración: desde las 14 hasta las 15 hs hay 5 materias dictándose al mismo tiempo (Lógica, Algo I, Análisis I, Labo I y II). Entonces se necesitan, como mínimo, cinco aulas.
Y cinco son suficientes? Esta vez la respuesta es sí, y si tienen ganas pueden buscar una forma de colorear el grafo $G$ con 5 colores. La solución en el próximo número.

## 3. Ejercicio 3.6 *(Mirko Yves)*

Enunciado: Probar que un grafo es conexo si y sólo si para toda partición de $V$ en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ hay un eje de $G$ que une un nodo de $V_1$ con uno de $V_2$.
En el enunciado de la práctica dice exactamente lo que es una partición. Como es un si y solo si hay que demostrar la doble implicación.

$\rightarrow$) Sea el grafo $G = (V, E)$. Si $G$ es conexo entonces para toda partición de $V$ en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ hay un eje de $G$ que une un nodo de $V_1$ con uno de $V_2$.
Vamos a ver por el absurdo:

Supongamos que existe una particion de $V$ en $V_i$ y $V_j$ tal que **no** existe ningún eje que una un nodo de $V_i$ con un nodo de $V_j$. Sean $n_i \in V_i$ y $n_j \in V_j$, como no hay eje entre $V_i$ y $V_j$ entonces no existe un camino de $n_i$ a $n_j$ (ya que si lo hubiese habria un eje de $V_i$ conectado con uno de $V_j$). Pero como G es conexo, para todo par de nodos de $G$ existe un camino que los une. Absurdo.

$\leftarrow$) Sea el grafo $G = (V, E)$. Si para toda partición de $V$ en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ hay un eje de $G$ que une un nodo de $V_1$ con uno de $V_2$ entonces $G$ es conexo.
Tambien aplicaremos el absurdo:

En este caso vamos a suponer que G es **no** conexo.
Como $G$ es no conexo entonces existen $n_p$ y $n_q$ nodos de $G$ tal que **no** existe un camino que los una.
Lo que vamos a hacer ahora es armar una partición de los nodos tal que en $V_i$ ponemos todos los nodos $n_i$ tal que son posibles llegar desde $n_p$ y en $V_j$ todos los nodos que son posibles llegar desde $n_q$ y tambien contiene nodos que no son alcanzados por $n_p$ ni $n_q$.

Ahora veamos cómo están unidas $V_i$ y $V_j$:
Por hipótesis para toda partición de $V$ existe un eje que une un nodo de un conjunto con uno del otro, entonces podemos decir que existen dos nodos $n'_p \in V_i$ y $n'_q \in V_j$ que están unidos con un eje $e$.
Como $n_p$ alcanza a todo nodo de $V_i$ en particular alcanza a $n'_p$ entonces existe un camino que los une. Lo mismo sucede con $n_q$ y $n'_q$. Es facil ver que si tomamos el camino $n_p, n'_p, e, n_q, n'_q$ tenemos un camino que une a $n_p$ con $n_q$. Aca obtenemos un absurdo ya que no habiamos plantado que no existe camino de $n_p$ a $n_q$ que fue por suponer $G$ no conexo.

# 4. Ejercicio 3.8 *(Alfredo Umfurer)*

Lo demostraremos por contradicción, supongamos que existen dos caminos tales que tienen longitud máxima y además son disjuntos, veamos que podemos encontrar en el grafo otro camino de mayor longitud.
Sea el camino $ab$ el camino que empieza en el vertice $a$ y termina en el $b$ y el camino $cd$ otro camino que empieza en $c$ y termina en $d$ y sea $M$ la longitud de los mismos.
Como el grafo es conexo, existe un camino de $a$ a $d$. Sea $t$ el primer vértice que comparte con el camino $cd$ y $s$ el vértice anterior tal que pertenece al camino $ab$.
Podemos obtener los caminos $ad$ yendo desde el vértice $a$ al $s$ luego a $t$ y finalmente a $d$. Análogamente podemos obtener el camino $bc$ yendo de $b$ a $s$ a $t$ y a $c$.
Sea $D(xy)$ la longitud del camino $xy$.
Como $M$ es la longitud de los caminos más largos, $D(ad) \leq M$ y $D(bc) \leq M$, luego

$$2M \geq D(ad)+D(bc) \geq (D(as)+D(st)+D(td))+(D(bs)+D(st)+D(tc)) = D(ab)+D(cd)+2D(ts) = 2M+2D(ts) > 2M$$

Contradicción. El problema surge porque $t$ y $s$ son dos vértices distintos (lo que implica que $2D(ts) > 0$). Por lo tanto dos caminos de longitud máxima no pueden ser disjuntos.

