

## Vectores:

Nm vector  $v \in \mathbb{R}^n$  es una sucesión de n números reales.

Ejemplos:  $v = (-1, 0, \pi) \in \mathbb{R}^3$

$$w = (3, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2.$$

Nm vector  $v \in \mathbb{C}^n$  es una sucesión de n números complejos.

Ejemplos:  $v = (1+i, 2, 3-i, 0) \in \mathbb{C}^3$

$$w = (1, 2+\sqrt{2}i) \in \mathbb{C}^2.$$

En general, cuando describamos resultados que valen tanto para  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{C}$  usaremos  $\mathbb{K}$  para representar cualquiera de los dos cuerpos  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

Matrices: Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  puede ser pensada como m filas de vectores

en  $\mathbb{R}^m$ . Se dice que A tiene m filas y n columnas de coeficientes en  $\mathbb{R}$ .

Ej:  $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow N_1 \in \mathbb{R}^3$

Tiene 2 filas y 3 columnas.

Una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tiene m filas de vectores en  $\mathbb{C}^n$ .

Ej:  $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 4 & -i \\ 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 2} \rightarrow N_1 \in \mathbb{C}^2$

Tiene 4 filas y 2 columnas.

## Sistemas lineales:

---

Ejemplo:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right.$$

Sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Matricialmente se escribe

$$\textcircled{II} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 2}}$        $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 1}}$

Una solución  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

(que a veces escribimos en forma horizontal como vector  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ) es una solución si satisface las dos ecuaciones del sistema  $\textcircled{I}$  o equivalente si satisface la ecuación matricial  $\textcircled{II}$ .

Por ejemplo  $(2/3, 1/3)$  es una solución ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \\ 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pero es la única? hay otras?  
c)

Para resolver un sistema lineal para empezar usamos eliminación Gaussiana.

Construimos la **matriz ampliada**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y "triangulamos"}$$

usando las operaciones de filas "permitidas" que no modifican el conjunto de soluciones. Estas son:

- sumarle o restarle a una fila un múltiplo de otra
- intercambiar dos filas
- multiplicar una filas por un

escalor distinto de cero.

Para méslo ejemplo:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 - F_1 \rightarrow F_2$$

$$\sim \frac{1}{3} F_2 \rightarrow F_2 \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Hasta aquí logramos "**escalonar**" la matriz en donde la cantidad de ceros iniciales de cada fila es mayor que la de la fila anterior.

Podemos seguir operando para intentar poner ceros ahora encima de cada primer elemento no nulos de cada fila.

① dire claramente ya hacemos

"sustitución para atrás"

De la 2da fila:

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1/3 \Rightarrow x_2 = 1/3$$

De la 1ra fila:

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 2 \cdot 1/3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2/3$$

luego, vemos que  $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  es la única solución del sistema ①.

¿ Que la solución sea un vector en  $\mathbb{R}^2$  es casualidad ?

¿ Nos podría haber sido

un vector en  $\mathbb{C}^2 - \mathbb{R}^2$ ? Rta: No  
Analizar por qué!

Un ejemplo en  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ ix - (1+i)x_2 = -1-i \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -(1+i) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{2 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{2 \times 1}}$$

Resolvemos con eliminación Gaussiana.

Hacemos operaciones de fila a la matriz ampliada

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ i & -1-i & -1-i \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & i-1 & -1-i \end{array} \right)$$

$F_2 - iF_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{c.a.} \\ -1-i+2i=i-1 \end{array} \right\}$

Hacemos sustitución hacia atrás.

De la 2da ec:  $(i-1)x_2 = -1-i$

Para despejar y, multiplicamos  
---> conjugado!

por  $\frac{i-1}{|i-1|^2}$  que es el inverso  
multiplicativo de  $(i-1)$   
módulo 1

$$\Rightarrow x_2 = (-1-i) \frac{(-i-1)}{2} = \frac{i+1+i^2+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$\Rightarrow x_2 = i$ , entonces de la 1<sup>ra</sup> ec.

$$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2i$$

luego, obtuvimos que el sistema  
tiene única solución  $(x_1, x_2) = (2i, i)$ .

