Diagonalización:

Matrices diagonales: Se dice que una matriz $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonal si $d_{ij}=0$ para todo $i \neq j$.

Ej: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es diagonal

$D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ es diagonal

1) ¿Cómo son las potencias de una matriz diagonal?

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

2) ¿Cómo es la inversa de una matriz diagonal?

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ porque

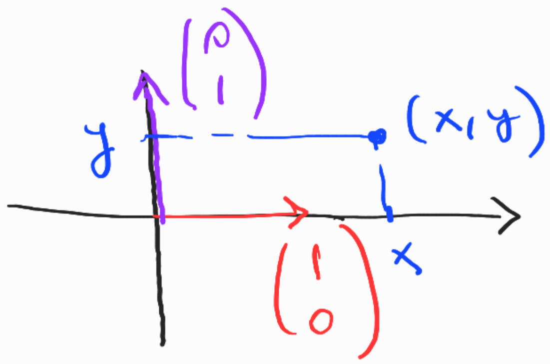
$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

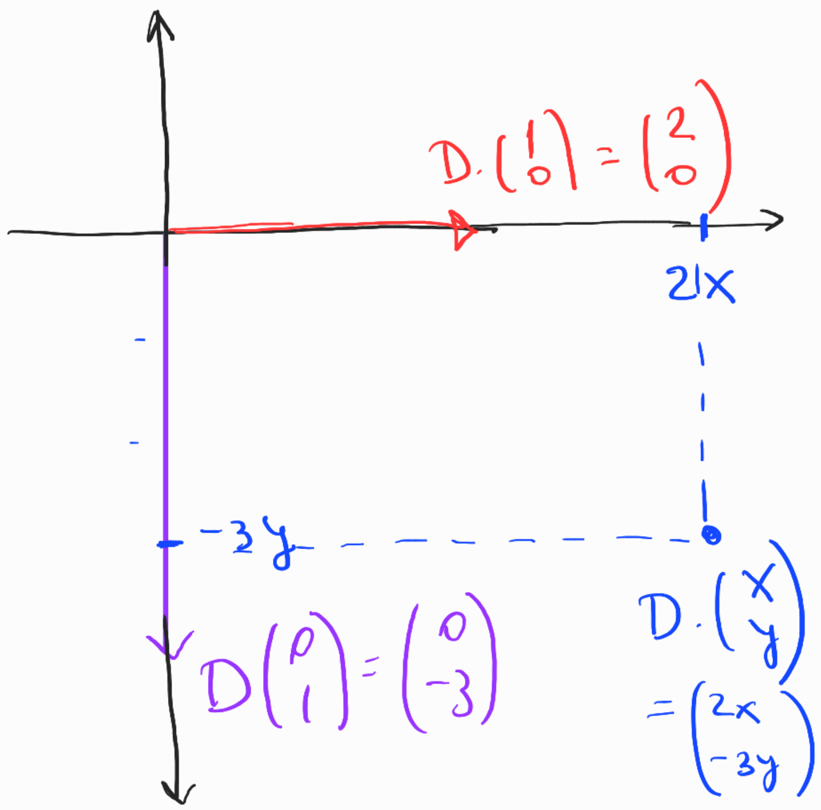
3) ¿Qué le hace D a un vector cualquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Veamos que

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





Si tomamos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, lo podemos pensar como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= x \cdot \underbrace{D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y \cdot \underbrace{D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

por propiedades de producto de matrices

$$= 2 \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\, y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces dado un $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, D estira el x al doble (2) y estira al y al triple y lo da vuelta (-3).

4) ¿Cómo calculo el det D?

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -6.$$

Luego, en general, si $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ entonces:

a) Es fácil hacer

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}$$

b) Es fácil hacer

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$ si los d_i's $\neq 0$

c) Es fácil interpretar geométricamente $D \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ......

d) Es fácil calcular

$$\det D = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n .$$

Matrices diagonalizables:

Consideramos ahora la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

¿Se podrán encontrar vectores v y w que funcionen como $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ para cuando D era diagonal?

