Independencia lineal, bases y dimensión:

Empecemos con un ejemplo:

Sea $S = \langle (1,1,0), (0,1,-1), (2,1,1) \rangle$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ ev.

Nos preguntamos:

¿Este conjunto de generadores de S es minimal? Es decir, puedo sacar alguno de los generadores y que solo 2 vectores de ellos generen el mismo S?

Vemos que $(2,1,1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)\cdot(0,1,-1)$

y por lo tanto

$$S = \langle (1,1,0), (0,1,-1) \rangle.$$

¿Hay otra elección?

Notemos que $(0,1,-1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)(2,1,1)$

y por lo tanto también

$$S = \langle (1,1,0), (2,1,1) \rangle$$

¿Cuándo puedo sacar un generador sin cambiar el subespacio?
¿Qué caracteriza esta propiedad?

Notemos que en el primer caso, si

$$(2,1,1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)\cdot(0,1,-1)$$

entonces,

$$2(1,1,0) + (-1)(0,1,-1) + (-1)(2,1,1) = (0,0,0)$$

Es decir, pudimos escribir al $(0,0,0)$ como combinación lineal de
$(1,1,0)$, $(0,1,-1)$ y $(2,1,1)$

Y como puedo escribir al $(0,0,0)$ como comb. lineal de esos tres, vemos que podemos despejar a cualquiera de ellos como comb. lineal de los otros dos, por ej:

$(1,1,0) = \frac{1}{2}(0,1,-1) + \frac{1}{2}(2,1,1)$.

<u>Definición</u>: Dado V un $\mathbb{K}$-e.v un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ se dice **l.i. (linealmente independiente)** si <u>no</u> se puede escribir al $\bar{0} \in V$ como combinación lineal no nula de los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Esto es lo mismo que decir que la única forma de escribir

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

es tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

¿Qué será que dos vectores sean **l.d (linealmente dependientes)**?

Esto es que <u>no</u> sean l.i. Es decir, decimos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un **conjunto l-d.** si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

no todos nulos de manera que

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Ejemplos:

1) Decidir si el conjunto de vectores $\{\underbrace{(2,1,1)}_{v_1}; \underbrace{(1,1,0)}_{v_2}; \underbrace{(0,1,-1)}_{v_3}\}$ es l.i.

a) Planteamos una comb. lineal del $(0,0,0)$

$$\alpha(2,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma \cdot 0 &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta \cdot 0 - \gamma &= 0 \end{aligned}$$

y vemos si existe solución (α, β, γ) no nula (en este caso serían l.d.) o si la única solución (α, β, γ) es $(0,0,0)$ (en este caso serían l.i).

Matricialmente:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notar que esta matriz corresponde a poner los vectores dados como <u>columnas</u>.

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2$

$F_3 - \frac{1}{2}F_1 \to F_3$

$F_3 + F_2 \to F_3$

Esto me dice que el sistema es compatible indeterminado, es decir, que existen infinitas soluciones (en particular infinitas no nulas). Luego el conjunto es l.d. Además podemos dar alguna solución explícita.

b) Otra forma de chequear si un conjunto es l.d (sin calcular explícitamente) es construir una matriz con los vectores como <u>filas</u>.

Si al triangular la matriz con operaciones de fila (que involucran hacer combinaciones lineales de ellas) aparece una fila de ceros es porque esos vectores filas son l.d.

Ej:

$$\begin{array}{c} v_1 \leftarrow \\ v_2 \leftarrow \\ v_3 \leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 - \frac{1}{2} F_1 \to F_2$ $\quad$ $F_3 - 2F_2 \to F_3$

Esto me dice (nuevamente) que el conjunto $\{(2,1,1), (1,1,0), (0,1,-1)\}$ es l.d.

2) Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$ es l.i.

