Repaso

Prod matricial para vectores verticales

En $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t \cdot y$

$\mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i = \overline{x^t} \cdot y$

$= x^* \cdot y$

Def:

1) Dado V un $\mathbb{K}$-ev, un p.i es una función $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

i) $\phi(x+x', y) = \phi(x,y) + \phi(x', y)$ $\quad \forall x, x', y \in V$

ii) $\phi(x, \alpha y) = \alpha\, \phi(x,y)$ $\quad \forall x, y \in V, \alpha \in k$

iii) $\phi(x,y) = \overline{\phi(x,y)}$

iv) $\phi(x,x) > 0$ si $x \neq 0$

2) Una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

i) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$ y $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in V$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

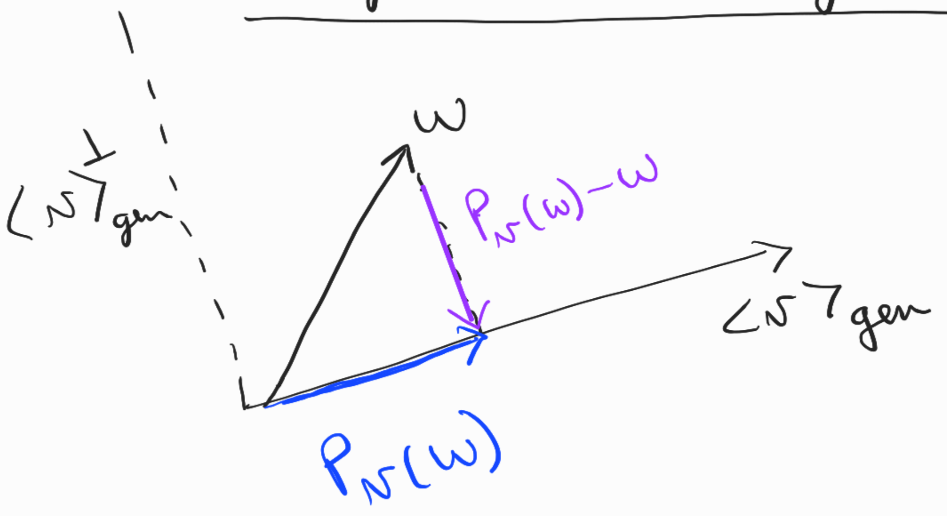
Proposición: Dado V un $\mathbb{K}$-ev con p.i, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ es una norma.
Además vale la desigualdad de Cauchy Schwarz:

$$|\langle x, x\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Def: Dado V un $\mathbb{K}$-ev con p.i.
Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice ortogonal si $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$.
Se dice normal si $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
y se dice ortonormal si es ortogonal y normal.

Si trabajamos con $\langle \, , \rangle$ habitual en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ la norma inducida por ese p.i es $\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Proyección ortogonal:



$\langle v\rangle_{gen}^{\perp}$ subespacio ortogonal a $\langle v\rangle_{gen}$ es decir $\langle v\rangle_{gen}^{\perp}=\{u\in\mathbb{R}^2 : \langle u,v\rangle=0\}$

Buscamos $P_v(w)=\beta\cdot v$:

$P_v(w)-w\in\langle v\rangle_{gen}^{\perp}$, es decir

$$\langle P_v(w)-w, v\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \beta v - w, v\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\beta}\langle v,v\rangle-\langle w,v\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\beta}=\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \Rightarrow \beta=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

Se define $P_v(w)=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$

En $\mathbb{R}^n$ $\quad P_v(w) = \dfrac{v^t \cdot w}{\|v\|_2^2} \cdot v$

Acá pensamos a los vectores verticales

$\Rightarrow v^t \cdot w = (v_1 \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

$\mathbb{C}^n$ $\quad P_v(w) = \dfrac{v^* \cdot w}{\|v\|_2^2} \cdot v$

Acá de nuevo los vectores son verticales

$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{en } \mathbb{C}}}{\langle v, w \rangle =} (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

Vimos también que si $B = \{v_1 \dots v_n\}$ es una BON $\Rightarrow$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{con } \alpha_i = \langle v_i, w \rangle$$
$$= v_i^* \cdot w$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, w \rangle \cdot v_i$$

