

# Álgebra Lineal Computacional

Números de Máquina

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

1er Cuatrimestre 2023

# Cálculo simbólico y numérico

## Cálculo simbólico

$$x = \sqrt{2}, \quad x^2 = 2$$

## Cálculo numérico

$$x = 1.4142135623730951, \quad x^2 = 2.0000000000000004$$

# Cálculo simbólico y numérico

## Ejemplo

- El número 517.23 en base 10 representa al número:

$$5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

- El número 101.11 en base 2 representa al número:

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

# Bases de numeración

En general todo número  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , puede representarse en una base  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ , de la forma

$$(x)_b = sg(x) \tilde{a}_k \tilde{a}_{k-1} \dots \tilde{a}_0 . \tilde{a}_{-1} \tilde{a}_{-2} \dots$$

donde

- los dígitos verifican  $0 \leq \tilde{a}_i \leq b - 1$
- $sg(x)$  es el signo de  $x$
- numeramos los índices para que el punto se ubique entre  $\tilde{a}_0$  y  $\tilde{a}_{-1}$

La notación dada de  $x$  representa al número

$$x = \tilde{a}_k b^k + \tilde{a}_{k-1} b^{k-1} + \dots + \tilde{a}_0 b^0 + \tilde{a}_{-1} b^{-1} + \tilde{a}_{-2} b^{-2} + \dots$$

# Punto flotante

## Notación normalizada

- La representación anterior no da idea del orden de magnitud
- Versión *normalizada*: se ubica el punto justo a la izquierda de  $\tilde{a}_k$
- Todo  $x \neq 0$  se escribe

$$(x)_b = sg(x) 0 . a_1 a_2 a_3 \dots \times b^e$$

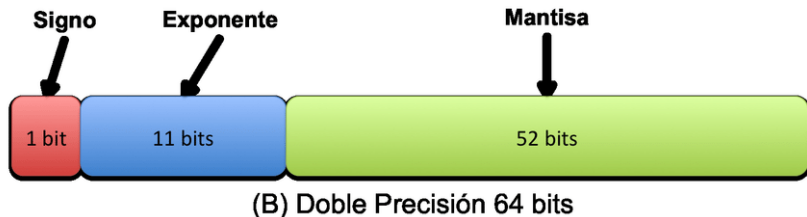
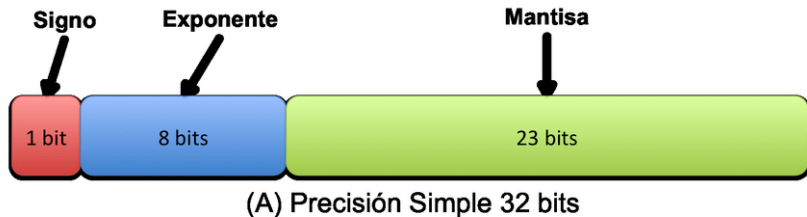
donde  $0 \leq a_i \leq b - 1, a_1 \neq 0$  y  $e \in \mathbb{Z}$

- La expresión  $m = 0 . a_1 a_2 a_3 \dots$  se llama **mantisa** y  $e$  al **exponente**.

## Representación en máquina

- Se dedica porción limitada y fija en memoria a cada número.
- La cantidad de bits dedicados depende de la precisión a utilizar.
- Las computadoras representan la información en formato binario (bits)
- Estándar IEEE-754 de 1985 como convención para representar números:
  - Precisión *single*: 32 bits (4 bytes)
  - Precisión *double*: 64 bits (8 bytes)
- Surgen *errores de redondeo* al representar números reales.

# Estándar IEEE-754



Representación de los números de la forma  $x = \pm m \times 2^e$

## Rangos

En doble precisión, la mayor mantisa que podemos guardar es

$$2^{52} - 1 \approx 0.45 \times 10^{16}$$

y los exponentes que podemos guardar son

$$-2^{10} - 1 \leq e \leq 2^{10} - 1$$

Como  $2^{10} - 1 = 1023$  y la base del exponente es 2, el mayor exponente es  $2^{1023} \approx 10^{308}$

## Doble precisión en representación decimal

Simplificando, pensamos que trabajamos con números de la forma

$$0, a_1 \dots a_{16} \times 10^e$$

Mantisa:  $m$  de 16 dígitos. Exponente:  $-308 \leq e \leq 308$



# Ejemplos en punto flotante

## Mantisa y exponente

- $\sqrt{2} \rightarrow 1.414213562373095 = 0.1414213562373095 \times 10$
- $\sqrt{2} \times 1000 \rightarrow 1414.213562373095 = 0.1414213562373095 \times 10^4$
- $\sqrt{2}/1000 \rightarrow 0.001414213562373095 = 0.1414213562373095 \times 10^{-2}$