En este caso la solución está en  $\mathbb{C}^2$ . ¿Podría haber quedado en  $\mathbb{R}^2$ ?

Un sistema lineal de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Con  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  con  $i=1\dots m$   
 $j=1\dots n$

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$

$\left. \begin{array}{l} \text{son} \\ \text{los} \\ \text{coefi-} \\ \text{cientes} \end{array} \right\}$

$x_1, \dots, x_m$  son las incógnitas.

Una solución  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$   
 (un vector de  $m$  elementos, cada uno un número en  $\mathbb{K}$ ) es  
 una solución del sistema I  
 si el mismo vector  $(x_1, \dots, x_m)$   
 satisface cada una de las  
 $m$  ecuaciones.

Matricialmente, el sistema  $\textcircled{I}$  se escribe así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

es una matriz de  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$   
(esta en  $\mathbb{K}^{m \times n}$ )

un vector vertical integrante en  $\mathbb{K}^{n \times 1}$

un vector vertical de coeficientes dudos en  $\mathbb{K}^{m \times 1}$

Se escribe resumiendo:

$$A x = b$$

### Algunas definiciones

- 1) El sistema  $\textcircled{I}$  se dice homogéneo si  $(b_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0)$
- 2) Dado un sistema como  $\textcircled{I}$

se llama sistema homogéneo

asociado a  $\textcircled{I}$  al sistema

que tiene mismos coeficientes

$a_{ij}$  pero se reemplazan los  $b_i$ 's  
con ceros. Ejemplo:

El sistema  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right.$

Tiene como sistema homogéneo  
asociado a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Acé ya había} \\ \qquad \qquad \qquad \text{en cero, lo dejo} \\ x_1 + x_2 = 0 \qquad \qquad \qquad \rightarrow \text{Acé no} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{había cero,} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{pongo en cero} \end{array} \right.$$

- 3) Una matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  se  
dice escalonada si cada  
fila  $i, F_i$ , con  $i \geq 2$  tiene  
más ceros iniciales que

la fila  $i-1$ , salvo que ambas filas sean de todos ceros.

Ej:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$  matriz  
escalonada

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$  matriz no  
escalonada  
( $F_2$  y  $F_3$  tienen  
misma cantidad  
de ceros iniciales)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  matriz  
escalonada.

4) Dado un sistema lineal

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}, A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$$

puede pasar:

i) El sistema no tiene solución

(se dice incompatible: S. I.)

ii) El sistema tiene única

solución (se dice compatible)

determinado: S. C. D.)

iii) El sistema tiene infinitas

soluciones / se dice compatible

indeterminado: S. C. I.)

Nota: Un sistema homogéneo siempre

tiene  $\bar{x} = \bar{0}$  como solución.

¿ Cómo podemos saber a partir  
de la eliminación Gaussiana  
cómo se clasifica el sistema  
y quiénes son sus soluciones,  
si las tiene ?

Recordemos qué operaciones elementales no modifican el conjunto solución:

Si  $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$

- 1) Intercambiar dos filas  $F_i \leftrightarrow F_j$
- 2) Multiplicar una fila por un múltiplo  $k \neq 0$   $kF_i \rightarrow F_i$   
 $k \in K - \{0\}$
- 3) Reemplazar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo de otra  $F_i + kF_j \rightarrow F_i, k \in K$

Note: Hacer una operación de filas como 1), 2) ó 3) corresponde con multiplicar a la matriz A a izquierda por una matriz E que consiste en hacerle la misma operación 1), 2) ó 3)

a la matriz Identidad. A estas matrices E se las llama **matrices elementales**.

$$\underline{\text{Ej: }} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$\text{Entonces } E \cdot A = \tilde{A}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto me dice que no invierto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{"(chequear)}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{con lo cual } A = E^{-1} \cdot \tilde{A}.$$

Más en general, dada una matriz  $A \in K^{m \times n}$ , hacer la eliminación Gaussiana con operaciones de fila permitidas se puede pensar como una multiplicación a izquierda por tantas matrices elementales como operaciones de fila se hicieron hasta obtener una matriz escalonada. Es decir tendremos:

$$E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \tilde{A}$$

donde cada  $E_1, E_2, \dots, E_p$  es una matriz elemental,  $A$  es la matriz original y  $\tilde{A}$  es la escalonada.