Usamos opción a) y planteamos la matriz que tiene a los vectores como columna:

$f_2 - F_1 \to F_2$ $\quad$ $f_3 - f_2 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene única solución $(0,0,0)$ y por lo tanto el conjunto de vectores es l.i.

Vectores l.i y escritura única.

Ejemplos:

Retomemos el conjunto l.d.

$$\{(2,1,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$$

y queremos escribir a $(4,2,2)$ como comb. lineal de ellos. ¿Se puede? ¿Esa escritura es única?

Matricialmente, buscamos soluciones de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que hay infinitas soluciones

De hecho, vemos también que habrá ciertos vectores que <u>no</u> se podrán escribir como combinación lineal de ellos.

¿Por qué?

Si tomamos ahora el conjunto l.i.

$$\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$$

y tomamos un vector cualquiera $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ siempre se podrá escribir (a,b,c) como combinación lineal de los 3 vectores l.i. y esa escritura es única. Veamos por qué.

Planteamos la matriz ampliada correspondiente al sistema que viene de buscar soluciones (α,β,γ) de:

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,1,0)=(a,b,c),$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \underset{F_2 - F_1 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 - F_2 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-b+a \end{array}\right).$$

Vemos que este sistema es compatible determinado independientemente de (a,b,c).

Es decir, dado cualquier $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ existen únicos (α, β, γ) tales que

$$\alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \gamma\,(2,1,0) = (a,b,c).$$

¿Esto vale solo en $\mathbb{R}^3$? ¿Y si estamos en un $\mathbb{K}$- ev V cualquiera?

Vale la

<u>Proposición</u> (escritura única).

Sea V un $\mathbb{K}$-ev y $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto l.i. Entonces cualquier $w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$.

<u>Dem</u>: Supongamos que

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \quad (1)$$

y

$$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \quad (2)$$

Si vemos que $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i = 1, \dots, m$, habremos probado lo que queremos.

Restando (1) y (2), tenemos que

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) \cdot v_m$$

Pero como $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto l.i tenemos que $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_m - \beta_m = 0$ ⌧

Bases y dimensión

Vimos que el conjunto

$$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es un conjunto l. i.

Y también vimos que cualquier $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal (de forma única) de ellos. Es decir el conjunto B "genera todo $\mathbb{R}^3$".

Estas dos propiedades son las que caracterizan una base. En este ejemplo

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

<u>NOTA</u>: B es un conjunto, no es un subespacio.

<u>Definición</u>: Sea V un $\mathbb{K}$-eV. El conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ se dice que es una base de V si:

a) $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ($\{v_1, \dots, v_m\}$ "generan" cualquier elemento de V como comb. lineal de ellos).

b) $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto l.i.

Por lo visto en el ejemplo anterior:

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

Algunas preguntas que nos podemos hacer:

- ¿Habrá otras bases de $\mathbb{R}^3$ diferentes?
- ¿Todas tendrán la misma cantidad de elementos?
- Dado un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿hay un conjunto minimal

(en el sentido de tener la menor cantidad de elementos) que siga generando a $\mathbb{R}^3$? ¿Ese conjunto "minimal" será l.i? Es decir, dado un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿me puedo quedar con un subconjunto de ellos que sea una base de $\mathbb{R}^3$?

— Ahora dado un conjunto l.i de $\mathbb{R}^3$ formado por dos vectores ¿pueden ser una base? ¿puedo extenderlo a una base agregando los vectores que haga falta?

Todas estas preguntas nos las podemos hacer en $\mathbb{R}^n$ o en cualquier $\mathbb{K}$-espacio vectorial que sea finitamente generado (es decir, generado por finitos elementos).

Respondamos esas preguntas:

<u>Teorema:</u> Sea V un k-e.v. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces cualquier otra base B' de V tiene la misma cantidad de elementos. A esa cantidad de elementos se lo llama **dimensión de V**.

Para probar este teorema veamos antes qué relación hay entre

- cantidad de elementos de un conjunto de generadores de V

y

- cantidad de elementos de un conjunto l.i de V.

