Matrices

Profundicemos un poco en el producto de matrices. Empezamos por el producto de matrices por vector:

Ej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 4 \cdot b \\ 2 \cdot a + 5\, b \\ 3 \cdot a + 6\, b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot b$$

Con lo cual vemos que multiplicar una matriz A por un vector es hacer una combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes de la combinación lineal a las coordenadas del vector.

Análogamente, si multiplicamos una matriz por un vector a izquierda estamos haciendo combinaciones lineales de filas:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 2 & a \cdot 3 + b \cdot 4 & a \cdot 5 + b \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \langle a(1,3,5) + b(2,4,6) \rangle$$

Rango : Seguimos con misma matriz A.

Se define

$C(A)$ = el espacio columna de A

$= \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle$

$= \operatorname{Im} A \rightsquigarrow$ imagen de A.

Ya vimos que esto es un subespacio.

Geométricamente, $C(A)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ y cuando planteamos por ejemplo el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
nos preguntamos si $(2,3,0)$ está en ese plano, o lo que es lo mismo si está en el espacio columna de A.

$N(A)$ = núcleo de A $= \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \bar{0}\}$

también es subesp y son las soluc. del

sistema homogéneo.

Más generalmente, si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 . C_1(A) + \dots + x_n C_n(A)$$

$C_1(A)$ columna 1 de A

$C_n(A)$ → columna n de A

y $C(A) = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$

Se define rango columna de una matriz A a la dimensión del subespacio C(A) y se lo nota $rg_C(A)$.

Análogamente, se define el subespacio de las filas de A

$F(A) = \langle F_1(A), \dots, F_m(A) \rangle$

y el rango fila de una matriz A

es la dimensión del subespacio $F(A)$ y se lo nota $rg_F(A)$.

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, vemos que $(-4,-6) = -2\,(2,3)$

$\Rightarrow$

$C(A) = \langle (2,3), (-4,-6) \rangle = \langle (2,3) \rangle$

luego $\dim C(A) = 1 \Rightarrow rg_C(A) = 1$.

$F(A) = \langle (2,-4), (3,-6) \rangle = \langle (2,-4) \rangle$
$= \langle (1,-2) \rangle$

luego $\dim F(A) = 1 \Rightarrow rg_F(A) = 1$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$C(A) = \langle (1,2,3), (2,1,0) \rangle$ que podemos ver tiene dimensión 2.

luego $rg_C(A) = 2$.

y $F(A) = \langle (1,2)(2,1), (3,0) \rangle$

$= \langle (1,2), (2,1) \rangle$ (convencerse)

$\Rightarrow \quad rg_F(A) = 1.$

Se puede probar que si $A \in \mathbb{k}^{m \times n} \Rightarrow$

$rg_F(A) = rg_C(A)$, se lo llama rango

y se escribe $rg(A)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1), (8,6,2) \}$

Vemos que $(8,6,2) = 2(1,1,0) + 2(3,2,1)$

$\Rightarrow C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$

Más generalmente, recordemos el producto de matrices: Dadas

$A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{k}^{n \times r}$, $\mathbb{k}$ cuerpo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{nj} & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \in K^{m \times r}$$

donde $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

Del producto de matrices vemos que la matriz $A \cdot B$ es

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{c} \sum a_{1l} b_{l1} \\ \sum' a_{2l} b_{l1} \\ \vdots \\ \sum a_{ml} b_{l1} \end{array}} & \begin{array}{c} \sum a_{1l} b_{l2} \\ \sum a_{2l} b_{l2} \\ \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \sum a_{1l} b_{lr} \\ \sum a_{2l} b_{lr} \\ \vdots \\ \sum a_{ml} b_{lr} \end{array} \end{array} \right)$$

donde usamos $\sum$ para $\sum\limits_{l=1}^{n}$

$\Rightarrow$ miremos la primera columna de $A \cdot B$.

Vemos que

$$\boxed{\begin{array}{c} \sum a_{1l} b_{l1} \\ \sum' a_{2l} b_{l1} \\ \vdots \\ \sum a_{ml} b_{l1} \end{array}} = A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = A \cdot C_1(B)$$

Es decir $C_1(A \cdot B) = A \cdot C_1(B)$

y en general $C_i(A \cdot B) = A \cdot C_i(B)$

Ejemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3\times 2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)3 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 0 + (-2)1 + 1\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-2)(-1) + 1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Y también

$$A\cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)3 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 0 + (-2)1 + 1\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-2)(-1) + 1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0 \cdot C_1(A) + 1 \cdot C_2(A) + 2 \cdot C_3(A) \;\middle|\; 3 \cdot C_1(A) - 1 \cdot C_2(A) + 0 \cdot C_3(A) \right)$$

$$= \left(A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\vdots\; A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\underbrace{A \cdot C_1(B)}_{C_1(A \cdot B)} \;\vdots\; \underbrace{A \cdot C_2(B)}_{C_2(A \cdot B)} \right)$$