Es decir, ¿podemos encontrar v y $w \in \mathbb{R}^2$ de manera que

$$A\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \underbrace{d_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}_{\text{múltiplo de } \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}} \qquad d_1 \in \mathbb{R}$$

y

$$A\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = \underbrace{d_2\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}}_{\text{múltiplo de } \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}} \qquad d_2 \in \mathbb{R}$$

?

¡Veamos que sí!

En este caso sirven

a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es decir $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3(-1) \\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es decir $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$

¿Cómo encontramos esos v y w?

Dada A, buscamos un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$

y un vector $v \in \mathbb{C}^2$ de manera que

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad , \quad v \neq 0$$

Podemos plantear a mano

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

y buscamos un $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual existe una solución $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¡No parece fácil de resolver eso!

Pero vemos que eso es lo mismo que hacer:

$$\underbrace{\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_{2\times 2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde nos queda:

$$\left[\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Recordar que buscamos $\lambda\in\mathbb{R}$ y $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\vec{v}\neq\vec{0}$

Entonces empezamos por buscar λ.

Para eso buscamos los λ's para los cuales si miro la matriz

$$M=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-2&-3\\-2&\lambda-1\end{pmatrix}$$

el sistema $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

tiene alguna solución no nula.

Es decir debe ser M una matriz

<u>no</u> inversible, es decir $\det(M)=0$.

Entonces hacemos

$$\det M = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1) - 6 = 0$$

igualamos a cero

y buscamos λ que verifique esa ecuación:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda = 4$ y $\lambda = -1$ son las dos soluciones de $\det(\lambda I - A) = 0$

Esto nos dice que si resolvemos el sistema lineal homogéneo

$$(\lambda I - A)\, x = 0$$

para $\lambda = 4$ ó $\lambda = -1$, tendremos soluciones no nulas.

Llamamos

$$E_\lambda = \{v : (\lambda I - A)v = 0\} = NU(\lambda I - A)$$

al espacio de soluciones.

Si volvemos hacia atrás

$$(\lambda I - A)v = 0 \iff Av = \lambda v.$$

Es decir

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

Sabemos que si $\lambda = 4$ ó $\lambda = -1$

$E_4 = NU(4I - A)$ tiene solución

no nula, entonces

$$\dim E_4 \geq 1$$

Lo mismo para -1, sabemos que $\dim E_{-1} \geq 1$.

Calculemos una base de E_4 y E_{-1}.

$\lambda = 4$. $\quad (4I - A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = 3y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$E_4 = \{ (x, \tfrac{2}{3}x), \ x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x(1, \tfrac{2}{3}), \ x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1, \tfrac{2}{3}) \rangle = \langle (3, 2) \rangle$$

$\lambda = -1 \quad (-1I - A) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x + y = 0 \iff y = -x$.

$E_{-1} = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle$

En este caso decimos que $(3,2)$ es un autovector asociado al autovalor 4

$(1,-1)$ es un autovector asociado al autovalor (-1)

<u>Definición</u> Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A si existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$: $Av = \lambda v$. En este caso, decimos que v es un autovector asociado

al autovalor λ.

Vimos que:

<u>Observación</u>: Son equivalentes:

1) λ es autovalor de A.
$(\exists v \neq 0 : Av = \lambda v)$.

2) λ es raíz (o cero) de
$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

3) $Nu(\lambda I - A) \neq \{0\}$
(es decir $\dim Nu(\lambda I - A) \geq 1$).

En general, definimos
$$E_\lambda = Nu(\lambda I - A) = \{v : Av = \lambda v\}$$

Entonces:

$v \in E_\lambda - \{0\}$ si y sólo si v es autovector asociado al autovalor λ

Volviendo al ejemplo, teníamos:

$$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \,\vdots\, A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(4\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \,\vdots\, (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Es decir, conseguimos

$C = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$ (que es invertible, chequear)

y $D = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ diagonal de manera que

$$A \cdot C = C \cdot D$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

C inversible

En este caso se dice que la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

<u>Definición</u>: Dado $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$, decimos que A es diagonalizable en $\mathbb{k}$ si existe $C \in \mathbb{k}^{n \times n}$ inversible y $D \in \mathbb{k}^{n \times n}$ diagonal de manera que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$.