Como cada matriz elemental

resultado inversible (pensar por qué) podemos escribir (OJO con el orden de las inversas!):

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1} \tilde{A}$$

Este tipo de reescrituras de una matriz como producto de otras matrices se lo llama "descomposición" de la matriz A.

En este descomposición, tendremos en  $\tilde{A}$  la información para clasificar el sistema y cuando hubiera solución, construirla.

Retomamos la pregunta anterior:

¿Cómo podemos saber a partir de la eliminación Gaussiana cómo se clasifica el sistema y quiénes son sus soluciones, si las tiene?

Empecemos con ejemplos

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en  $\mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{3 ecuaciones} \\ \text{y 2 incógnitas} \end{array}$$

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 4F_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Llegamos a matriz escalonada en donde queda 1 fila no nula en las primeras 2 columnas y el resto de las filas cero en las 3 columnas.

Esto nos dice que tenemos infinitas soluciones, es decir es un sistema compatible indeterminado.

Para calcular las soluciones, de la ecuación que quedó:

$$5x_1 + 3x_2 = 11$$

Despejamos alguna de las variables:

$$x_2 = \frac{11 - 5x_1}{3} = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1$$

Entonces las soluciones son:

$$(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1 \right)$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left( x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1 \right) : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en  $\mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 45 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 \text{ ecuaciones} \\ \text{y 2 incógnitas} \end{array}$$

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 45 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 4F_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Ahora está escalonada.}$$

Si miramos la  $F_2$ , tenemos

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \quad \text{lo cual}$$

no tiene solución. Luego

$$S = \emptyset$$

3) Clasificar el siguiente sistema y resolver en  $\mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 10x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 \text{ ecuaciones} \\ \text{y 2 incógnitas} \end{array}$$

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 10 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_2 - 3f_1 \rightarrow F_2 \\ f_3 - 4f_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

matriz escalonada

$$\text{De la 2da ec. } x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{De la 1ra ec. } \quad & 5x_1 + \underbrace{3x_2}_{0} = 11 \\ & \Rightarrow 5x_1 + 3 \cdot 0 = 11 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left( \frac{11}{5}, 0 \right) \right\}$$

En resumen:

Dados un sistema lineal de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, si lo escribimos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

con  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$  con  $i=1, \dots, m$   
 $j=1, \dots, n$

Triangulamos la matriz ampliada

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right|$$

y obtenemos la matriz escalonada  $\tilde{A}$

1) Si el matriz escalonada  $\tilde{A}$  tiene menos de  $n$  (número de incógnitas) filas no nulas en las primeras  $n$  columnas y resto de las filas de  $(\tilde{A} | \tilde{b})$  son nulas en las  $n+1$  columnas  $\Rightarrow$  el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). (Ej 1)

2) Si la matriz es escalonada  $\tilde{A}$  tiene alguna fila que tiene sus primeras  $n$  columnas nulas pero en la columna  $n+1$  de  $(\tilde{A} | \tilde{b})$  un escalar no nulo, es decir, en  $(\tilde{A} | \tilde{b})$  se tiene una fila  $0 \dots 0 | b \neq 0$  (Ej 2)

entonces el sistema es incompatible (no tiene solución)

3) Si la matriz escalonada  $\tilde{A}$  tiene exactamente  $m$  (número de incógnitas) filas no nulas, entonces el sistema es compatible determinado (única solución). (ej 3).

Tanto en 1 como en 3, las soluciones o la solución se construyen a partir de la matriz escalonada  $\tilde{A}$  con la sustitución hacia atrás. Notar que en el caso 3) si al hacer la eliminación de Gauss obtuvimos  $n$  filas no nulas, es porque comenzamos con al menos esa cantidad de filas (ecuaciones), es decir  $m \geq n$ .