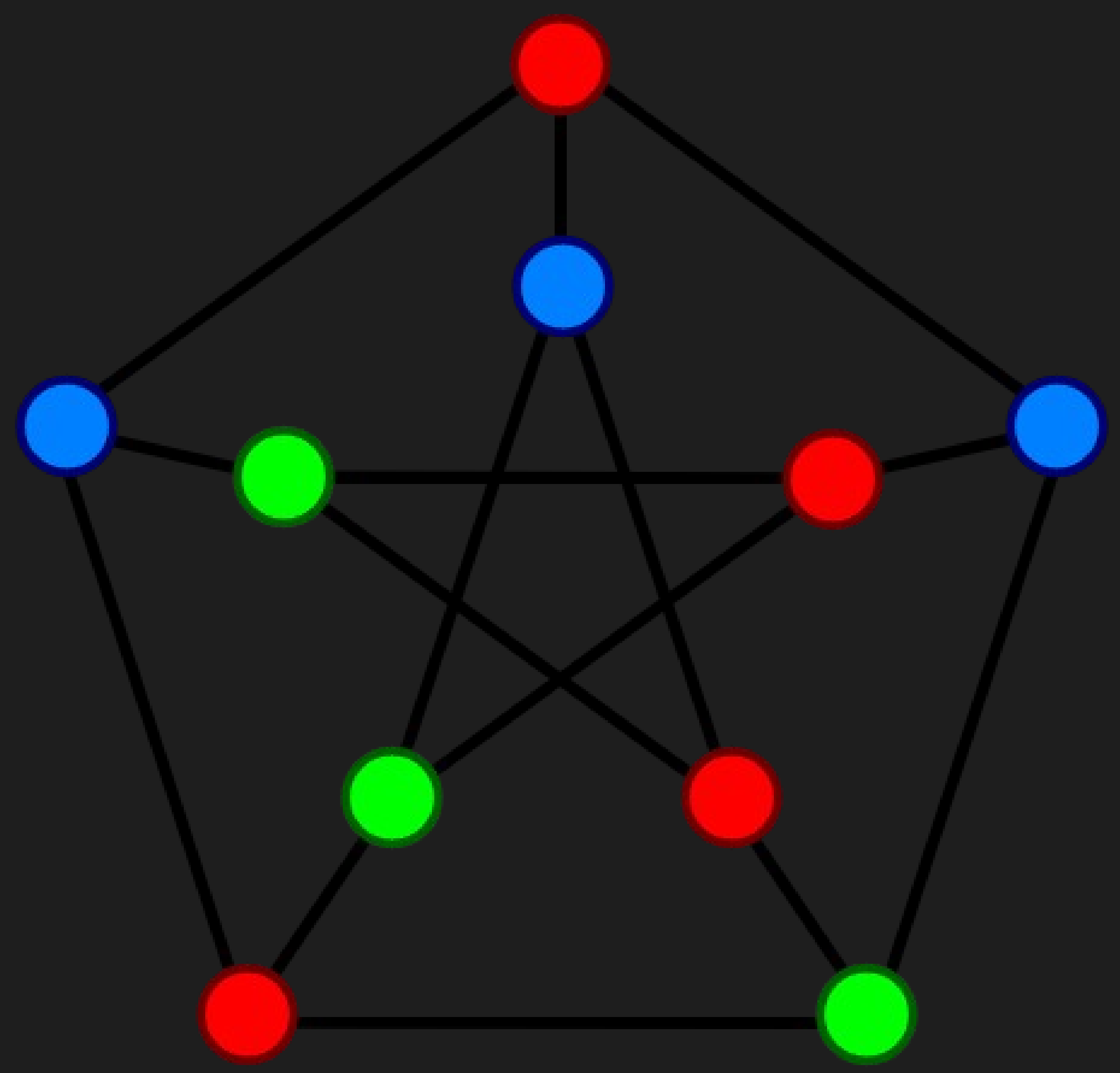
Coloreo de Grafos

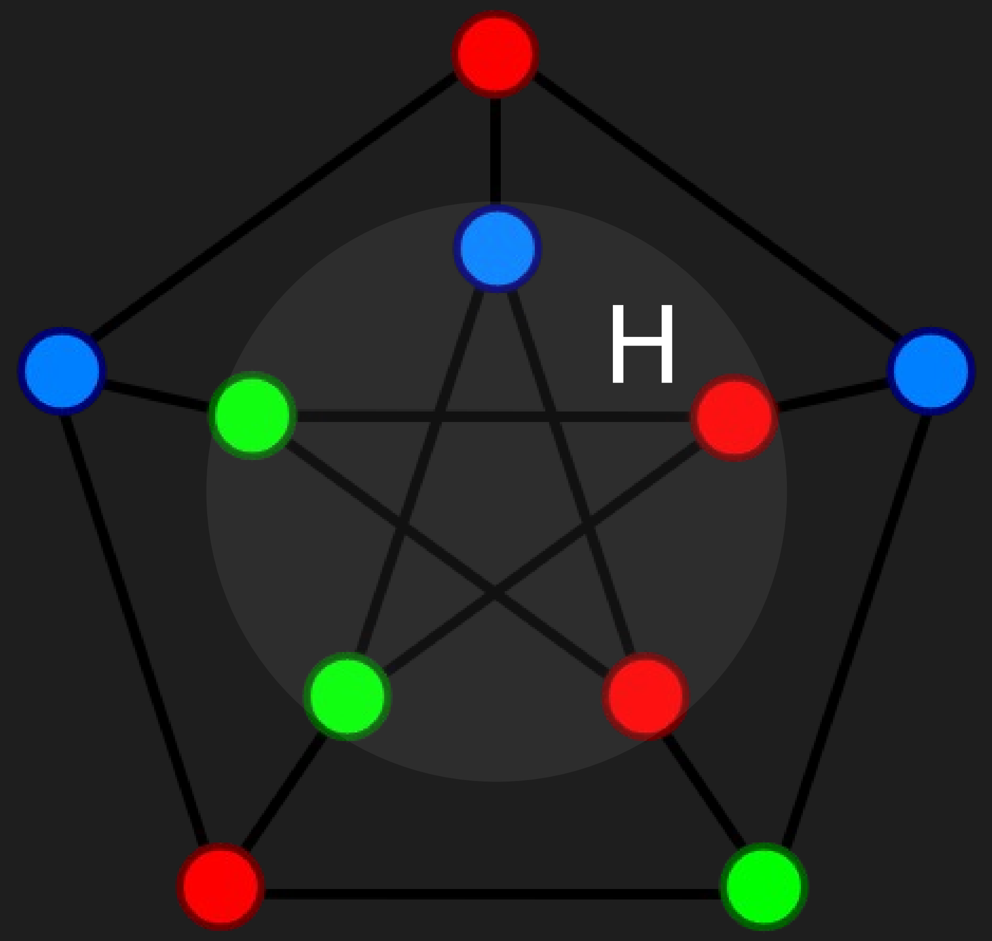


Notación

- G = (V,E)
  - V (Vertices)
    - Es un conjunto finito
    - #(V) = n
  - E (Aristas/Lados)
    - x e y son los extremos del lado xy

Subgrafo

- Dado un grafo G = (V,E) un subgrafo de G
  - Es un grafo H = (W, F)
  - talque $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$



Vecinos de un vertice

- Dado $x \in V$
  - Los vertices que forman un lado con x
  - Se llaman los vecinos de x

$$\Gamma(x) = \{ y \in V : xy \in E \}$$

Grado de un vertice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ (cantidad de vecinos de un vertice)
  - Se llama el grado de x y se denota d(x)