Recordemos ahora matriz de cambio de base y matriz de una transformación lineal.

Dado V un $\mathbb{K}$-e.v. con $\dim V = n$.
Si B y B' son dos base de V, entonces la matriz de cambio de base de B a B', que se nota $C(B,B')$ es aquella que hace que:

$$C(B,B')\,[v]_B = [v]_{B'}$$

Es decir, es una matriz que hace que si tengo $v \in V$, escrito en coordenadas de la base B me devuelve las coordenadas del mismo vector v pero en la base B'.

Por definición de $C(B,B')$ vemos

que si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y tomamos

$v = v_1 \Rightarrow [v_1]_B = e_1$

$$\Rightarrow \underbrace{C(B,B')\underbrace{[v_1]_B}_{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{Columna 1 de } C(B,B')} = [v_1]_{B'}$$

Columna 1 de $C(B,B') = [v_1]_{B'}$

Si repetimos esto para cada v_i:

$[v_i]_B = e_i \Rightarrow$

columna i de $C(B,B')$ es $[v_i]_{B'}$

es decir

$$C(B,B') = \left([v_1]_{B'} \;\middle|\; [v_2]_{B'} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [v_n]_{B'} \right)$$

<u>Ej</u>: $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2), (-1,1)\}$

y $B' = \{(0,2), (3,1)\}$

$\Rightarrow v_1 = (1,2)$ y $v_2 = (-1,1)$

Resuelvo

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow [v_1]_B = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right)$. Chequeamos:

$$\frac{5}{6}(0,2) + \frac{1}{3}(3,1) = (1,2) \quad ✓$$

y $[v_2]_B = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. Chequeamos:

$$\frac{2}{3}(0,2) - \frac{1}{3}(3,1) = (-1,1) \quad ✓$$

De manera análoga, dada

$T: V \to W$ una tl y

$B = \{v_1 \ldots v_n\}$ base de V

$B' = \{w_1 \ldots w_m\}$ base de W

$[T]_{BB'}$ es la matriz de la t.l. en bases B a B' y es aquella que satisface que

$$[T]_{BB'} [v]_B = [T(v)]_{B'}$$

luego usando de nuevo cada v_i en lugar de v, tenemos que:

La columna i de $[T]_{BB'}$ debe ser $[T(v_i)]_{B'}$, es decir:

$$[T]_{BB'} = \left([T(v_1)]_{B'} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [T(v_n)]_{B'} \right)$$

$$\in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Volvamos a nuestro ejemplo.

Vimos que $A \cdot C = C \cdot D$

donde $C = (v_1 \,\vdots\, v_2)$ inversible

con $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ con $d_1 = 4$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $d_2 = -1$

con $A v_1 = d_1 v_1$, $A v_2 = d_2 v_2$

y como C es inversible,

$B = \{ v_1, v_2 \}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Entonces, si llamamos $E=\{(1,0),(0,1)\}$ a la base canónica, podemos escribir $C = C(B,E)$ ya que:

$$C(B,E) = \left([v_1]_E \,\vdots\, [v_2]_E \right) = \left(v_1 \,\vdots\, v_2 \right)$$

Además si llamamos $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. asociada a la matriz A vemos que

$$T_A(v_1) = A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$T_A(v_2) = A v_2 = \lambda_2 v_2$$

Es decir $T_A(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2$

$$\Rightarrow [T_A(v_1)]_B = (\lambda_1, 0)$$

y $T_A(v_2) = 0 \cdot v_1 + d_2 \cdot v_2$

$\rightarrow [T_A(v_2)]_B = (0, d_2)$

con lo cual

$$[T_A]_{BB} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Juntando todo, podemos decir que escribir

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

es equivalente a escribir

$$\underbrace{[T_A]_{EE}}_{\text{convencerse que esto es igual a } A} = C(B,E) \cdot [T_A]_{BB} (C(B,E))^{-1}$$

Además, podemos ver que

$$[C(B,E)]^{-1} = C(E,B) \text{ ya que:}$$

$$C(B,E) \cdot C(E,B) = Id$$

(convencerse de esto también).

