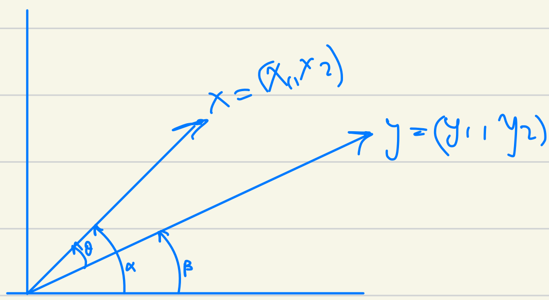
Ángulo entre vectores.



β es el ángulo del vector y

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{y_2}{\|y\|_2}$$

$$\cos\beta = \frac{y_1}{\|y\|_2}$$

α es el ángulo del vector x

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x_2}{\|x\|_2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|x\|_2}$$

Fórmula del coseno: $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

siendo $\theta = \alpha - \beta$

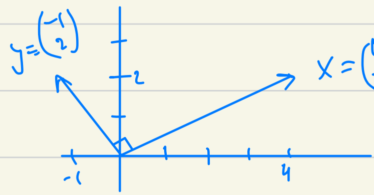
$$= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x^ty}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

¿Qué sucede cuando dos vectores son perpendiculares?

$x \perp y \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0$

Ej



$\|x\| = \sqrt{20}$ $\quad \|y\| = \sqrt{5}$

$x^t y = 0$

Def Dados $x, y \in \mathbb{K}^n$ no nulos, decimos que son **ortogonales** si y solo si $x^* y = 0$

Obs: $x^* y$ se corresponde al producto interno en $\mathbb{C}^n$ siendo $x^* = \bar{x}^t$

$\Rightarrow x^* y = \bar{x}^t y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n$

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x^* = x^t$ (pues $\bar{x} = x$)

$\Rightarrow$ en $\mathbb{R}$ x es ortogonal a y sii $x^t y = 0$

también lo notamos $x \perp y$

Def. Un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$ no nulos se dice ortogonal si:

$$x_i^* x_j = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Si además $\|x_i\|_2 = 1$ entonces el conjunto se dice **ortonormal**.

Luego llamaremos "base ortogonal de $\mathbb{K}^n$" a un conjunto ortogonal de vectores en $\mathbb{K}^n$ que generan $\mathbb{K}^n$. (idem para ortonormal)

¿Cómo "escribimos" un vector en coordenadas de una base ortonormal?

Es decir, dado $v \in \mathbb{K}^n$ y una base $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ buscamos $(v)_B$

$\Rightarrow$ Buscamos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ / $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Veamos qué sucede si multiplicamos por x_k^*

$$\Rightarrow x_k^* v = x_k^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{x_k^* x_i}_{\substack{\| \\ 0 \text{ si } k \neq i}}$$

Solo es no nulo el término k-ésimo de la sumatoria. Luego,

$$x_k^* v = \alpha_k \, x_k^* x_k = \alpha_k \underbrace{\|x_k\|_2^2}_{\substack{\| \\ 1 \\ (\text{base ortn.})}}$$

$$\Rightarrow \alpha_k = x_k^* v$$

$$\Rightarrow v = (x_1^* v)\, x_1 + (x_2^* v)\, x_2 + \dots + (x_n^* v)\, x_n$$

$$\Rightarrow (v)_B = (x_1^* v, \; x_2^* v, \; \dots, \; x_n^* v)$$

Si B no fuese ortogonal/ortonormal deberíamos resolver el sistema

$$\left(x_1 \,\middle|\, x_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, x_n \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v$$

¿Cómo "ortogonalizamos" una base?

Dada una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vectores de algún subespacio $S \leq \mathbb{K}^n$, buscamos una base U, $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ tal que U sea un conjunto ortogonal y que $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ genere S.

Vamos a hacerlo de una forma particular. Queremos:

$$\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

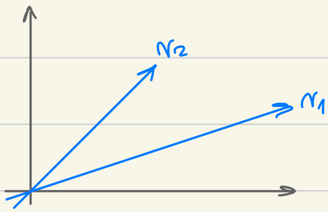
- Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Queremos $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \mathbb{R}^2$$

En $\mathbb{R}^2$ podemos pensar que necesitamos proyectar un vector sobre otro.