Además

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{1} \cdot 0 + \boxed{2} \cdot 1 + \boxed{0} \cdot 2 & \boxed{1} \cdot 3 + \boxed{2} (-1) + \boxed{0} \cdot 0 \\ \boxed{(-1)} \cdot 0 + \boxed{0} \cdot 1 + \boxed{3} \cdot 2 & \boxed{(-1)} \cdot 3 + \boxed{0} \cdot (-1) + \boxed{3} \cdot 0 \\ \boxed{4} \cdot 0 + \boxed{(-2)} \cdot 1 + \boxed{1} \cdot 2 & \boxed{4} \cdot 3 + \boxed{(-2)} (-1) + \boxed{1} \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (-1, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (4, -2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \underbrace{(0,3)}_{F_1(A)} + 2 \cdot \underbrace{(1,-1)}_{F_2(A)} + 0 \cdot \underbrace{(2,0)}_{F_3(A)} \\ \hline (-1) \underbrace{(0,3)}_{F_1(A)} + 0 \cdot \underbrace{(1,-1)}_{F_2(A)} + 3 \underbrace{(2,0)}_{F_3(A)} \\ \hline 4 \overbrace{(0,3)}^{F_1(A)} + (-2) \overbrace{(1,-1)}^{F_2(A)} + 1 \cdot \overbrace{(2,0)}^{F_3(A)} \\ \text{Son comb. lineal de} \\ \text{las filas de } B! \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_1(A)\cdot B \\ F_2(A)\, B \\ F_3(A)\cdot B \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} F_1\,(AB) \\ F_2\,(AB) \\ F_3\,(AB) \end{matrix}$$

En general, vale también que

$$F_i\,(AB) = F_i\,(A)\cdot B$$

Volvamos al ej 3) de antes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1), (8,6,2) \rangle$$

Vimos que $(8,6,2) = 2(1,1,0) + 2(3,2,1)$

$$\Rightarrow C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$$

luego podemos plantear la descomposición de A como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}^{C} \cdot \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}}^{R}$$

guardamos solo las columnas que son l.i de A. La llamamos C

La llamamos R.

- Acá ponemos una columna de manera que al multiplicar $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ me devuelva la primera columna de A.
- Lo mismo con la segunda columna.
- La última columna deben ser los escalares de la combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ que me dan la tercera columna de A.

luego $A = C \cdot R$.

A R se la conoce como forma escalonada reducida por filas de A (sin filas de ceros). Veamos por qué!!

Notemos que al producto $C \cdot R$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lo podemos pensar como recién como columnas pero.... también lo podemos pensar como filas, es decir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$F_1(A) = F_1(C) \cdot R = \boxed{1}(1,0,2) + \boxed{3}(0,1,2)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ (1,3,8) \end{array}$$

comb. lineal de las filas de R

De la misma forma

$$(1,2,6) = F_2(A) = \boxed{1}\,(1,0,2) + \boxed{2}\cdot(0,1,2)$$

$$(0,1,2) = F_3(A) = \boxed{0}\,(1,0,2) + \boxed{1}\,(0,1,2)$$

Lo cual nos dice que hay ciertas operaciones de fila que nos llevan de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que por lo tanto esta es la forma escalonada reducida de filas (con fila de ceros en este caso).

$$\Rightarrow \langle F_1(A), F_2(A), F_3(A) \rangle = \langle F_1(R), F_2(R) \rangle$$

$$\Rightarrow \dim \langle F_1(A), F_2(A), F_3(A) \rangle = 2$$

Esto va a pasar siempre si hacemos descomposición $A = C \cdot R$ para cualquier $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ donde tendremos que la cantidad de columnas l i de A es la cantidad de columnas de C que coincide con la cantidad de filas l i de R (sacando las filas de ceros).

Esto nos va a decir que

$$\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \langle C_1(C), \dots, C_r(C) \rangle$$

y

$$\langle F_1(A), \dots, F_m(A) \rangle = \langle F_1(R), \dots, F_r(R) \rangle$$

de donde vemos que

$$\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \dim \langle F_1(A), \dots, F_m(A) \rangle$$

$\Rightarrow$ $rg(A)$ = dimensión del espacio columna
= dimensión del espacio fila. $(*)$

Propiedades del producto de matrices

- Es asociativo $(A.B).C = A.(B.C)$
- No es conmutativo:

<u>no</u> vale en general que $A \cdot B = B \cdot A$

Traspuesta y traza

Definición:

1) Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, la matriz traspuesta $A^t \in \mathbb{K}^{n \times m}$ es aquella que tiene por columnas las filas de A.