Luego,

$$[T_A]_{EE} = C(B,E)\, [T_A]_{BB}\, C(E,B).$$

Geométricamente esto me dice qué le hace A a los vectores de $\mathbb{R}^2$. Dados $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{C(E,B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B} \longrightarrow \text{me escribe } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ en coord de la base } B$$

(En el ej concreto de la base

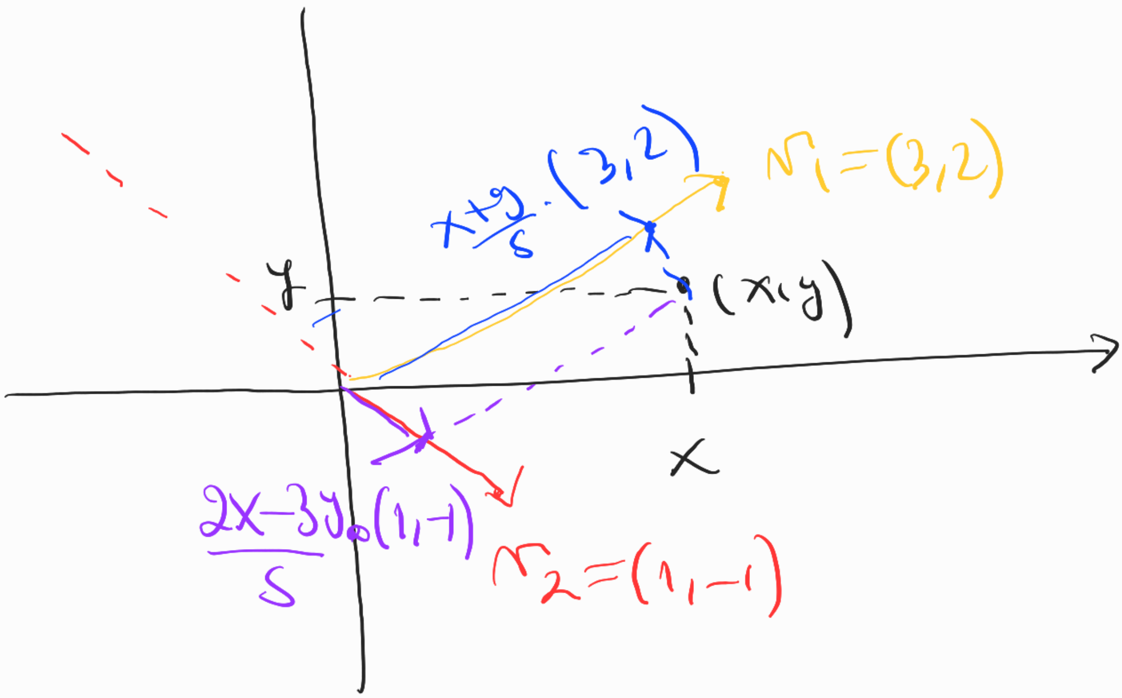
$B=\{(3,2),(1,-1)\}$, que es una

base de autovectores de $A=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$