## Operaciones

- $\sqrt{2} \times 2 \rightarrow 2.8284271247461903$
- $1 + \sqrt{2}/1000000 \rightarrow 1.0000014142135625$
- $5.0^{100} \rightarrow 7.888609052210118 e + 69$
- $10.0^{400} \rightarrow (\text{OVERFLOW})$
- $10.0^{-400} \rightarrow 0 (\text{UNDERFLOW})$

# Distribución de los números de máquina

- Los números de máquina no se distribuyen de manera uniforme.
- Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos números de máquina consecutivos ( $0 < x_1 < x_2$ ):

$$(x_1)_b = 0.a_1a_2 \dots a_m \times b^e$$

y el siguiente número de máquina es

$$(x_2)_b = 0.a_1a_2 \dots (a_m + 1) \times b^e$$

(salvo que  $a_m = b - 1$  en cuyo caso habrá acarreo).

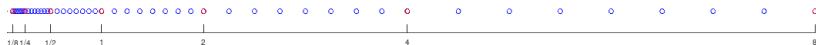
Luego,

$$x_2 - x_1 = b^{-m}b^e$$

- $x_2 - x_1$  no es constante al variar el exponente  $e$ .
- $x_2 - x_1$  es constante para cada exponente fijo dado.

# Distribución de los números de máquina

- Algunos números positivos de máquina con  $b = 2$  y  $m = 4$
- Los números son equiespaciados únicamente entre potencias sucesivas de 2
- La cantidad de números de máquina en esos rangos se mantiene constante



# Representando números

## Truncamiento y redondeo

- Si  $x \in \mathbb{R}$  no es de un número de máquina:
  - se puede elegir el más cercano para representarlo (*redondeo*)
  - se puede elegir el inmediato inferior (*truncado*)
- Llamamos  $fl(x)$  a esta representación de máquina
- Ventaja de utilizar punto flotante: el error relativo cometido al redondear o truncar el número es uniforme a lo largo de todas las escalas.

## En $k$ dígitos

$$x = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \times 10^e$$

- Truncamiento:  $fl(x) = t(x) = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_k \times 10^e$
- Redondeo:  $fl(x) = t(x + 5 \times 10^{e-(k+1)})$

# Ejemplo de operación

## Operaciones en la máquina

Modelamos la operatoria de la siguiente forma:

1. Obtenemos la representación en máquina de los operandos
2. Realizamos la operación en forma exacta
3. Obtenemos la representación en máquina del resultado

Ejemplo suma en máquina de  $x$  e  $y$ :  $fl(fl(x) + fl(y))$ .

## Ejemplo suma precisión $k = 5$ dígitos

Sean  $x = 0.88888888 \times 10^7$  e  $y = 0.1 \times 10^2$

$$\begin{aligned}x + y &= fl(fl(x) + fl(y)) \\&= fl(fl(0.88888888 \times 10^7) + fl(0.1 \times 10^2)) \\&= fl(0.88888 \times 10^7 + 0.1 \times 10^2) \\&= 0.88888 \times 10^7\end{aligned}$$

# Preguntas

- ¿Cuál es el número más grande que puedo representar en la computadora?

$$0.9999999999999999 \times 10^{308} \approx 10^{308}$$

- ¿Cuál es el número positivo más chico que puedo representar en la computadora?

$$0.0000000000000001 \times 10^{-308} = 10^{-309}$$

- ¿Cuál es el número siguiente al 1 en la computadora?

$$1.0000000000000001 \text{ (14 ceros)}$$

- ¿Cuál es el número positivo más chico que le puedo sumar a 1 y obtener algo distinto de 1?

$$0.0000000000000005 = \frac{1}{2}10^{-15}$$

# Epsilon de máquina

## Epsilon de máquina ( $\epsilon$ )

Número más chico que le puedo sumar a 1 y se obtiene algo distinto de 1.

## En doble precisión

$$\epsilon \approx 0.0000000000000005 = \frac{1}{2}10^{-15}$$

## En general, para base $b$ con mantisa de $m$ dígitos y redondeo

$$\epsilon = \frac{1}{2}b^{1-m}$$

# Precisión de la máquina

El epsilon de máquina coincide con el máximo error relativo que puedo obtener al convertir un número a número de máquina

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} b^{1-m}$$

A este número se lo suele llamar precisión de la máquina.



# Cancelación Catastrófica

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \text{ vs. } \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}, \quad -4 \times 10^{-8} \leq x \leq 4 \times 10^{-8}$$