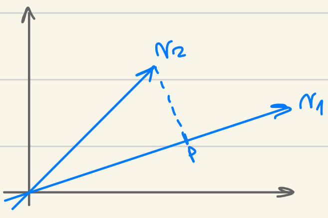
Consideremos $\{v_1, v_2\}$ dos vectores linealmente independientes como los del siguiente gráfico



Inicialmente podemos considerar $u_1 = v_1$
$\Rightarrow \langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

El objetivo ahora es elegir un u_2 que cumpla que $u_1 \perp u_2$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

Podemos tomar un punto p sobre la recta de tal forma que $v_2 - p \perp v_1$



p se encuentra sobre la recta $\Rightarrow p = \alpha v_1$

$\Rightarrow v_1 \perp v_2 - p \Rightarrow v_1^t (v_2 - \alpha p) = 0$

$\Rightarrow v_1^t v_2 - \alpha v_1^t p = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}$

$$\Rightarrow u_2 = v_2 - p = v_2 - \underbrace{\left(\frac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}\right) v_1}_{\text{proyección de } v_2 \text{ sobre } \langle v_1 \rangle}$$

Llamaremos $P_{u_1}(v_2)$ a la proyección de v_2 sobre $\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

$$P_{u_1}(v_2) = \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} u_1 = u_1 \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\left(\frac{u_1 u_1^t}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} v_2$$

$\leftarrow$ matriz de proyección

<u>OBS</u> si estamos en $\mathbb{C}$:

$$P_{u_1}(v_2) = \left(\frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1}\right) u_1$$

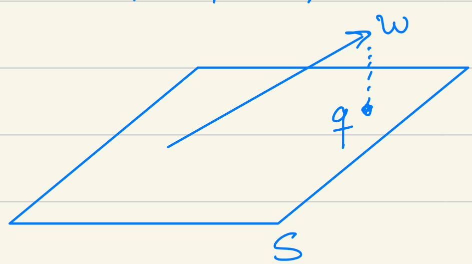
se cumple

$u_2 \perp u_1$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Esta forma de restar a un vector su proyección sobre un subespacio para obtener un vector ortogonal al subespacio funciona para más dimensiones

Sea $C=\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortogonal del subespacio $S=\langle u_1, \dots, u_k\rangle$



Buscamos proyectar ortogonalmente w sobre S

Definimos $q = P_{u_1}(w) + P_{u_2}(w) + \dots + P_{u_k}(w)$

Se cumple: 1) $q \in S$

2) $w-q \perp S \quad \forall s \in S$

1) Se cumple claramente pues

$$q = \frac{u_1^* w}{u_1^* u_1} u_1 + \dots + \frac{u_k^* w}{u_k^* u_k} u_k$$ es una

combinación lineal de elementos de S ✓

2) veamos que $u_j \perp w - q$ para $1 \leq j \leq k$

$$u_j^*(w-q) = u_j^*\left(w - \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w)\right) =$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* P_{u_i}(w) = u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i}\right) u_i$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i}\right) \underbrace{u_j^* u_i}_{= 0 \text{ si } j \neq i} =$$

$$= \cancel{u_j^* w} - \cancel{\frac{u_j^* w}{\cancel{u_j^* u_j}}} \cdot \cancel{u_j^* u_j} = 0$$ ✓

Luego, si q es ortogonal a cada componente de la base C que generan S entonces q es ortogonal a cualquier combinación de ellos. Es decir, a cualquier $s \in S$.

Llamamos $P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w)$

a la proyección de w sobre el subesp. S.

Ortogonalización de Gram-Schmidt.

Dados vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$ l.i.
calculamos un nuevo conjunto de vectores
$U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ tal que para todo j,
$1 \leq j \leq k$: $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$

y U es un conjunto ortogonal.