les dejo comprobar que

$$(x,y)=\frac{x+y}{5}(3,2)+\frac{2x-3y}{5}\cdot(1,-1)$$

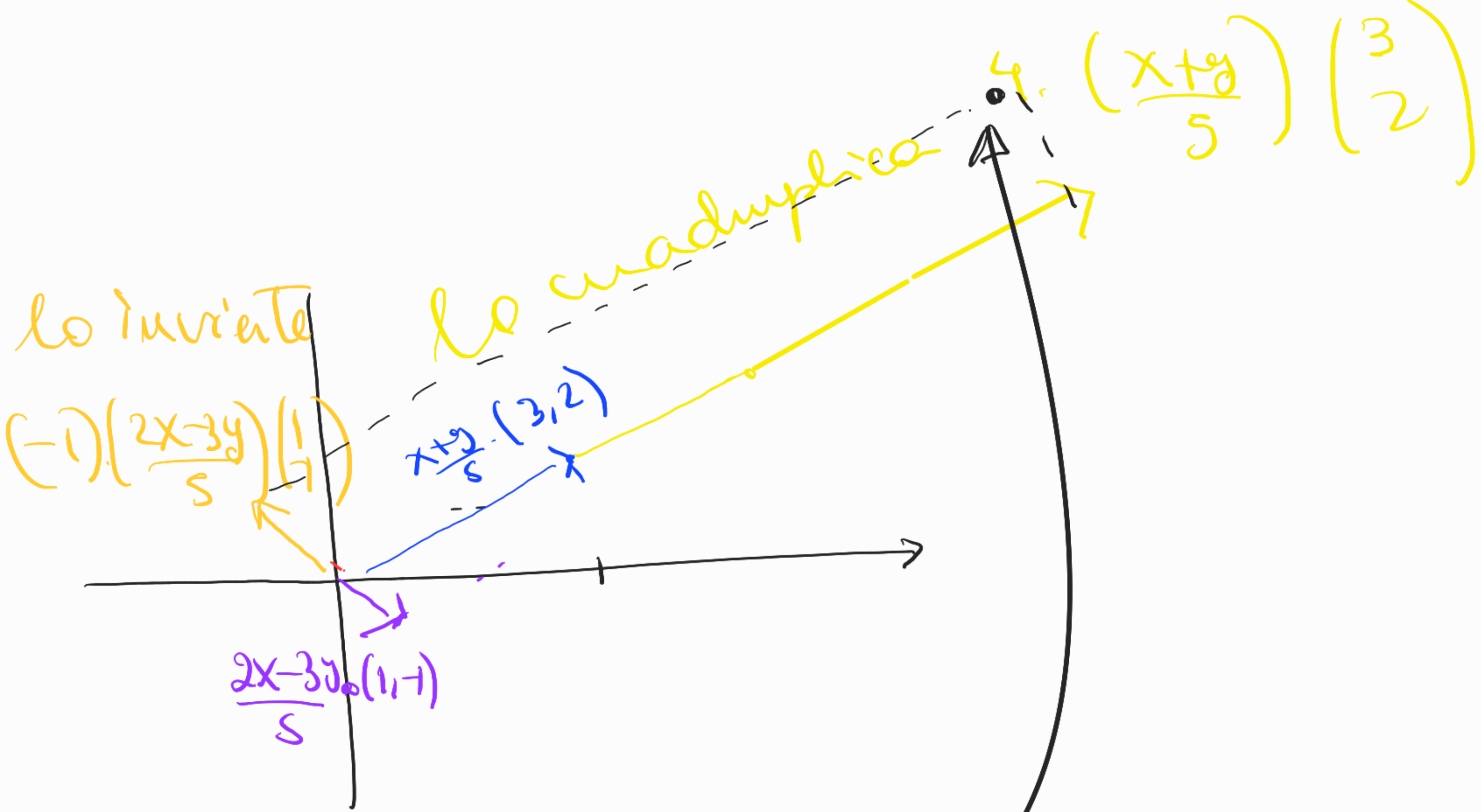
$$\Rightarrow [(x,y)]_B=\left(\frac{x+y}{5},\ \frac{2x-3y}{5}\right)$$)



