Espacios vectoriales

Recordemos qué es un **cuerpo**.

$\mathbb{K}$ es un cuerpo si posee dos operaciones

$+$ y $\cdot$ con las propiedades:

	$+$	$\cdot$
asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a.b).c = a.(b.c)$
conmutativa	$a+b = b+a$	$a.b = b.a$
elemento neutro	$a+0 = a = 0+a$	$a.1 = a = 1.a$
elemento inverso	$a+(-a) = 0$	si $a \neq 0$, $a.a^{-1} = 1$
distributiva	$a.(b+c) = a.b + a.c$	

para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos. $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.

En esta materia trabajaremos con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definimos la clase pasada vectores en $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$, que podemos llamar $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ que son n-uplas de elementos en $\mathbb{K}$.

Para simplificar usemos $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ en los ejemplos que siguen:

$$\mathbb{R}^n = \{ (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R} \}$$

Sabemos además sumar vectores entre sí y multiplicar un vector por un escalar (que es un elemento del cuerpo $\mathbb{R}$), es decir, tenemos las operaciones:

$$+_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v, w \longrightarrow v+w$$
$$(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \longrightarrow (v_1+w_1, \dots, v_n+w_n)$$

$$\cdot_{\mathbb{R},\mathbb{R}^n} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$a, v \longrightarrow a \cdot v$$
$$a, (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow (av_1, \dots, av_n)$$

A esta operación se la llama acción del cuerpo $\mathbb{R}$ en el espacio $\mathbb{R}^n$ o producto por un escalar. Ojo! No es un producto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Además, podemos ver que se satisfacen las propiedades:

1. Asociatividad de la suma.

$$u+(v+w) = (u+v)+w$$

2. Conmutatividad de la suma.

3. Elemento neutro de la suma.

4. Inverso para la suma.

5. Compatibilidad del producto por un escalar con el producto en $\mathbb{R}$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(\overset{\in \mathbb{R}}{b} \cdot \overset{\in \mathbb{R}^n}{v})}_{\in \mathbb{R}^n} = \overset{\in \mathbb{R}}{(a.b)} \cdot \overset{\in \mathbb{R}^n}{v}$$

este producto es en $\mathbb{R}$

6. Elemento neutro de la multiplicación por escalar:

$1 \in \mathbb{R}$ hace que $1 \cdot v = v$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$

7. Distributiva de la multiplicación por escalar respecto de la suma de vectores

$$a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

8. Distributiva de la multiplicación por escalar resp de suma de escalares

$$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

Todo lo que dijimos vale si tomamos un cuerpo $\mathbb{K}$ como escalares y $\mathbb{K}^n$ como vectores con $+$ y $\cdot$ tradicionales.

También valen las propiedades si tomamos un cuerpo $\mathbb{K}$ como escalares y $\mathbb{K}^{n \times m}$ como el conjunto de matrices de $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ con las operaciones habituales de suma de matrices y producto por un escalar.

Estos dos espacios $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^{n \times m}$ con el cuerpo $\mathbb{K}$ y la $+$ y $\cdot$ correspondiente son ambos ejemplos de **espacios vectoriales**.

Definición: Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (también llamado $\mathbb{K}$-e.v.) es un conjunto V y dos operaciones

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

que satisfacen los axiomas 1 a 8 descriptos anteriormente en el ejemplo (ver pág 18 del apunte).

Ejemplos: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo.

1) $\mathbb{K}^n$ con $n \geq 1$ con $+$ y $\cdot$ habitual es un e.v.

2) $\mathbb{K}^{n \times m}$, $n, m \geq 1$ con $+$ y $\cdot$ habitual es un e.v.

3) $\mathbb{K}[x]$ = cjto de polinomios con coef en $\mathbb{K}$ con $+$ y $\cdot$ habituales (¿cuáles serán?) es un e.v.

Ver más ej en el apunte.

Subespacios

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ que vimos es un e.v. con $+$ y $\cdot$ habituales.

Ahora tomamos

$$S = \{(v_1, v_2, 0) : v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$$

S es un subconjunto de $V = \mathbb{R}^3$.

¿Es un espacio vectorial con misma $+$ y $\cdot$?

