Matrices simétricas

Definición:

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice simétrica si $A = A^t$.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice hermitiana si $A = A^*$ donde $A^* = \bar{A}^t$.

Recordar que $\bar{A}$ consiste en conjugar cada entrada de la matriz A.

Más generalmente, si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y no se especifica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ se usa la definición de hermitiana (que incluye el caso "simétrico" en $\mathbb{R}^{n\times n}$).

Definición:

Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice ortogonal si $U^t \cdot U = Id$ (es decir $U^{-1} = U^t$).

Una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice unitaria si $U^* \cdot U = Id$ (es decir $U^{-1} = U^*$)

De nuevo se usa la definición unitaria en ambos casos para $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Como consecuencia del teo de Schur sabemos que para cualquier $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existen T triangular superior y U unitaria $(U^{-1} = U^*)$

tales que $A = U T U^*$.

con $t_{ii} = \lambda_i$ (autovalores de A)

luego si A es hermitiana

$$\left.\begin{array}{l} A^* = U T^* U^* \\ \text{y } A = U T U^* \end{array}\right\} \quad A = A^*$$

$$\Downarrow$$

$$U T^* U^* = U T U^*$$

$$\text{trans inf} \leftarrow T^* = T \rightarrow \text{triang sup}$$

$\Rightarrow$

y como T era una matriz triangular esto nos dice que T debe ser una matriz diagonal y real.

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n1} & \cdots & & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \overline{t_{21}} & \cdots & \overline{t_{n1}} \\ 0 & \overline{t_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} t_{ij}=0 \\ \Rightarrow \forall i \neq j \\ \text{y } \underbrace{t_{ii}=\overline{t_{ii}}}_{=d_i \in \mathbb{R}} \end{array}$$

Probamos la siguiente proposición.

<u>Proposición</u>: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz hermitiana, entonces:

A es unitariamente diagonalizable con autovalores reales.

(Es decir $A = U \cdot D \cdot U^*$ con U una matriz unitaria y D diagonal real).

En este caso (como $U^* = U^{-1}$)

$$A \cdot U = U \cdot D$$

Es decir, las columnas de U son una base de autovectores de A ortonormales y los elementos de la diagonal de la matriz diagonal D tiene los autovalores reales de A.

Norma 2 de matrices simétricas:

Recordemos $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

Si A es simétrica $\Rightarrow$ por lo hecho arriba, existen U y D:

U es ortogonal ($U = U^t$, caso real de hermitiana)

y D diagonal y real.

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ las columnas de U que son una base ortonormal de autovectores

Dado $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\Rightarrow$

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq j \\ =1 \text{ si } i = j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 .$$

Además $\quad Ax = A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$

$$= \alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_n A v_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n.$$

$$\Rightarrow$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \lambda_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^2$$

$$\leq \underbrace{\left(\max \lambda_i^2\right)}_{= \left(\max |\lambda_i|\right)^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}_{= \|x\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|} \leq \underbrace{\max |\lambda_i|}_{\text{máximo de los módulos de los autovalores de la matriz } A}$$

Además, si $|\lambda_{i_0}| = \max |\lambda_i|$ para algún i_0.

$$A v_{i_0} = \lambda_{i_0} v_{i_0} \quad \text{con } \|v_{i_0}\|_2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\|A v_{i_0}\|_2}{\|v_{i_0}\|_2} = |\lambda_{i_0}|$$

probando que $\|A\|_2 = \text{máx } |\lambda_i|$.

<u>Definición</u>: Dado una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se define el radio espectral de A:

$$\rho(A) = \text{máx } \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$$

donde $\lambda_1 \dots \lambda_n$ son los autovalores de A.