Formalmente, si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

$$\Rightarrow A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t A^t$

Ejercicio: Hacer dem. de cada prop.

Para la propiedad del producto usar la definición del producto de matrices y la de traspuesta. (Ej 11 P1)

2) La traza de una matriz A cuadrada ($tr(A)$) se define como la suma de los elementos de la diagonal.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$$

$$\Rightarrow tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1+5+9 = 15.$

Propiedades: $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(matrices cuadradas de misma dimensión)

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

- $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$ • $tr(A^t) = tr(A)$
- $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

<u>Ejercicio</u>: hacer una demostración de cada propiedad (Ej 11 P1).
Para la del producto usar definición del producto.

3) Una matriz A cuadrada se dice simétrica si es igual a su traspuesta.
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es simétrica si $A = A^t$.

<u>Propiedad</u>: $A \cdot A^t$ y $A^t A$ son simétricas

Ejercicio: hacer una dem. de eso (ej

Hasta acá fue la clase 4.

Matriz identidad e inversa

$$Id_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$$

$$Id_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

<u>Inversa</u>: Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada, A se dice inversible si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A \cdot B = Id_{n\times n} = B \cdot A.$$

En este caso la matriz B es única, se la llama inversa de A y se la nota por A^{-1}.

¿Como se busca la inversa de una matriz?

Buscamos B: $A \cdot B = Id_{n\times n}$.

Si miramos esta igualdad por columna, buscamos B:

$C_1(A\cdot B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $A \cdot \underbrace{C_1(B)}_{} = e_1^t$

buscamos vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

es decir, $C_1(B)$ es una solución de

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_1^t$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}\right)$$

Para la segunda columna

$$C_2(A\cdot B) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \text{ es decir } A\cdot \underbrace{C_2(B)}_{\text{buscamos vector } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}} = e_2^t$$

es decir, $C_2(B)$ es una solución de

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = e_2^t$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}\right).$$

y así .... para la columna n:

$$C_n(A\cdot B) = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ es decir } A\cdot \underbrace{C_n(B)}_{\text{buscamos vector } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}} = e_n^t$$

es decir $C_n(B)$ es una solución de

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = e_n^T$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Es decir, tenemos que resolver n- sistemas lineales $A.X = e_i$ con $i = 1 \dots n$. Escribimos todo junto

$$\left(\begin{array}{c|cccc} A & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$ de esta manera

cuando terminemos de triangular, si llegamos a:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

↳ Acá tendremos la columna n de B que buscábamos.

acá tendremos la columna 1 de B que buscábamos

$\Rightarrow$ esa $B = (b_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ es la inversa A^{-1} buscada.

Si en cambio al hacer eliminación Gaussiana llegamos a una fila de ceros del lado izquierdo, tendremos que no existe la B buscada y por lo tanto la matriz A no es inversible.

Inversa a derecha y rango

Hasta aquí mostramos que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si existe solución de $Ax = b$ para cualquier $b \in \mathbb{K}^n$, entonces podemos construir $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $A \cdot B = Id_{n\times n}$.

Pero sabemos que existe solución única de $Ax=b$ para cualquier b es si y solo si al hacer operaciones permitidas de fila llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ escalonada que no tiene ninguna fila de ceros. O sea

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{con } \tilde{a}_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Esto nos dice que

$$rg(\tilde{A}) = \dim \langle F_1(\tilde{A}), \dots, F_n(\tilde{A}) \rangle = n \text{ y}$$

como $\langle F_1(A), \dots, F_n(A) \rangle = \langle F_1(\tilde{A}), \dots, F_n(\tilde{A}) \rangle$ estos subespacios deben tener misma dim con lo cual

$$rg(A) = \dim \langle F_1(A), \dots, F_n(A) \rangle = n$$

luego, vimos que: Dado $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ Existe $B \in \mathbb{k}^{n \times n}$: $A \cdot B = Id_{n \times n}$ si y solo si $rg(A) = n$.

Veamos ahora que si existe B: $AB = Id_{n \times n}$ entonces existe C : $C \cdot A = Id_{n \times n}$ y además $B = C = A^{-1}$.

Supongamos que pudimos encontrar B: $AB = Id_{n\times n}$ (con la técnica que planteamos arriba) $\Rightarrow rg(A) = n$

Veamos que existe C: $C \cdot A = Id_{n\times n}$.