Para empezar tendríamos que ver si

$$+ : S \times S \longrightarrow S$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$$

es decir, si $+$ y $\cdot$ son cerradas por S. Les dejo que vean que es así. Para seguir, ¿se satisfacen los axiomas 1 a 8?

Repasando estas condiciones vemos que

1), 2), 5), 6), 7) y 8) valen.

Para 3) vemos que $(0,0,0) \in S$

y este era el neutro de la suma.

Para 4) vemos que $(-v_1, -v_2, 0)$

es inverso para la suma de

$(v_1, v_2, 0)$.

Notar que podemos probar que

$$(-1) \cdot v = -v$$

(*) Para quien le interese: abajo mostramos esto.

y esto nos permite probar que si

$v \in S$ y el producto por escalar

es cerrado en $S \Rightarrow -v \in S$.

En general se tiene que:

si $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v., S

es un **subespacio de V** si

1) $+ : S \times S \to S$

La operación suma es cerrada por S.

2) $\cdot : \mathbb{K} \times S \to S$

La acción del cuerpo en S es cerrada por S.

3) $0 \in S$.

Solo para interesados en detalles:

(*) Para ver que $(-1) \cdot v = -v$ primero vemos que

1. $0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

y esto es porque $(0+0) \cdot v = 0 \cdot v$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 \cdot v$

Sumo $-0 \cdot v$ (opuesto de $0 \cdot v$)

a ambos lados y tenemos $0 \cdot v = 0$

2. Vemos que

$$v+(-1)\cdot v = 1\cdot v+(-1)\cdot v = (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v = 0$$

y usando que el opuesto es único tenemos que $(-1)\cdot v = -v$ el opuesto de v.

Ejercicio: Determinar si

$$S=\{(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3 : 2v_1+3v_2+v_3=0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Veamos eso:

- Si $(v_1,v_2,v_3),(w_1,w_2,w_3)\in S$

es decir
$$2v_1+3v_2+v_3=0$$
$$2w_1+3w_2+w_3=0$$

Suma: $(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)\in S$?

tengo que ver si

$$2(v_1+w_1)+3(v_2+w_2)+v_3+w_3$$

es igual a 0.

Pero

$$2(v_1+w_1)+3(v_2+w_2)+v_3+w_3$$

$$= 2v_1+2w_1+3v_2+3w_2+v_3+w_3$$

$$= \underbrace{2v_1+3v_2+v_3}_{=0}+\underbrace{2w_1+3w_2+w_3}_{=0}=0.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2, v_3) \in S$

$$\Downarrow$$

$$2v_1+3v_2+v_3=0$$

$$a\cdot(v_1, v_2, v_3) = (av_1, av_2, av_3) \in S?$$

Hacemos

$$2(av_1)+3(av_2)+av_3$$

$$= a\,(\underbrace{2v_1+3v_2+v_3}_{=0}) = 0.$$

- $(0,0,0) \in S$? Sí, porque

$$2.0+3.0+0=0.$$

Luego es un subespacio.

Generadores: Dado V un $\mathbb{K}$ ev.

Definimos para $v \in V$

$$\langle v \rangle = \{ a \cdot v \ , \ a \in \mathbb{K} \}$$

es un subespacio y se lo llama **subespacio generado por v**.

Ej en $\mathbb{R}^3$

$$\langle (1,2,-6) \rangle = \{ a(1,2,-6) , \ a \in \mathbb{R} \}$$

Por ej si $a = -2$ $\quad (-2,-4,12) \in \langle (1,2,-6) \rangle$

Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, una **combinación lineal** de $v_1, \dots, v_n$ es un elemento

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n \in V$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

Se define el subespacio generado por $v_1, \dots, v_n$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \}$$

al conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1 \dots v_n$.

Ej:

- En $\mathbb{R}^2$, $\langle (1,0), (0,1) \rangle$

$$= \{ a \cdot (1,0) + b(0,1) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (a,b) : a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

- En $\mathbb{R}^3$,

$S = \langle (1,2,-8), (0,1,-3) \rangle$

$$= \{ a(1,2,-8) + b(0,1,-3) : a,b \in \mathbb{R} \}$$

¿ $(1,3,0) \in S$?

