

## Práctica N<sup>o</sup> 5 - Interpretación y compilación

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

■ Términos **anotados**

$$M ::= x \mid \lambda x:\sigma.M \mid M M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x:\sigma.M$$

Donde la letra  $x$  representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado  $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$

■ Términos **sin anotaciones**

$$U ::= x \mid \lambda x.U \mid U U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x.U$$

■ Tipos

$$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \rightarrow \tau \mid X_n$$

Donde  $n$  es un número natural, de tal modo que  $X_n$  representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto  $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, ?1, ?2, ?3, \dots\}$ .

**Nota:** también podemos referirnos a las variables de tipos como *incógnitas*.

### INTERPRETACIÓN

#### Ejercicio 1 ★

Evaluar en el intérprete CBN las siguientes expresiones.

- I.  $(\lambda x.x) \text{ zero}$
- II.  $(\lambda x.\lambda x.x) \underline{2} \underline{3}$
- III.  $(\lambda x.\lambda y.(\lambda x.\text{if isZero}(x) \text{ then } y \text{ else } x) x) \underline{5} \underline{4}$
- IV.  $(\lambda x.(\lambda f.(\lambda y.f \underline{6}) \underline{5}) (\lambda y.\text{if isZero}(y) \text{ then } x \text{ else } y)) \underline{4}$

#### Ejercicio 2 ★

- I. Extender el intérprete CBV para pares. ¿Sería sencillo incorporar pares al intérprete CBN?
- II. Extender los intérpretes CBN y CBV para suma y producto de naturales.

#### Ejercicio 3

Extender los intérpretes CBN y CBV para tipos suma.

### Ejercicio 4 ★

Evaluar las siguientes expresiones en los intérpretes CBN y CBV con las extensiones del ejercicio 2.

- I.  $(\lambda x.x + x)((\lambda y.y) \underline{3})$
- II.  $(\lambda x.x + x)((\mu f.\lambda n.\text{if isZero}(n) \text{ then succ}(\text{zero}) \text{ else } n \times f(\text{pred}(n))) \underline{1})$
- III.  $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

## SEMÁNTICA

### Ejercicio 5 ★

Dar la semántica denotacional de los siguientes términos.

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| I. $\lambda x : \text{Nat}.\text{zero}$                               | III. <b>Fact</b>                |
| II. $\lambda x : \text{Nat}.\lambda y : \text{Nat}.y \text{ succ}(x)$ | IV. <b>Fact</b> $\underline{2}$ |

Donde  $\llbracket M \times N \rrbracket_v = \llbracket M \rrbracket_v \times \llbracket N \rrbracket_v$  y **Fact**  $= \mu f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.\lambda n : \text{Nat}.\text{if isZero}(n) \text{ then succ}(\text{zero}) \text{ else } n \times f \text{ pred}(n)$ .

### Ejercicio 6

Si  $\llbracket M \rrbracket_v = T$ ,  $\llbracket N \rrbracket_v = T$  y  $\llbracket P \rrbracket_v = F$ , ¿quién es  $\llbracket \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P \rrbracket_v$ ?

### Ejercicio 7 ★

Dar la semántica operacional CBV a grandes pasos, a pequeños pasos y la denotacional a los siguientes términos:

- I.  $\lambda x : \text{Nat}.x$
- II.  $\lambda x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.x$
- III.  $\lambda x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.\lambda y : \text{Nat}.x \ y$
- IV.  $(\lambda x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.x \ \underline{3}) \ \lambda x : \text{Nat}.\text{succ}(x)$
- V.  $(\lambda f : \text{Nat}.\mu x : \text{Nat}.f \ \text{succ}(x))((\lambda y : \text{Nat}.y) \ \underline{2})$

### Ejercicio 8

- I. Modificar la semántica denotacional incluyendo el elemento **error** en todo conjunto, con el fin de detectar la división por cero.
- II. Extender la semántica denotacional con error, para el Cálculo Lambda con pares (y naturales).
- III. Demostrar que para toda valuación  $v$  válida en  $FV(M) \cup FV(N)$  se tiene  $\llbracket M\{x := N\} \rrbracket_v = \llbracket M \rrbracket_{v, x = \llbracket N \rrbracket_v}$  (lema de sustitución).
- IV. Demostrar el teorema de corrección.

