Coordenadas y cambio de base

Dado un $\mathbb{K}$-ev, V de dimensión n, se llama **base canónica** al conjunto

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ con } e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde $e_i(j)$ es la j-ésima coordenada del vector e_i.

<u>Ej</u>: en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

y cualquier elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se escribe en la base canónica como:

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

En este caso, decimos que

$$(a,b,c) = (a,b,c)_{\mathcal{E}}.$$

Por ej: $(2,-3,7) = (2,-3,7)_{\mathcal{E}}$

ya que se escribe como $2 \cdot e_1 + (-3) e_2 + 7 \cdot e_3$

Por otro lado, si tomamos la base de $\mathbb{R}^3$

$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (-1,0,2)\}$

y queremos descubrir cómo se escribe $(2,-3,7)$ como combinación lineal de los elementos de B, es decir, buscamos (α,β,γ):

$$(-2,3,7) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(-1,0,2)$$

es decir, buscamos (α,β,γ) solución de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$(2,-3,7) = 14 \cdot (1,1,0) + (-17)(0,1,1) + 12 \cdot (-1,0,2)$$

Esto nos dice que

$$(2,-3,7) = (14, -17, 12)_B$$

y también nos dice que $(14,-17,12)$ es la única solución del sistema $(*)$

Con lo cual

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ nos "cambia"

las coordenadas de $v = (-2, 3, 7)$ en la base $\mathcal{B}$ a las coordenadas en la base $\mathcal{E}$. Por eso a esa matriz se la llama matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$. y se nota

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es la matriz que tiene en sus columnas a la base $\mathcal{B}$.

Dado $v \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \cdot (v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{E}}$$

De esta misma relación, vemos que si me dan $(v)_{\mathcal{B}}$, puedo calcular $(v)_E$ multiplicando

como arriba por $C(B,E)$.

<u>Ej</u>: Dado $(v)_B = (1,5,-2)$

calcular v.

Es decir, me piden $(v)_E$.

Entonces hacemos

$$v = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{C(B,E)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{col 1 de } C(B,E)} + 5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{col 2 de } C(B,E)} + (-2) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{col 3 de } C(B,E)}$$

↓

por el prod. matriz x vector

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones lineales

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$,
vemos que dado

$$v \in \mathbb{K}^n \dashrightarrow \left[A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right]^t \in \mathbb{K}^m$$

con lo cual, podemos pensarlo como una aplicación:

$$T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Acá uso la suma del $\mathbb{K}$ e.v. $\mathbb{K}^n$

Además, vemos que

- $$T_A(v \underset{\mathbb{K}^n}{+} w) = \left[A \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \right]^t$$

Acá uso la suma del $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^m$

$$= \left[A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right]^t + \left[A \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right]^t = T_A(v) \underset{\mathbb{K}^m}{+} T_A(w)$$

- $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n}{T_A(\alpha \cdot v)} = \left[A \cdot \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}\right]^t$

$$= \alpha \cdot \left[A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]^t = \underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m}{\alpha \cdot T_A(v)}$$

A cá uso producto por un escalar de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n$

A cá uso producto por un escalar de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m$

A una función de un $\mathbb{K}$-ev en otro con estas propiedades de "respetar" la estructura de e.v. (manda $+_{\mathbb{K}^n}$ en $+_{\mathbb{K}^m}$ y $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n}{\cdot}$ en $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m}{\cdot}$) se la llama transformación lineal.

<u>Definición</u>: Dados V y W dos $\mathbb{K}$-ev. Una función $f: V \to W$ se la llama transformación lineal si:

1) $f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)$

$$\forall\, v, w \in V$$

y

2) $f(\underset{\mathbb{K}\times V}{\alpha \cdot v}) = \underset{\mathbb{K}\times W}{\alpha \cdot f(v)}$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ v \in V.$$

<u>OBS</u>: $f(0_V) = f(\underset{\mathbb{K}\times V}{0 \cdot v}) = \underset{\mathbb{K}\times W}{0 \cdot f(v)} = 0_W$

<u>Ejemplos</u>:

1) Probar que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2,\ 2x_2)$

es un t.l. ¿Cuál es la matriz de esta t.l?
Les dejo como ej.
Veamos cómo construir la matriz:

- Una forma de verlo es "a ojo" usando producto matricial:

$$f(x_1,x_2)=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right]^t.$$

- Otra opción es usar de nuevo que multiplicar matriz por vector es hacer una comb. lineal de las columnas de la matriz y entonces:

1ro: Sacamos las variables como escalares:

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1+x_2,2x_2)$$
$$=x_1(1,1,0)+x_2(2,1,2)$$

2do: Trasponemos y usamos producto de matriz por vector $\Rightarrow$

$$f(x_1,x_2)=\left[x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right]^t$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]^t.$$

2) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una t.l tal que $f(1,0,0)=(1,2)$ $f(0,1,0)=(2,-3)$ y $f(0,0,1)=(-1,0)$

Vemos que como

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$$

y f debe ser una t.l, entonces

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1f(1,0,0)+x_2f(0,1,0)+x_3f(0,0,1)$$

$$=x_1(1,2)+x_2(2,-3)+x_3(-1,0)$$

$$=(x_1+2x_2-x_3,\ 2x_1-3x_2)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

donde en las columnas de la matriz que determina a esta tl se tienen los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$.

3) Dado $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (-1,0,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una tl:

$$f(1,1,0) = (1,2)$$
$$f(0,1,1) = (3,0)$$
$$f(-1,0,2) = (0,1)$$

entonces $f(0,2,3) = ?$

vemos que

$$(0,2,3) = (1,1,0) + (0,1,1) + (-1,0,2)$$

y como f es tl $\Rightarrow$

$$f(0,2,3) = f(1,1,0) + f(0,1,1) + f(-1,0,2)$$
$$= (1,2) + (3,0) + (0,1)$$

$$= (4,3).$$

En general, ¿sabemos cuánto vale $f(x_1,x_2,x_3)$?

Una opción es escribir a (x_1,x_2,x_3) general en sus coordenadas en la base B y usar que es una tl, como antes.

Les dejo las cuentas....

Vemos cómo se escribe (x_1,x_2,x_3) en la base B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_3 - x_2 + 2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 + 2x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2 + 2x_1)\,(1,1,0) + (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)(0,1,1) + (x_3 - x_2 + x_1)\,(-1,0,2)$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2 + 2x_1)\cdot f(1,1,0) + (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)\cdot f(0,1,1) + (x_3 - x_2 + x_1)\cdot f(-1,0,2)$$

$$= (x_3 - x_2 + 2x_1)\cdot(1,2)$$

$$+ (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)\cdot(3,0)$$

$$+ (x_3 - x_2 + x_1)\cdot(0,1)$$

$$= \Big(x_3 - x_2 + 2x_1 + 3\cdot(-x_3 + 2x_2 - 2x_1),\ 2(x_3 - x_2 + 2x_1) + (x_3 - x_2 + x_1) \Big)$$

$$= (-4x_1 + 5x_2 - 2x_3,\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

esta es la matriz asociada a esta transformación lineal

Valen los siguientes resultados

Como hicimos en el Ejemplo 1:

<u>Observación</u>: Dado $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una t.l.

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

$$= \left[x_1 [f(e_1)]^t + \dots + x_n [f(e_n)]^t \right]^t$$

$$= \left[\left([f(e_1)]^t \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [f(e_n)]^t \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t$$

$$= \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t$$

donde $A = \left(f(e_1)^t \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, f(e_n)^t \right)$

<u>Proposición</u>: Sea V un $\mathbb{k}$-ev y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Podemos definir (en forma unívoca) una tl de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1 \dots n$.

<u>Dem</u>:

Todo $w \in V$ se escribe de forma única en la base B. Si

$$(w)_B = (a_1, \dots, a_n),$$ es decir

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,$$ entonces

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).$$

Imagen, núcleo y teorema de la dimensión.