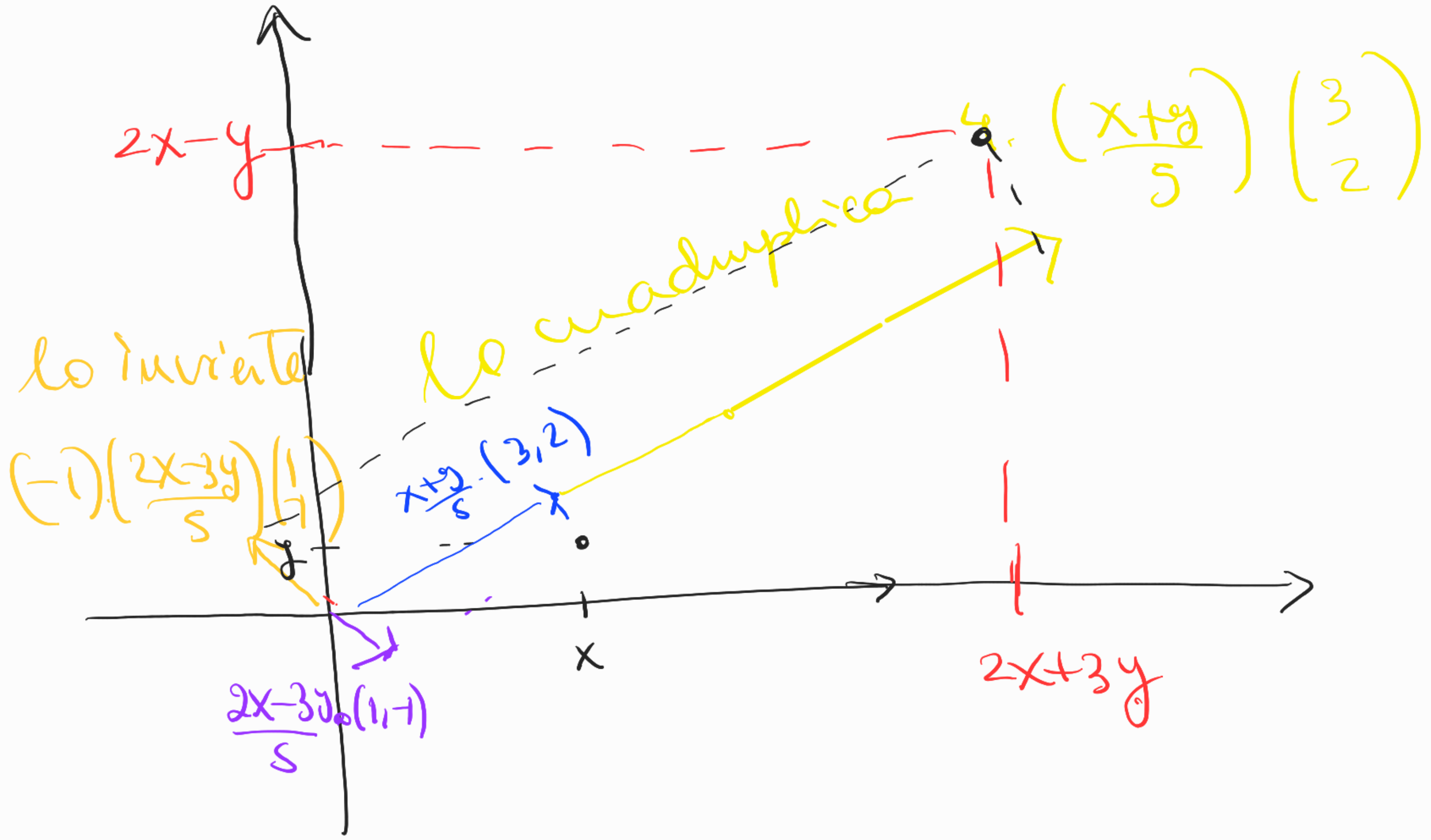
Escribimos (x,y) en coord de la base B

$$A\left(\underbrace{\frac{x+y}{5}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{\text{autovector de autovalor 4}}\right)=4\cdot\frac{x+y}{5}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$A\left(\underbrace{\frac{2x-3y}{5}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{autovector de autovalor } -1}\right) = -1\cdot\left(\frac{2x-3y}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$



$$[T_A]_{BB}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}\frac{4(x+y)}{5}\\[2ex] -1\frac{(2x-3y)}{5}\end{pmatrix}$$



Ahora vuelvo a las coordenadas en la canónica:

$$C(B,E)\,\underbrace{[T_A]_{BB}\,C(E,B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 4\,\dfrac{(x+y)}{5} \\ (-1)\,\dfrac{(2x-3y)}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4(x+y)/5 \\ -1(2x-3y)/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{12(x+y)-(2x-3y)}{5} \\[2ex] \dfrac{8(x+y)+2x-3y}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Con todo esto vemos que una matriz A es diagonalizable si y solo si existe una base B tal que si $T=T_A$ es la t.l. asociada a A se tiene:

La matriz $[T_A]_{BB}$ es diagonal.

Notar que entonces

$$[T_A]_{EE} = C(B,E)\,[T_A]_{BB}\,C(E,B)$$

donde

- $[T_A]_{EE} = A$
- Si $[T_A]_{BB} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

esto me dice que

$$T_A(v_1) = d_1 v_1$$

$$\vdots$$

$$T_A(v_n) = d_n \cdot v_n$$

$\Rightarrow B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de autovectores.

