DEMOSTRANDO IMPLICACIONES

Tenemos los siguientes definiciones:

```haskell
elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool
elem e [] = False
elem e (x:xs) = (e == x) || elem e xs

maximum :: Ord a => [a] -> a
maximum [x] = x
maximum (x:xs) = if x < maximum xs then maximum xs else x
```

Hay que demostrar:

$$\text{Ord } a \Rightarrow \forall ys :: [a] \,.\, \forall e :: a \,.\, \text{elem } e \; ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys$$

Para demostrar propiedades es útil primero entenderlas, en palabras la propiedad de arriba dice

Si a es un tipo con orden entonces
  para cualquier lista de tipo a vale que
    para cualquier elemento de tipo a
      si el elemento está en la lista entonces
        el elemento es menor o igual que el maximum de la lista

notar las indentaciones

Como las implicaciones asocian a derecha, implícitamente tenemos:

$$\left(\text{Ord } a \Rightarrow \left(\forall ys :: [a] \,.\, \forall e :: a \,.\, \text{elem } e \; ys \Rightarrow \left(e \leq \text{maximum } ys\right)\right)\right)$$

(Ord a) o bien es verdadero o bien es falso. Por lo tanto basta con ver que la propiedad es verdadera en ambos casos.

Si (Ord a) es falso entonces la propiedad es verdadera
↳ "Falso implica lo que sea". Ante la duda ver tabla de verdad de $\Rightarrow$

Por lo tanto bvq (basta ver que) la propiedad vale para cuando (Ord a) es verdadero. Para ello asumamos que vale (Ord a) y demostremos que:

$$\forall ys :: [a] \,.\, \forall e :: a \,.\, \text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys$$

Veamoslo por inducción estructural en ys, es decir vamos a mostrar que para toda ys :: [a] vale P(ys) donde P(ys) es

$$P(ys) = \forall e :: a \,.\, \text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys$$

Las listas tienen un único constructor base: [ ]
Por lo tanto el único caso base va a ser P([ ])

Las listas también tienen un único constructor recursivo: (:)
Por lo tanto vamos a demostrar solo un caso recursivo:

$P(ys) \Rightarrow P(y:ys)) \;\forall y :: a$ (el $\forall y :: a$ es porque a partir de ys se pueden construir tantos y:ys como valores pueda tomar y. La prop debe valer para todos)

Vamos a hacer la inducción:

Caso base: $P([])$

$P([]) = \forall e :: a$. elem e [] $\Rightarrow e \leq$ maximum []

Reemplazando elem e [] por su definición tenemos:

↑ esto vale porque tenemos Eq a pues asumimos Ord a

False $\Rightarrow e \leq$ maximum []

Lo cual es verdadero pues falso implica lo que sea

Por lo tanto vale $P([])$

Caso inductivo: $\forall ys :: [a] . P(ys) \Rightarrow \forall y :: a . P((y : ys))$

Vamos a tomar como HI (hipótesis inductiva) $P(ys)$
y vamos a probar $P((y:ys))$

Es decir, asumo que vale $P(ys)$, voy a ver que vale $P((y:ys))$
Notar que si no valiera $P(ys)$, entonces valdría $P(ys) \Rightarrow P((y:ys))$

Vamos a desarmar $P((y:ys))$ y usando $P(ys)$ llegar a que es verdadero:
Que $\forall y :: a . \forall e :: a$

elem e $(y:ys) \Rightarrow e \leq$ maximum $(y:ys)$

Por def de elem

$(e == y)$ || elem ys $\Rightarrow e \leq$ maximum $(y:ys)$

Dado que $(e == y)$ es un booleano, por el principio de extensionalidad basta ver que la prop vale cuando $(e==y)$ es verdadero y cuando $(e==y)$ es falso.

Caso $(e==y)$:

es e pues e == y

$$\text{True} \ || \ \text{elem } e \ ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } (e:ys)$$

por ||

$$\text{True} \Rightarrow e \leq \text{maximum } (e:ys)$$

Por implicación, hay que ver $e \leq \text{maximum } (e:ys)$

Desarmemos maximum $(e:ys)$:

Caso 1: $\text{maximum } (e:[]) = \text{maximum } [e] = e$

Como $e \leq e$ vale la prop

Caso 2: $\text{maximum } (e:ys) = \text{if } e < \text{maximum } ys \text{ then maximum } ys$
$\text{else } e$

Caso 2a: $e < \text{maximum } ys$
entonces tenemos $\text{maximum } (e:ys) = \text{maximum } ys$
y ya sabemos que $e < \text{maximum } ys$, por lo tanto
$e \leq \text{maximum } (e:ys)$

Caso 2b: $e \geq \text{maximum } ys$
entonces $\text{maximum } (e:ys) = e$ y por lo tanto vale $e \leq \text{maximum } (e:ys)$

Por lo tanto, si vale $e==y$ la propiedad vale

Caso $(e \neq y)$:

false || elem e ys $\Rightarrow e \leq$ maximum (y : ys)

por ||

elem e ys $\Rightarrow e \leq$ maximum (y : ys)

Al igual que con (e == y), (elem e ys) también es un booleano y basta con analizar el caso verdadero y el caso falso.

Si elem e ys es falso, entonces la implicación vale trivialmente

Veamos que la propiedad vale si elem e ys = true, para ello hay que ver que vale $e \leq$ maximum (y:ys)

La HI nos dice que si elem e ys, entonces $e \leq$ maximum ys

Si vemos que maximum ys $\leq$ maximum (y:ys), por transitividad va a valer que $e \leq$ maximum (y:ys)

maximum (y:ys) = if y < maximum ys then maximum ys
else y

no usamos el caso maximum [x] pues ys $\neq$ []
pues sabemos $e \in$ ys pues vale elem e ys

Por lo tanto

$$\text{maximum } (y:ys) = \max\{\text{maximum } ys, y\} \underset{\text{por prop de } \max\{a,b\}}{\geq} \text{maximum } ys \underset{\text{por HI}}{\geq} e$$

Por ende, $e \leq$ maximum (y : ys) y por lo tanto vale el caso $e \neq y$, y por ende vale la propiedad.