Entonces probamos que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica

$$\Rightarrow \quad \|A\|_2 = \rho(A).$$

Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cualquiera, consideramos

$A^t . A$ que es simétrica ya que

$$(A^t A)^t = A^t . (A^t)^t = A^t . A.$$

Entonces existe $w_1, \dots, w_n$ autovectores de $A^t A$ que son una base ortonormal, y $\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalores reales de $A^t . A$

<u>OBS</u>: Los autovalores de $A^t A$ son no negativos:

Si λ es autovalor de $A^tA \Rightarrow \exists w: A^tAw = \lambda w$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle A^tAw, w\rangle}_{\shortparallel} = \langle \lambda w, w\rangle = \lambda \|w\|_2^2$$

$$(A^tAw)^t \cdot w = w^tA^tAw = (Aw)^t \cdot Aw = \|Aw\|_2^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|Aw\|_2^2}_{\geq 0} = \lambda \underbrace{\|w\|_2^2}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda \geq 0$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$

TODOS VECTORES VERTICALES!

$$x = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$$

Ya vimos $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$

y $A^tAx = \alpha_1 \lambda_1 w_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n w_n$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = (Ax)^t \cdot Ax$$

$$= x^tA^tAx$$

$$= \langle x, A^tAx\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j w_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq j \\ =1 \text{ si } i=j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leq \max\{\lambda_i\} . \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}_{\|x\|_2^2}$$

$x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq \max\{\lambda_i\} \overset{\lambda_i \geq 0}{=} \max|\lambda_i| = \rho(A^t A)$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^t A)}$$

Además si $|\lambda_{i_0}| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$

y w_{i_0} es autovector de autovalor λ_{i_0} de $A^t A$ se tiene

$$\|A w_{i_0}\|_2^2 = \langle A w_{i_0}, A w_{i_0} \rangle$$

$$= \langle w_{i_0}, \underbrace{A^t A w_{i_0}}_{\lambda_{i_0} w_{i_0}} \rangle$$

$$= \lambda_{i_0} \|w_{i_0}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Aw_{i_0}\|_2^2}{\|w_{i_0}\|_2^2} = d_{i_0}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$$

Matrices simétricas y definidas positivas:

Definición: Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si $\forall\, x \neq 0$

$$x^t A x > 0.$$

OBS 1: Si A es una matriz diagonal con elementos positivos en la diagonal

$$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d_i}_{>0} x_i^2 > 0$$

con lo cual esas matrices son simétricas definidas positivas.

OBS 2: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es unitariamente diagonalizable con autovalores positivos $\Rightarrow$

$$A = U D U^t \quad \text{con } U \text{ ortogonal}$$

y $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ con $d_i > 0$

$$\Rightarrow \quad x^t A x = \underbrace{x^t U}_{y^t} D \underbrace{U^t x}_{y} > 0 \quad \forall y \neq 0$$

por lo de antes

Pero como U es ortogonal

$\Rightarrow$ es inversible $\Rightarrow y = U^t x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$.

Por lo cual vemos que estas matrices son simétricas (chequear) definidas positivas.

Por otro lado, si A es simétrica y definida positiva, tenemos que:

- Por ser simétrica, A es unitariamente diagonalizable con autovalores reales.
- Por ser definida positiva:

  si λ es autovalor de A con autovector $w \neq 0$

  $$\Rightarrow Aw = \lambda w \Rightarrow \underbrace{w^t A w}_{>0} = w^t \lambda w = \lambda \|w\|_2^2$$

  $$\Rightarrow \lambda > 0.$$

Probamos que:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva si y sólo si A es unitariamente diagonalizable con autovalores positivos.

Otra caracterización muy útil es la siguiente:

Teorema: (Criterio de Sylvester)
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva si y solo si

$$\det(\underbrace{A(1:k, 1:k)}_{\text{menores principales}}) > 0 \quad \forall k = 1 \dots n$$

Sin dem (ver apunte Álgebra Lineal de Jerónimo, Sabia, Tesauri).

