Métodos iterativos

La resolución del sistema lineal $Ax = b$

Métodos directos	Métodos Iterativos
Eliminación Gaussiana	? base de Kry

Ya aplicamos la iteración previamente

Método de la Potencia

$$v_k = \frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_2}$$ regla impuesta

A cada iteración

$$v_{k+1} = \frac{A v_k}{\|A v_k\|_2}$$

Escribiendo el vector v_k como combinación de la base de autovalores de A

$$v_k = A^k v = a_1 (\lambda_1)^k w_1 + a_2 (\lambda_2)^k w_2 + \dots + a_n (\lambda_n)^k w_n$$

Proceso de Markov

Estados de un sistema u_k y matriz de transiciones M

$$u_{k+1} = M u_k$$

M posee propiedades que definen el proceso de Markov

$$u_k = c_1 (\lambda_1)^k w_1 + c_2 (\lambda_2)^k w_2 + \dots + c_n (\lambda_n)^k w_n$$

Métodos Iterativos

Sistema lineal

$$Ax = b$$

Aproximación $x_k \to x$

Residuo: $r_k = b - Ax_k$

Precondicionador (strong)

$$P \approx A$$

Proponemos

$$Ax = b$$

$$Px + Ax = Px + b$$

$$Px = (P-A)x + b \quad (1)$$

Que pedimos a la matriz P?

$$I \xrightarrow{P} A$$

- cercano a A
- de rápido cálculo (matrices esparsas)
- que acelere la convergencia del nuevo x_{k+1} calculado a partir de x_k precedente.

$$Px_{k+1} = (P-A)x_k + b \quad (2)$$

Ahora:

(2) - (1)

$$P(x_{k+1} - x) = (P-A)(x_k - x)$$

$$P\, e_{k+1} = (P-A)\, e_k$$

$$\Rightarrow e_{k+1} = P^{-1}(P-A)\, e_k = (I - P^{-1}A)\, e_k$$

$$\Rightarrow e_{k+1} = M e_k$$

La velocidad de convergencia significa q' tan rápido $x_k \to x$ o sea que $e_k \to 0$.

La velocidad de convergencia depende enteramente de M (o sea P)!!

Convergencia

Llegamos a

$$e_{k+1} = M e_k$$

significa multiplicar por M todo k, con lo que terminamos con una vieja conocida fórmula

$$e_k = M^k e_0$$

Nos interesa saber si $e_k \to 0$, y qué tan rápido!!

Cómo puedo analizar la convergencia con las potencias de M? $\longrightarrow$ los autovalores!!

Reescribimos ~~…~~ usando la base de autovectores de M y sus autovalores:

$$e_k = b_1 (\lambda_1)^k u_1 + b_2 (\lambda_2)^k u_2 + \ldots + b_n (\lambda_n)^k u_n$$

y que precisamos?

$\forall \; |\lambda(M)| < 1$ - esto asegura convergencia

Qué tan rápido converge?

si todos $|\lambda| < 1$, el autovalor más lento será aquel $\lambda \to 1$ o sea el máximo.

Recordamos q/ llamamos RADIO ESPECTRAL $\rho(M) = \max \{|\lambda(M)|\} < 1$

La componente b_1, suponiendo $\rho(M) = \lambda_1$, depende de e_0. Este factor decrece con λ_1^k.

(*) También podemos verlo usando ~~las~~ cualquier norma inducida $\|\cdot\|$.

$$\rightarrow \quad \|e_k\| = \|M^k e_0\| \leq \|M^k\| \|e_0\| \leq \|M\|^k \|e_0\|$$

Si $\|M\| < 1 \rightarrow$ el error e_k tiende a 0, el método iterativo converge.

Cota del error

- $\|e_k\| \leq \|M\|^k \|e_0\| = \|M\|^k \|x_0 - x\|$
- $\|e_k\| \leq \dfrac{\|M\|^k}{1-\|M\|} \|x_1 - x_0\|$ puedo acotar el error sin conocer x.