Dado $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, vimos:

$$Nu(A) = \{ x \in \mathbb{K}^n : A x = \bar{0} \}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

$$Im(A) = \{ A \cdot x, \quad x \in \mathbb{K}^n \}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^m$,

y $\quad Im(A) = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$

$$rg(A) = \dim(Im A).$$

Teorema: Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se tiene que

$$\dim(NU(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n.$$

Dem:

$NU(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Suponemos $\dim NU(A) = r \leq n$,

$\Rightarrow$ existe una base de $NU(A)$

$$B_{NU(A)} = \{u_1, \dots, u_r\}$$

Como $r \leq n$, podemos extender a una base de $\mathbb{K}^n$ con $w_{r+1}, \dots, w_n$, de manera que

$B_{\mathbb{K}^n} = \{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$

es una base de $\mathbb{K}^n$.

Luego, dado $v \in \mathbb{K}^n$,

existen $a_1, \dots, a_n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i$$

$\Rightarrow$

$$A \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{A \cdot u_i}_{= 0} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i A w_i$$

$\Rightarrow \{A w_{r+1}, \dots, A w_n\}$ generan $\operatorname{Im} A$.

Veamos que son l.i., con lo cual tendremos que

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A} = \{ A w_{r+1}, \dots, A w_n \}$ es una base de $\operatorname{Im} A$.

Supongamos existen escalares $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos:

$$\alpha_{r+1} A w_{r+1} + \dots + \alpha_n A w_n = \bar{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$A(\alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n \in \underbrace{Nu(A)}_{= \langle u_1, \dots, u_r \rangle}$$

$$\Rightarrow \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n$$

$$= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r$$

$$\Rightarrow \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + (-\alpha_{r+1}) w_{r+1} + \cdots + (-\alpha_n) w_n = 0$$

es una comb. no nula del 0.

Pero $\{u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ era un conjunto l.i (por ser base) con lo cual llegamos a un absurdo.

Este absurdo provino de suponer que $\{Aw_{r+1}, \ldots, Aw_n\}$ no era l.i.

Luego $\{Aw_{r+1}, \ldots, Aw_n\}$ es una base de $\operatorname{Im} A \Rightarrow$

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{\underbrace{u_1, \ldots, u_r}, \underbrace{w_{r+1}, \ldots, w_n}\}$$

son una base de $NU(A)$

$\Rightarrow \dim NU(A) = r$

$n-r$ vectores que es la misma cantidad que $\dim Im A = n-r$

$$\Rightarrow n = \dim(NU(A)) + \dim(Im(A))$$

$\boxtimes$

<u>Definición:</u> Dados V, W dos $\mathbb{K}$-ev y $f: V \to W$ una t.l.

1) f se dice monomorfismo si f es inyectiva.

2) f se dice epimorfismo si f es sobreyectiva

3) f se dice isomorfismo si f es mono y epi.

<u>Proposición</u>: Dados V, W dos $\mathbb{K}$-ev y $f: V \to W$ una t.l.

1) f es mono si y solo si

$$f(v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$
$$(\mathrm{Nu}\, f = \{0\})$$

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow$) Si $f(v) = 0$, como $f(0) = 0$ y f es mono $\Rightarrow v = 0$.

$\Leftarrow$) Si $f(v) = f(w)$ $\Rightarrow$ $f(v - w) = 0$ $\Rightarrow$ por hip

f t.l.

$$v - w = 0.$$
$$\Rightarrow v = w.$$

2) f es epi si y solo si $\mathrm{Im}\, f = W$

3) Si $V = W = \mathbb{K}^n$. Son equivalentes

i) f es mono

ii) f es epi

iii) f es iso.

Dem: $f = T_A$

i) $\Rightarrow$ ii)

$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es mono

$\Rightarrow \quad \mathrm{Nu}(A) = \{0\}$

Teo dim.

$\Rightarrow n = \dim \mathrm{Im}(A)$

$\Rightarrow \quad T_A$ es sobreyectiva.

ii) $\Rightarrow$ iii)

f es epi $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im}(A) = m$

$\underset{\text{teo dim}}{\Rightarrow}$ $\dim NU(A) = 0$

$\Rightarrow NU(A) = \{0\}$

$\Rightarrow$ f es mono

$\Rightarrow$ f es epi y mono

$\Rightarrow$ f es iso.

iii) $\Rightarrow$ i) ✓