Otras propiedades de matrices simétricas y definidas positivas:

1) Si A es sim y def + $\Rightarrow$

$A = UDU^t$ con U ortogonal ($U^{-1} = U^t$ y entonces inversible)

y $D > 0$ (diagonal con entradas positivas)

$$\Rightarrow \det(A) = \det(UDU^t)$$

$$= \cancel{\det U} \cdot \det D \cdot \underbrace{\det(U^t)}_{\cancel{\det(U^{-1})}}$$

$$= \det D = \prod_{i=1}^{n} d_i > 0$$

en particular A es inversible.

2) $A = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \Rightarrow a_{ii} > 0$

$a_{ii} = e_i^t A \cdot e_i > 0$ por ser A sim def +.

Descomposición de Cholesky

Tomemos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Ej</u>: Probar que A es sim def +.

Empezamos por hacer descomp LU.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por simetría:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1^t} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que al multiplicar a derecha por L_1^t por ser A simétrica conseguimos ceros en los elementos de fila 1 fuera de a_{11}.

Si hacemos lo mismo con el paso siguiente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2^t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}}_{D>0}$$

$$\Rightarrow L_1 L_2 \cdot A L_2^t L_1^t = D$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{L_2^{-1} L_1^{-1}}_{\tilde{L}} \cdot D \underbrace{(L_1^t)^{-1} (L_2^t)^{-1}}_{\tilde{L}^t}$$

con $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = L \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot L^t$$

$$= L \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot L^t$$

$$= \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t.$$

donde $\tilde{L} = L \cdot \sqrt{D}$ que es triangular inferior con elementos positivos en la diagonal.

A esta descomposición $A = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t$ se la llama descomposición de Cholesky.

¿Qué matrices tienen una descomposición de Cholesky?

Veamos condiciones necesarias:

Si $A = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t$ con $\tilde{L}$ triangular inferior y elementos positivos en la diagonal. Entonces:

- A es simétrica: $A^t = (\tilde{L}\tilde{L}^t)^t = \tilde{L}\tilde{L}^t = A$
- A es def +:

8 $$x^t \tilde{L} \tilde{L}^t x = (\tilde{L}^t x)^t \cdot \tilde{L}^t x = \|\tilde{L}^t x\|_2^2 \geq 0$$

y $$\|\tilde{L}^t x\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{L}^t x = 0 \underset{L^t \text{ inversible}}{\Leftrightarrow} x = 0$$

(porque L es inversa)

$$\Rightarrow x^t \tilde{L}\tilde{L}^t x = \|\tilde{L}^t x\|_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Vimos que:

$A = \tilde{L}\tilde{L}^t$ con $\tilde{L}$ triangular inferior con $\tilde{l}_{ii} > 0$ $\Rightarrow$ A es simétrica y def positiva.

Veamos que vale la recíproca.

Si A es sim y def positiva vimos que

$\det(A(1:k, 1:k)) > 0 \quad \forall k = 1 \dots n$

(en particular A es inversible)

$\Rightarrow$ por resultado de clase pasada sabemos que A tiene descomposición LU.

$A = L.U$ donde L es triang inf. con 1's en la diagonal

y U es triang superior

L y U inversibles

Como A es simétrica

$$LU = A = A^t = U^t L^t$$

Notar que U^t es triang inf

L^t es triang sup

$$\Rightarrow \underbrace{\underset{\substack{\text{triang}\\ \text{sup}}}{U} \cdot \underset{\substack{\text{triang}\\ \text{sup}}}{(L^t)^{-1}}}_{\text{triang sup}} = \underbrace{\underset{\substack{\text{triang}\\ \text{inf}}}{L^{-1}} \underset{\substack{\text{triang}\\ \text{inf}}}{U^t}}_{\text{triang inf}}$$

$$\Rightarrow U(L^t)^{-1} = D \quad \text{diagonal}$$

$$\Rightarrow \quad U = D \cdot L^t \Rightarrow A = L \cdot D \cdot L^t$$

Veamos que $D > 0$ (es decir $d_{ii} > 0$)

$$d_{ii} = e_i^t D e_i$$

L^t inversible $\Rightarrow \exists\, v_i : L^t v_i = e_i$

$v_i \neq 0$

$$\Rightarrow \quad d_{ii} = v_i^t L D L^t v_i > 0$$

$$\Rightarrow A = L \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} L^t = \tilde{L} \tilde{L}^t$$

con $\tilde{L}$ triang inf con elem. de la diagonal positivos.

