

ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

1er Cuatrimestre 2023

Práctica N° 5: Métodos iterativos para sistemas lineales.

Ejercicio 1. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones.

Sugerencia: investigar los comandos $np.tril$, $np.triu$ y $np.diag$.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ acota inferiormente a toda norma de \mathbf{A} , sin utilizar normas complejas.

Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sea $\lambda = a + ib$ un autovalor de \mathbf{A} y sea $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

- a) Calcular \mathbf{Au} y \mathbf{Av} y probar que:

$$\|\mathbf{Au}\|_2^2 + \|\mathbf{Av}\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2).$$

- b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_2.$$

- c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|.$$

Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$, entonces λ^m es autovalor de \mathbf{B} .

Ejercicio 3. Considerar el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = (1, 2)^t$.

- a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.
- b) Sea \mathbf{J} la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de \mathbf{J} .
¿Contradice la convergencia del método?

- c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|\mathbf{J}\|$ sea < 1 .

Sugerencia: Considerar una base de autovectores de \mathbf{J} .

Ejercicio 4. Decidir para cada una de las siguientes matrices si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.

a) Mostrar que toda matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $|\det(\mathbf{B})| > 1$ tiene un autovalor λ , real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Probar que el método de Jacobi converge para todo sistema de 2×2 dado por una matriz simétrica y definida positiva.

Ejercicio 8. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{B}^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia del método de Jacobi aplicado a la resolución de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}$.

Ejercicio 9.

a) Sean $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con \mathbf{M} inversible. Probar que los autovalores de $-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda\mathbf{M} + \mathbf{N})$

b) Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1 + \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver un sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se propone el método iterativo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_n + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (1)$$

Siendo $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{M}$. Probar que si el método (1) converge a \mathbf{x} , entonces \mathbf{x} es solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- c) Hallar todos los valores de α para los cuales el método propuesto converge.
- d) ¿Qué restricción impondrían sobre α si se quiere garantizar que el error $\mathbf{e}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}$ satisfaga:

$$\|\mathbf{e}_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\mathbf{e}_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

Ejercicio 10. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $\mathbf{A}_n \mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ para

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2})^t.$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de \mathbf{A} ? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 11. (método SOR) Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.

- a) Demostrar que el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es equivalente al sistema $(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})\mathbf{x} = ((1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U})\mathbf{x} + \omega\mathbf{b}$, cualquiera sea $\omega \neq 0$.
- b) Considere el método iterativo $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ con

$$\mathbf{B}(\omega) = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}((1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}).$$

Probar que $\det(\mathbf{B}(\omega)) = (1 - \omega)^n$ y concluir que si el método converge $\Rightarrow \omega \in (0, 2)$.

- c) Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Compare los métodos para $\omega = \frac{3}{2}$ y $\omega = 1$ ¿Cuál elegiría y por qué?

Ejercicio 12. Considerar la forma cuadrática $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \eta$.

- a) Probar que si $\mathbf{x} = (x, y)^t$, entonces f puede escribirse en forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \mathbf{x} + \eta,$$

para cierta \mathbf{A} simétrica.

- b) Probar que los puntos críticos de f son las soluciones del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- c) Probar que f tiene un mínimo (único) si y sólo si \mathbf{A} es definida positiva (estricta). Inversamente: f tiene un máximo (único) si y sólo si \mathbf{A} es definida negativa.
- d) Probar que si \mathbf{A} tiene autovalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entonces f tiene un punto silla (hallar una dirección en la que tenga un máximo y una dirección en la que tenga un mínimo).
- e) ¿Cambia algo si la cuadrática está definida sobre n variables x_1, \dots, x_n ?

Ejercicio 13. Dada la analogía delineada en el ejercicio anterior, cuando \mathbf{A} es simétrica y definida positiva, tiene sentido pensar el problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como un problema de minimización. Los métodos de descenso toman un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ y realizan la iteración: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^k \mathbf{v}^{(k)}$, donde $\mathbf{v}^{(k)}$ es una *dirección de descenso* elegida en cada paso y t^k es un parámetro que indica cuánto moverse lo largo de la dirección $\mathbf{v}^{(k)}$.

- Probar que la dirección de máximo descenso de una función f en un punto $\mathbf{x}^{(0)}$ está dada por: $-\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$.
Sug.: recordar la derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{v} puede calcularse como $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$.
- Mostrar que para una función cuadrática como la del ejercicio anterior el gradiente negativo es el residuo: $-\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.
- El método del gradiente es un método de descenso en el que se elige como dirección de descenso el gradiente negativo: $\mathbf{v}^{(k)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{r}^{(k)}$. Probar que para f cuadrática, la función $\varphi(t) = f(\mathbf{x}^{(k)} + t\mathbf{r}^{(k)})$ alcanza un mínimo en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{Ar}^{(k)}}$. [Obs.: la función φ es la cuadrática restringida a la recta con vector director $\mathbf{r}^{(k)}$ que pasa por $\mathbf{x}^{(k)}$].

Ejercicio 14. En el contexto del Ejercicio 13, mostrar que si la función φ se define como $\varphi(t) = f(\mathbf{x}^{(k)} + t\mathbf{d}^{(k)})$, donde $\mathbf{d}^{(k)}$ es una dirección cualquiera, entonces el mínimo de φ se alcanza en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)t}\mathbf{Ad}^{(k)}}$.

Ejercicio 15. Implementar el método del gradiente descrito en el Ejercicio 13, eligiendo en cada paso el valor de t óptimo. El algoritmo debe detenerse cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia dada. Además, debe almacenar toda la sucesión de puntos generada y devolverla en forma de matriz de $N \times n$, donde n es el tamaño del problema y N el número de iteraciones realizadas.

Ejercicio 16.

- Aplicar el método del gradiente a la resolución del sistema: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- Si X es la matriz que devuelve el método (cada fila es una iteración), correr el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x      = np.linspace(0,6,100)
y      = np.linspace(-2,2,100)
5 xx,yy = np.meshgrid(x,y)
zz      = np.zeros(xx.shape)
for i in range(xx.shape[0]):
    for j in range(yy.shape[1]):
        vec      = np.array([xx[i,j],yy[i,j]])
10         zz[i,j] = 0.5*vec@A@vec - b@vec
plt.contour(xx,yy,zz)
```

```
plt.plot(X[:,0],X[:,1], '*-')  
plt.show()
```

Interpretar qué hace cada línea.

c) ¿Qué se muestra en el gráfico obtenido? ¿Qué se observa?