Además $d_1 \ldots d_n$ son los autovalores asociados con $v_1 \ldots v_n$ respectivamente.

- Entonces $C(B,E)$ tiene en sus columnas los autovectores.

y $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ como antes.

Podemos decir también que:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es diagonalizable en $\mathbb{K}$ si existe una base de autovectores de $\mathbb{K}^n$.

Ya que si existe B base tal que $[T_A]_{BB}$ es diagonal, vimos que B es una base de autovectores.

Y si B es una base de autovectores también vimos que $[T_A]_{BB}$ es diagonal.

Ejemplo 1 (y procedimiento para determinar si una matriz es diagonalizable)

Dada $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Buscamos λ: $(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

tenga solución no nula. Esto equivale a buscar λ:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & -5 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2)\left((\lambda-5)(\lambda-6)-20\right)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda-6\lambda+30-20)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2-11\lambda+10)$$

Buscamos los ceros: $(\lambda+2)(\lambda^2-11\lambda+10)=0$

$\iff \lambda+2=0$ ó $\lambda^2-11\lambda+10=0$

$\lambda=-2$ $\qquad$ $\lambda=\dfrac{11\pm\sqrt{121-40}}{2}$

Los ceros son $\qquad$ $=\dfrac{11\pm\sqrt{81}}{2}$

$-2, 1, 10.$

$=\dfrac{11\pm 9}{2} \begin{cases} 10 \\ 1 \end{cases}$

Se llama $\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$

polinomio característico de A.

A los ceros del polinomio característico se los llama **autovalores de A**.

En este caso -2, 1 y 10 son los autovalores de A.

Para encontrar las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $(\lambda I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

resolvemos ese sistema para cada **autovalor** λ encontrado.

$\lambda = -2$

Planteamos $-2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

Triangulamos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{F_1}{-4} \to F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 + 7F_1 \to F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que $rg(-2I-A) = 2 < 3$ y que esto me dice que tiene infinitas soluciones (como tenía que pasar!)

Entonces $9z = 0 \Rightarrow z = 0$

$y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z = 0$

Las soluciones son $(x, 0, 0) = x(1,0,0)$ $x \in \mathbb{R}$

Me sirve por ejemplo $(1,0,0)$, $(2,0,0)$ $(-3,0,0)$ .....

Y vemos que

$$(-2I-A)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

lo que nos dice que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

como buscábamos.

En este caso se dice que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es un **autovector** asociado al autovalor $\lambda=-2$.

Ahora para $\lambda=1$, hacemos

$$1\cdot I-A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-4&-5\\0&-4&-5\end{pmatrix}\underset{F_3-F_2\to F_3}{\sim}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-4&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Las soluc. son $3x=0 \Rightarrow x=0$

$$-4y-5z=0 \Rightarrow 5z=-4y$$
$$\Rightarrow z=\frac{-4}{5}\cdot y$$

$\left(0, y, -\frac{4}{5}y\right) = y\left(0, 1, -\frac{4}{5}\right)$ son las soluciones de $(1 \cdot I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si elegimos por ejemplo $y = 5$, tenemos $(0, 5, -4)$ es una solución, lo que

nos dice que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

y decimos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Por último para $\lambda = 10$:

$$10 I - A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_3 + \frac{4}{5}F_2 \to F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces $12x = 0 \Rightarrow x = 0$

$5y - 5z = 0 \Rightarrow y = z$

Las soluciones de $(10I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

son $(0, y, y) = y\,(0,1,1)$, sirve

por ejemplo $(0,1,1)$, lo que nos

dice $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un **autovector** asociado

al autovalor $\lambda = 10$.

Juntando todo, construimos la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}$$

autovector asociado a $\lambda = -2$

autovector asociado a $\lambda = 1$

autovector asociado a $\lambda = 10$

Matriz diagonal con los autovalores en la diagonal en el mismo orden en que se pusieron sus autovectores asociados

De esta manera, tendremos que

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}.$$

Si calculamos C^{-1} (ejercicio) vemos que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & -1/9 \\ 0 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \quad y$$

tenemos: $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (Tienen coeficientes en $\mathbb{R}$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & -1/9 \\ 0 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

Por todo esto podemos decir que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
(y por lo tanto también en $\mathbb{C}$).