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - P_{u_1}(v_2)$$
$$u_3 = v_3 - P_{\langle u_1, u_2 \rangle}(v_3) = v_3 - P_{u_1}(v_3) - P_{u_2}(v_3)$$
$$\vdots$$
$$u_k = v_k - P_{\langle u_1, \dots, u_k \rangle}(v_k) = v_k - \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(v_k)$$

En cada paso podemos definir $q_i = u_i / \|u_i\|_2$
$\Rightarrow \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ es un conj. ortonormal

obs: también se puede ir normalizando cada u_i
y utilizarlo normalizado para el paso siguiente.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$: $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

1ro) Elegimos $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ normalizamos $\boxed{u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}}$

2do) $$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - P_{u_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left[\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\underbrace{u_1^t u_1}_{\overset{\shortparallel}{1}}}\right] \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

Normalizo $$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|_2} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}/2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}} = u_2$$

3ro) Busco $\tilde{u}_3$: Proyecto $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sobre $S = \{u_1, u_2\}$

tomo como $\tilde{u}_3$ a la diferencia entre $v_3 - P_{\langle u_1, u_2\rangle}(v_3)$

$$\tilde{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - P_S\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - P_{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - P_{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - u_1^t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}u_1 - u_2^t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}u_2$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]}_{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \underbrace{\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]}_{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{u_3}}$$

En este ejemplo fuimos normalizando a medida que calculábamos los u_i.

Se observa que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{b.o.n.}}$$

Matrices similares (o semejantes)

Def) A y B en $\mathbb{K}^{n\times n}$ son matrices similares si $\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible tal que

$$A = C B C^{-1}$$

Luego, una matriz es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal

Propiedad: matrices similares tienen los mismos autovalores.

En efecto, verifiquemos que si A es similar a B entonces tienen el mismo polinomio característico

$$\det(A-\lambda I) = \det(CBC^{-1} - \lambda I) = \det(CBC^{-1} - \lambda C C^{-1}) =$$

$$= \det(C(B-\lambda I)C^{-1}) = \cancel{\det(C)}\, \det(B-\lambda I)\, \cancel{\det(C^{-1})}$$

$$= \det(B-\lambda I)$$

$\therefore$ como el pol. caract. es el mismo entonces tienen las mismas raíces.

Matrices unitariamente similares

A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son unit. similares si
$\exists\, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitario tal que $A = UBU^*$

$U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es unitario si $UU^* = U^*U = I$

es decir, U^* es su inversa
En $\mathbb{R}^{n\times n}$ las llamamos ortogonales

Veamos algunas propiedades:

- Si U_1 y U_2 son unitarias $\Rightarrow$ $U_1 \cdot U_2$ también

Verifiquemos que $U_1 U_2$ cumple la definición

$$(U_1U_2)^*(U_1U_2) = U_2^* \underbrace{U_1^* U_1}_{I} U_2 = U_2^* U_2 = I$$

Sean $x, y \in \mathbb{K}^n$ y $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria

- $(Ux)^*(Uy) = x^* \underbrace{U^* U}_{I} y = x^* y$

- $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

veamos $\|Ux\|_2^2 = (Ux)^*(Ux) \underset{\downarrow}{=} x^* x = \|x\|_2^2$

- Las columnas de U forman un conj. ortonormal

$$col_i(U)^* col_j(U) = (Ue_i)^*(Ue_j) \underset{\downarrow}{=} e_i^* e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- $\|U\|_2 = 1$

en efecto, $\|U\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ux\|_2 \overset{\uparrow}{=} \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$

Como U^{-1} también es unitario $\Rightarrow \|U^{-1}\|_2 = 1$

Luego: $\underline{K_2(U) = \|U\|_2 \|U^{-1}\|_2 = 1}$

- $|\det(U)| = 1$

$$1 = \det(I) = \det(U^{-1}U) = \det(U^{-1})\det(U) =$$
$$= \det(U^*)\det(U) = \det(U)\det(U) = \det(U)^2$$
$$\Rightarrow 1 = |\det U|$$

- Los autovalores de una matriz unitaria tienen módulo 1.

Sea λ autoval con x autovector asociado

$$\Rightarrow \|x\|_2 \overset{\uparrow}{=} \|Ux\|_2 = \|\lambda x\|_2 = |\lambda|\,\|x\|_2$$
$$\Rightarrow |\lambda|\,\|x\|_2 = \|x\|_2 \underset{x \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$$

Ejemplos de matrices unitarias:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ matriz cuyas columnas tienen los u_i que obtuvimos al ortogonalizar una base de $\mathbb{R}^3$ x G-S.

Teorema de Schur (o descomposición de Schur)

Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) entonces existen matrices $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitarias y $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ triangular superior tales que:

$$A = UTU^* \quad \text{y} \quad t_{ii} = \lambda_i .$$

$\rightarrow$ A es unitariamente similar a una matriz triangular superior.

Dem/ Vayamos construyendo U y T paso a paso.