    $$d(x) = \#(\Gamma) = (\text{cantidad de vecinos del vertice } x)$$

  - Menor grado del grafo

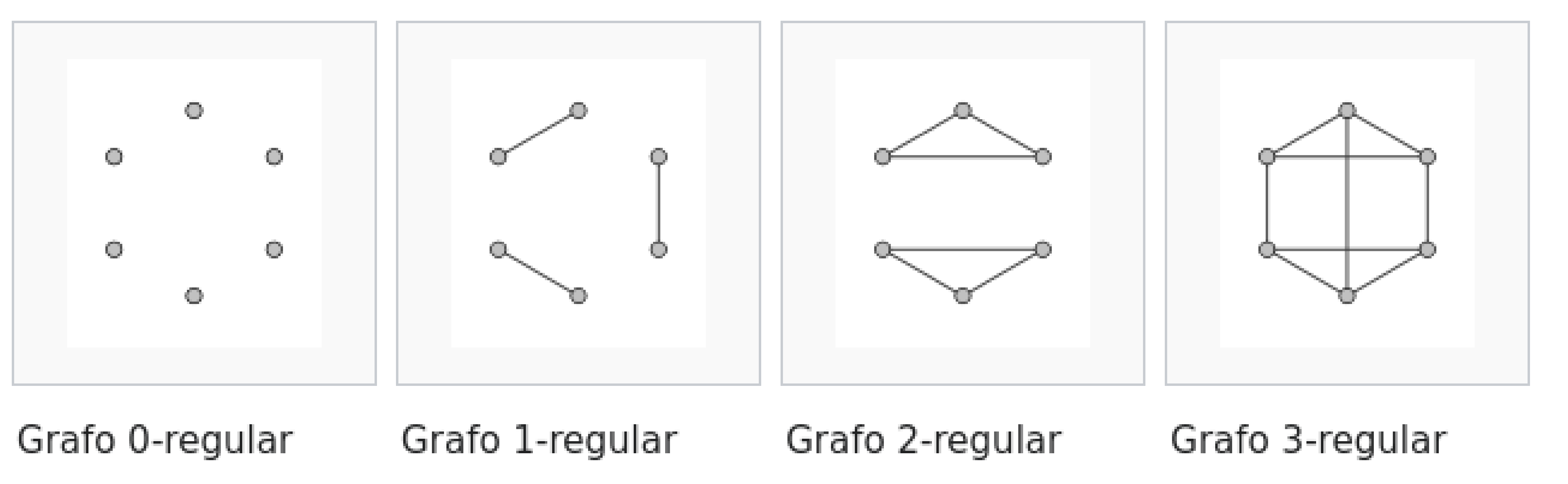
    $$\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$$

  - Mayor grado del grafo

    $$\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$$

Grafos regulares

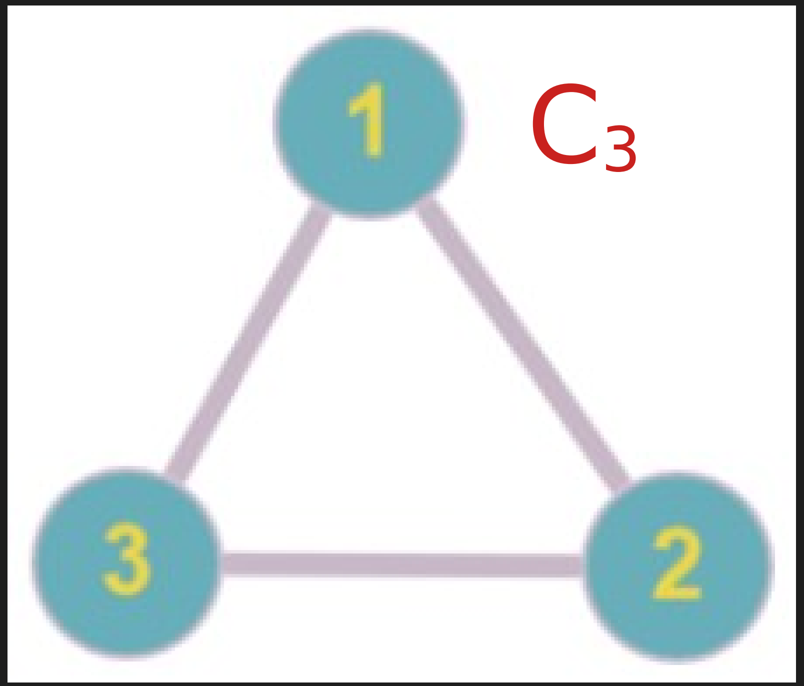
- Un grafo es regular si todos los vertices tienen el mismo grado
  - O sea todos los vertices tienen la misma cantidad de vecinos
  - siendo llamado grafo k-regular donde k es maximo grado del grafo



Grafos cicliclos

- Un grafo ciclico es un grafo de n vertices con $n > 3$
  - Con vertices V = {x1,x2,...,xn}
  - Con lados {x1x2, x2x3, ...,x(n-1)xn, xnx1}
  - Notacion:

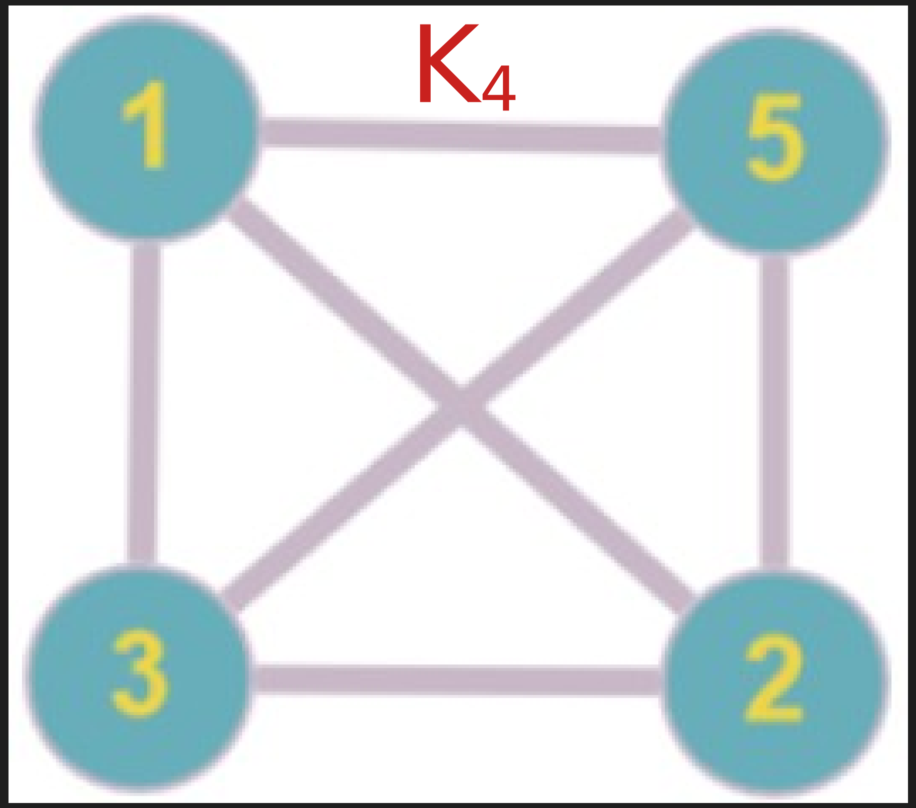
$$C_n$$



Grafos completos

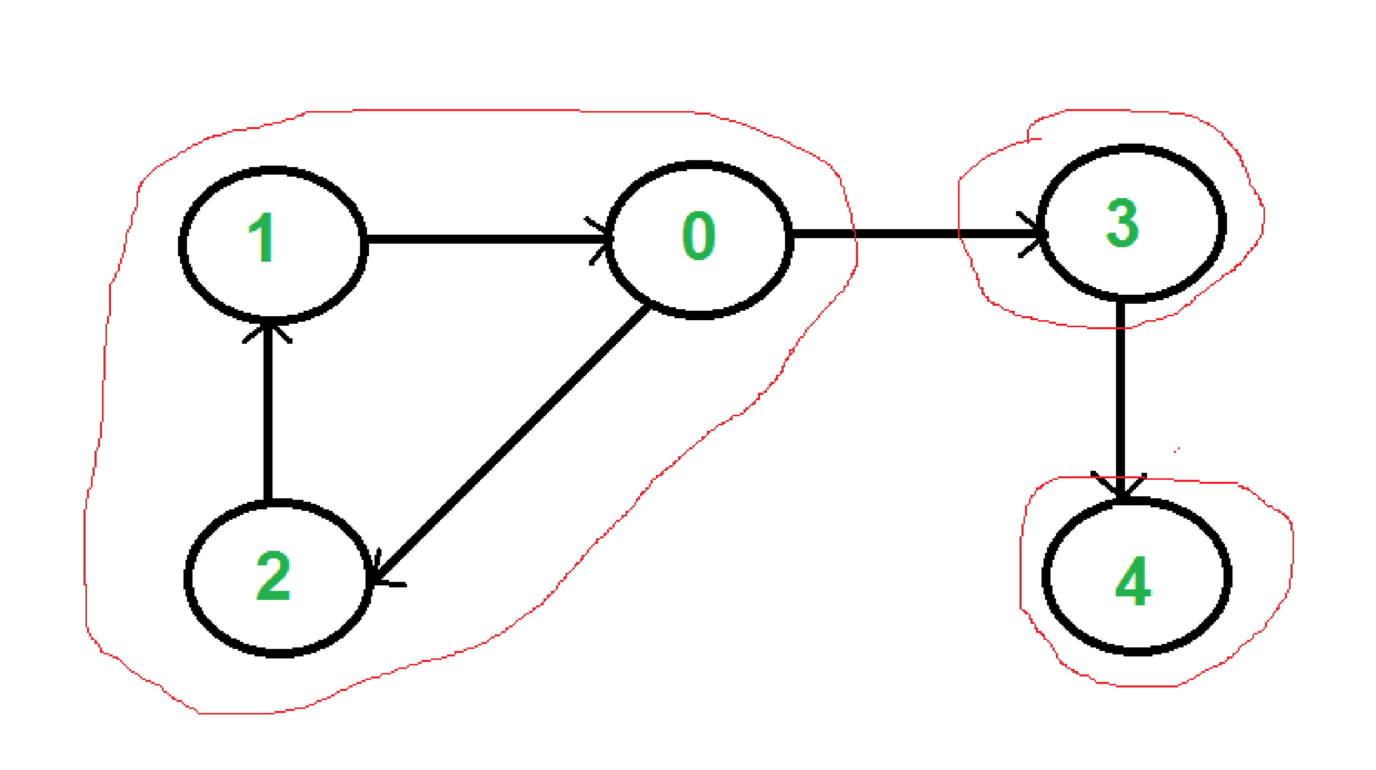
- Un grafo ciclico es un grafo de n vertices
  - Con vertices $V = \{x_1,x_2,...,x_n\}$
  - Con lados $E = \{x_ix_j : i,j \in \{1,2,...,n\}\ i<j\}$
  - Todos los vertices se conectan entre si
  - Notacion:

K_n



Componentes conexas

- Un grafo es conexo si todos sus vertices se pueden alcanzar mediante un camino
- Una componente conexa es un subgrafo de un grafo