Vemos si existen $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a(1,2,-8) + b(0,1,-3) = (1,3,0)$$

es decir debería ser

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot 1 + b \cdot 0 = 1 \\ a \cdot 2 + b \cdot 1 = 3 \\ a \cdot (-8) + b(-3) = 0 \end{array}\right\}$$

Esto es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas

Lo escribimos matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -8 & -3 & 0 \end{array}\right)$$ y triangulamos

$$\underset{\substack{f_2 - 2f_1 \to F_2 \\ f_3 + 8f_1 \to F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 + 3F_2 \\ \to F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Esto nos dice
que el sistema
no tiene soluc

luego no existen a, b buscados,

es decir $(1,3,0) \notin \langle (1,2,-6), (0,1,-3) \rangle$

Sistemas lineales y subespacios

Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax=0$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, el conjunto S de soluciones, es decir

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ ceros}} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo: (observar que es el mismo ej de antes con v_1, v_2, v_3)

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \}$$

¿Cuál es la matriz A en este caso?

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{1\times 3}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \}$$

¿Cómo podemos encontrar un sistema de generadores de S?

Vemos que al tener una sola ecuación podemos escribir una variable en función de las otras dos:

$$x_3 = -2x_1 - 3x_2$$

$$S = \{ (x_1, x_2, -2x_1 - 3x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \underbrace{\{ (x_1, 0, -2x_1) + (0, x_2, -3x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}}$$

separo x_1's de x_2's

$= \{ x_1 \cdot (1,0,-2) + x_2 (0,1,-3),$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (1,0,-2), (0,1,-3) \rangle .$

¿Como veo si $(1,2,-8) \in S$?

Dos formas:

1) La más fácil: usando las ecuaciones. Verifico si $(1,2,-8)$ satisface las ecuaciones que caracterizan a $S = \{ (x_1 x_2 x_3) : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \}$

En este caso, debemos ver si

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + -8$ es cero

vemos que sí y entonces concluimos que $(1,2,-8) \in S$.

2) Más cuentosa: usando los

generadores. Verifico si existen

$a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1,2,-8) = a.(1,0,-2) + (0,1,-3)$$

Les dejo ver que funciona con

$a=1,\ b=2$.

Notar en este caso que

$$\langle (1,0,-2), (0,1,-3), (1,2,-8) \rangle$$

$$= \langle (1,0,-2), (0,1,-3) \rangle.$$

Siempre puedo sacar del conjunto de generadores a un vector que se escribe como combinación lineal de los otros.

¿Qué pasa si ahora queremos hacer lo contrario? Es decir, dado un sistema de generadores en $\mathbb{R}^n$, ¿podremos encontrar un sistema de ecuaciones lineales que describan el mismo subespacio que generan los vectores dados?

La respuesta es que sí!

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^4$.

$$S = \langle (-2, 1, 1, 3), (0, 0, 1, 2) \rangle$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ si existen $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(-2, 1, 1, 3) + b(0, 0, 1, 2)$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Es decir buscamos $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ tales q el sistema no homógeneo tenga solución a, b

Planteamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{array}\right)$$

triangulamos y vemos cómo deben ser los $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ para que sea un sistema compatible.

$F_1 \leftrightarrow F_2$

2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+2F_1 \to F_2 \\ F_3-F_1 \to F_3 \\ \sim \\ F_4-3F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 2 & x_4-3x_2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 0 & x_4-3x_2-2(x_3-x_2) \end{array}\right)$$

F_4-2F_3

$$\underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 0 & -x_2-2x_3+x_4 \end{array}\right)$$

Para que haya solución
vemos que estas dos
ecuaciones deben ser 0.

Esto me dice que

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$

Hasta acá la clase presencial del jueves 23/3

Desde acá retomaremos el martes 28/3.

Suma e intersección de subespacios

Dados dos subespacios S y T de un $\mathbb{K}$-ev.