$\Rightarrow P_{v_i}(w) = \dfrac{\langle v_i, w \rangle}{\|v_i\|_2^2} \cdot v_i = (v_i^* \cdot w) \cdot v_i$

$\|v_i\|_2^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{n} P_{v_i}(w).$$

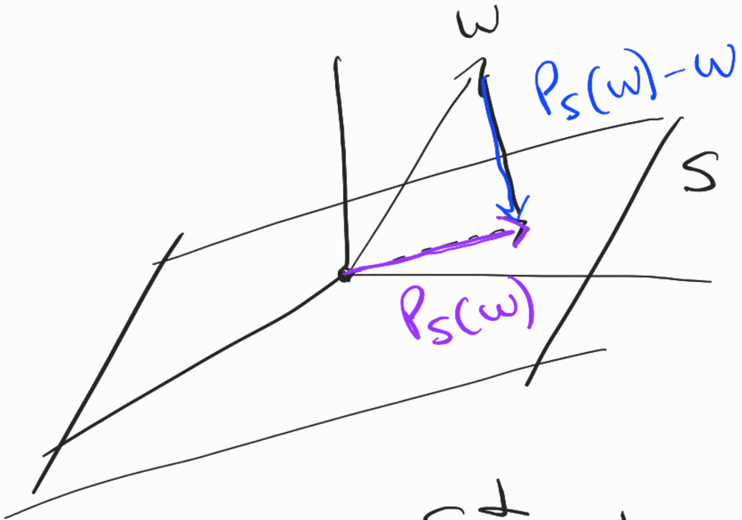
Además vimos que $\|w\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$.

<u>Proyección a un subespacio:</u>

Sea $S \subseteq V$ un subespacio de V.

$S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ con $\{v_1, \dots, v_k\}$ base ortogonal

Queremos definir $P_S(w)$: proyección ortogonal de w en S. $P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$



de manera que

$$P_S(w) \in S^{\perp}$$

donde $S^{\perp} = \{u \in V : \langle u, s \rangle = 0 \ \forall s \in S\}$

$= \{u \in V : \langle u, v_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \dots, k\}$

¿ Quiénes serán los α_i's? Queremos

$$\langle w - P_S(w), v_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots k$$

$$\underbrace{\langle w, v_j \rangle}_{w^* v_j} = \langle \underbrace{P_S(w)}_{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}, v_j \rangle = \overline{\alpha_j} \cdot \|v_j\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = v_j^* \cdot w \,/\, \|v_j\|^2 = \frac{v_j^* \cdot w}{\|v_j\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i^* w}{\|v_i\|^2} \right) . v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w).$$

Ojo: Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ no fuera ortogonal no se escribe así $P_S(w)$.

Repaso: Gram Schmidt.

Dado $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.i., construimos

$\{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormal:

$$\langle v_1 \rangle_{gen} = \langle q_1 \rangle_{gen}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{gen} = \langle q_1, q_2 \rangle_{gen}$$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{gen} = \langle q_1, \dots, q_n \rangle_{gen}$$

- $q_1 = \dfrac{v_1}{\|v\|_1}$

- $\tilde{q}_2 = v_2 - P_{q_1}(v_2) = v_2 - \langle q_1, v_2 \rangle \cdot q_1$

  $q_2 = q_2 / \|\tilde{q}_2\|$

- $\tilde{q}_3 = v_3 - P_{q_1}(v_3) - P_{q_2}(v_3)$

  $= v_3 - \langle q_1, v_3 \rangle \cdot q_1 - \langle q_2, v_3 \rangle \cdot q_2$

  $= v_3 - P_{\langle q_1, q_2 \rangle}(v_3)$

  $q_3 = \tilde{q}_3 / \|q_3\|$

$\vdots$

$S_{k-1} = \langle q_1 \dots q_{k-1} \rangle$

- $\tilde{q}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{q_i}(v_k) = v_k - P_{S_{k-1}}(v_k)$

  $q_k = \tilde{q}_k / \|q_k\|$

Descomposición QR:

Vimos que en LU, la matriz U puede tener entradas con crecimiento descontrolado.

Sería bueno tener una descomposición con matrices de norma controlada.