(Ya veremos para qué nos sirve esto....)

Lema: Dado V un k-ev. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de generadores y $\{w_1, \dots, w_s\}$ es un conjunto li, entonces $r \geq s$.

Dem:

Cada w_i se escribe como comb. lineal de $\{v_1, \dots, v_r\}$ porque son generadores:

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{1r} v_r \qquad \alpha_{ij} \in k$$

$$\vdots$$

$$w_s = \alpha_{s1} v_1 + \dots + \alpha_{sr} v_r$$

Notemos que, si probamos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1r} \end{matrix}} & \begin{matrix} \alpha_{21} \\ \\ \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \\ \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \alpha_{s1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{sr} \end{matrix} \end{pmatrix} \in k^{r \times s}$$

que tiene en sus columnas los escalares de la combinación lineal de cada w_i, tiene única solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la solución nula,

entonces debe ser $\underline{r \geq s}$.

Si fuera $r < s$ tendría más incógnitas que ecuaciones con lo cual no puede tener solución única.

Sea $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ solución del sistema homogéneo, entonces

$$\alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{s1}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i1}\beta_i = 0$$

$$\alpha_{12}\beta_1 + \dots + \alpha_{s2}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i2}\beta_i = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{1r}\beta_1 + \dots + \alpha_{sr}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ir}\beta_i = 0.$$

Escrito todo junto: para $j = 1, \dots, r$ $\quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i = 0$

Entonces $\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i\right)\cdot v_j = 0.$

$\Rightarrow$ si sumo todo (sumo en j)

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i\right)\cdot v_j = 0$$

Damos vuelta el orden de la suma

$$\sum_{i=1}^{s}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j\right)}_{w_i}\cdot\beta_i = 0$$

y como $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es un conjunto l. i, obtenemos que

$$\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0.$$

Podemos demostrar ahora el Teorema:

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un base de V.

Tomamos $\tilde{B}$ otra base de V

$\tilde{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$.

Tanto B como $\tilde{B}$ son conjuntos de generadores de V y son conjuntos l.i.

Como B es conj de generadores

y $\tilde{B}$ es conj li

$\Rightarrow n \geq m$.

Como $\tilde{B}$ es conj de generadores

y B es un conj li

$\Rightarrow m \geq n$.

Luego $m = n$. $\blacksquare$

Como consecuencia de los resultados anteriores vemos que si V es un k-ev. de dimensión n, entonces:

- Un conjunto S de elementos de V que tiene menos de n elementos <u>no</u> puede generar todo V.
- Si S es un conjunto de n elementos de V que es l.i, entonces es base de V.
- Un conjunto S de más de n elemento no puede ser l.i.

<u>Ejercicio:</u>
Pensar una demostración de cada enunciado.

<u>Ejemplos:</u>

1) $\{(1,0)(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, se la llama base canónica de $\mathbb{R}^2$

2) $\{(1,1),(1,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

3) Llamamos $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$

a los elementos de la base canónica

En general, llamamos $e_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ ó $e_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$.

y $e_i \in \mathbb{R}^n$ con $1 \leq i \leq n$ es un vector que tiene 1 en el lugar i-ésimo y 0 en el resto

4) $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que **dado un conjunto finito de generadores siempre me puedo quedar con un base.**

<u>Proposición</u>: Sea V un k-ev de dimensión n y S un conjunto de generadores de V de m elementos con $m > n$, entonces podemos extraer un subconjunto B de n elementos de S que sean una base.

Dem: S no puede ser un conjunto li (porque si lo fuera sería una base con distinta cantidad de elementos que la dimensión n).

Llamemos $S = \{w_1, \ldots, w_m\}$.