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco λ: $\quad (\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

tiene solución $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ no nula.

Para eso busco λ : $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+5 & -6 \\ 0 & 3 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2) \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda+5 & -6 \\ 3 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\left((\lambda+5)(\lambda-4) + 18 \right)$$

$$= (\lambda+2)\left(\lambda^2+5\lambda-4\lambda-20+18\right)$$

$$= (\lambda+2)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)$$

Busco los ceros:

$$(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda+2=0 \quad \text{ó} \quad \lambda^2+\lambda-2=0$$

$$\lambda=-2 \quad \text{ó} \quad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Entonces tenemos -2 dos veces

1 una vez

Autovalores $=\{-2, 1\}$.

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda+2)\overbrace{(\lambda^2+\lambda-2)}^{(\lambda-1)(\lambda+2)}=(\lambda+2)^2(\lambda-1)$$

Ahora, para encontrar las soluciones

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $(\lambda I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

reemplazamos por cada autovalor

Para $\lambda=-2$

$$-2I-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Resolvemos y tenemos

$$3y-6z=0 \iff y = 2.z$$

Entonces las soluciones son

$$(x,y,z) = (x, 2z, z) = (x,0,0)+(0,2z,z)$$
$$= x.(1,0,0) + z(0,2,1).$$

Vemos que en este caso podemos elegir dos autovectores $((1,0,0)$ y $(0,2,1))$ que son li $\Rightarrow$ ambos me van a servir para armar la matriz C.

Ahora para $\lambda = 1$,

$$1I-A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resolvemos y tenemos $\begin{array}{l} 3x = 0 \\ y = z \end{array}$

Las soluciones son

$$(0, y, y) = y(0,1,1)$$

Podemos armar así C y D

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ autovector asociado a $\lambda = 1$

Estos dos son autovectores asociados a $\lambda = -2$ que no son uno un múltiplo del otro

$C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tienen coefic. en $\mathbb{R}$.

y entonces tendremos que C es inversible

y $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$

con lo cual A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{C}$.

<u>Ejemplo 4</u>: Decidir si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ se diagonaliza en $\mathbb{R}$ ó en $\mathbb{C}$.

Buscamos autovalores

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ ó $\lambda = -2$

Autovalores $= \{1, -2\}$

Si $\lambda = 1$, $1 \cdot I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

y resuelvo: $3y = 0 \Rightarrow y = 0$

$-y + 3z = 0 \Rightarrow z = 0$

Soluciones son $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$

Elijo $(1, 0, 0)$ como autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Si $\lambda = -2$, $-2I - A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$-3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$-y = 0 \Rightarrow y = 0$

Soluciones son $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$

Elijo $(0, 0, 1)$ como autovector

asociado al autovalor $\lambda = -2$

¿Entonces cómo armo mi matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene que tener autovectores en sus columnas y ser inversible?

¡No se puede! ¡No me alcanzan los autovectores!

Esto me dice que A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (y tampoco en $\mathbb{C}$).

Ejemplo 5: Decidir si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$.

Calculamos $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

$\chi_A(\lambda)=0 \iff \lambda^2+1=0 \iff \lambda=\pm i$

$\lambda = i$,

$$iI - A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 - iF_1 \to F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son

$x+iy=0$

$x=-iy$

Las soluciones son:

$$(-iy, y) = y(-i, 1)$$

entonces puedo elegir $(-i,1)$ como autovector asociado al autovalor $\lambda = i$.

$\lambda = -i$, hacer la cuenta y ver que puedo elegir $(i,1)$ como autovector asociado al autovalor $\lambda = -i$.

Construimos C y D

$$C = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

y vemos que $$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

con lo cual podemos decir que

A <u>no</u> es diagonalizable en $\mathbb{R}$

pero <u>sí</u> es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

ya que $C, D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

pero $C, D \notin \mathbb{R}^{2\times 2}$.