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible

$$A = \left(a_1 | \cdots | a_n \right)$$ con $\{a_1, \dots, a_n\}$ li

Usando Gram Schmidt obtenemos

$$Q = \left(q_1 | \cdots | q_n \right)$$ donde

$$\langle a_1 \rangle = \langle q_1 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$$

Esto dice que

$$a_1 = r_{11}\, q_1 \qquad r_{11} \neq 0$$

$$a_2 = r_{12}\, q_1 + r_{22}\, q_2 \qquad r_{22} \neq 0$$

$$\vdots$$

$$a_k = r_{1k}\, q_1 + r_{2k}\, q_2 + \cdots + r_{kk}\, q_k \qquad r_{kk} \neq 0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} r_{in}\, q_i \qquad r_{nn} \neq 0$$

Matricialmente,

$$\underbrace{\left(a_1 | \cdots | a_n\right)}_{A} = \underbrace{\left(q_1 | \cdots | q_n\right)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

donde Q es una matriz unitaria

$$\Rightarrow \|Q\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \|Q^t\|_2 = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cond}_2(Q) = 1.$$

y R es triangular superior.

Proyectores:

$\{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonales

Sea $S \leq V$ subespacio, $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$P_S : V \longrightarrow S$ es una t.l. (ejercicio)

$$P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, w \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

¿Qué pasa si hacemos

$P_S^2 = P_S \circ P_S$? Sea $w \in V$

Para $S = \langle v \rangle$

$$P_v(P_v(w)) = P_v\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v\right)$$

$$= \left\langle v, \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \right\rangle \cdot v$$

$$= \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot \langle v, v \rangle \cdot v$$

$$= \langle v, w \rangle \cdot v$$

$$\Rightarrow \quad P_v(P_v(w)) = P_v(w)$$

Si $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ $(v_1 \perp v_2)$

$$P_{v_2}(P_{v_1}(w)) = P_{v_2}\left(\frac{\langle v_1, w \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1\right)$$

$$= \left\langle v_2, \frac{\langle v_1, w \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 \right\rangle \cdot v_2$$

$$= \frac{\langle v_1, w \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} \cdot v_2 = 0$$

En general, si $S = \langle v_1, \dots v_k \rangle$

$$P_S(P_S(w))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}\left(\sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(w)\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{k} \underbrace{P_{v_i}(P_{v_j}(w))}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(P_{v_i}(w))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w) = P_S(w).$$

¿Cómo es la matriz de esta tl en una base ortogonal de S?

Si $S = \langle v \rangle$

$$P_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v = \frac{v^*}{\|v\|} \cdot w \cdot \frac{v}{\|v\|}$$

En $\mathbb{C}^n$: $e_1 \ldots e_n$ base canónica

$$P_v(e_i) = \frac{v^*}{\|v\|} \cdot e_i \frac{v}{\|v\|} = \frac{\overline{x_i}}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}$$

$$= \frac{v}{\|v\|} \cdot \left(\frac{\overline{x_1}}{\|v\|}, \ldots, \frac{\overline{x_n}}{\|v\|} \right) \cdot e_i = \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v^*}{\|v\|} \cdot e_i$$

Recordar que los vectores son verticales!

$$\Rightarrow [P_v]_{EE} = \underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{\in \mathbb{K}^{n\times 1}} \cdot \underbrace{\frac{v^*}{\|v\|}}_{\in \mathbb{K}^{1\times n}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

OBS: $rg([P_v]_{EE}) = 1$.

Ejemplo: Calcular $P_{(1,1,1)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$P_{(1,1,1)}(x_1 x_2 x_3) = \frac{<(1,1,1)(x_1 x_2 x_3)>}{\|(1,1,1)\|^2} \cdot (1,1,1)$$

$$= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1)$$

$$[P_{\underbrace{(1,1,1)}_{v}}]_{EE} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$v \Downarrow$

$\|v\| = \sqrt{3}$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Si ahora $S = \langle v_1 \cdots v_k \rangle$ base ortogonal

$$P_S(w) = \sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(w)$$

$$P_S(e_i) = \sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j}{\|v_j\|^2} \cdot \frac{v_j^*}{\|v_j\|^2} \cdot e_i$$

hecho para 1 solo vector

$$= \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \;\middle|\; \frac{v_2}{\|v_2\|} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{v_n}{\|v_n\|} \right) \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1}/\|v_1\| \\ \hline \vdots \\ \hline \overline{v_n}/\|v_n\| \end{pmatrix} \cdot e_i$$

$$\Rightarrow [P_S]_{EE} = \underbrace{\left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \;\middle|\; \frac{v_2}{\|v_2\|} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{v_1}/\|v_1\| \\ \hline \vdots \\ \hline \overline{v_n}/\|v_n\| \end{pmatrix}}_{C^*}$$

<u>OBS:</u> $[P_S]_{EE}$ es hermitiana.