Sea λ_1 el autovalor de A con w_1 autovect.
Construyo una base ortonormal que contenga a w_1
1) armo base $\{w_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{K}^n$
2) ortogonalizo con G.S.: $\{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}\}$

Con los elementos de la base ortonormal puedo construir una matriz unitaria

Recordemos que una matriz cuyas columnas forman una b.o.n es unitaria

$$\Rightarrow \quad U_1 = \left(w_1^{(1)} \,\middle|\, w_2^{(1)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, w_n^{(1)} \right) \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ unitaria.}$$

$$\Rightarrow A U_1 = \left(A w_1^{(1)} \,\middle|\, A w_2^{(1)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A w_n^{(1)} \right) =$$

$$= \left(\lambda_1 w_1^{(1)} \,\middle|\, * \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, * \right)$$

$$w_i^{(1)*} w_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_1^*(A U_1) = \begin{pmatrix} w_1^{(1)*} \\ \hline w_2^{(1)*} \\ \hline \vdots \\ \hline w_n^{(1)*} \end{pmatrix} \left(\lambda_1 w_1 \,\middle|\, * \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, * \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array} \right)$$

para algún $A_1 \in \mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$

<u>Obs</u>: A y $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right)$ son unitariamente semejantes.

Obs: A_1 tiene autovalores $\lambda_2, \dots, \lambda_n$

como A_1 y $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ son semejantes entonces

tienen los mismos autovalores. Vimos que matrices semejantes tienen los mismos polinomios característicos

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right) - \lambda I\right) =$$

desarrollo el determ. x 1ra col.

$$= \underbrace{(\lambda_1 - \lambda) \det(A_1 - \lambda I)}_{\triangle}$$

$\rightarrow$ raíces: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Dado que $\triangle$ tiene como raíces a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow \det(A_1 - \lambda I)$ tiene como raíces a $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ (notar que es un polinomio de grado $n-1$)

Podemos repetir el mismo proceso para A_1

Sea entonces λ_2 autoval. de A_1 con w_2 autovec.

1) armo base de $\mathbb{K}^{n-1}$: $\{w_2, z_3^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}\}$

2) ortogonalizo x G-S: $\{w_2^{(2)}, w_3^{(2)}, \dots, w_n^{(2)}\}$

con esta base ortonormal construyo $U_2 \in \mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$

$$U_2 = \left(w_2^{(2)} \middle| w_3^{(2)} \middle| \dots \middle| w_n^{(2)} \right) \quad \text{unitaria.}$$

Sea $V_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_2 \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Obs: V_2 es unitaria: $V_2^* V_2 = I$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* U_2 \end{array}\right) = I$$

Repitiendo el mismo proceso que para A y U_1:

$$\underbrace{V_2^*\left(U_1^* A U_1\right) V_2} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A_2 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

ya que

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 U_2 \end{array}\right)$$

$$V_2\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 U_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 U_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \underbrace{U_2^* A_1 U_2}_{\left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)} \end{array}\right)$$

$\vdots$ continuando

$\vdots$

$$\underbrace{V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^*}_{V^*} A \underbrace{U_1 V_2 \cdots V_{n-1}}_{\substack{\text{prod. de unitarias} \\ \text{es unitaria} \\ V}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

Cada una de los V_j la construimos agregando una diagonal de unos en el bloque superior izquierdo

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & U_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right), \quad \ldots \quad V_j = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{U_j} \end{array}\right)$$

Teorema de Schur para matrices Hermitianas

Recordemos: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es <u>Hermitiana</u> si $A^* = A$
(en $\mathbb{R}$ se corresponden a las matrices simétricas)

Supongamos A Hermitiana. Entonces por el teo. de Schur: $A = UTU^* \iff U^*AU = T$
Además $A^* = A$

$$\Rightarrow T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = T$$

$\Rightarrow$ T es triangular sup. y también Hermitiana

$\Rightarrow$ T es diagonal.

Además $t_{ii} = \overline{t_{ii}} \Rightarrow t_{ii} \in \mathbb{R}$

Corolario: Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana.
Entonces existe U unitario y $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal tal que $U^* A U = D$ (o $A = UDU^*$)

Obs: toda matriz hermitiana es diagonalizable.

Corolario: los autovalores de una matriz hermitiana son reales.

Corolario: toda matriz hermitiana tiene una base ortonormal de autovectores.