# Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2023

## Práctica N° 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución es única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando np.linalg.solve.

(a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 & = & 2i \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de $k$ para los cuales admite solución no trivial. Para esos $k$, resolverlo.

**Ejercicio 3.** En `Python`, importar la librería numpy con el siguiente comando: import numpy as np, y probar los siguientes comandos:

```python
import numpy as np

1 + 3
a = 7
b = a + 1
print("b = ", b)

# Vectores
v = np.array([1,2,3,-1])
w = np.array([2,3,0,5])
print("v + w = ", v + w)
print("2*v = ", 2*v)
print("v**2 = ", v**2)

# Matrices (ejecutar los comandos uno a uno para ver los resultados)
A = np.array([[1,2,3,4,5],[0,1,2,3,4],[2,3,4,5,6],[0,0,1,2,3],[0,0,0,0,1]])
print(A)
A[0:2,3:5]
A[:2,3:]
A[[0,2,4],:]
ind = np.array([0,2,4])
```

```
A[ind,ind]
A[ind,ind[:,None]]

# Numeros complejos
1j*1j
(1+2j)*1j
```

**Ejercicio 4.** Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar el resultado obtenido usando `Python`. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt #libreria para graficar

# ...
# Aca, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a,b y c.
# ...

xx = np.array([1,2,3])
yy = np.array([1,2,0])
x  = np.linspace(0,4,100) #genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f  = lambda t: a*t**2+b*t+c #esto genera una funcion f de t.
plt.plot(xx,yy,'*')
plt.plot(x,f(x))
plt.show()
```

**Ejercicio 5.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0; \ x - y = 0\}$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \ tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : \ x_1 + x_2 - ix_4 = 0, \ ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

**Ejercicio 6.** Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

**Ejercicio 7.** Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de $V$, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle \qquad T = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$

iv) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \ \forall\, i, j\}$ $\qquad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

v) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle$ $\qquad T = \{x \in \mathbb{C}^3 :\ (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

**Ejercicio 8.** Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre $K$. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

i) $\{(1, 4, -1, 3)\,,\,(2, 1, -3, -1)\,,\,(0, 2, 1, -5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

ii) $\{(1-i, i)\,,\,(2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

**Ejercicio 9.** Extraer una base de $S$ de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de $S$. Extender la base de $S$ a una base del espacio vectorial correspondiente.

i) $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

ii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 10.** Sean $m$, $n$ y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ satisface que $\boldsymbol{Ax} = 0 \ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = 0$. Deducir que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ satisfacen que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx} \ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$ con $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna $j$-ésima de $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{AB} = (\,\boldsymbol{AB}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{AB}_r)$ (es decir, $\boldsymbol{AB}_j$ es la columna $j$-ésima de $\boldsymbol{AB}$).

**Ejercicio 11.** Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in K^{m\times n}\,;\ \boldsymbol{B} \in K^{n\times r}\,;\ \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}' \in K^{n\times n}\,;\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')^t = \boldsymbol{A}^t + (\boldsymbol{A}')^t$

(b) $(\alpha \boldsymbol{A})^t = \alpha \boldsymbol{A}^t$

(c) $(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t \boldsymbol{A}^t$

(d) $\boldsymbol{AA}^t$ y $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ son matrices simétricas.

(e) $tr(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}) + tr(\boldsymbol{D}')$

(f) $tr(\alpha \boldsymbol{D}) = \alpha tr(\boldsymbol{D})$

(g) $tr(\boldsymbol{DD}') = tr(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})$

**Ejercicio 12.** Calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{(a)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b)}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 13.** Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Cuando sea posible, verificar utilizando `Python`, con el comando np.linalg.inv.

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 14.** Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes operaciones:

(a) Calcular la traza de una matriz.

(b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.

**Ejercicio 15.** Probar las siguientes estimaciones:

*a)* $3n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ *b)* $2n^4 - 5 = \mathcal{O}(n^4)$ *c)* $n^3 - 2n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$

**Ejercicio 16.** Calcular la complejidad de las siguientes funciones de Python utilizando la notación $\mathcal{O}$.

```python
def function1(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            print(i, j)
```

```python
def function2(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n * n):
            print(i, j)
```

```python
def function3(n):
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            print(i, j)
```

**Ejercicio 17.** Para cada una de las siguientes operaciones, estime la cantidad máxima de sumas, multiplicaciones y divisiones que deben realizarse. Exprese el resultado usando la notación de la $\mathcal{O}$.

*a)* sumar dos matrices de $n \times n$,

*b)* multiplicar dos matrices de $n \times n$,

*c)* multiplicar dos polinomios de grado $n$.