  - donde simplimente ese subgrafo es conexo
  - o sea cualquier par de aristas estan conectadas por un camino



Grafo conexo y Componentes conexas

- Un grafo es conexo si todos sus vertices se pueden alcanzar mediante un camino

- Una componente conexa es un subgrafo de un grafo

  - donde simplimente ese subgrafo es conexo

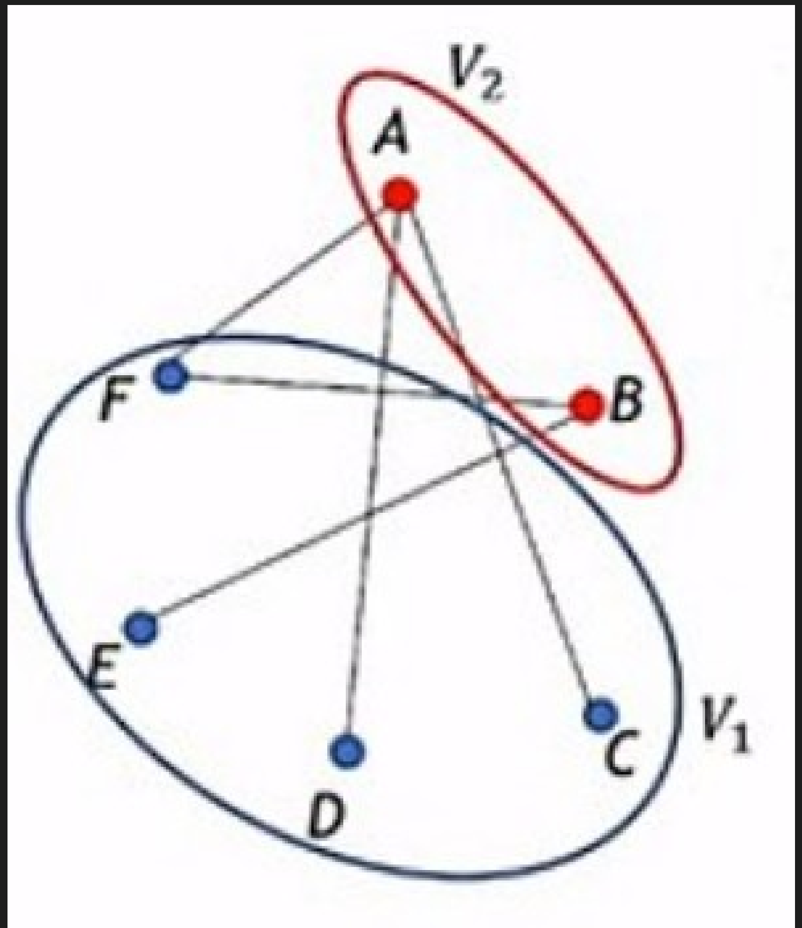
  - o sea cualquier par de aristas estan conectadas por un camino