# 5. Ejercicio 3.9 *(Santiago Cifuentes)*

El enunciado del ejercicio es el siguiente:

> Si $G$ tiene vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, se define como la secuencia de grados de $G$ a la secuencia $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$. Probar que una secuencia de números enteros no negativos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es la secuencia de grados de un grafo (o multigrafo, o pseudografo) si y sólo si $\sum_i d_i$ es par.

Demostremos primero la implicación hacia la derecha. Es decir, sea

$$d_1, d_2, ..., d_n$$

una secuencia de grados de un grafo (o multigrafo, o pseudografo), veamos que la suma de los $d_i$ es par. Esto sale directo, pues ya sabemos que vale que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$$

en todo grafo (o pseudografo, o multigrafo). Por ende podemos concluir que la sumatoria de la izquierda tiene que ser par.
La implicación hacia la izquierda es un poco más complicada. Notemos que alcanzaría con encontrar, dada una secuencia de enteros no negativos cuya suma sea par, un grafo (o multigrafo, o pseudografo) en el cual los grados de los vértices se correspondan con esa secuencia de enteros. Para ganar un poco de intuición sobre cómo construir estas estructuras veamos algunos ejemplos simples.
Supongamos que la secuencia tiene un solo número $d_1$. En ese caso sabemos que $d_1$ tiene que ser par, pues sino no se cumpliría la hipótesis de paridad. Armar un multigrafo para este caso es simple: tomamos un nodo y lo unimos con si mismo con $\frac{d_1}{2}$ aristas. El resultado es un multigrafo de un único nodo con grado $d_1$ (observemos que cada arista aumenta el grado del nodo en dos).
Si ahora la secuencia de enteros contiene dos números $d_1$ y $d_2$ hay dos casos posibles: ambos son pares, o ambos son impares (de nuevo, esto se deduce debido a que tienen que cumplir la condición de que la suma de los enteros sea par). Si ambos son pares, podemos tomar dos nodos distintos $v_1$ y $v_2$ y hacer lo mismo que antes: a cada uno lo unimos con si mismo con $\frac{d_i}{2}$ aristas para $i \in \{1, 2\}$. Por otro lado, si son impares, podemos hacer lo siguiente: partiendo de dos nodos $v_1$ y $v_2$ los unimos con un eje, y luego a cada uno le agregamos $\frac{d_i-1}{2}$ *loops* respectivamente.
Partiendo de estos casos que vimos es fácil armar una estrategia general. Sea una secuencia arbitraria de enteros no negativos

$$d_1, d_2, ..., d_n$$

cuya suma es par. Luego armamos un multigrafo que se corresponda con esa secuencia de la siguiente forma:

- Primero separamos los $d_i$ pares de los impares en los conjuntos $P$ e $I$ (*pares* e *impares* respectivamente).
- Por cada $d_i$ en $P$ creamos un nodo $v_i$ con $\frac{d_i}{2}$ *loops*.
- El conjunto $I$ tiene una cantidad par de elementos, pues caso contrario la suma de los enteros no podría ser par. Debido a esto podemos armar $\frac{|I|}{2}$ pares con los elementos de $I$. Para cada par $(d_i, d_j)$ hacemos lo siguiente: creamos dos vértices $v_i$ y $v_j$, los unimos con una arista, y a cada uno le agregamos $\frac{d_i-1}{2}$ y $\frac{d_j-1}{2}$ *loops* respectivamente.

Con este procedimiento está claro que podemos armar un multigrafo que se corresponda a cualquier secuencia de enteros no negativos cuya suma sea par. Queda demostrada entonces la implicación hacia la izquierda. Notemos que la hipótesis de paridad es necesaria al momento de armar los pares en $I$.
Vale remarcar que esta es solo una de las posibles demostraciones.

## 6. Ejercicio X (no está en la práctica)

Enunciado:
Sea $G = (V, E)$ un grafo y $G^C$ su complemento. Demostrar que si $G$ tiene al menos $r$ componentes conexas entonces

$$\sum_{v \in V} d_{G^C}(v) \geq n \times (r - 1),$$

donde $n = |V|$ y $d_{G^C}(v)$ es el grado de v en $G^C$.

Solución:

- Como existen $r$ componentes conexas, cada vértice no puede ser vecino con (por lo menos) $r-1$ otros vértices.
- $d(v) \leq n-1-(r-1) = n-r$
- El grado de un vértice en complemento, son todos los vértices con los que no tiene arista en el grafo original.
- $d_{G^C}(v) = n-1-d(v) \geq n-1-n+r = r-1$
- $d_{G^C}(v) \geq r-1$ para todo vértice.
- $\sum_{v \in V} d_{G^C}(v) \geq \sum_{v \in V}(r-1) = n \times (r-1) \quad \square$