Como es l.d., existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{k}$ no todos nulos:

$$0 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m.$$

Como algún $\alpha_i \neq 0$, suponemos $\alpha_m \neq 0$

$$w_m = \frac{-\alpha_1 w_1 - \cdots - \alpha_{m-1} w_{m-1}}{\alpha_m}$$

y por lo tanto

$\{w_1, \ldots, w_{m-1}\}$ genera lo mismo que $\{w_1, \ldots, w_m\}$, es decir, V.

Si todavía $m-1 > n$, podemos repetir este proceso hasta quedarnos con un conjunto de n elementos que generan V y por lo tanto resulta ser una base.

En $\mathbb{R}^n$, ¿cómo hacemos este procedimiento?

En $\mathbb{R}^3$: Dado

$$S = \{(1,2,3), (2,4,6), (1,1,0), (0,0,1), (1,1,2)\}$$

conjunto de generadores de $\langle S \rangle$

extraer una base de $\langle S \rangle$.

Ponemos los vectores como filas de una matriz y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$F_2 - 2F_1 \to F_2$

$F_3 - F_1 \to F_3$ (2)

$F_5 - F_1 \to F_5$ (1)

Esto me dice que $(2,4,6)$ es comb. lineal de los otros. De hecho $F_2 = 2F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_5 - F_3 \to F_5$ ③ $\qquad F_5 - 2F_4 \to F_5$ ④

Esto me dice que $(1,1,2)$ es comb. lineal de los otros.

Si rastreamos las operaciones que hicimos

① $(1,1,2)-(1,2,3)=(0,-1,-1)$

② $(1,1,0)-(1,2,3)=(0,-1,-3)$

③ $(0,-1,-1)-(0,-1,-3)=(0,0,2)$

④ $(0,0,0)=(0,0,2)-2\cdot(0,0,1)$

$$= (0,-1,-1)-(0,-1,-3)-2\cdot(0,0,1)$$

$\downarrow$ paso ③

$$\underset{\text{pasos ① y ②}}{=} (1,1,2)-(1,\cancel{2},3)-(1,1,0)$$

$$+ (1,\cancel{2},3) - 2\cdot(0,0,1)$$

$$\Rightarrow (0,0,0) = (1,1,2) - (1,1,0) - 2(0,0,1)$$

$$\Rightarrow (1,1,2) = (1,1,0) + 2(0,0,1).$$

De todo esto concluimos que

$$\{(1,2,3), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

es una base de $\langle S \rangle$ y como

$\dim \langle S \rangle = 3$ y $\langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

debe ser $\langle S \rangle = \mathbb{R}^3$.

A continuación veremos que **dado un conjunto li en V un k-ev. de dimensión finita, siempre se puede extender a una base.**

<u>Proposición</u>: Sea V un k-ev. de dimensión n y sea $L = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto l.i (luego $r \leq n$),

entonces existen $w_{r+1}, \dots, w_n \in V$ de manera que

$$B = \{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\} \text{ es}$$

una base de V.

Dem:

Si $r = n$, listo, L ya era una base.

Si $r < n$, entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ no es base y por lo tanto, no generan V.

Entonces existe $w_{r+1} \in V$:

$$w_{r+1} \notin \langle v_1, \dots, v_r \rangle$$

y por lo tanto

$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}\}$ es un conjunto l.i.

Inductivamente, si

$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}\}$ es una base, listo.
$(r+1 = n)$

Si no, existe $w_{r+2} \in V$:

$w_{r+2} \notin \langle v_1, \dots, v_r, w_{r+1} \rangle \dots\dots$

<u>Corolario</u>: Todo e.v. de dimensión finita admite una base.

<u>Ejemplo</u>: Dado el conjunto

$L = \{(1,1,1,0), (1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

mostrar que L es un conjunto l.i y extender a una base.

Dejo como ej mostrar que es un conjunto l.i.

Podríamos "a ojo" agregar dos vectores pero tiene sus riesgos y habría que verificar que la propuesta es correcta.