$$x_1 = x \, , \, x_r = y \mid x_i x_{(i+1)} \in E \;\forall\, i \in \{1,2,...,r-1\}$$

  - $x \sim y \Leftrightarrow \exists$ camino entre x e y

Grafo bipartito

- Un grafo es bipartito si al dividir los vertices del grafo en dos conjuntos distintos
  - Donde cada vertice de un conjunto se conecta con un vertice del otro
  - Y no hay lados que conecten a vertices del mismo conjunto



Algoritmos para determinar las componentes conexas

- DFS - BFS

  - El algoritmo basico de DFS o BFS lo que hace es.
    - Dado un vertice x, encontrar todos los vertices de la componente conexa x

- DFS
  - Dado un vertice recorremos hasta el fondo hasta encontrar un vecino de mayor nivel para regresar a ese y seguir hasta el fondo con el recorrido (utiliza una pila)

- BFS
  - Dado un vertice recorremos todos los vecinos del vertice que estamos procesando (utiliza una cola)

Coloreo

- Un coloreo de un grafo G es una funcion

$$C : V \to S$$

  - Donde S es algun conjunto que refleja los colores de cada vertice

Coloreo propio

- Un coloreo C de un grafo G se le dice propio si

$$vw \in E \Rightarrow C(v) \neq C(w)$$

  - Simplemente es un coloreo propio si ningun vecino de algun vertice tiene el mismo color

Numero Cromatico

- El numero cromatico de un grafo es el minimo numero de colores necesarios para colorear el grafo

$$\chi(G) = \min \{ k : \exists \text{ un coloreo propio con } k \text{ colores de } G\}$$

K-color

- k-color es un problema de decision que consiste en responde a la pregunta

¿$\chi(G) \leq k$? ¿G puede ser pintado con a lo sumo k colores?

  - Cuando coloreemos nos vamos a hacer esta pregunta

Algoritmo greedy de coloreo

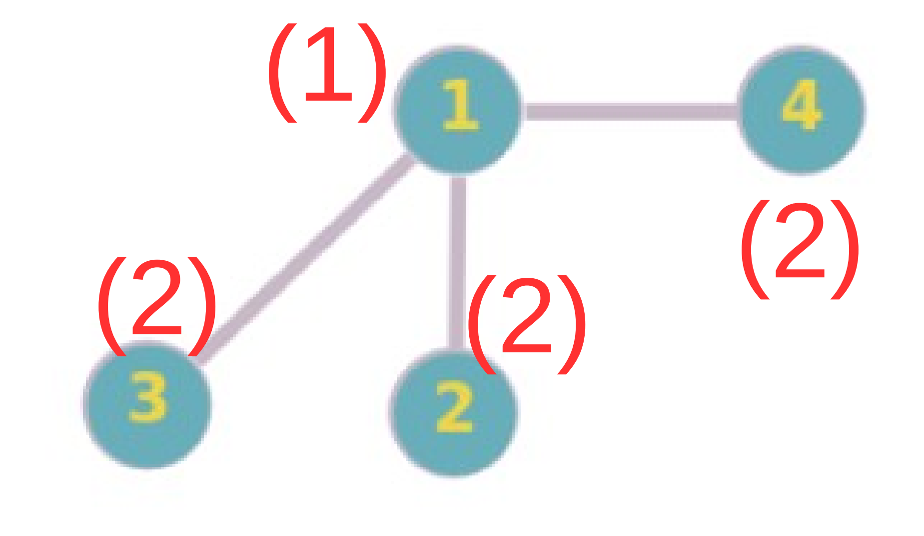
$$
\begin{aligned}
&C(v_1) = 1 \\
&\texttt{for } k = 1, 2, \ldots, n: \\
&\quad C(v_k) = \min(j \in \{1, 2, \ldots, n\} : C(v_i) \neq j \forall i \leq k-1) \text{ tal que } (v_i, v_k) \in E)
\end{aligned}
$$

