Algunos resultados teóricos y sus demostraciones.

Dado $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$, definimos

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

si lo factorizamos:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los autovalores de A

$\lambda_i \in \mathbb{k}$, $r \leq n$ y $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = gr(\chi_A) = n$.

Si $E_{\lambda_i} = Nu(\lambda_i I - A)$, por definición de autovalor, $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$.

Lema: $\dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i = mult(\chi_A, \lambda_i)$

Para esto veamos lo siguiente:

Sea λ un autovalor de $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ con multiplicidad de λ como raíz en χ_A igual a α. ($\chi_A(x) = (x-\lambda)^{\alpha} \cdot P(x)$ con $P(\alpha) \neq 0$)

Entonces $\dim E_\lambda \leq \alpha = mult(\chi_A, \lambda)$

Dem:

Para esta demo vamos a usar que si $B = C.MC^{-1}$ con $C \in \mathbb{k}^{n\times n}$ inversible B y $M \in \mathbb{k}^{n\times n}$, entonces

$$\chi_B(\lambda) = \chi_M(\lambda).$$

Esto es porque

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - CMC^{-1})$$

$$= \det(C.\lambda I C^{-1} - CMC^{-1})$$

Escribo $\lambda I = \lambda I.CC^{-1}$
$= C.\lambda I C^{-1}$

$$= \det(C.(\lambda I - M)C^{-1})$$

$$= \underbrace{\det(C)}_{\text{nro} \neq 0}.\underbrace{\chi_M(\lambda)}_{\text{polinomio}}.\underbrace{\det(C^{-1})}_{\frac{1}{\det C}}$$

$$= \chi_M(\lambda)$$

Probemos ahora que $\dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Tomemos $B_\lambda = \{v_1, \dots, v_s\}$ una base de $E_\lambda = Nu(\lambda I - A)$ (es subespacio de $\mathbb{K}^n$)

Queremos ver que $s = \dim E_\lambda \leq \alpha$

Completamos a una base de $\mathbb{K}^n$

$$B = \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\} \text{ base de } \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow |T_A|_{BB} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 \cdots & 0 & \\ & \ddots & 0 & M \\ 0 & \cdots 0 & \lambda & \\ \hline & 0 & & N \end{array}\right)$$

es de $s \times s$

para alguna $M \in \mathbb{K}^{s \times n}$, $N \in \mathbb{K}^{n-s \times n-s}$

Como $A = [T_A]_{EE} = C(B,E)\,[T_A]_{BB}\,C(E,B)$

por lo visto antes $\chi_A(x) = \chi_{[T_A]_{BB}}(x)$

$$= \det\left(x \cdot I_{n\times n} - [T_A]_{BB}\right)$$

$$= (x-\lambda)^s \cdot Q(x)$$

$Q(x)$ podría tener (o no) a λ como raíz

$\Rightarrow$ mult (χ_A, λ) es por lo menos s

$$\Rightarrow \quad \alpha \geq s. \qquad \blacksquare$$

A partir de los resultados anteriores:

<u>Proposición</u>: Dada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sus autovalores y $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda-\lambda_r)^{\alpha_r}$

Para cada $i = 1 \dots r$ tenemos

$E_{\lambda_i} = Nu(\lambda_i I - A) = \{v \in \mathbb{k}^n : Av = \lambda_i v\}$

(que es un subespacio de $\mathbb{k}^n$) y

B_i una base de E_{λ_i}. Luego,

A es diagonalizable si y solo si

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r \text{ es una base de } \mathbb{k}^n.$$

Esto último equivale a decir:

A es diagonalizable si y solo

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

<u>Corolario</u>: Dada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$, si A tiene n autovalores distintos en $\mathbb{k}$, entonces A es diagonalizable.

<u>OBS</u>: En este caso $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1) \cdots (\lambda-\lambda_n)$ con $mult(\chi_A, \lambda_i) = 1$.

Algunas buenas propiedades de matrices diagonalizables:

Dado $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable en $\mathbb{K}$

$\Rightarrow \exists$ $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible y $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonal tal que

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1} \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

1) Potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = C \cdot D \cdot \underbrace{C^{-1} \cdot C}_{Id} \cdot D \, C^{-1}$$

$$= C \cdot D^2 \, C^{-1} = C \cdot \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^2 \end{pmatrix} C^{-1}$$

Veamos que $A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$, por inducción

$k = 1$ ✓

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Si $A^k = C \cdot D^k C^{-1}$ veamos que $A^{k+1} = C \cdot D^{k+1} C^{-1}$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = C D^k \underbrace{C^{-1} C}_{Id} D \, C^{-1} = C D^{k+1} C^{-1} \checkmark$$

$$\Rightarrow A^k = C \cdot \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

2) Potencias de A en autovectores.

Dado v autovector de autovalor λ entonces:

$$Av = \lambda v$$

$$A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda \cdot \lambda v$$

$$\Rightarrow \quad A^2 v = \lambda^2 v$$

Inductivamente, podemos probar que $A^k v = \lambda^k v \quad \forall\ k \geq 1$.

(Se los dejo como ejercicio).

3) Potencias de A en un vector cualquiera

Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fijo, queremos ahora calcular $A^k \bar{x}$. Para esto podemos evitar calcular la matriz C.

Hacemos lo siguiente:

Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, lo escribimos como combinación lineal de los autovectores.

Sea $B = \{v_1 \dots v_n\}$ base de autovectores y $\lambda_1 \dots \lambda_n$ los autovalores correspondientes de manera que $A v_i = \lambda_i v_i$.

Escribimos $\bar{x} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow A^k \bar{x} = A^k(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

$$= A^k(\alpha_1 v_1) + \dots + A^k(\alpha_n v_n)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{A^k v_1} + \dots + \alpha_n \underbrace{A^k v_n}$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda^k v_n.$$

2) Determinante:

$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$, por propiedades del det

$$\det(A) = \det(C \cdot D C^{-1}) = \det C \cdot \det D \cdot \det(C^{-1})$$

$$= \det C \cdot \det D \cdot \underbrace{(\det C)^{-1}}_{= \frac{1}{\det C}}$$

$$= \det D$$

(recordar q' C es inversible $\Rightarrow \det C \neq 0$)

Probamos además:

<u>OBS</u>: A inversible si y solo si D es inversible

3) Inversa: Si A es inversible ($\Rightarrow$ D es inversible)

Como $A = C D C^{-1} \Rightarrow A^{-1} = C \cdot D^{-1} C^{-1}$

$$= C \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} C^{-1}$$

4) Interpretación geométrica:

Vimos en clase 8 (con el ejemplo) que

si $A = C D C^{-1} = C(B,E) [T_A]_{BB} C(E,B)$

con lo cual hacer $A \bar{x}$ consiste en

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de autovectores y $[T_A]_{BB} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ con d_i los autovalores

$C(E,B)\,\bar{x}$: escribimos a $\bar{x}$ en coordenadas en la base $B = [\bar{x}]_B$

$$[T_A]_{BB}\, C(E,B)\, \bar{x}$$

$$= [T_A]_{BB}\, [\bar{x}]_B$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ d_n \alpha_n \end{pmatrix}$$

reescalamos cada una de esas coordenadas con el autovalor correspondiente

donde $[\bar{x}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

y $[T_A]_{BB} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$C(B,E)[T_A]_{BB}\, C(E,B)\, \bar{x}$: volvemos a escribir lo obtenido a la base canónica

$$= d_1 \alpha_1 v_1 + \dots + d_n \alpha_n v_n.$$