Si no, más sistemáticamente, para extender L a una base de $\mathbb{R}^4$, hacemos eliminación Gaussiana a la matriz que tiene los elementos de L como filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice por lo pronto que

$$\langle (1,1,1,0)(1,0,1,0) \rangle = \langle (1,1,1,0), (0,-1,0,0) \rangle$$

y queremos agregar dos vectores más de manera de tener una base.

Por lo hecho, vemos que alcanza con agregarlo al conjunto

$$\{(1,1,1,0)\,(0,-1,0,0)\}$$

De la eliminación Gaussiana vemos fácilmente que si agregamos e_3 y e_4 tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada que nos dice que los vectores

$$\{(1,1,1,0)\,(1,0,1,0),\,(0,0,1,0)\,(0,0,0,1)\}$$

forman una base de $\mathbb{R}^4$ que contiene a L.

Espacios vectoriales de dimensión finita

Veamos otros ejemplos de espacios vectoriales de dimensión finita.

— $\mathbb{R}_4[x]$ como $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{R}_4[x] = \{$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a $4\}$

$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, \ldots, 4\}$

Acá el 0 en $\mathbb{R}_4[x]$ es el polinomio

$$0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$$

$\Rightarrow$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ es una base de $\mathbb{R}_4[x]$

OJO! Aquí al mostrar que $\mathcal{B}$ es li consideramos una combinación lineal de $\mathcal{B}$ igualada al polinomio 0 y queremos ver que la única posibilidad es que todos los escalares sean 0. Veamos eso:

$$0 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d\, x^3 + e \cdot x^4$$

Pero sabemos que dos polinomios son iguales si y solo si los coeficientes de términos de igual grado coinciden. Luego $a=b=c=d=e=0$ ya que el polinomio 0 es

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 .$$

— $\mathbb{C}^{2\times 3}$ como $\mathbb{C}$-ev.

$\mathbb{C}^{2\times 3} = \{$ matrices de 2×3 con coeficientes en $\mathbb{C}\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{C}^{2\times 3}$ como $\mathbb{C}$-ev.

— Pensar qué pasa con $\mathbb{C}$ como

$\mathbb{R}$- ev.

$$\mathbb{C} = \{ a+bi,\ a,b \in \mathbb{R} \}.$$

Coordenadas

Volvamos al ejemplo de $\mathbb{R}_4[x]$

Por resultado anterior, cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ admite una escritura única como combinación lineal de los elementos de la base

$$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\},$$ es

decir

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

es decir

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ caracteriza de forma única a $P(x)$ con respecto a la base B.

Escribimos

$$P(x) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)_B$$

y se llaman las coordenadas de $P(x)$ en la base B.

<u>Ej</u>: Tomamos en $\mathbb{R}_4[x]$ a

$$P(x) = 2x^2 - 3x^3.$$

Para la base $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$$P(x) = (0, 0, 2, -3, 0)_B.$$

Pero para la base

$$B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2, x^3, x^4\}$$

(chequear que es una base de $\mathbb{R}_4[x]$)

planteamos

$$2x^2 - 3x^3 = a \cdot 1 + b(1+x) + c(1+x+x^2) + dx^3 + ex^4$$

$\Rightarrow$ distribuyendo y agrupando

$$2x^2 - 3x^3 = a+b+c+(b+c)x + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

de donde

$$a+b+c=0, \quad b+c=0, \quad c=2, \quad d=-3, \quad e=0$$

$$\Rightarrow \quad a=0, \quad b=-2, \quad c=2, \quad d=-3, \quad e=0$$

es decir

$$P(x) = (0, -2, 2, -3, 0)_{B'}$$

<u>Ojo!</u> Importa el orden de los vectores de la base.

<u>En general</u>: Dado V un k-ev de dimensión n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Luego, cualquier $w \in V$ admite una escritura única como combinación lineal de los elementos de la base B

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Al vector en k^n: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se lo llama coordenadas de w en la base $\mathcal{B}$ y se escribe:

$$w = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}.$$