Condiciones para $\|M^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

- M diagonalizable

$$M = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} C^{-1}, \quad M^k = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow M^k \to 0 \iff \max_{1\leq i\leq m} |\lambda_i| < 1 \iff \rho(M) < 1$$

- M hermitiana, $\rho(M) = \|M\|_2$

$$\Rightarrow M^k \to 0 \iff \|M\|_2 < 1$$

- Luego, en general decimos que:

Si $M \in \mathbb{K}^{m\times m}$

$$\rho(M) < 1 \iff \lim_{k\to\infty} M^k = 0$$

Proposición:

$$\rho(M) = \inf_{\|\cdot\|} \|M\|$$ El ínfimo sobre todas las normas

Significa que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \|\cdot\|$ tal que $\rho(M) \leq \|M\| \leq \rho(M) + \epsilon$ (3)

Demostración:

Dado $M \in \mathbb{K}^{m\times m}$

$$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^m - \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

Luego $\exists\, v \in \mathbb{C}^m$ autovector de M de autovalor λ, con $\rho(M) = |\lambda|$

y $$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^m - \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Mv\|}{\|v\|} = |\lambda| = \rho(M)$$

$\Rightarrow \|M\| \geq \rho(M)$ que era lo que teníamos a la izquierda de (3)

Eleccion de P

- P = diagonal de A (Jacobi)
- P, triangular/~~identidad~~ diagonal de A (Gauss-Seidel)

Ejemplo:

$\cancel{A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{Jacobi}}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = P^{-1}(P-A)$$

$$M_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P x_{k+1} = (P-A) x_k + b$$

$$x_{k+1} = M x_k + P^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_2^k + \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{x_1^k}{2} + \frac{x_3^k}{2} + \frac{1}{2} b_2 \\ \frac{x_2^k}{2} + \frac{1}{2} b_3 \end{bmatrix}$$

En general

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right) 1/a_{ii}$$

$P_{GAUSS\text{-}SEIDEL}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$X_{k+1} = M_{GS} X_k + P^{-1} b \; ?$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x_2^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} x_2^k + \frac{1}{2} x_3^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} x_2^k + \frac{1}{4} x_3^k & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{4} b_1 + \frac{1}{2} b_2 \\ \frac{1}{8} b_1 + \frac{1}{4} b_2 + \frac{1}{2} b_3 \end{bmatrix}$$

Vamos a reescribir

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x_2^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x_2^k + \frac{1}{2} b_1\right) + \frac{1}{2} x_3^k & \\ 0 & \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} x_2^k + \frac{1}{2} b_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x_3^k + \frac{1}{2} b_2\right)} & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2\, b_1 \\ 1/2\, b_2 \\ 1/8\, b_1 + \frac{1}{4} b_2 + \frac{1}{2} b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x_2^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} x_1^{k+1} + \frac{1}{2} x_3^k & \\ 0 & \frac{1}{4} x_1^{k+1} + \frac{1}{4} x_3^k + \frac{1}{4} b_2 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2\, b_1 \\ 1/2\, b_2 \\ 1/2\, b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x_2^k \\ 0 & \frac{1}{2} x_1^{k+1} + \frac{1}{2} x_3^k - \\ 0 & \frac{1}{2} x_2^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2\, b_1 \\ 1/2\, b_2 \\ 1/2\, b_3 \end{bmatrix}$$

La fórmula general de Gauss-Seidel es

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

Convergencia del ejemplo

Autovalores de $M_J = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \rho(M_J) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = 0{,}7071$

Autovalores de $M_{GS} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \to \rho(M_{GS}) = \left|\frac{1}{2}\right| = 0{,}5$

La convergencia de M_{GS} es más rápida: $\rho(M_{GS}) < \rho(M_J)$

En general, para esta familia de matrices,

λ_{max} @ Jacobi $= \cos \frac{\pi}{n+1}$

Eleva al cuadrado

λ_{max} @ Gauss-Seidel $= \left(\cos \frac{\pi}{n+1}\right)^2 \to \lambda < 1 \to$ 1 iter GS = 2 iter J

λ_i @ Jacobi

$$\lambda(A) = 2 - 2\cos j\theta = 2 - 2\cos j\frac{\pi}{n+1}$$

$$M = I - P^{-1}A = I - \frac{1}{2}A$$

$$\lambda_j(M) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_j(A) = \cos j\frac{\pi}{n+1}$$

$$\lambda_{max} = \cos\frac{\pi}{n+1} = \longrightarrow \lambda_{max}(M) = \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N+1}\right)^2$$

$$\lambda_{min} = \cos\frac{n\pi}{n+1} = -\lambda_{max}$$