Probamos:

Teorema: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y def+ si y solo si se puede factorizar como $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$ con $\tilde{L}$ una matriz triang inf con entradas diagonales positivas.

Veamos que además $\tilde{L}$ es única.

En 3×3: $l_{11} > 0$, $l_{22} > 0$, $l_{33} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{11} = l_{11}^2$, $a_{11} > 0 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0$

$a_{12} = l_{11} l_{21} \Rightarrow l_{21} = a_{12}/l_{11}$

$a_{13} = l_{11} l_{31} \Rightarrow l_{31} = a_{13}/l_{11}$

tenemos col 1 de L

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22}^2 = a_{22} - l_{21}^2 > 0$$

$\Rightarrow \left(|l_{22}|, |l_{21}| \leq \sqrt{a_{22}} \right)$ porque $l_{22} > 0$

$$\Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$\Rightarrow a_{23} = l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32}$$

$$\Rightarrow l_{32} = (a_{23} - l_{21} l_{31}) / l_{22}$$

$$a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}.$$

En general, si $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$ con $\tilde{L}$ triang inf con entradas positivas en la diagonal, es decir

$\tilde{L} = (l_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$, $l_{ij} = 0$ si $i<j$, $l_{ii} > 0 \; \forall i$

$$\Rightarrow a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{l_{ij}}_{\text{fila } i} \underbrace{l_{kj}}_{\substack{\text{fila } k\\ = \text{col } k \text{ de } \tilde{L}}} = \sum_{j=1}^{k} l_{ij} l_{kj}$$

k → porque si $j > k \Rightarrow l_{kj} = 0$

$$= l_{ik} l_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}$$

Sabemos que $l_{kk} \neq 0$

$$\Rightarrow l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}} \qquad i > k$$

Así calculamos recursivamente L

$l_{11} \to l_{21} \cdots - l_{n1}$

$l_{22} \to l_{32} - - l_{n2}$

$\vdots$

$l_{n-1\, n-1} \to l_{n\, n-1}$

l_{nn}.

Entonces los coef. de L se calculan de forma única.

Ejercicio:

Cantidad de operaciones $\sim O(\frac{1}{3}n^3)$.

Además

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{i} l_{ij}^2 \geq l_{ij}^2 \Rightarrow |l_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}}$$

es decir los elementos de la matriz $\tilde{L}$ no crecen descontroladamente.

Descomposición QR:

Vimos que en LU, la matriz U puede tener entradas con crecimiento descontrolado.

Sería bueno tener una descomposición con matrices de norma controlada.

Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible

$A = \left(a_1 | \cdots | a_n \right)$ con $\{a_1, \dots, a_n\}$ li

Usando Gram Schmidt obtenemos

$Q = \left(q_1 | \cdots | q_n \right)$ donde

$\langle a_1 \rangle = \langle q_1 \rangle$

$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$

$\vdots$

$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$

Esto dice que

$$a_1 = r_{11}\, q_1 \qquad\qquad r_{11} \neq 0$$

$$a_2 = r_{12}\, q_1 + r_{22}\, q_2 \qquad r_{22} \neq 0$$

$$\vdots$$

$$a_k = r_{1k}\, q_1 + r_{2k}\, q_2 + \cdots + r_{kk}\, q_k$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad r_{kk} \neq 0$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} r_{in}\, q_i \qquad r_{nn} \neq 0$$

Matricialmente,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 | \cdots | a_n \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 | \cdots | q_n \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

donde Q es una matriz unitaria

$$\Rightarrow \|Q\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \|Q^t\|_2 = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cond}_2(Q) = 1.$$

y R es triangular superior.