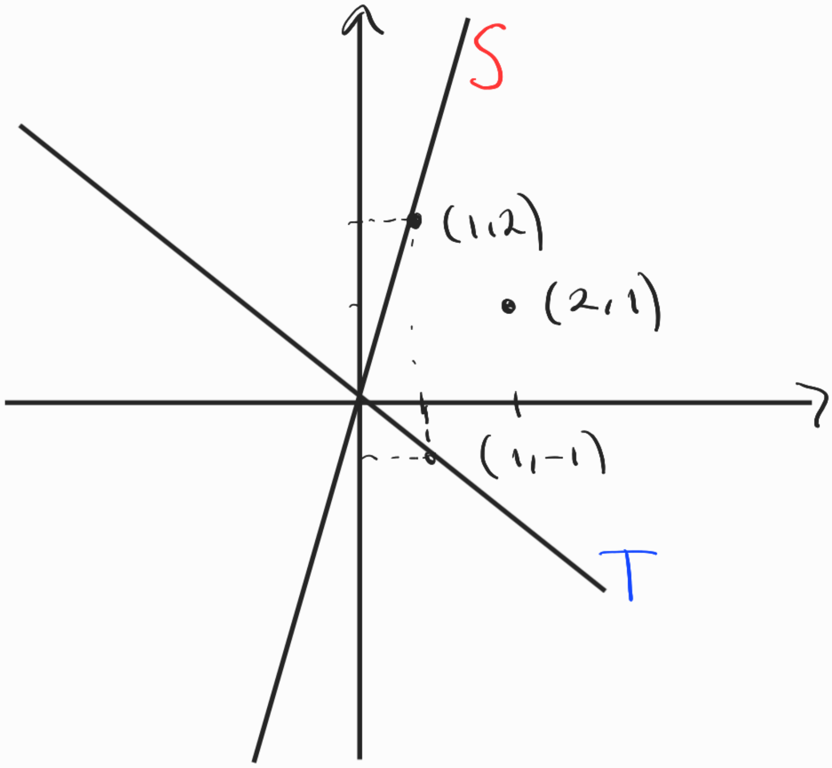
1) **SUMA:**

Se quiere definir un subespacio que contenga tanto a S como a T.

¿Sirve $S \cup T$?

Ej: $S = \langle (1,2) \rangle$

$T = \langle (1,-1) \rangle$



Si hago $S \cup T$ no es subespacio

$(1,2) \in S$

$(1,-1) \in T$

Pero $(1,2)+(1,-1)$

$= (2,1) \notin S \cup T$

Necesitamos que estén al menos las sumas de cosas de S con cosas de T, es decir necesitamos $s+t$, con $s \in S$
$t \in T$

En particular debe estar cualquier vector de la forma

$a(1,2) + b(1,-1)$, es decir

el subespacio que buscamos es

$$S = \langle (1,2), (1,-1) \rangle$$

¿Es $S = \mathbb{R}^2$? Buscar las ecuaciones de S y convencerse que sí!

Definimos

$$S+T = \{ s+t, \ s \in S, \ t \in T \}$$

el subespacio suma (verificar que efectivamente es un subespacio)

Podemos ver que $S+T$ es el subespacio más chico que contiene a S y a T.

Proposición: Dados S y T dos subespacios de un mismo $\mathbb{K}$-e.v. V tal que $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ y $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, entonces

$$S+T = \langle s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \rangle.$$

Ej: En $\mathbb{R}^3$

$$S = \langle (1,2,0)\ (0,1,1) \rangle$$

$$T = \langle (2,2,1), (1,0,1) \rangle$$

$\Rightarrow \quad S+T = \langle (1,2,0)\ (0,1,1)$

$(2,2,1),\ (1,0,1) \rangle$

¿Se puede sacar algún generador?.

Dem Prop: Para probar la igualdad probamos una doble contención.

$\subseteq$: tomamos un vector $v \in S+T$ y queremos ver que $v \in \langle s_1,..,s_n, t_1,..t_m \rangle$

$v \in S+T \Rightarrow v = s+t$ con $s \in S$, $t \in T$

$s \in S = \langle s_1,..,s_n \rangle \Rightarrow s = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n$

$t \in T = \langle t_1,..,t_m \rangle \Rightarrow t = b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$

$\Rightarrow s+t = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n + b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$

$\in \langle s_1,\ldots,s_n, t_1,\ldots,t_m \rangle$

$\supseteq$: tomamos $v \in \langle s_1,..,s_n, t_1,..,t_m \rangle$ y queremos ver que $v \in S+T$

$v \in \langle s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \rangle$

$$\Rightarrow v = \underbrace{a_1 s_1 + \dots + a_n s_n}_{\in S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle} + \underbrace{b_1 t_1 + \dots + b_m t_m}_{\in T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle}$$

$\Rightarrow v \in S + T$

2) **Intersección**:

Dado V un $\mathbb{K}$-ev y S y T dos subespacios, buscamos ahora un subespacio que tenga los elementos en común de S y T, esto es

$$S \cap T = \{ v \in V : v \in S \text{ y } v \in T \}$$

Ej: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0 \}$

$T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 \}$

$\Rightarrow S \cap T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0$

$\wedge \quad x_1 - x_3 = 0 \}$

Vale en general: sea $\mathbb{K}^n$ con S y T subespacios donde

$S = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = 0 \}$,

$T = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : B\bar{x} = 0 \} \Rightarrow$

$S \cap T = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = 0 \wedge B\bar{x} = 0 \}$

<u>Importante:</u> En $\mathbb{K}^n$:

- Para determinar $S+T$ me conviene tener escritos a S y T con generadores.
- Para determinar $S \cap T$ me conviene tener escritos a S y T con ecuaciones.

3) <u>Inclusión:</u> Dado V un $\mathbb{K}$-ev con S y T subespacios.

$S \subseteq T$ si para todo $v \in S$

se tiene que $v \in T$.

<u>Proposición</u>: Sea $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$

$S \subseteq T$ si y solo si $s_i \in T$

para todo $i = 1 \dots, n$.

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow)$ $S \subseteq T$, Como $s_i \in S \Rightarrow s_i \in T$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in S$, queremos ver que

$v \in T$. Como $v \in S$ y $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$

entonces $v = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$.

Como $s_i \in T$ y T es un subespacio

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 s_1 + \dots + a_n s_n}_{= v} \in T$$

<u>Ej</u>: Dados $S = \langle (1,2,0,0)(0,1,-1,0) \rangle$

y $T = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$

Determinar si $S \subseteq T$.

Por lo dicho antes, alcanza con ver si cada generador de S está en T.

$(1,2,0,0) \in T$? $2.1-2-0-0=0$ ✓

$(0,1,-1,0) \in T$? $2.0-1-(-1)-0=0$ ✓

luego $S \subseteq T$.

<u>En general:</u>

En $\mathbb{K}^n$ es más fácil verificar si $S \subseteq T$ cuando S está dado por generadores y T por ecuaciones.

4) <u>**Suma directa:**</u>

Dado V un $\mathbb{K}$-ev y S, T dos subespacios, se dice que S y T están en suma directa si $S \cap T = \{0\}$ y en ese caso a la suma $S+T$ se la simboliza $S \oplus T$.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$, dados

$$S = \langle (1,2,-2)\ (0,1,1) \rangle$$

$$T = \{ (x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0 \}$$

1) Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$, para $S+T$ y determinar si la suma es directa

Para calcular $S \cap T$, podemos pasar la escritura de S a ecuaciones ó podemos ver cuales vectores de S ($a(1,2,-2) + b(0,1,1)$) están también en T (o sea satisfacen ambas ecuaciones de T)

Un vector de S se escribe como $(a, 2a+b, -2a+b)$ y si está en T

debe pasar:

ECI $2a-(2a+b)=0 \rightsquigarrow b=0$

EC2 $2a+b+-2a+b=0 \rightsquigarrow b=0$

$\Rightarrow$ Las combinaciones lineales que están en T son

$$a\,(1,2,-2)+0\cdot(0,1,1)$$

con $a\in\mathbb{R}$.

Esto nos dice que

$$S\cap T=\langle (1,2,-2)\rangle .$$

Para $S+T$ buscamos generadores

de $T=\{(x_1,x_2x_3):\ 2x_1-x_2=0,\ x_2+x_3=0\}$

Vemos que x_2 está en la dos ec.

$\Rightarrow$ despejamos

$$x_1=\frac{x_2}{2}\qquad x_3=-x_2$$

de manera que

$$T = \{ (\tfrac{x_2}{2}, x_2, -x_2) : x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x_2 (\tfrac{1}{2}, 1, -1), x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (\tfrac{1}{2}, 1, -1) \rangle$$

$$= \langle (1, 2, -2) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad S + T = \langle (1,2,-2) (0,1,1) (1,2,-2) \rangle$$

$$= \langle (1,2,-2) (0,1,1) \rangle$$

S y T no están en suma directa.

Se puede hacer ej. de P1: Del 5 al 7