## INFERENCIA DE TIPOS

### Ejercicio 9

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

- |  |   |
|--|---|
| I. $\lambda x: \text{Bool}.\text{succ}(x)$ | V. $X_1$  |
| II. $\lambda x.\text{isZero}(x)$           | VI. $X_1 \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow X_2)$   |
| III. $X_1 \rightarrow \sigma$              | VII. $\lambda x: X_1 \rightarrow X_2.\text{if zero then True else zero succ(True)}$           |
| IV. $\text{erase}(f\ y)$                   | VIII. $\text{erase}(\lambda f: \text{Bool} \rightarrow \text{s}.\lambda y: \text{Bool}.f\ y)$ |

### Ejercicio 10

Determinar el resultado de aplicar la sustitución  $S$  a las siguientes expresiones

- |  |   |
|--|---|
| I. $S = \{X_1 := \text{Nat}\}$                               | $S(\{x: X_1 \rightarrow \text{Bool}\})$   |
| II. $S = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_4 := \text{Bool}\}$ | $S(\{x: X_4 \rightarrow \text{Bool}\}) \vdash S(\lambda x: X_1 \rightarrow \text{Bool}.x): S(\text{Nat} \rightarrow X_2)$ |

### Ejercicio 11

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* ("most general unifier").

$X_1 \rightarrow X_2$	$\text{Nat}$	$X_2 \rightarrow \text{Bool}$	$X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5$
$X_1$	$\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$	$(\text{Nat} \rightarrow X_2) \rightarrow \text{Bool}$	$\text{Nat} \rightarrow X_2 \rightarrow \text{Bool}$

### Ejercicio 12

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

- |   |  |
|---|--|
| I. $\lambda z.\text{if } z \text{ then zero else succ(zero)}$   | V. $\text{if True then } (\lambda x.\text{zero})\text{zero else } (\lambda x.\text{zero})\text{False}$ |
| II. $\lambda y.\text{succ}((\lambda x.x)\ y)$   | VI. $(\lambda f.\text{if True then } f\text{zero else } f\ \text{False})\ (\lambda x.\text{zero})$     |
| III. $\lambda x.\text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else (if } x \text{ then } x \text{ else } x)$ | VII. $\lambda x.\lambda y.\lambda z.\text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$                 |
| IV. $\lambda x.\lambda y.\text{if } x \text{ then } y \text{ else succ(zero)}$                            |  |

### Ejercicio 13 ★

Utilizando el árbol de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- |  |  |
|--|--|
| ■ $\lambda x.\lambda y.\lambda z.z\ x\ y\ z$ | ■ $\lambda x.(\lambda x.x)$                                  |
| ■ $\lambda x.x\ (w\ (\lambda y.w\ y))$       | ■ $\lambda x.(\lambda y.y)x$                                 |
| ■ $\lambda x.\lambda y.xy$                   | ■ $(\lambda z.\lambda x.x\ (z\ (\lambda y.z)))\ \text{True}$ |
| ■ $\lambda x.\lambda y.yx$                   |  |

### Ejercicio 14 (*Numerales de Church*)

Indicar tipos  $\sigma$  y  $\tau$  apropiados de modo que los términos de la forma  $\lambda y : \sigma. \lambda x : \tau. y^n(x)$  resulten tipables para todo  $n$  natural. El par  $(\sigma, \tau)$  debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación:  $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$ . *Sugerencia*: empezar haciendo inferencia para  $n = 2$  – es decir, calcular  $\mathbb{W}(\lambda y. \lambda x. y(yx))$  – y generalizar el resultado.

### Ejercicio 15

- I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión:  $\lambda y. (x \ y) \ (\lambda z. x_2)$
- II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.
- III. ¿Qué ocurriría si  $x_2$  fuera  $x$ ?

## COMPILACIÓN

### Ejercicio 16 ★

Escribir la secuencia de instrucciones resultantes de compilar los siguientes términos con el compilador de Cálculo Lambda a la máquina SECD visto en la teórica, y escribir la traza de ejecución para cada una de dichas secuencias.

- I.  $(\lambda x. x) \ \text{True}$
- II.  $(\lambda x. \lambda x. x) \ \text{False True}$
- III.  $(\lambda x. \lambda y. (\lambda x. \text{if } x \text{ then } y \text{ else } x) \ x) \ \text{False True}$
- IV.  $(\lambda x. (\lambda f. (\lambda y. f \ \text{True}) \ \text{False}) \ (\lambda y. \text{if } y \text{ then } x \text{ else } y)) \ \text{False}$

### Ejercicio 17

Extender el compilador de Cálculo Lambda a la máquina SECD visto en la teórica con pares.