- Al primer vertice se le asigna el primer color disponible
- Luego para el resto de vertices se le asigna el minimo color disponible (Color no ocupado por algun vecino)
- El orden de los vertices influye en la cantidad de colores

• Ejemplo → V = [1, 2, 3, 4], E = [12, 13, 14]

color	1	2
vertices	1	2 3 4

→ Coloreo propio



Cotas inferiores para $\chi(G)$

- Las cotas inferiores ya definidas para el numero cromatico nos dice
  - "Que al menos se necesitan k colores para G"
  - Estas cotas definidas nos ayudaran a ver que cantidad minima de colores se necesita de por si para el grafo
  - La mayoria de las cotas se logra definir buscando un subgrafo H en G talque $\chi(H) \leq \chi(G)$
- Cotas
  - $1 \leq \chi(G) \leq n$
  - $\chi(H) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
  - $\chi(K_n) \leq n$
  - $\chi(C_{2n}) \leq 2$
  - $\chi(C_{2n+1}) \leq 3$
  - $\chi(G) \leq 2$ (G bipartito)

Encontrar χ(G)

- Si decimos que χ(G) = k debemos probarlo
  - Debemos seguir dos pasos para lograr probar esto

1. <u>Dar un coloreo propio de G con k colores</u>
   - Esta prueba parte del “∃ coloreo propio con k colores para G“
   - Definimos un coloreo propio con k colores
   - La mayoria de veces tendremos que definir funciones que colorean vertices dependiendo de su indice (ej - C(xi) = i mod 2)

2. <u>Probar que no existe ningun coloreo propio para k-1 colores de G</u>
   - Una vez hecho el paso 1 probaremos que es el minimo k posible preguntandonos
   - Si “ ¿ χ(G) ≤ k-1 ? “
   - Entonces una manera util de empezar es chequear si ∃alguna cota inferior de las ya definidas anteriormente (chequeando subgrafos, bipartito, etc.)
   - En el caso que ninguna cota aparezca deberemos demostrar por el absurdo
   - Asumimos que tenemos k-1 colores disponibles y vamos coloreando hasta llegar a un absurdo donde con los k-1 colores encontremos que no es propio

Teorema de Brooks

- El teorema de Brooks nos dice que
  - Dado que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ es una cota para $\chi(G)$
  - ¿Que tan buena es esa cota?
  - Veamos que algunos grafos dicha cota es:

$$\chi(C_{2k+1}) = 3 = 2 + 1 \quad \text{y} \quad \Delta(C_{2k+1}) = 2$$

$$\chi(K_n) = n = (n-1) + 1 \quad \text{y} \quad \Delta(K_n) = n - 1$$

  - El T. de Brooks baja la cota para grafos conexos que no sean ciclos impares ni completos

Sea G conexo, $G \neq C_{2k+1}$, $G \neq K_n \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

  - O sea existe un ordenamiento de los vertices talque greedy colorea todos los vertices

VIT (Very important Theorem)

- Sea G un grafo con un coloreo propio con r colores {0,1,...,r-1} y sea π: {0,1,...,r-1} $\rightarrow$ {0,1,...,r-1} una biyeccion
  - Sea $V_i = \{ x \in V: C(x) = i\}$, $i = 0,1,...,r-1$
  - O sea tenemos una biyeccion con los vertices y sus colores
  - Ordenamos los vertices colocando primero
    - $V_{\pi(0)},V_{\pi(1)},\ldots,V_{\pi(r-1)}$
  - Greedy en ese orden colorea G con r colores o menos jamas podria dar con mas colores que r en ese orden
  - Ejemplo: V = [1,2,3,4] C=[0,1,0,2]
  - $V_{\pi(0)} = [1,3]$,$V_{\pi(1)} = [2]$, $V_{\pi(2)} = [4]$
  - Reordenando $V_{\pi(0)}$++$V_{\pi(1)}$++$V_{\pi(2)}$ = [1,3,2,4] <- greedy again