Buscamos C: $C \cdot A = Id_{n\times n} \Rightarrow$ mirando ahora operaciones de fila, debe ser

$$F_i(CA) = F_i(C) \cdot A = e_i$$

$\Rightarrow$ resolvemos los sistemas lineales:

$$\underset{\sim}{x} \cdot A = e_i$$

$x \in \mathbb{R}^{1\times n}$ será la fila i de C

que trasponiendo: $A^t \, x^t = e_i^t$

y como $rg(A^t) = rg(A) = n$ vemos que debe tener única solución para cada i y entonces podemos construir C: $C A = Id_{n\times n}$

Tenemos entonces $A \cdot B = Id$ y $C \cdot A = Id$

$\Rightarrow$ multiplicando la 1ª ec. por C a izquierda nos queda

$$C\cdot(AB) = C\cdot Id \Rightarrow \underbrace{(C\cdot A)}_{\substack{\shortparallel \\ Id}}\cdot B = C$$

$$\Rightarrow \quad B = C.$$

luego mostramos lo que queríamos.

Además, podemos concluir que

A inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$.

<u>Relación entre sistemas lineales e inversa:</u>

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$

Son equivalentes:

1) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para un b particular

2) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo b.

3) A es inversible.

Dem:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea b fijo, al hacer eliminación de Gauss a la matriz ampliada $(A|b)$ llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ donde $\tilde{A}$ no tiene ninguna fila de ceros. De hecho al ser A cuadrada, llegamos a una matriz triangular inferior (con ceros debajo de la diagonal) y elementos de la diagonal no nulos.

Pero esto es independiente de quién sea el b que tome. Luego para cualquier b tendremos lo mismo.

2) $\Rightarrow$ 3).

Como hicimos antes, si tomamos $Ax = e_i$ y resolvemos, cada solución única de este sistema es la columna i de la matriz inversa.

3) $\Rightarrow$ 1) Si A es inversible $\Rightarrow \exists A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id_{n \times n}$$

luego $x = A^{-1} b$ es una solución de $Ax = b$ ya que $A \cdot (A^{-1} b)$

$$= (A A^{-1}) \cdot b = Id_{n \times n} \cdot b = b.$$

Además es única ya que si x es solución de manera que $Ax = b$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1} (A x)}_{} = A^{-1} \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1} b$$, es decir

x debe ser $A^{-1} \cdot b$.

Determinante:

Queremos definir una función

$$G : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

que me diga si una matriz es inversible o no. Por ej. serviría algo así:

$G(A) \neq 0 \iff A$ no inversible.

Como ya sabemos la función

$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

es lo que nos sirve ya que

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ es inversible}$$

<u>Recordemos:</u>

1. $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2. $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{\text{por fila 1}}{=}$

$$a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

En general se define recursivamente

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$$

para cualquier $i = 1 \dots n$, donde

$A(i|j)$ = submatriz de A resultante de quitar fila i y columna j.

Este es el desarrollo por la fila i. Se puede hacer también por columna.

Propiedades del determinante:

1) $\det(Id_{n\times n}) = 1$

2) $$\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

3) $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

4) $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = 0.$

A las propiedades 2) 3) y 4) se las llama multilineal alternada por filas.

Se puede definir lo mismo por columnas.

Se puede probar que det es la única aplicación $G: \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ que satisface 1), 2), 3), 4).

Con esas propiedades alcanza para detectar si una matriz en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible o no ya que:

$$A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ no inversible}$$

$$\Updownarrow$$

$$rg(A) < n$$

$$\Updownarrow$$

alguna fila de A se escribe como comb. lineal de las otras

$$\Updownarrow \text{ usando propiedades}$$

$$\det(A) = 0.$$

Idea de esto último: Si $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ y por ejemplo $F_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_i$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_i \end{pmatrix} \underset{\text{Prop}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{pmatrix}}_{=0}$$

porque en $\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{pmatrix}$ ⇝ acá está F_i con $i = 1 \dots n-1$ se repite una fila

luego $\det(A) = 0$.

Otras propiedades del det:

- Si A es triangular superior, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(basta elegir por columna 1 en cada paso).

- Lo mismo si A es triangular inferior,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & a_{nn} \\ a_{2n} & \cdots & \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- $\det(A) = \det(A^t)$.

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ si A es inversible.

<u>Proposición</u>: A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow$) Si A es inversible $\Rightarrow$ existe

A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = Id$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

es equivalente a probar que

A no inversible $\Rightarrow \det A = 0$

Si A no es inversible $\Rightarrow rg(A) < n$

$\Rightarrow$ existe una fila que es combinación lineal de las otras,

supongamos sin pérdida de generalidad que $F_n = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$

$$\Rightarrow \det(A) = \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por propiedades 2) y 3)

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{pmatrix}}_{=0}$$

Acá está F_i

$=0$ para todo i, ya que para cada i entre 1 y $n-1$, esa fila ya está repetida encima.

por propiedad 4)