<u>Ejemplo:</u> $S = \langle \underbrace{(1,0,1,0), (0,1,0,1)}_{\text{base ortogonal de } S} \rangle$

$\Rightarrow P_S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^4$ viene dada por

$$P_S(w) = P_{(1,0,1,0)}(w) + P_{(0,1,0,1)}(w)$$

$$[P_S]_{EE} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nota $\quad rg\left([P_S]_{EE}\right) = 2$

que sabemos así debe ser ya que

$$rg\, [P_S]_{EE} = \dim(\operatorname{Im} P_S) = \dim S = 2.$$

<u>Proyectores</u>: Dado V un $\mathbb{K}$-ev.

<u>Definición</u>: Una t.l. $P : V \rightarrow V$ se dice proyector si $P^2 = P$. $(P^2 = P \circ P)$

<u>Proposición</u>: Si $V = \mathbb{K}^n$, $P: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es proyector si y solo si $\forall B$ base de $\mathbb{K}^n$, $[P]^2_{BB} = [P]_{BB}$.

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow$) P es proyector $\Rightarrow P^2 = P$

$\Rightarrow \forall B$ base $[P^2]_{BB} = [P]_{BB}$

Veamos que $[P^2]_{BB} = [P]^2_{BB}$

Por definición de matriz en una base:

$$[P^2]_{BB} (w)_B = (P^2(w))_B$$

$$[P]^2_{BB} (w)_B = [P]_{BB} [P]_{BB} (w)_B$$

$$= [P]_{BB} (P(w))_B$$

$$= (P(P(w)))_B = (P^2(w))_B$$

$$\Rightarrow [P^2]_{BB} = [P]^2_{BB}.$$

$\Leftarrow$) Si $[P]^2_{BB} = [P]_{BB}$ $\forall$ B base

$\Rightarrow [P^2]_{BB} = [P]_{BB}$ "

$\Rightarrow P^2 = P$.

<u>Alguna propiedades:</u> $P: V \to V$ una t.l. , V un k-ev.

1) Si P es proyector $\Rightarrow P(v) = v$
$\forall v \in \operatorname{Im} P$.

<u>Dem:</u> Sea $v \in \operatorname{Im} P \Rightarrow \exists w \in V$:

$$\underbrace{P(w) = v}_{} \Rightarrow \underbrace{P(P(w))}_{} = P(v)$$

por ser $P^2 = P$

$$P(P(w)) = P(w) = v \Rightarrow P(v) = v.$$

2) Si $P(v) = v \; \forall v \in \operatorname{Im} P \Rightarrow$ P es proyector

Sea $w \in V \Rightarrow v = P(w) \in \operatorname{Im} P$

$$\overset{\text{por hip}}{\Rightarrow} P(P(w)) = P(w)$$

$\Rightarrow \quad P^2 = P$ (w era cualquiera)

Probamos entonces:

Proposición: $P: V \to V$ una t.l es un proyector si y sólo si $P(v)=v \; \forall v \in \operatorname{Im} P$.

3) Si P es proyector $\Rightarrow \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Nu} P = \{0\}$

Dem:

Sea $v \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Nu} P \Rightarrow v = P(w)$ con $w \in V$

y $P(v) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{P(v)}_{=0} = \underbrace{P^2(w)}_{=P(w)=v} \Rightarrow v = 0.$$

4) P proyector $\Rightarrow v - P(v) \in \operatorname{Nu} P \quad \forall v \in V$

Dem:

$$P(v - P(v)) = P(v) - \underbrace{P^2(v)}_{=P(v)} = 0.$$

5) P proyector $\Rightarrow$ $\mathrm{Nu}\,P \oplus \mathrm{Im}\,P = V$

Dem: Ya vimos que $\mathrm{Nu}\,P \cap \mathrm{Im}\,P = \{0\}$

Veamos que si $v \in V \Rightarrow \exists\, v_1 \in \mathrm{Nu}\,P$
$v_2 \in \mathrm{Im}\,P$:

$v = v_1 + v_2$.

$$v = \underbrace{v - P(v)}_{\text{por 4) está en Nu}\,P} + \underbrace{P(v)}_{\in \mathrm{Im}\,P} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v - P(v) \\ v_2 = P(v) \end{matrix} \text{ sirve.}$$

Proposición: Dados S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{K}^n$ tales que $\mathbb{K}^n = S_1 \oplus S_2$.
Entonces se puede construir $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ proyector tal que $\mathrm{Nu}\,P = S_1$, $\mathrm{Im}\,P = S_2$.

Dem: S_1 y S_2 están en suma directa

$\Rightarrow$ Si $\{v_1 \dots v_k\}$ es una base de S_1

y $\{v_{k+1} \dots v_n\}$ " de S_2

tenemos que $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $S+T = \mathbb{K}^n$.

Definimos $P(v_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$

$P(v_i) = v_i \quad \forall i = k+1, \dots n$.

$\operatorname{Im} P = \langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle_{gen} = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle_{gen}$
$= S_2$

$\operatorname{Nu} P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{gen} = S_1$

Además $P(v) = v \ \forall v \in \operatorname{Im} P$

$\Rightarrow$ P es proyector.

<u>Definición</u>: Un proyector P se dice ortogonal si $\operatorname{Nu} P \perp \operatorname{Im} P$.

Es decir si Nu P es ortogonal a Im P.

Esto quiere decir q' $\forall v \in \operatorname{Nu} P$ y $w \in \operatorname{Im} P$ v y w son ortogonales ($\langle v, w \rangle = 0$).

Ejemplos

1) Dada $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, definir P proyector:

$$\mathrm{Im}\, P = \langle (1,1,0)\ (0,1,1) \rangle_{gen}$$

$$\mathrm{Nu}\, P = \langle (1,1,1) \rangle_{gen}$$

$\mathrm{Nu}\, P$ sería S_1 y $\mathrm{Im}\, P$ sería S_2 de la proposición.

Definimos

$$P(1,1,0) = (1,1,0)$$

$$P(0,1,1) = (0,1,1)$$

$$P(1,1,1) = (0,0,0).$$

Notar que P no es ortogonal ya que

$$\langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (1,1,0) \not\perp (1,1,1).$$

2) a) Construir P proyector tal que

$$\mathrm{Im}\, P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

Definimos $P(1,2,3) = (1,2,3)$

$P(0,1,0) = (0,1,0)$

y completo a una base de $\mathbb{R}^3$ con

$(0,0,1)$

$B = \{(1,2,3), (0,1,0)\ (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Como no queremos agregar cosas en $\mathrm{Im}\, P$, definimos

$$P(0,0,1) = (0,0,0)$$

ó más generalmente podemos definir

$$P(0,0,1) \in \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

De esta manera tendremos que

Si $w \in \operatorname{Im} P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$

$$w = \alpha (1,2,3) + \beta (0,1,0)$$

$$\to P(w) = \alpha\, P(1,2,3) + \beta\, P(0,1,0)$$
$$= \alpha \cdot (1,2,3) + \beta\, (0,1,0) = w$$

y por lo tanto P será proyector

b) Si ahora quiero definir un P proyector ortogonal:

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

Primero ortogonalizo esta base de $\operatorname{Im} P$:

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,0,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

La extiendo a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{ \overbrace{(1,0,3), (0,1,0)}^{\text{base de } \operatorname{Im} P}, (-3,0,1) \}$$

es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Definimos P:

$$P(1,0,3) = (1,0,3)$$

$$P(0,1,0) = (0,1,0)$$

$$P(-3,0,1) = (0,0,0)$$ (o más general en $\langle (1,0,3),(0,1,0) \rangle_{gen}$)

Verificar que P es proyector y que

$$\mathrm{Nu}\, P \perp \mathrm{Im}\, P.$$

(alcanza con ver que

$\langle (-3,0,1),(1,0,3) \rangle = 0$

y $\langle (-3,0,1),(0,1,0) \rangle = 0$).